

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Vuko Vukčević, Mihael Lobrović

Teorijsko – numerički pristup problemu laminarnog graničnog  
sloja oko ravne ploče

Zagreb, 2011.

*Ovaj rad izrađen je na Katedri za hidromehaniku plovnih objekata pod vodstvom profesorice dr. sc. Andreje Werner i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2011.*

*Popis oznaka:*

*x - Kartezijeva koordinata u uzdužnom smjeru ploče*

*y - Kartezijeva koordinata u okomitom smjeru na ploču*

*v<sub>x</sub> - komponenta vektora brzine u smjeru x - osi*

*v<sub>y</sub> - komponenta vektora brzine u smjeru y - osi*

*ρ - gustoća fluida*

*p - polje tlaka*

*ν - kinematička viskoznost fluida*

*μ - dinamička viskoznost fluida*

$\frac{d^*}{dx}$  - operator derivacije \* po x - u

$\frac{\partial^*}{\partial x}$  - operator parcijalne derivacije \* po x - u

$\frac{\partial^{2*}}{\partial x^2}$  - operator druge parcijalne derivacije \* po x - u

$\frac{\partial^*}{\partial y}$  - operator parcijalne derivacije \* po y - u

$\frac{\partial^{2*}}{\partial y^2}$  - operator druge parcijalne derivacije \* po y - u

$\frac{\partial^{3*}}{\partial y^3}$  - operator treće parcijalne derivacije \* po y - u

$\frac{\partial^{2*}}{\partial x \partial y}$  - operator parcijalne derivacije \* po  $x$  - u i po  $y$  - u

$L$  - duljina ploče

$B$  - širina ploče

$\delta$  - debljina graničnog sloja

$v_\delta$  - brzina vanjskog potencijalnog strujanja

$v_\infty$  - konstanta brzina paralelnog vanjskog potencijalnog strujanja

$Re$  - Reynoldsov broj

$\psi$  - funkcija toka

$\eta$  - Blasiusova bezdimenzijska varijabla

$\varphi$  - primitivna funkcija od Blasiusovog bezdimenzijskog profila brzine

$\varphi'$  - Blasiusov bezdimenzijski profil brzine

$\varphi''$  - prva derivacija Blasiusovog bezdimenzijskog profila brzine

$\varphi'''$  - druga derivacija Blasiusovog bezdimenzijskog profila brzine

$u$  - supstitucijska funkcija za  $\varphi'$

$v$  - supstitucijska funkcija za  $\varphi''$

$i$  - brojač koraka klasične Runge - Kutta metode

$A_k^i$  - koeficijenti funkcije prirasta klasične Runge - Kutta metode u  $i$ -tom koraku ( $k = 1, 2, 3, 4$ )

$B_k^i$  - koeficijenti funkcije prirasta klasične Runge - Kutta metode u  $i$ -tom koraku ( $k = 1, 2, 3, 4$ )

$C_k^i$  - koeficijenti funkcije prirasta klasične Runge - Kutta metode u  $i$ -tom koraku ( $k = 1, 2, 3, 4$ )

$j$  - brojač konvergencije metodom gađanja

$\alpha_j$  - niz vrijednosti za početni uvjet  $v(0)$

$\beta_j$  - niz vrijednosti za granični uvjet  $u(\infty)$

$h$  - korak Runge - Kutta metode

$e$  - točnost numeričkog postupka za rubni uvjet

$\Delta$  - apsolutna vrijednost razlike između rješenja R - K metodom i Howarthove integracije

$\tau_w$  - tangencijalno naprezanje po površini ploče

$D$  - sila otpora ploče

## ***Sadržaj rada***

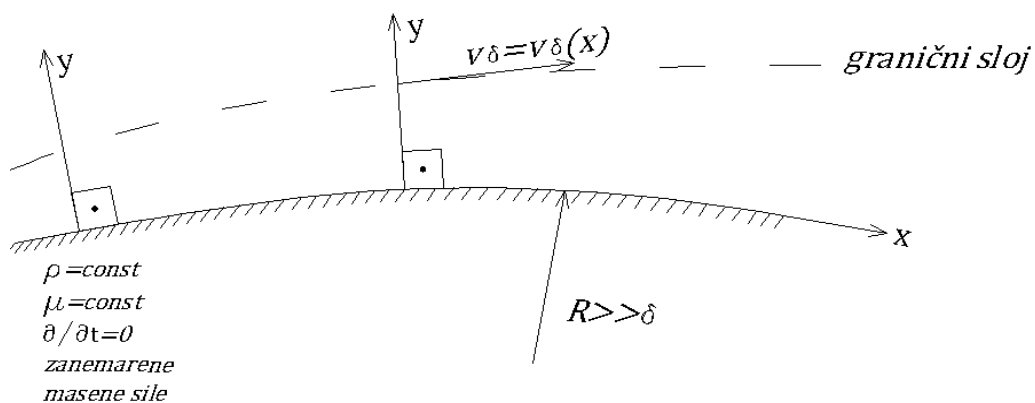
<i>Uvod.....</i>	<i>1</i>
<i>Prandtlove jednadžbe za granični sloj.....</i>	<i>2</i>
<i>Numerička analiza.....</i>	<i>14</i>
<i>Analiza rezultata i greške.....</i>	<i>21</i>
<i>Zaključak.....</i>	<i>27</i>
<i>Prilog 1.....</i>	<i>28</i>
<i>Zahvala.....</i>	<i>33</i>
<i>Popis literature.....</i>	<i>34</i>
<i>Sažetak rada.....</i>	<i>36</i>
<i>Summary.....</i>	<i>37</i>

## ***1. Uvod***

U ovom radu se razmatra ravninsko, stacionarno laminarno strujanje nestlačivog, viskoznog fluida u području u blizini ravne ploče, koje je poznato pod nazivom granični sloj. Granični sloj je područje vrtložnog strujanja viskoznog fluida u kojem su inercijalne i viskozne sile koje djeluju na fluid istog reda veličine, i definiran je kao relativno tanko područje u neposrednoj blizini krutih granica unutar kojeg se tangencijalna komponenta brzine naglo mijenja u smjeru normalno na stijenku, od nule na samoj krutoj i nepomičnoj stijenci do brzine slobodne struje na vanjskom rubu graničnog sloja [1]. Najprije će se razmatrati Prandtlovo pojednostavljenje Navier - Stokesovih jednažbi koje opisuju spomenuto strujanje, da bi se na kraju uvođenjem Blasiusove bezdimenzijske funkcije, problem najviše moguće teorijski pojednostavnio, čime se dobije obična nelinearna diferencijalna jednažba poznatija pod nazivom Blasiusova diferencijalna jednažba. Kako matematička analiza još uvijek nije dala analitički egzaktno rješenje spomenute jednažbe, problem će se riješiti numerički klasičnom Runge - Kutta metodom četvrtog reda [2], uz što će se analizirati i veličina greške, te će se dobiveni rezultati prikazati tablično i grafički. Na kraju razmatranja dobiveni rezultati će se usporediti s Howarthovom integracijom [3], te će se dati izraz za određivanje sile otpora ravne ploče u laminarnom režimu strujanja što je izrazito bitno za samu inženjersku primjenu.

## 2. Prandtlove jednadžbe za granični sloj

Ograničit ćemo se na ravninsko stacionarno strujanje duž blago zakrivljene krute stijenke, odnosno stijenke čiji je radijus zakrivljenosti znatno veći od debljine graničnog sloja,  $R \gg \delta$ , slika 1. Dinamika strujanja u području laminarnog graničnog sloja oko takve stijenke se opisuje Navier - Stokesovim jednadžbama [4] za nestlačivo, viskozno, adijabatsko i stacionarno strujanje, a one se izvode iz zakona očuvanja količine gibanja za materijalni volumen fluida za što je potrebno znanje teorema iz više matematičke analize, kao što su: Leibnitzov transportni teorem [5], Stokesov teorem [6] i Gaussov teorem [7] (poznat i kao Green - Gauss teorem, odnosno Gauss - Ostrogradski teorem). Te jednadžbe su nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe eliptičkog tipa čija nelinearnost proizlazi iz konvektivnih članova, te su egzaktna rješenja spomenutih jednadžbi poznata za samo mali broj fizikalnih problema strujanja Newtonovskog fluida [8]. Strujanje se promatra u  $Oxy$  koordinatnom sustavu gdje se os  $Ox$  poklapa sa konturom stijenke, a os  $Oy$  je u svakoj točki okomita na os  $Ox$ , slika 1. Za daljnja razmatranja potrebno je navesti definiciju debljine graničnog sloja  $\delta$  koja je definirana kao udaljenost od stijenke u smjeru poprečne osi  $y$  preko koje se brzina mijenja od 0 do 99% (ili 99.5%) iznosa vanjskog potencijalnog strujanja  $v_\delta = v_\delta(x)$ , to jest, pri  $y = \delta$ , vrijedi  $v_x = 0.99v_\delta$  (odnosno  $v_x = 0.995v_\delta$ ).



Slika 1. Laminarni granični sloj duž blago zakrivljene krute stijenke



Polazne jednađbe su jednađba kontinuiteta (1) (jednađba očuvanja mase) te Navier - Stokesove jednađbe (2) i (3) (jednađbe količine gibanja), koje glase:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$x$  - komponenta Navier - Stokesovih jednađbi:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$y$  - komponenta Navier - Stokesovih jednađbi:

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Budući da je  $\delta$  jako mala veličina u odnosu na duljinu ploče  $L$ , odnosno vrijedi da je  $\frac{\delta}{L} \ll 1$ , pa se jednađbe (2) i (3) mogu znatno pojednostavniti. Slijedi procjena reda veličine pojedinih fizikalnih veličina:

$$x \sim L \quad (4)$$

$$y \sim \delta \quad (5)$$

$$v_x \sim v_\delta \quad (6)$$

$$p \sim \rho v_\delta^2 \quad (7)$$

Pomoću odnosa (4) – (7) moguće je procijeniti red veličine pojedinih članova u jednađbama (1), (2) i (3), iz čega slijedi za članove jednađbe (2):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{v_\delta^2}{L} \quad (8)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{v_\delta^2}{L} \quad (9)$$

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim v \frac{v_\delta}{L^2} \quad (10)$$

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim v \frac{v_\delta}{\delta^2} \quad (11)$$

Ako se usporedi red veličine člana (10) s redom veličine člana (11), zbog  $L^2 \gg \delta^2$  slijedi da je:

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \ll v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (12)$$

tako da se član  $v \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$  može zanemariti.

Iz jednačbe kontinuiteta (1) slijedi:

$$\left| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial v_y}{\partial y} \right| \sim \frac{v_\delta}{L} \quad (13)$$

te nadalje imamo:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{v_y}{\delta} \quad (14)$$

Uspoređivanjem izraza (13) i (14) dobije se:

$$\frac{v_\delta}{L} \sim \frac{v_y}{\delta} \rightarrow v_y \sim v_\delta \frac{\delta}{L} \quad (15)$$

čime smo procijenili red veličine brzine  $v_y$ .

Uz sada poznati red veličine komponente brzine  $v_y$ , možemo procijeniti red veličine posljednjeg preostalog člana iz jednadžbe (2):

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim v_\delta \frac{\delta}{L} \frac{v_\delta}{\delta} \sim \frac{v_\delta^2}{L} \quad (16)$$

Budući da je granični sloj područje podjednakog utjecaja viskoznih i inercijskih sila, u  $x$  komponenti Navier - Stokesovih jednadžbi zadržava se viskozni član s desne strane nejednakosti (12). Taj član mora imati isti red veličine kao i ostali zadržani članovi, odnosno vrijedi:

$$\nu \frac{v_\delta}{\delta^2} \sim \frac{v_\delta^2}{L} \quad (17)$$

Nadalje, izraz (17) možemo raspisati u sljedećem obliku:

$$\nu \frac{v_\delta}{\delta^2} \sim \frac{v_\delta^2}{L} \frac{L v_\delta}{\nu} \frac{\nu}{L v_\delta} \sim \nu \frac{v_\delta}{L^2} Re \quad (18)$$

gdje je  $Re$  Reynoldsov broj [9],  $Re = \frac{L v_\delta}{\nu}$ . Uspoređivanjem lijeve strane s krajnjom desnom stranom izraza (18) dobije se:

$$\nu \frac{v_\delta}{\delta^2} \sim \nu \frac{v_\delta}{L^2} Re \rightarrow \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (19)$$

Dakle, uvjet  $\frac{\delta}{L} \ll 1$ , bit će ispunjen samo kada je  $Re \gg 1$ , što uz zadane  $v_\delta$  i  $L$ , kada su reda veličine približno 1, znači da viskoznost fluida  $\nu$  treba biti relativno mala vrijednost.

Upotrebom jednostavnih matematičkih operacija i izraza (15) i (19) može se procijeniti red veličina pojedinih članova u jednadžbi (3):

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \sim v_\delta v_\delta \frac{\delta}{L} \frac{1}{L} \sim \frac{v_\delta^2}{L} \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (20)$$

$$v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \sim v_\delta \frac{\delta}{L} v_\delta \frac{\delta}{L} \frac{1}{\delta} \sim \frac{v_\delta^2}{L} \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (21)$$

$$v \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \sim \frac{L v_\delta}{Re} \frac{\delta v_\delta}{L} \frac{1}{L^2} \sim \frac{v_\delta^2}{L} \frac{1}{\sqrt{Re}^3} \quad (22)$$

$$v \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{L v_\delta}{Re} \frac{\delta v_\delta}{L} \frac{1}{\delta^2} \frac{L}{L} \sim \frac{v_\delta^2}{L} \frac{\sqrt{Re}}{Re} \sim \frac{v_\delta^2}{L} \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (23)$$

Iz jednadžbi (20) – (23) vidljivo je da su članovi, budući da sadrže  $Re$  u nazivniku, zanemarivi kada je  $Re \gg 1$ , odnosno da svi ti članovi teže k nuli. Dakle, preostali član u (3), koji predstavlja gradijent tlaka u smjeru okomitom na ploču, je također zanemariv, odnosno:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad (24)$$

što je osnovno svojstvo graničnog sloja, to jest tlak se po presjeku graničnog sloja može smatrati konstantnim i jednakim tlaku u vanjskom strujanju.

Na samom gornjem rubu graničnog sloja, pri stacionarnom ravninskom strujanju, primjenom jednadžbe (2), uz zanemarenje viskoznosti jer se nalazimo u području potencijalnog strujanja, te imajući na umu da se brzina i tlak na vanjskom rubu graničnog sloja mijenjaju po zakonu  $v_\delta = v_\delta(x)$ ,  $p = p(x)$  proizlazi:

$$v_\delta \frac{dv_\delta}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (25)$$

Korištenjem prethodno izvedenih izraza, dolazi se do *Prandtlovih jednadžbi* za laminarni granični sloj, koje vrijede *samo unutar* graničnog sloja:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_\delta \frac{dv_\delta}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (28)$$

uz rubne uvjete:

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{za } y = 0$$

$$v_x \rightarrow v_\infty \quad \text{za } y \rightarrow \infty (\delta)$$

$$v_x = v_{x0}(y) \quad \text{za } x = x_0 \text{ (ulazni brid)}$$

Primjenom funkcije toka  $\psi(x, y)$  [10], koja je za ravninsko strujanje definirana pomoću sljedećih izraza:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (29)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (30)$$

jednadžba kontinuiteta (28) prelazi u oblik:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (31)$$

iz čega je vidljivo da funkcija toka  $\psi(x, y)$  zadovoljava spomenutu jednadžbu. Jednadžba (27) ostaje ista, a jednadžba (26) prelazi u oblik:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = v_\delta \frac{dv_\delta}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (32)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (33)$$

s rubnim uvjetima:

$$\psi = 0 \quad \text{za } y = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{za } y = 0, x > 0$$

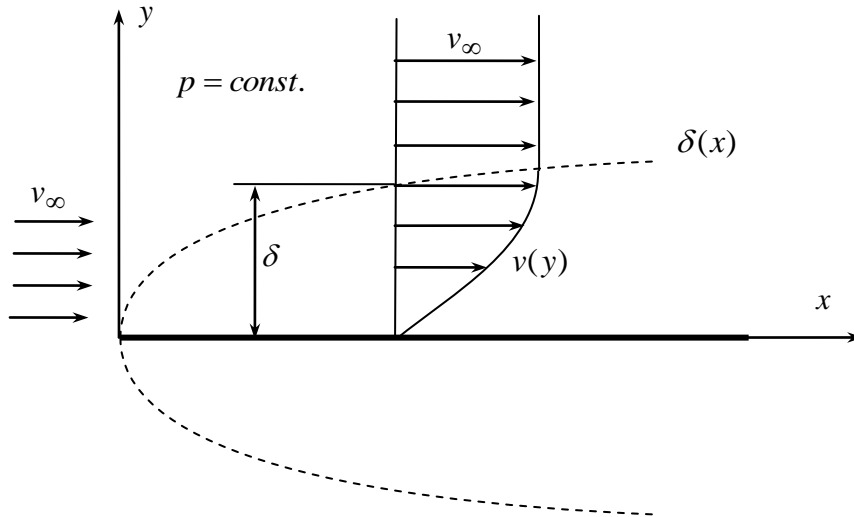
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow v_\delta \quad \text{za } y \rightarrow \infty (\delta), x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_{x0}(y) \quad \text{za } x = x_0 \text{ (ulazni brid)}$$

Prandtlove jednadžbe su nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe čije analitičko rješenje nije poznato. Za razliku od Navier - Stokesovih jednadžbi, koje su eliptičkog tipa, ove jednadžbe su parabolikog tipa. Jednadžbe eliptičkog tipa karakterizira to da promjena stanja u nekoj točki strujanja izaziva promjenu strujanja u čitavom području u kojemu je strujanje definirano, dok jednadžbe parabolikog tipa karakterizira da na stanje u promatranoj točki strujanja utječe samo stanje uzvodno od te točke, što znači da nije potrebno zadavati rubni uvjet na kraju ploče, odnosno na koordinati  $x = L$ .

Promatra se beskonačno tanka i beskonačno duga ravna ploča uronjena pod nulnim napadnim kutem u jednoliko paralelno strujanje neograničenog, viskozno, nestlačivog fluida konstantnom brzinom  $v_\infty$ . Ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava  $Oxy$  postavljeno je na

ulazni brid ploče, koordinatna os  $Ox$  u uzdužnom smjeru ploče, te koordinatna os  $Oy$  u smjeru normale na ploču, to jest u smjeru okomitom na ploču.



Slika 2. Laminarni granični sloj uz ravnu ploču

U tom slučaju, kako je  $v_\infty$  konstantna brzina, jednadžba (32) postaje:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (34)$$

a rubni uvjeti glase:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{za } y = 0, x > 0$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{za } y = 0, x > 0$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_\infty \quad \text{za } y \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R}$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_\infty \quad \text{za } x = 0, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Kako je na ulaznom bridu  $x = y = 0$  to zahtijeva beskonačni gradijent brzine u toj točki, što predstavlja singularitet u matematičkom smislu. S druge strane, pri optjecanju ploče se na prednoj strani pojavljuje točka zastoja. U okolini točke zastoja je brzina mala, pa Reynoldsov broj poprima niske vrijednosti, tako da Prandtlove jednačbe ne vrijede za to područje radi pretpostavke koje smo uveli u (19). Dakle, samo rješenje problema vrijedi za vrijednosti  $x$  veće od neke male udaljenosti nizvodno od ulaznog brida.

Ako Reynoldsov broj uvrstimo u (19), te primjenom izraza (4) dobiva se:

$$\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{x v_{\infty}}{v}}} \rightarrow \frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{v}{x v_{\infty}}} \rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{v x}{v_{\infty}}} \quad (35)$$

Kako je red veličine od  $y$  jednak redu veličine od  $\delta$ , to smo izrazom (34) dobili i procjenu reda veličine za  $y$ . Taj izraz je dao ideju Blasiusu da se problem pokuša formulirati pomoću nove bezdimenzijske varijable  $\eta$  [11], koja je definirana kao:

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{\sqrt{\frac{v x}{v_{\infty}}}} = y \sqrt{\frac{v_{\infty}}{v x}} \quad (36)$$

Traženi profil brzine  $\varphi'(\eta)$  možemo napisati u obliku:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_{\infty} \varphi' \quad (37)$$

gdje je  $\varphi'$  bezdimenzijski profil brzine, odnosno, derivacija funkcije  $\varphi$  po  $\eta$ , odnosno

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{v_x}{v_{\infty}}. \text{ S druge strane, koristeći pravila iz osnovne matematičke analize, izraz (37)}$$

možemo napisati kao:



$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} \quad (38)$$

Nadalje, uspoređivanjem izraza (37) te (38) možemo pisati:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = v_\infty \varphi' \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \sqrt{\nu x v_\infty} \varphi' \quad (39)$$

te se integracijom izraza (39) po  $\eta$  dolazi do:

$$\psi = \sqrt{\nu x v_\infty} \varphi \quad (40)$$

Koristeći izraz (40) pojedini članovi u Prandtlovoj jednažbi (32) mogu se napisati u ovisnosti o funkciji  $\varphi$  te njenim derivacijama, pa slijedi:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_\infty \varphi' \quad (41)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{\nu x v_\infty} \varphi) = -\sqrt{\nu v_\infty} \varphi \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{\nu x v_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v_\infty}{x}} \varphi + \varphi' \sqrt{\nu x v_\infty} \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu}} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v_\infty}{x}} \varphi + \frac{1}{2} \varphi' \sqrt{\frac{\nu v_\infty}{x}} \eta$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v_\infty}{x}} (\varphi - \eta \varphi')$$

$$v_y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v_\infty}{x}} (\eta \varphi' - \varphi) \quad (42)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \dots = -\frac{1}{2} \frac{v_\infty}{x} \eta \varphi'' \quad (43)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \dots = v_\infty \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} \varphi'' \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \dots = \frac{v_\infty^2}{\nu x} \varphi''' \quad (45)$$

Uvrštavajući jednadžbe (41) – (45) u jednadžbu (34) Prandtlova parcijalna nelinearna diferencijalna jednadžba postaje obična nelinearna diferencijalna jednadžba trećeg reda kako slijedi:

$$-\frac{1}{2} v_\infty \varphi' \frac{v_\infty}{x} \eta \varphi'' + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v_\infty}{x}} (\eta \varphi' - \varphi) v_\infty \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} \varphi'' = v \frac{v_\infty^2}{\nu x} \varphi'''$$

iz čega, sređivanjem jednadžbe (kraćenjem te dijeljenjem sa  $v_\infty^2$  i sa  $x$ ) dalje slijedi:

$$-\frac{1}{2} \varphi' \eta \varphi'' + \frac{1}{2} \varphi' \eta \varphi'' - \frac{1}{2} \varphi \varphi'' = \varphi'''$$

te konačno, množenjem s 2, dobije se Blasiusova diferencijalna jednadžba:

$$2\varphi''' + \varphi \varphi'' = 0 \quad (46)$$

s rubnim uvjetima:

$$\varphi = 0 \quad \text{za } \eta = 0$$

$$\varphi' = 0 \quad \text{za } \eta = 0$$

$$\varphi' = 1 \quad \text{za } \eta \rightarrow \infty$$

Time se zadatak sveo na određivanje funkcije  $\varphi(\eta)$  u intervalu  $0 < \eta < \infty$ , koja zadovoljava običnu nelinearnu diferencijalnu jednačbu (46) s pripadajućim rubnim uvjetima, što je, počevši od Navier - Stokesovih jednačbi (2) i (3), te jednačbe kontinuiteta (1) znatno pojednostavljenje u matematičkom smislu.

### 3. Numerička analiza

Kao što je već spomenuto, Blasiusova diferencijalna jednačba (46) sa pripadajućim rubnim uvjetima je obična nelinearna diferencijalna jednačba trećeg reda, koja nema egzaktno analitičko rješenje. Ta jednačba predstavlja problem granične vrijednosti u matematičkom smislu, gdje rubni uvjeti nisu zadani u jednoj točki domene funkcije, nego u dvije (kao što je u ovom slučaju, na početku, te na kraju intervala), ili više njih, odnosno jednačba ne predstavlja Cauchyev problem [12] početne vrijednosti gdje su svi rubni uvjeti diferencijalne jednačbe zadani na početku intervala. Kroz povijest, gore spomenuta jednačba se rješavala na razne načine. Sam Blasius je rješavao razvojem funkcije  $\varphi(\eta)$  u Taylorov red za male  $\eta$ , te asimptotskim razvojem za velike  $\eta$  zbog asimptotskog rubnog uvjeta  $\varphi'(\infty) = 1$ . Ta dva razvoja, koja na kraju rezultiraju s tri nepoznate konstante integracije, usklađuju se tako da za područje u kojemu vrijede oba razvoja, funkcije  $\varphi, \varphi', \varphi''$  moraju biti jednake, što na kraju daje tri jednačbe s tri nepoznanice. Töpfer je, s druge strane, rješavao jednačbu tako da ju je transformirao u problem početne vrijednosti, odnosno Cauchyev problem, koji ima prednost zato što su svi rubni uvjeti zadani u jednoj točki, te je nakon takve transformacije jednačbu rješavao numeričkim metodama.

U ovom radu, za rješavanje jednačbe koristi se klasična Runge – Kutta metoda 4. reda (u daljnjem tekstu R - K metoda), čiji je izvod detaljno opisan u [2], a zasniva se na aproksimaciji nepoznate funkcije s njenom derivacijom koja ju u obliku poligona aproksimira u točkama udaljenim za korak  $h$  (koji može biti konstantan ili varijabilan). Važno je spomenuti da se ovom metodom rješavaju obične diferencijalne jednačbe prvog reda, te je potrebno bilo kakvu diferencijalnu jednačbu koja se promatra izraziti tako da na jednoj strani bude sama derivacija tražene funkcije. Funkcija koja je sama na jednoj strani jednačbe, razvija se u Taylorov red, te je potrebno pretpostaviti da je ona dovoljno diferencijabilna.

Prije svega, zbog jednostavnosti, diferencijalnu jednačbu (46) pomoću jednostavnih supstitucija  $\varphi = y$ , te  $\eta = x$  zapisujemo u standardnom matematičkom obliku:

$$2y''' + yy'' = 0 \quad (47)$$

s rubnim uvjetima:

$$y = 0 \quad \text{za } x = 0$$

$$y' = 0 \quad \text{za } x = 0$$

$$y' = 1 \quad \text{za } x \rightarrow \infty$$

Kao što je spomenuto, R - K metoda može rješavati samo obične diferencijalne jednačbe prvog reda, te je potrebno jednačbu (47) jednostavnim supstitucijama zapisati kao sustav diferencijalnih jednačbi prvog reda [13] kako slijedi:

$$\text{Uz } y' = u \text{ slijedi } 2u'' + yu' = 0$$

$$\text{Nadalje, uz: } u' = v \text{ slijedi } 2v' + yv = 0$$

Konačno, problem se svodi na sustav od tri obične diferencijalne jednačbe prvog reda koje glase:

$$y' = u \quad (48)$$

$$u' = v \quad (49)$$

$$v' = -0.5y v \quad (50)$$

s rubnim uvjetima:

$$y(0) = 0$$

$$u(0) = 0$$

$$u(\infty) = 1$$

Za svaku diferencijalnu jednadžbu definiraju se koeficijenti funkcije prirasta [13]

R - K metode, pa za (48) imamo:

$$A_1^i = h u_i \quad (48a)$$

$$A_2^i = h (u_i + 0.5A_1^i) \quad (48b)$$

$$A_3^i = h (u_i + 0.5A_2^i) \quad (48c)$$

$$A_4^i = h (u_i + A_3^i) \quad (48d)$$

Gdje indeks  $i$  označuje broj iteracije, a  $h$  korak. Za (49) one su slične i glase:

$$B_1^i = h v_i \quad (49a)$$

$$B_2^i = h (v_i + 0.5B_1^i) \quad (49b)$$

$$B_3^i = h (v_i + 0.5B_2^i) \quad (49c)$$

$$B_4^i = h (v_i + B_3^i) \quad (49d)$$

Dok su za (50):

$$C_1^i = h (-0.5y_i v_i) \quad (50a)$$

$$C_2^i = h [-0.5y_i (v_i + 0.5C_1^i)] \quad (50b)$$

$$C_3^i = h [-0.5y_i (v_i + 0.5C_2^i)] \quad (50c)$$

$$C_4^i = h [-0.5y_i (v_i + C_3^i)] \quad (50d)$$

Vrijednosti funkcija  $y, u, v$ , i funkcija  $\varphi, \varphi', \varphi''$  se računaju prema sljedećim izrazima:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(A_1^i + 2A_2^i + 2A_3^i + A_4^i) \quad (51)$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(B_1^i + 2B_2^i + 2B_3^i + B_4^i) \quad (52)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(C_1^i + 2C_2^i + 2C_3^i + C_4^i) \quad (53)$$

gdje su funkcije  $\frac{1}{6}(*_1^i + 2*_2^i + 2*_3^i + *_4^i)$ ;  $*$  =  $A, B, C$ , pripadajuće funkcije prirasta [2].

Kao što je vidljivo iz jednadžbi (51), (52) i (53), vrijednosti funkcija se računaju u čvorovima koji su određeni korakom  $h$ . Nadalje je vidljivo, da bi uopće započeli s proračunom, potrebno je poznavati rubne uvjete na početku intervala, odnosno vrijednosti funkcija  $y_0, u_0, v_0$  (to jest vrijednosti tih funkcija u točki 0), što nam je poznato za funkcije  $y$  i  $u$ , međutim vrijednost  $v_0$  nam je nepoznata te ju je potrebno odrediti. Za njeno određivanje poslužiti ćemo se metodom gađanja [14], čija je ideja naći odgovarajuću vrijednost  $v_0$  koja nakon provedbe algoritma, zadovoljava rubni uvjet  $u(\infty) = 1$ . Međutim, da bi se izbjeglo nasumično pogađanje brojeva  $v_0$  (pri čemu je jako mala vjerojatnost da se nađe odgovarajući  $v_0$  koji bi zadovoljio  $u(\infty) = 1$  s nekom prihvatljivom točnošću), zadaju se prve dvije različite vrijednosti  $v_0$  te se provedbom algoritma u posebnom nizu koji ćemo nazvati  $\beta_j$  zabilježavaju vrijednosti funkcije  $u(\infty)$ . Pomoću zabilježenih vrijednosti se, za zadnje dvije iteracije, linearnom interpolacijom ili ekstrapolacijom određuje nova vrijednost  $v_0$  koja bi tada, po jednadžbi pravca trebala zadovoljavati uvjet  $u(\infty) = 1$ . To se jednostavno može geometrijski interpretirati kao da se povuče pravac kroz dvije poznate točke, te se traži točka koja ima koordinatu  $(1, v_0)$ , iz čega odredimo sljedeći  $v_0$  koji ponovno ulazi u svoj zasebni niz koji ćemo nazvati  $\alpha_j$ . Matematička formula za linearnu interpolaciju jednostavno se izvodi i u ovom slučaju glasi:

$$\alpha_j = \alpha_{j-2} + (\alpha_{j-1} - \alpha_{j-2}) \frac{1 - \beta_{j-2}}{\beta_{j-1} - \beta_{j-2}} \quad (54)$$

Pomoću tako izračunatih zadnjih  $\alpha$  i  $\beta$ , određivat će se novi početni uvjeti  $v_0$  sve dok se ne zadovolji određena (zadana) točnost (odnosno dok se ne zadovolji uvjet  $|\beta_j - 1| \leq e$ ). Potrebno je naglasiti da se konvergencija ovakve metode nije još uvijek teorijski dokazala, iako u praksi daje dobre rezultate za većinu problema, a uz to je vrlo lako uočiti da metoda ne konvergira ili da daje pogrešne rezultate. Još valja spomenuti da je kroz praksu pokazano, da broj koraka  $j$  (odnosno brzina konvergencije) ovisi o početnim vrijednostima koje se zadaju ( $\alpha_0$  i  $\alpha_1$ ). Upravo zbog toga će se, iz same fizike problema, procijeniti red veličine funkcije  $v$  (odnosno  $\varphi''$ ). Ukoliko  $\varphi''$  iz jednadžbe (44) stavimo na jednu stranu jednadžbe, a ostale vrijednosti na drugu stranu dobijemo:

$$v = \varphi'' = \frac{\partial v_x}{\partial y} \sqrt{\frac{v_x}{v_\infty^3}} \quad (55)$$

Sada će se u izrazu (55) procijeniti red veličine  $\sigma$  svakog člana u odnosu na bazu 10 zanemarujući fizikalne dimenzije budući je  $\varphi''$  bezdimenzijska funkcija, pa vrijedi:

$$v \sim \sigma(10^{-6}) \quad (56)$$

$$v_\infty \sim \sigma(10^0) \quad (57)$$

Pomoću izraza (56) i (57), te da kritični Reynoldsov broj, koji karakterizira prijelaz iz laminarnog u turbulentni režim strujanja, gdje naše jednadžbe više ne vrijede,  $Re = \frac{x v_\infty}{\nu}$  ima red veličine  $\sigma(10^6)$  [15], možemo procijeniti red veličine od  $x$  koji tada iznosi:

$$x \sim \sigma(10^0) \quad (58)$$



Nadalje, pomoću (57), te uz  $\frac{\delta}{L} \ll 1$ , gdje možemo pisati  $\delta \sim \sigma(10^{-3})$  [15], imamo:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{v_\infty}{\delta} \sim \sigma(10^3) \quad (59)$$

No, tu je još potrebno napomenuti da Prandtlove jednadžbe (26) i (27), a time i naša Blasiusova diferencijalna jednadžba (47) vrijede za  $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ , što znači da se gibanje odvija nizvodno, to jest, da nema odvajanja strujanja (a potom i moguće pojave natražnog strujanja), što povlači  $\frac{\partial v_x}{\partial y} (y = 0) > 0$ , [11]. Odnosno, gradijent brzine u smjeru okomitom na ploču mora biti pozitivan broj, a kako je preostali član pod korijenom, zaključujemo da funkcija  $\varphi''$  mora biti nenegativna na cijeloj domeni [16].

Sada, korištenjem (56) – (59) vidimo da:

$$v = \varphi'' \sim \sigma(10^0)$$

te se za prve dvije vrijednosti  $v_0$ , odnosno za  $\alpha_0$  i  $\alpha_1$  uzima:  $\alpha_0 = 1$  i  $\alpha_1 = 2$ .

Treba napomenuti da su ovako dobivene vrijednosti samo aproksimacije koje mogu biti prilično pogrešne (na kraju će se pokazati da je taj red veličine bliži  $10^{-1}$ ), međutim određivanje reda veličine  $v_0$ , pa barem približno uz neku grešku je korisno iz razloga što, ukoliko stavimo na primjer velike vrijednosti  $\alpha_0$  i  $\alpha_1$  moguće je da će se, pri pokretanju algoritma, susresti sa problemima koji su vezani za memoriju računala i ograničenja programskog jezika.

Još jedan problem je što je naš rubni uvjet  $u(\infty) = 1$  definiran u beskonačnosti, te bi trebalo taj broj zamijeniti relativno velikim brojem u kojemu se zadovoljava  $u \approx 1$ . Kako je

krajnje nepraktično unaprijed zadavati taj relativno veliki broj (odnosno zadavati broj koraka u for petlji čime direktno određujemo taj broj), te izvršavanjem programa iznova „gađati“ da bude zadovoljeno  $u \approx 1$  za spomenuti broj, računanje funkcija u ekvidistantnim čvorovima računa se u while petlji, iz koje se izlazi dok se ne postigne uvjet  $|u_i - u_{i-1}| \leq e$ , gdje je  $e$  unaprijed zadana točnost (u našem slučaju izabrati ćemo  $e = 10^{-10}$ ), odnosno riječima, izlazak iz petlje se ostvaruje kada funkcija  $u$  bude konvergirala prema nekom broju. Tu treba biti oprezan zbog toga što metodom gađanja sami postavljamo rubni uvjet  $v_0$ , a iz teorije diferencijalnih jednadžbi je poznato da diferencijalna jednadžba, ovisno o rubnim uvjetima može imati jedno, više, ili nema rješenje, međutim, za većinu problema, rješenje će konvergirati bez obzira na rubne uvjete, što je i ovdje slučaj. Uostalom, ukoliko se dogodi da rješenje ne konvergira, to se vrlo brzo u praksi uoči, posebno iz razloga što program javlja grešku u radu sa memorijom.

Algoritam za rješavanje diferencijalne jednadžbe (47) je napisan u programskom jeziku Python, na čijem kraju se nalaze naredbe za grafički prikaz funkcija  $y$ ,  $u$  i  $v$  u ovisnosti o varijabli  $x$ , čije će se slike kasnije prikazati uz tablične podatke u ekvidistantnim čvorovima. Programski kod dan je u *Prilogu 1*.

#### 4. Analiza rezultata i greške

Prije izvršavanja programa opisanog u trećem poglavlju, potrebno je odrediti korak  $h$  i točnost  $e$ . Kako program Python koristi *double precision* zapis realnih brojeva, njegova jedinična greška iznosi približno  $1.11 \cdot 10^{-16}$  prema [13], pa ćemo točnost  $e$  uzeti  $10^{-10}$  što je i više nego dovoljno za praktične potrebe jer je moguće da se prilikom velikog broja matematičkih operacija i brojnih iteracija ta greška „nagomila“ do otprilike  $10^{-10}$ . S druge strane, korak  $h$  ćemo odrediti na praktičan i jednostavan način. Ako želimo da maksimalna greška bude  $10^{-6}$ , znači da se prvih 6 decimalnih mjesta poslije decimalne točke ne mijenja daljnjim usitnjavanjem koraka. Dakle, pozivom programa za razne korake koje smo dakle konstantno smanjivali, dobili smo sljedeće vrijednosti  $v_0$ :

Tablica 1. Vrijednosti  $v_0(h)$

$h$	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000005
$v_0$	0.3289821	0.3317485	0.3320266	0.3320557	0.3320589

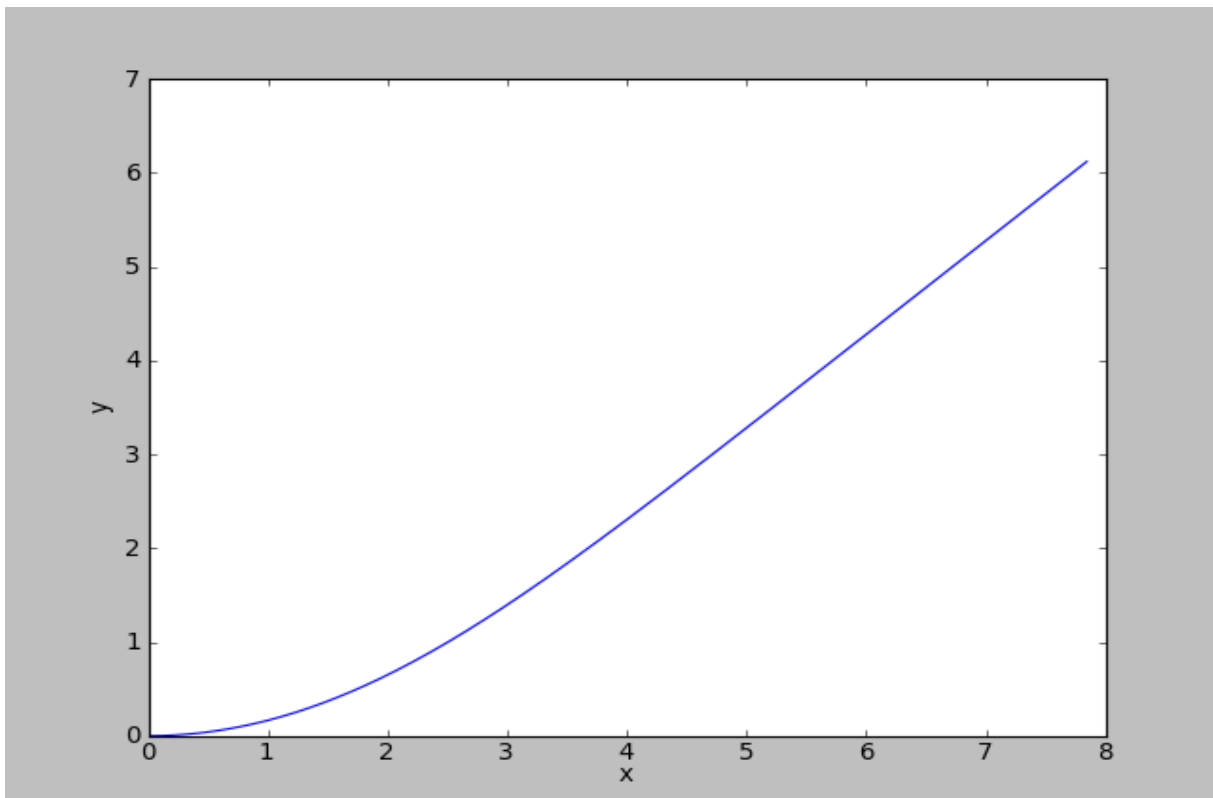
Iz tablice 1 vidljivo je da, smanjivanjem koraka  $h$ ,  $v_0$  konvergira prema nekom broju koji je približno jednak 0.3320589, čime je indirektno provjerena stabilnost i konvergencija R-K metode za zadani problem [17]. Daljnjim smanjivanjem koraka, vrijednost prvih šest decimalnih mjesta kod  $v_0$  se ne mijenja, pa se može reći da je maksimalna moguća greška približno jednaka  $10^{-6}$ .

Kako su konačno određeni korak  $h$  i točnost  $e$ , sada se može sa tim vrijednostima pokrenuti program, koji će ispisati vrijednosti funkcija  $y$ ,  $u$  i  $v$  u svakom 40000-tom koraku (odnosno za  $x = 0, 0.2, 0.4 \dots$  do krajnje vrijednosti). Program ispisuje i koliku vrijednost poprima brojač  $j$ , odnosno potreban broj iteracija metode gađanja koja je konačno dala takav  $v_0$  da je zadovoljeno  $u(x_\infty) = 1$ , gdje je s  $x_\infty$  označen  $x$  s kojim smo zamijenili našu beskonačnost, koji se također ispisuje.

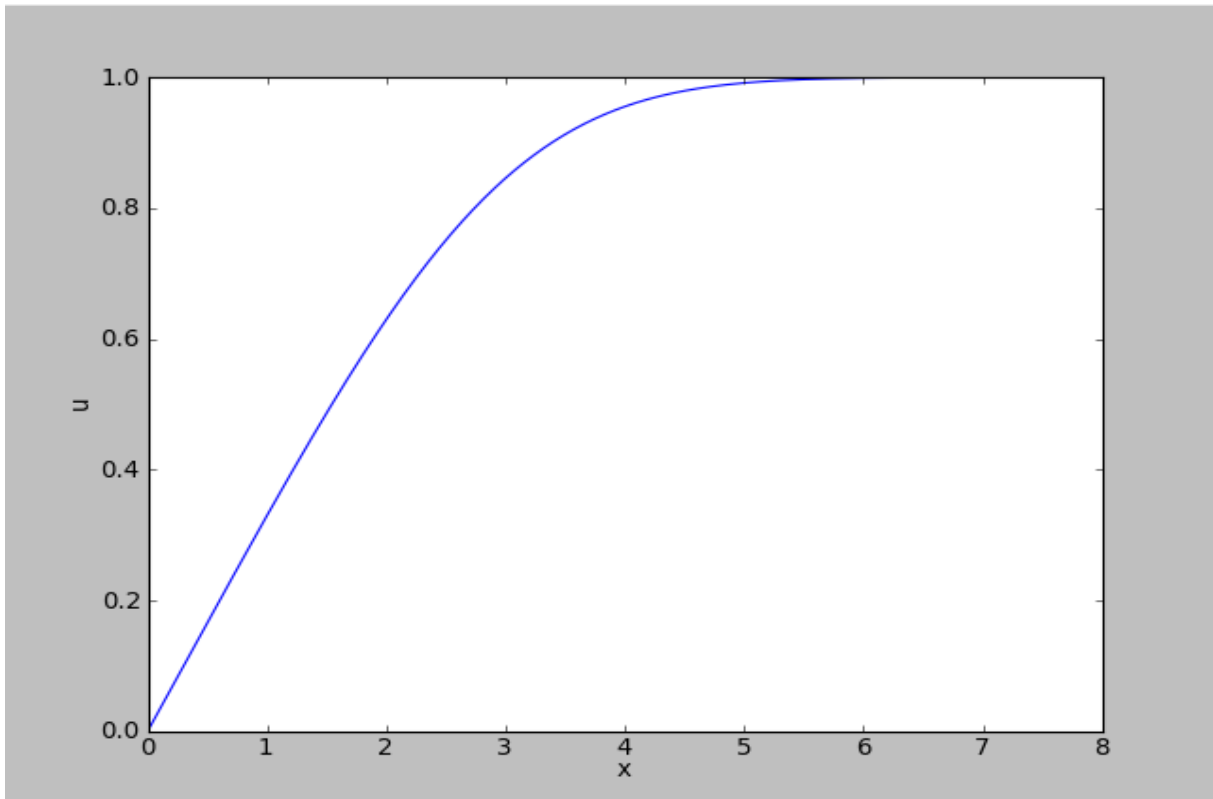
Tablica 2. Rezultati proračuna

$x (\eta)$	$y (\varphi)$	$u (\varphi')$	$v (\varphi'')$
0.0	0.0000000	0.0000000	0.3320589
0.2	0.0066409	0.0664083	0.3319854
0.4	0.0265598	0.1327651	0.3314714
0.6	0.0597347	0.1989387	0.3300807
0.8	0.1061086	0.2647111	0.3273908
1.0	0.1655725	0.3297824	0.3230087
1.2	0.2379501	0.3937790	0.3165907
1.4	0.3229836	0.4562651	0.3078669
1.6	0.4203236	0.5167606	0.2966648
1.8	0.5295218	0.5747624	0.2829323
2.0	0.6500292	0.6297704	0.2667527
2.2	0.7811994	0.6813155	0.2483519
2.4	0.9222974	0.7289874	0.2280925
2.6	1.0725147	0.7724607	0.2064552
2.8	1.2309875	0.8115156	0.1840070
3.0	1.3968199	0.8460506	0.1613605
3.2	1.5691083	0.8760877	0.1391281
3.4	1.7469651	0.9017676	0.1178761
3.6	1.9295418	0.9233361	0.0980860
3.8	2.1160482	0.9411245	0.0801256
4.0	2.3057665	0.9555247	0.0642338
4.2	2.4980615	0.9669636	0.0505194
4.4	2.6923846	0.9758773	0.0389722
4.6	2.8882734	0.9826899	0.0294834
4.8	3.0853478	0.9877959	0.0218709
5.0	3.2833026	0.9915483	0.0159065
5.2	3.4818983	0.9942519	0.0113416
5.4	3.6809515	0.9961616	0.0079275
5.6	3.8803249	0.9974841	0.0054318
5.8	4.0799179	0.9983818	0.0036483
6.0	4.2796586	0.9989791	0.0024020
6.2	4.4794967	0.9993688	0.0015501
6.4	4.6793978	0.9996179	0.0009806
6.6	4.8793388	0.9997741	0.0006080
6.8	5.0793045	0.9998701	0.0003695
7.0	5.2792853	0.9999278	0.0002202
7.2	5.4792750	0.9999620	0.0001286
7.4	5.6792701	0.9999817	0.0000736
7.6	5.8792681	0.9999929	0.0000413
7.8	6.0792679	0.9999991	0.0000227
7.841615	6.1208830	1.0000000	0.0000200

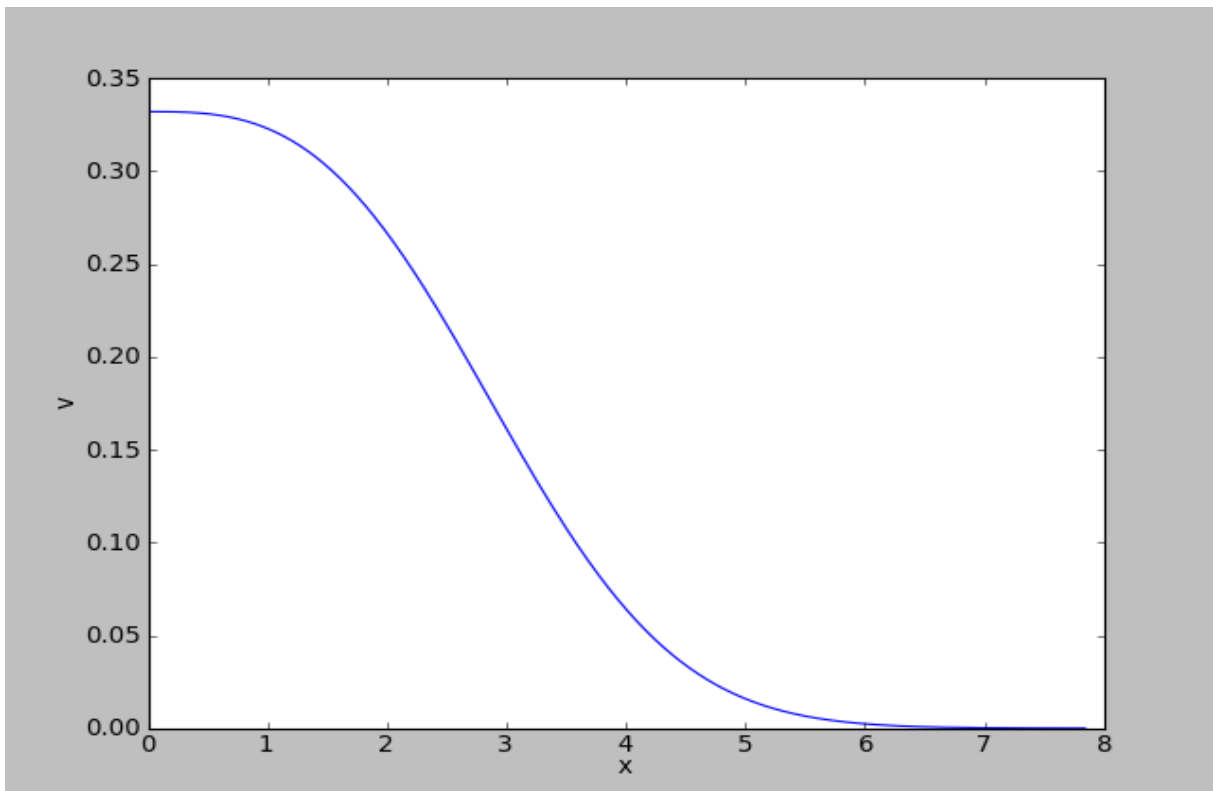
Iz tablice 2 je vidljivo da je integracija izvršena do  $x_\infty = 7.841615$ , odnosno za taj  $x$  funkcija  $u$  poprima vrijednost 1. Nadalje je vidljivo da su funkcije  $y$  i  $u$  rastuće na cijeloj domeni, te da je funkcija  $v$  padajuća funkcija. Zanimljivo je da, budući  $u$  ima horizontalnu asimptotu u 1, tu vrijednost bi mogli i interpretirati kao maksimum funkcije  $u$ , što bi dovelo do zaključka, uz pretpostavku neprekidnosti i derivabilnosti funkcije  $u$ , da derivacija od  $u$ , odnosno funkcija  $v$  u toj točki, ima vrijednost 0, što je ako bolje pogledamo rezultate i potvrđeno, jer se vidi da kako  $x (\eta) \rightarrow \infty$ , funkcija  $v (\varphi'') \rightarrow 0$ , čime se s velikim oprezom može reći da su funkcija  $u$ , a time i funkcije  $y$  i  $v$  neprekidne funkcije. Također, kao što je spomenuto, program ispisuje koju vrijednost poprima brojač  $j$ , odnosno konvergencija prema konačnom početnom rubnom uvjetu  $v_0$  koji daje vrijednost  $u(x_\infty) = 1$  je ostvarena u 8 koraka. Grafički prikaz funkcija dan je na slikama 3, 4 i 5:



Slika 3. Grafički prikaz funkcije  $\varphi(\eta)$ , odnosno  $y(x)$



Slika 4. Grafički prikaz funkcije  $\varphi'(\eta)$ , odnosno  $u(x)$



Slika 5. Grafički prikaz funkcije  $\varphi''(\eta)$ , odnosno  $v(x)$

Vrlo zanimljiva je činjenica da je u programu izvršeno otprilike 188198760 računanja vrijednosti raznih funkcija, dakle izvršeno je strahovito puno matematičkih operacija u svega desetak sekundi, što na ovakvom praktičnom primjeru demonstrira veliku moć današnjih računala.

Dobiveni rezultati će se usporediti s Howarthovom integracijom, koja se i danas koristi za praktične proračune, na način da ćemo za nekoliko različitih vrijednosti  $\eta$  u tablici 3 prikazati i rezultate proračuna R - K metodom i Howarthove, te njihovu apsolutnu vrijednost razlike  $\Delta$  u posebnim stupcima, gdje je  $\Delta\varphi^* = |\varphi_{R-K}^* - \varphi_{Howarth}^*|$ , dok \* označuje red derivacije, odnosno pripadnu funkciju:

Tablica 3. Usporedba rezultata proračuna s Howarthovom integracijom

$\eta$	R - K			Howarth			$\Delta$		
	$\varphi_{R-K}$	$\varphi'_{R-K}$	$\varphi''_{R-K}$	$\varphi_{Howarth}$	$\varphi'_{Howarth}$	$\varphi''_{Howarth}$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi'$	$\Delta\varphi''$
0.0	0.0000000	0.0000000	0.3320589	0.0000000	0.0000000	0.3320570	0	0	1.89-E6
1.0	0.1655725	0.3297824	0.3230087	0.1655720	0.3297800	0.3230070	5.19E-7	2.45E-6	1.68E-6
2.0	0.6500292	0.6297704	0.2667527	0.6500240	0.6297660	0.2667520	5.22E-6	4.44E-6	6.57E-7
3.0	1.3968199	0.8460506	0.1613605	1.3968080	0.8460440	0.1613600	1.19E-5	6.60E-6	4.89E-7
4.0	2.3057665	0.9555247	0.0642338	2.3057460	0.9555180	0.0642340	2.05E-5	6.74E-6	2.47E-7
5.0	3.2833026	0.9915483	0.0159065	3.2832740	0.9915420	0.0159070	2.86E-5	6.27E-6	4.68E-7
6.0	4.2796586	0.9989791	0.0024020	4.2796210	0.9989730	0.0024020	3.76E-5	6.13E-6	3.74E-8
7.0	5.2792853	0.9999278	0.0002202	5.2792390	0.9999220	0.0002200	4.63E-5	5.84E-6	1.58E-7
7.8	6.0792679	0.9999991	0.0000227	6.0792140	0.9999930	0.0000230	5.39E-5	6.11E-6	2.94E-7

Iz tablice 3 je vidljivo da su dobiveni rezultati gotovo identični s Howarthovim, odnosno njihova apsolutna razlika je u najgorem slučaju reda veličine  $10^{-5}$ , a ponegdje čak ide do  $10^{-8}$ . Zanimljivo je da, kao što smo prije spomenuli, R - K metoda konvergira za  $x_\infty = 7.841615$ , dok je rubni uvjet  $\varphi'(x_\infty) = 1$  u Howarthovoj integraciji zadovoljen za približno  $x_\infty \approx 8.4$ , što je vjerojatno rezultat greške zaokruživanja [13].

Kako su funkcije  $\varphi$ ,  $\varphi'$  te  $\varphi''$  određene, vrlo jednostavnim matematičkim operacijama iz jednadžbe (44) možemo odrediti silu otpora ploča različitih dimenzija u laminarnom režimu strujanja, jer je tangencijalno naprezanje na površini ploče  $\tau_w$  dano izrazom [4]:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \text{ (za } y = 0) \quad (60)$$

gdje je  $\mu$  dinamička viskoznost fluida, pa se integracijom tangencijalnog naprezanja po površini ploče dobije ukupna sila otpora:

$$D = B \int_0^L \tau_w dx \cong 0.664 \rho v_\infty^2 BL \left( \frac{Lv_\infty}{\nu} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (61)$$

gdje je konstanta 0.664 dobivena zaokruživanjem na treću decimalu, što je i više nego dovoljno za praktičnu upotrebu, broja 0.6641178 koji je izračunat kao  $2\varphi''(0)$ , iz razloga što ploča ima dvije stranice, to jest dvije površine po kojima treba integrirati, dok dimenziju širine ploče možemo jednostavno izvući ispred znaka integrala, jer u smjeru širine nema nikakvih promjena budući se razmatra ravninski problem.



## 5. Zaključak

Kao što je prikazano u radu, na relativno jednostavan način se riješio vrlo komplicirani problem koji opisuju Navier - Stokesove jednačbe, što je isplativiji i brži način nego postavljanje i provođenje eksperimentalnih ispitivanja za što je potrebna skupa laboratorijska oprema koja uključuje i bazen za modelska ispitivanja. Jednostavnim algoritmom koji se sastoji od ugnježđenih while petlji, te korištenjem računala i programskog jezika Python došli smo do rješenja Blasiusove diferencijalne jednačbe (47). Uspoređivanjem rezultata proračuna s Howarthovim, doprinjelo je točnosti rješenja, te je pokazano da je ovako formiran algoritam krajnje stabilan i izrazito pouzdan za inženjersku primjenu. Problem razmatran u ovom radu se kroz povijest i eksperimentalno određivao, te je u [3] opisano da se eksperimentalni podaci profila brzine odlično podudaraju s Howarthovom integracijom, čime direktno možemo zaključiti i da se odlično podudaraju s rješenjima dobivenim R - K metodom, što je zapanjujuće zbog velikog broja, iako izrazito opravdanih pretpostavki i približenja koje smo uveli u drugom poglavlju, te samih nesavršenosti i grešaka u aritmetici računala. Na kraju rada smo na temelju rezultata dali izraz za određivanje sile otpora (61) ravne ploče u laminarnom režimu strujanja, koji je krajnje jednostavan, i koji pokazuje da tangencijalno naprezanje pada po zakonu  $\tau_w \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$  u smjeru osi  $x$ , što slijedi ukoliko bolje pogledamo jednačbu (44) uzevši u obzir izraz za tangencijalno naprezanje (60). Time je i doprinos ukupnoj sili otpora to manji što je ploča dulja. Ovakvim razmatranjem se, kranje efikasno i brzo, te dovoljno točno riješio temeljni problem moderne mehanike fluida.

## 6. Prilog 1

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import *
h=input('Upsite korak:')
e=input('Upsite tocnost:')
alpha=[]
beta=[]
alpha.append(input('Upsite prvu vrijednost za alpha:'))
alpha.append(input('Upsite drugu vrijednost za alpha:'))
i=0
j=0
while 1:
    while j<2:

        i=0
        y=[0]
        u=[0]
        v=[]
        A1=[]
        A2=[]
        A3=[]
        A4=[]
        B1=[]
        B2=[]
        B3=[]
        B4=[]
        C1=[]
        C2=[]
        C3=[]
        C4=[]
        v.append(alpha[j])
```

*while 1:*

*A1.append(h\*u[i])*

*A2.append(h\*(u[i]+0.5\*A1[i]))*

*A3.append(h\*(u[i]+0.5\*A2[i]))*

*A4.append(h\*(u[i]+A3[i]))*

*y.append(y[i]+(1./6.)\*(A1[i]+2.\*A2[i]+2.\*A3[i]+A4[i]))*

*B1.append(h\*v[i])*

*B2.append(h\*(v[i]+0.5\*B1[i]))*

*B3.append(h\*(v[i]+0.5\*B2[i]))*

*B4.append(h\*(v[i]+B3[i]))*

*u.append(u[i]+(1./6.)\*(B1[i]+2.\*B2[i]+2.\*B3[i]+B4[i]))*

*C1.append(h\*(-0.5\*y[i]\*v[i]))*

*C2.append(h\*(-0.5\*y[i]\*(v[i]+0.5\*C1[i])))*

*C3.append(h\*(-0.5\*y[i]\*(v[i]+0.5\*C2[i])))*

*C4.append(h\*(-0.5\*y[i]\*(v[i]+C3[i])))*

*v.append(v[i]+(1./6.)\*(C1[i]+2.\*C2[i]+2.\*C3[i]+C4[i]))*

*i+=1*

*if abs(u[i]-u[i-1])<=e:*

*break*

*else:*

*pass*

*beta.append(u[i])*

*j+=1*

*alpha.append(alpha[j-2]+((alpha[j-1]-alpha[j-2])\*(1-beta[j-2]))/(beta[j-1]-beta[j-2]))*

*y=[0]*

*u=[0]*

*v=[]*

*A1=[]*

*A2=[]*

*A3=[]*

*A4=[]*

*B1=[]*

*B2=[]*

*B3=[]*

*B4=[]*

*C1=[]*

*C2=[]*

*C3=[]*

*C4=[]*

*v.append(alpha[len(alpha)-1])*

*i=0*

*while 1:*

*A1.append(h\*u[i])*

*A2.append(h\*(u[i]+0.5\*A1[i]))*

*A3.append(h\*(u[i]+0.5\*A2[i]))*

*A4.append(h\*(u[i]+A3[i]))*

*y.append(y[i]+(1./6.)\*(A1[i]+2.\*A2[i]+2.\*A3[i]+A4[i]))*

*B1.append(h\*v[i])*

*B2.append(h\*(v[i]+0.5\*B1[i]))*

*B3.append(h\*(v[i]+0.5\*B2[i]))*

*B4.append(h\*(v[i]+B3[i]))*

*u.append(u[i]+(1./6.)\*(B1[i]+2.\*B2[i]+2.\*B3[i]+B4[i]))*

*C1.append(h\*(-0.5\*y[i]\*v[i]))*

```

C2.append(h*(-0.5*y[i]*(v[i]+0.5*C1[i])))
C3.append(h*(-0.5*y[i]*(v[i]+0.5*C2[i])))
C4.append(h*(-0.5*y[i]*(v[i]+C3[i])))
v.append(v[i]+(1./6.)*(C1[i]+2.*C2[i]+2.*C3[i]+C4[i]))

i+=1
if abs(u[i]-u[i-1])<=e:
    break
else:
    pass

beta.append(u[i])

if abs(beta[j]-1)<=e:
    break

j+=1

print 'Konvergencija prema konacnom pocetnom rubnom uvjetu v(0) koji daje vrijednost
u(beskonacno)=1 je ostvarena u', j, ' koraka i vrijednost funkcije v u 0 je priblizno v(0)='
alpha[len(alpha)-1]

print 'Vrijednost funkcija se racunaju do vrijednosti x=', i*h, ', odnosno za taj x je zadovoljen uvjet
konvergencije funkcije u u beskonacnosti sa zadanom tocnoscu'

print y[0:len(y):40000]
print y[len(y)-1]
print u[0:len(u):40000]
print u[len(u)-1]
print v[0:len(v):40000]
print v[len(v)-1]
x=range(i+1)
for k in x:
    x[k]=h*x[k]

```

*plt.plot(x,y)*

*plt.ylabel('y')*

*plt.xlabel('x')*

*plt.show()*

*plt.plot(x,u)*

*plt.ylabel('u')*

*plt.xlabel('x')*

*plt.show()*

*plt.plot(x,v)*

*plt.ylabel('v')*

*plt.xlabel('x')*

*plt.show()*

## ***7. Zahvala***

Srdačno se zahvaljujemo asistentima Fakulteta strojarstva i brodogradnje na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku: Mati Grgiću, Ivu Čatipoviću i Jadranki Radanović koji su nam dijelili dragocjene savjete prije početka i u toku pisanja rada. Također smo izrazito zahvalni profesorici sa Katedre za matematiku Sanji Singer, koja je uvijek bila pristupačna za bilo kakva pitanja vezana za samu numeričku matematiku, te nam izrazito pomogla. Profesorici Boženi Tokić sa Katedre za tehničke strane jezike također dugujemo veliku zahvalnost jer nam je bila od velike pomoći oko prijevoda sažetka rada na engleski jezik. Profesorica Nastia Degiuli sa Zavoda za brodogradnju i pomorsku tehniku nam je neizmjereno pomogla u početku samog rada i pri pisanju rada, te smo joj na tome vrlo zahvalni. Konačno, posebnu zahvalnost dugujemo profesorici Andreji Werner na puno preporučene literature, te još više dobrih savjeta, i najbitinije, jer nas je od početka do kraja vodila kroz ovaj rad svojim širokim znanjem iz spomenutog područja.

## 8. *Popis literature*

- [1] Werner, A.: Podloge za predavanje iz Mehanika fluida IIB, rukopis FSB, Zagreb
- [2] Hari, V., Drmač, Z., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S.: Numerička analiza, predavanja i vježbe, Sveučilište u Zagrebu, PMF - matematički odjel, Zagreb, (2003.) [http://web.math.hr/~rogina/2001096/num\\_anal.pdf](http://web.math.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf)
- [3] Fancev, M.: Mehanika fluida, Tehnička enciklopedija, svezak broj 8 jugoslavenskog leksikografskog zavoda, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb, (1982.)
- [4] Degiuli, N., Werner, A.: Mehanika fluida IB - podloge za nastavu <http://www.fsb.hr/zbrodo/>
- [5] Kaplan, W.: Advanced calculus (4th edition), Addison Wesley Publishing Company, (1991.)
- [6] Pijush, K. K., Cohen, M. I.: Fluid mechanics (2nd edition), Academic Press, (2002.)
- [7] Kreyszig, E.: Advanced engineering mathematics, John Wiley & Sons, Inc., (2006.)
- [8] Batchelor, G. K.: An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, (1998.)
- [9] Landau, L. D., Lifshitz, E. M.: Fluid mechanics (2nd edition): Volume 6, Course of theoretical physics, Reed educational and Professional Publishing Ltd, (1999.)
- [10] Nakayama, Y., Boucher R. F.: Introduction to fluid mechanics, Butterworth - Heinemann, (1998.)
- [11] Schlichting, H.: Boundary - layer theory (7th edition), McGraw - Hill Book Company, (1979.)



- [12] Kurepa, S.: Matematička analiza 2 (funkcije jedne varijable), Tehnička knjiga, Zagreb, (1990.)
- [13] Singer, S.: Numerička matematika, predavanja, Zagreb, (2009.)
- [14] Pejović, P.: Numerička analiza II. Deo, Naučna knjiga, Beograd, (1983.)
- [15] Werner, A.: Odabrana poglavlja iz mehanike fluida, zbirka zadataka, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, (2002.)
- [16] Kurepa, S.: Matematička analiza 1 (diferenciranje i integriranje), Tehnička knjiga, Zagreb, (1989.)
- [17] Singer, S.: Matematika IX, Predavanja na FSB, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, (2007/8.)

## ***Sažetak rada***

*Vuko Vukčević, Mihael Lobrović*

### ***Teorijsko - numerički pristup problemu laminarnog graničnog sloja oko ravne ploče***

U ovom radu se razmatra laminarni granični sloj uz ravnu ploču što predstavlja osnovni problem moderne mehanike fluida. Jednostavnim procjenama reda veličine je prikazano znatno pojednostavljenje početnih Navier - Stokesovih jednačbi, da bi se, na kraju, uvođenjem bezdimenzijskog profila brzine, problem maksimalno teorijski pojednostavnio. Tako dobivena, obična nelinearna diferencijalna jednačba, poznatija pod nazivom Blasiusova diferencijalna jednačba može se primjenom računala vrlo jednostavno riješiti nekom od numeričkih metoda. Klasična Runge - Kutta metoda 4. reda, korištena u ovom radu, se pokazala kao izrazito jednostavna, efikasna, te vrlo točna metoda. Konačno, korištenjem dobivenih rezultata se odredio izraz za određivanje sile otpora ravne ploče u laminarnom režimu strujanja što je od iznimne važnosti za razne tehničke primjene.

*Ključne riječi: laminarni granični sloj, ravna ploča, Blasiusova diferencijalna jednačba, Runge - Kutta metoda četvrtog reda, sila otpora*

## ***Summary***

*Vuko Vukčević, Mihael Lobrović*

### ***Theoretical and numerical approach to laminar boundary layer across a flat plate***

Laminar boundary layer across a flat plate, which is a fundamental problem of modern fluid mechanics, is dealt with in this paper. A simple estimation of the order of magnitude resulted in equations that were simpler than the initial Navier - Stokes equations. Subsequently, by introducing a dimensionless velocity profile, the problem was theoretically simplified to a maximum. The resulting Blasius differential equation, which is an ordinary nonlinear differential equation, can be easily solved by using personal computers and some of numerous numerical methods. The classical fourth order Runge - Kutta method, used in this paper, has proven to be a simple, effective, and a very accurate method. Finally, using the obtained solutions, an expression for the implicit calculation of drag force of a flat plate in a laminar flow was produced, which is of great importance for various technical applications.

*Key words: laminar boundary layer, flat plate, Blasius differential equation, fourth order Runge - Kutta method, drag force*