

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Bojan Tepoš

**Optimalno upravljanje pogonom vozila s automatiziranim
mjenjačem**

Zagreb, 2010.

Ovaj rad izrađen je na Katedri za strojarsku automatiku, Zavod robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava, pod vodstvom prof. dr. sc. Joška Deur i doc. dr. sc. Josipa Kasaća i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2009./2010.

POPIS OZNAKA

Oznaka	Opis	Jedinica
ω_e	Kutna brzina motora	rad/s
θ_c	Kut zakreta spojke	rad
ω_c	Kutna brzina spojke	rad/s
ω_{sl}	Kutna brzina klizanja spojke	rad/s
θ_m	Kut zakreta glavnog vratila	rad
ω_m	Kutna brzina glavnog vratila	rad/s
θ_w	Kut zakreta kotača	rad
ω_w	Kutna brzina kotača	rad/s
v	Brzina vozila	m/s
T_e	Moment motora	Nm
T_{cl}	Moment trenja spojke	Nm
T_{load}	Moment tereta	Nm
β_e	Koeficijent prigušenja koljenastog vratila	Nms/rad
k_{cm}	Koeficijent krutosti torzijskog prigušnika	Nm/rad
β_{cm}	Koeficijent prigušenja torzijskog prigušnika	Nms/rad
k_{tw}	Koeficijent krutosti poluosovine	Nm/rad
β_{tw}	Koeficijent prigušenja poluosovine	Nms/rad
β_w	Koeficijent prigušenja gume	Nms/rad
i_g	Prijenosni omjer zupčanika mjenjača	
i_d	Prijenosni omjer diferencijala	
J_e	Moment inercije motora	kgm ²
J_c	Moment inercije spojke	kgm ²
J_{eq}	Ekvivalentni moment inercije	kgm ²
J_t	Moment inercije prijenosnog vratila	kgm ²
J_{s1}	Moment inercije diska sinkrona 1	kgm ²
J_{s2}	Moment inercije diska sinkrona 2	kgm ²
J_w	Moment inercije kotača i ostatka vozila	kgm ²
t	Vrijeme	s
t_f	Vrijeme ukapčanja	s
$\mathbf{x}(t)$	Vektor stanja	
$\mathbf{u}(t)$	Vektor upravljanja	
$\mathbf{y}(t)$	Vektor izlaza	

- A** Matrica koeficijenata sustava
- B** Matrica ulaza sustava
- C** Matrica izlaza sustava
- D** Matrica prijenosa sustava
- J** Funkcija cilja
- $\Phi(\mathbf{x}(t_f))$ Terminalni dio funkcije cilja
- $F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ Podintegralni dio funkcije cilja
- $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))$ Vektorska funkcija ograničenja tipa nejednakosti
- $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))$ Vektorska funkcija ograničenja tipa jednakosti
- $\mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}(t_f))$ Vektorska funkcija rubnih uvjeta
- $K_{h,k}$ Težinski koeficijent penalne funkcije ograničenja tipa jednakosti
- $K_{g,k}$ Težinski koeficijent penalne funkcije ograničenja tipa nejednakosti
- $K_{b,k}$ Težinski koeficijent penalne funkcije rubnih uvjeta
- $H^-(z)$ Heavisedova step funkcija
- η Koeficijent brzine učenja
- N Broj vremenskih intervala
- M Broj iteracija gradijentnog algoritma
- S** Konstantna težinska matrica konačnog stanja
- Q** Konstantna težinska matrica stanja sustava za vrijeme prijelaznog procesa
- R** Konstantna težinska matrica upravljačkih varijabli
- $\mathbf{K}(t)$ Vremenski varijabilna matrica pojačanja
- \mathbf{K}_s Matrica pojačanja algebarske Riccatijeve matrične jednadžbe
- $\bar{\mathbf{u}}(t)$ Novi vektor upravljanja
- $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ Vektor stanja odstupanja od referentne trajektorije

SADRŽAJ

Popis oznaka.....	I
Sadržaj.....	III
1 Uvod.....	1
2 Matematički model procesa.....	2
2.1 Matematički model 6. reda.....	2
2.2 Matematički model 2. reda.....	4
3 Optimiranje upravljačkih varijabli	5
3.1 Pregled postupka optimiranja.....	5
3.2 Prilagodba matematičkog modela	7
3.3 Formulacija problema optimiranja	9
3.4 Podešavanje težinskih koeficijenata	10
3.5 Rezultati optimiranja i simulacije.....	11
4 Optimalna regulacija stanja.....	14
4.1 Formulacija LQR regulator	14
4.2 Riccatijeva matična diferencijalna jednačba.....	15
4.3 Rješenje Riccatijeve matične diferencijalne jednačbe	16
4.4 Reformulacija LQR problema	18
4.5 primjer Sinteze optimalnog regulatora	21
4.6 Implementacija optimalnog regulatora i Rezultati simulacije.....	23
5 Zaključak.....	25
6 Zahvala	26
7 Popis literature.....	27
8 Dodaci	28
8.1 Parametri matematičkog modela	28
8.2 Iznosi graničnih vrijednosti varijabli stanja	28
8.3 Kroneckerov produkt.....	28
8.3.1 Definicija	28
8.3.2 Svojstva	28
8.3.3 Vektorizacija matrica.....	30
9 Sažetak	31
10 Summary	32
Životopis.....	33

1 UVOD

Kod uobičajenih ručnih mjenjača [8,12] vozač upravlja radom spojke i pedale akceleratora kako bi mijenjao stupnjeve prijenosa mjenjača. Da bi se smanjio ukupni napor vozača, sve više se uvode automatizirani mjenjači gdje računalo upravlja radom spojke i motora [4], ili puni automatski mjenjači sa dvostrukom spojkom i složenijim mehatroničkim sustavom [9]. O oba slučaja neophodno je razviti optimalne regulatore cjelokupnog pogona vozila s ciljem postizanja visokih voznih značajki pogona (dobra akceleracija), udobnosti vožnje (nizak sadržaj vibracija) i male potrošnje (mali gubici energije u spojci i motoru).

U ovom se radu predlaže sistematski postupak sinteze sustava optimalnog upravljanja pogonom vozila s automatiziranim mjenjačem. U prvom se koraku provodi numeričko optimiranje upravljačkih varijabli momenta motora i momenta spojke primjenom općeg algoritma optimalnog upravljanja nelinearnim dinamičkim sustavima [2,3]. Kriterij optimalnost sadrži zahtjeve na konačno (unaprijed definirano) vrijeme ukapčanja, maksimalnu izlaznu brzinu vozila, minimalne gubitke energije i minimalni sadržaj torzijskih vibracija pogona [15]. Uz to se uzimaju u obzir ograničenja upravljačkih varijabli i varijabli stanja, te njihovih prvih derivacija.

U drugom koraku sinteze predlaže se linearni kvadratični optimalni regulator (LQR) pogona, koji ostvaruje prethodno optimirane trajektorije kutnih brzina motora i klizanja spojke. Budući da se regulacija provodi u konačnom (unaprijed) definiranom vremenu, postavlja se vremenski varijantni LQR algoritam. Radi poboljšanja kvalitete slijeđenja optimalnih referenci, regulator se proširuje s unaprijednim djelovanjima.

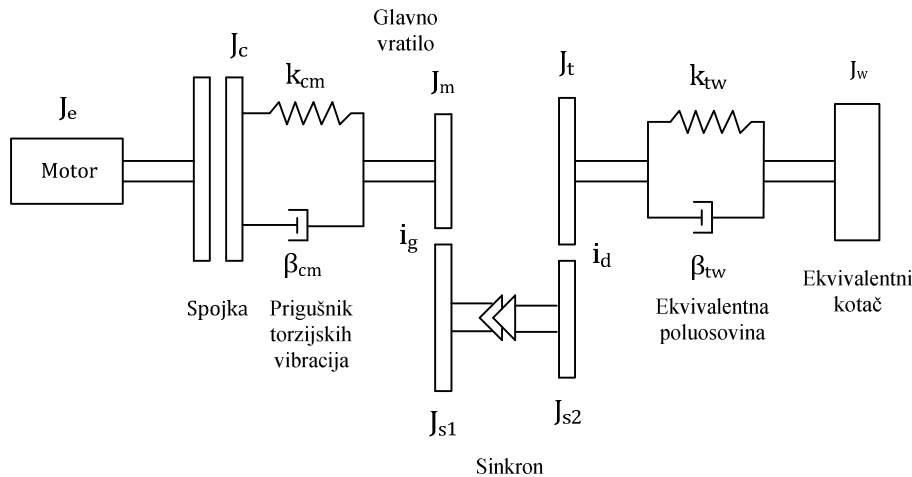
Sinteza optimalnog sustava upravljanja provodi se na pojednostavljenom modelu pogona 2. reda. Rezultati sinteze provjeravaju se simulacijom na računalu uz korištenje preciznijeg modela pogona 6. reda.

2 MATEMATIČKI MODEL PROCESA

Pogon vozila kao objekta upravljanja (proces) opisuje se modelom 6. reda [1] za potrebe računalnih simulacija. Model se zatim reducira na drugi red u svrhu sinteze sustava optimalnog upravljanja.

2.1 MATEMATIČKI MODEL 6. REDA

Slika 2.1 prikazuje shematski prikaz pogona vozila. Model obuhvaća zamašne mase motora, vratila, kotača i vozila, trenje spojke, elastičnost torzijskog prigušnika vibracija i elastičnost poluosovine.



Slika 2.1 Shema pogona vozila.

Moment koji proizvede motor s unutarnjim izgaranjem prenosi se na pogon vozila posredstvom spojke. Cijeli dinamički model može biti dobiven primjenom uvjeta ravnoteže momenata [11] na različite čvorove strukture prikazane na slici 2.1.

Dinamička jednadžba kutne brzine motora ω_e može se zapisati kao

$$J_e \dot{\omega}_e = T_e - \beta_e \omega_e - T_{cl}, \quad (2.1)$$

gdje su T_e moment motora, T_{cl} moment koji prenosi spojka, J_e je inercija motora, a β_e je faktor trenja koljenastog vratila. Zbog preglednosti izostavljeno je označavanje eksplicitne ovisnosti pojedinih varijabli o vremenu.

Analogno, dinamičku jednadžbu izlazne kutne brzine spojke ω_c možemo zapisati kao

$$J_c \dot{\omega}_c = T_{cl} - k_{cm}(\theta_c - \theta_m) - \beta_{cm}(\omega_c - \omega_m) \quad (2.2)$$

gdje je J_c inercija spojke, θ_c i θ_m su redom kutevi zakreta izlaznog vratila spojke i glavnog vratila, a k_{cm} i β_{cm} su redom koeficijent i krutosti i prigušenja torzijskog prigušnika.

Primjenom uvjeta ravnoteže momenta na glavno vratilo možemo pisati

$$J_{eq}(i_g, i_d)\dot{\omega}_m = k_{cm}(\theta_c - \theta_m) + \beta_{cm}(\omega_c - \omega_m) - \frac{1}{i_g i_d} \left[k_{tw} \left(\frac{\theta_m}{i_g i_d} - \theta_w \right) + \beta_{tw} \left(\frac{\omega_m}{i_g i_d} - \omega_w \right) \right] \quad (2.3)$$

gdje je ekvivalentna inercija zupčanika J_{eq} dana izrazom (Slika 2.1):

$$J_{eq}(i_g, i_d) = J_m + \frac{1}{i_g^2} \left(J_{s1} + J_{s2} + \frac{J_t}{i_d^2} \right) \quad (2.4)$$

gdje su i_g i i_d redom prijenosni omjeri mjenjača i diferencijala.

Konačno, dinamička jednadžba kutne brzine kotača ω_w glasi:

$$J_w \dot{\omega}_w = k_{tw} \left(\frac{\theta_m}{i_g i_d} - \theta_w \right) + \beta_{tw} \left(\frac{\omega_m}{i_g i_d} - \omega_w \right) - \beta_w \omega_w - T_{load} \quad (2.5)$$

gdje je J_w ekvivalentna inercija kotača, β_w je faktor trenja i T_{load} je moment tereta kotača uslijed uzdužne sile autogume. Konstantni moment tereta tijekom procesa ukapčanja spojke ($T_{load} = konst$) pretpostavljen je zbog jednostavnosti. Iznosi parametara modela nalaze se u dodatku 8.1.

2.2 MATEMATIČKI MODEL 2. REDA

Pojednostavljeni matematički model uvelike olakšava optimiranje. S tim ciljem zanemaruje se elastičnost torzijskog prigušnika vibracija i poluosovine (Slika 2.1), te vrijedi

$$\omega_c = \omega_m = i_g i_d \omega_w. \quad (2.6)$$

Uvrštavanjem (2.6) u (2.2)-(2.5) i zanemarivanjem elastičnosti, te sređivanjem dobivenih jednadžbi, cijeli pogon vozila od spojke do kotača može se prikazati jednadžbom stanja:

$$J_v(i_g, i_d)\dot{\omega}_c = T_{cl} - \beta_v(i_g, i_d)\omega_c - T_L \quad (2.7)$$

gdje je

$$J_v = J_c + J_{eq}(i_g, i_d) + \frac{J_w}{i_g^2 i_d^2} \quad (2.8)$$

$$\beta_v(i_g, i_d) = \frac{\beta_w}{i_g^2 i_d^2} \quad (2.9)$$

$$T_L = \frac{T_{load}}{i_g i_d} \quad (2.10)$$

Jednadžba stanja rotacijske dinamike motora ostaje dana izrazom (2.1):

$$J_e \dot{\omega}_e = T_e - \beta_e \omega_e - T_{cl}. \quad (2.11)$$

3 OPTIMIRANJE UPRAVLJAČKIH VARIJABLI

3.1 PREGLED POSTUPKA OPTIMIRANJA

Razmatra se opći vremenski kontinuirani, nelinearni problem optimalnog upravljanja s ograničenjima. Problem je pronaći vektor upravljanja $\mathbf{u}(t)$, koji će minimizirati funkciju cilja Bolzinog tipa

$$J_0 = \Phi_0(\hat{\mathbf{x}}(t_f)) + \int_0^{t_f} F_0(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) dt, \quad (3.1)$$

podvrgnutu nelinearnim vremenski kontinuiranim jednadžbama dinamičkog procesa (objekta upravljanja)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \phi(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad (3.2)$$

koja podliježe rubnim uvjetima vektora stanja

$$\mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}(t_f)) = 0, \quad (3.3)$$

te ograničenjima tipa nejednakosti vektora upravljanja i vektora stanja

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \geq 0, \quad (3.4)$$

i ograničenjima tipa jednakosti ovih vektora

$$\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) = 0, \quad (3.5)$$

gdje je t_f konačno vrijeme, $\hat{\mathbf{x}}(t)$ je n_0 dimenzionalan vektor stanja, $\mathbf{u}(t)$ je vektor upravljanja, $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))$ i $\mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}(t_f))$ su proizvoljne vektorske funkcije ograničenja tipa nejednakosti, jednakosti i rubnih uvjeta, respektivno.

Problem optimizacije (3.1)-(3.5) može se reducirati na problem pronalaska vektora upravljanja $\mathbf{u}(t)$ koji minimizira funkciju cilja

$$J = \Phi(\hat{\mathbf{x}}(t_f)) + \int_0^{t_f} F(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) dt, \quad (3.6)$$

koja podliježe jednadžbama procesa (3.2), gdje je

$$F(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) = F_0(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \sum_{k=1}^q K_{h,k} h_k^2(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \sum_{k=1}^p K_{g,k} g_k^2(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) H^-(g_k(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))), \quad (3.7)$$

$$\Phi(\hat{\mathbf{x}}(t_f)) = \Phi_0(\hat{\mathbf{x}}(t_f)) + \sum_{k=1}^r K_{b,k} b_k^2(\hat{\mathbf{x}}(t_f)), \quad (3.8)$$

i $H^-(z)$ je negativna Heavisedova step funkcija definirana kao

$$H^-(z) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } z \geq 0 \\ 1, & \text{ako je } z < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Drugi i treći član na desnoj strani izraza (3.7) predstavlja implementaciju ograničenja tipa nejednakosti i jednakosti (3.4) i (3.5), respektivno. Slično, drugi član na desnoj strani izraza (3.8) je penalna funkcija za rubne uvjete (3.3). Težinski koeficijenti penalnih funkcija $K_{h,k}$, $K_{g,k}$ i $K_{b,k}$ trebali bi biti dovoljno veliki kako bi se osiguralo zadovoljavanje ograničenja.

Kontinuirani model procesa (3.2) s funkcijom cilja (3.6) diskretizira se korištenjem Adamsove metode visokog reda, te se primjenjuje gradijentna metoda za minimizaciju funkcije cilja s obzirom na vektor upravljanja [2], [3]

$$\mathbf{u}^{(l+1)}(i) = \mathbf{u}^{(l)}(i) - \eta^{(l)} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}^{(l)}(i)} \quad (3.10)$$

gdje je $i = 0, 1, \dots, N - 1$, $l = 1, 2, \dots, M$, η je koeficijent brzine učenja, N je broj vremenskih intervala, M je broj iteracija gradijentnog algoritma, i $\mathbf{u}(i)$ je vektor upravljanja u diskretnom vremenskom trenutku $t_i = i\tau$, gdje je τ period diskretizacije.

Cjelokupni algoritam optimiranja opisan je u [2] i [3]. Za razliku od tipičnog pristupa temeljenog na nelinearnom programiranju [10], gdje su ograničenja jednadžbi procesa (3.2) uključena u funkciju cilja kao ograničenja tipa jednakosti, upravljačke varijable i varijable stanja su tretirane kao zavisne varijable (povezane preko jednadžbi procesa), tako da konačni algoritam ima numerički efikasnu strukturu sličnu algoritmu s vremenski unazadnim propagiranjem procesa (engl. BackPropagation Through-Time Algorithm). Konvergencijska svojstva gradijentnog algoritma su dodatno poboljšana korištenjem naprednih postupaka metode konjugiranog gradijenta.

3.2 PRILAGODBA MATEMATIČKOG MODELA

S ciljem pojednostavljenja prikaza i implementacije postupka optimiranja upravljačkih varijabli uzet ćemo u obzir matematički model pogona vozila 2. reda, čak nema prepreke da se optimiranje provede i na matematičkom modelu 6. reda. Rezultati optimiranja bit će zatim provjereni na modelu pogona vozila punog reda.

Proces uključivanja spojke mora biti izvršen u konačnom vremenu, tj. u konačnom trenutku mora biti zadovoljen uvjet $\omega_e(t_f) = \omega_c(t_f)$, ili ekvivalentno $\omega_{sl}(t_f) = 0$, gdje je $\omega_{sl} = \omega_e - \omega_c$ kutna brzina klizanja spojke. Taj rubni uvjet moguće je zadovoljiti smatrajući ga ograničenjem tipa jednakosti na varijablu stanja. S tim ciljem dinamički model (2.1) i (2.7) može se zapisati na sljedeći način:

$$\dot{\omega}_e = -\frac{\beta_e}{J_e}\omega_e + \frac{1}{J_e}T_e - \frac{1}{J_e}T_{cl}, \quad (3.11)$$

$$\dot{\omega}_{sl} = \left(-\frac{\beta_e}{J_e} + \frac{\beta_v}{J_v}\right)\omega_e - \frac{\beta_v}{J_v}\omega_{sl} + \frac{1}{J_e}T_e - \left(\frac{1}{J_e} + \frac{1}{J_v}\right)T_{cl} + \frac{1}{J_v}T_L. \quad (3.12)$$

Uvodeći uobičajene oznake za varijable stanja i ulazne varijable:

gdje je $x_1 = \omega_e$, $x_2 = \omega_{sl}$, $x_3 = T_e$, $u_1 = T_{eR}$, $x_4 = T_{cl}$ i $u_2 = \dot{T}_{cl}$,

model (3.11) i (3.12) može se preformulirati kako slijedi:

$$\dot{x}_1 = -\frac{\beta_e}{J_e}x_1 + \frac{1}{J_e}x_3 - \frac{1}{J_e}x_4, \quad (3.13)$$

$$\dot{x}_2 = \left(-\frac{\beta_e}{J_e} + \frac{\beta_v}{J_v}\right)x_1 - \frac{\beta_v}{J_v}x_2 + \frac{1}{J_e}x_3 - \left(\frac{1}{J_e} + \frac{1}{J_v}\right)x_4 + \frac{1}{J_v}T_L, \quad (3.14)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{\tau}x_3 + \frac{1}{\tau}u_1, \quad (3.15)$$

$$\dot{x}_4 = u_2. \quad (3.16)$$

Vremenska derivacija momenta spojke uzeta je kao ulaz u izrazu (3.16) kako bi se izbjegli diskontinuiteti u momentu spojke i omogućilo ograničenje derivacije momenta spojke, te dobivanje realnih rezultata koji odražavaju postojanje dinamike aktuatora spojke. Slično, jednačba (3.15) odražava dinamiku motora i omogućava ograničavanje derivacije momenta motora.

Sustav jednačbi (3.13)-(3.16) možemo zapisati u obliku prostora stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_e}{J_e} & 0 & \frac{1}{J_e} & -\frac{1}{J_e} \\ \left(-\frac{\beta_e}{J_e} + \frac{\beta_v}{J_v}\right) & -\frac{\beta_v}{J_v} & \frac{1}{J_e} & -\left(\frac{1}{J_e} + \frac{1}{J_v}\right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_L, \quad (3.17)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\Psi}T_L.$$

Početni uvjeti dinamičkog sustava su:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \omega_{e0} \\ \omega_{e0} \\ \beta_e \omega_{e0} + T_L \\ T_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \text{ rad/s} \\ 90 \text{ rad/s} \\ 3.34 \text{ Nm} \\ 0.64 \text{ Nm} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Jednadžbe (3.17) i (3.18) su specijalni slučaj opće formulacije modela procesa (3.2).

3.3 FORMULACIJA PROBLEMA OPTIMIRANJA

Cilj optimiranja procesa i cijelog mjenjača je pronalazak upravljačkog vektora $\mathbf{u}(t)$ koji će minimizirati funkciju cilja

$$J = \Phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt, \quad (3.19)$$

za sustav opisan jednadžbama (3.17), uz početne uvjete (3.18), pri čemu se komponente funkcije cilja definiraju kao:

$$\Phi(\mathbf{x}(t_f)) = -K_{t_1} x_1(t_f) + K_{b_1} x_2^2(t_f) + K_{b_2} \dot{x}_2^2(t_f), \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = & K_{c_1} u_1^2 + K_{c_2} |x_2(t)x_4(t)| \\ & + K_{g_1} (x_1(t) - x_{1min})^2 H^-(x_1(t) - x_{1min}) \\ & + K_{g_2} (x_{3max} - x_3(t))^2 H^-(x_{3max} - x_3(t)) \\ & + K_{g_3} (x_3(t) - x_{3min})^2 H^-(x_3(t) - x_{3min}) \\ & + K_{g_4} (x_{4max} - x_4(t))^2 H^-(x_{4max} - x_4(t)) \\ & + K_{g_5} (x_4(t) - x_{4min})^2 H^-(x_4(t) - x_{4min}) \\ & + K_{g_6} (\dot{x}_{3max} - \dot{x}_3(t))^2 H^-(\dot{x}_{3max} - \dot{x}_3(t)) \\ & + K_{g_7} (\dot{x}_3(t) - \dot{x}_{3min})^2 H^-(\dot{x}_3(t) - \dot{x}_{3min}) \\ & + K_{g_8} (\dot{x}_{4max} - \dot{x}_4(t))^2 H^-(\dot{x}_{4max} - \dot{x}_4(t)) \\ & + K_{g_9} (\dot{x}_4(t) - \dot{x}_{4min})^2 H^-(\dot{x}_4(t) - \dot{x}_{4min}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Rubni uvjet (3.20) znači da bi kutna brzina motora $x_1 = \omega_e$ (tj. brzina vozila) u konačnom trenutku t_f (trenutak ukapčanja) trebala biti maksimalna moguća (visoka razina svojstava), kutna brzina klizanja spojke treba pasti na nulu u $t = t_f$ ($x_2(t_f) = \omega_{sl}(t_f) = 0$) (uvjet ukapčanja spojke) i derivacija kutne brzine klizanja spojke treba iščeznuti u $t = t_f$ ($\dot{x}_2(t_f) = \dot{\omega}_{sl}(t_f) = 0$). Radi zadovoljavanja kriterija „mekog“ ukapčanja spojke (bez pobuđivanja vibracija poluosovine, [1]). Nadalje, podintegralna funkcija (3.21) penalizira energiju disipiranu u spojci (član proporcionalan $|x_2 x_4|$) i tendenciju oscilatornom ponašanju (kroz član proporcionalan u_1^2). Preostali izrazi podintegralne funkcije (3.21) su ograničenja tipa jednakosti i „aktiviraju“ se u situacijama kada varijable stanja i njihove prve derivacije prijeđu svoje granične vrijednosti. Tako kutna brzina motora $x_1(t)$ ne bi smjela pasti ispod minimalne brzine motora x_{1min} , kako bi se izbjeglo „gušenje“ motora, a iznosi momenta motora i momenta spojke kao i njihovih prvih derivacija trebali bi ostati unutar realnih limita (dodatak 8.2).

3.4 PODEŠAVANJE TEŽINSKIH KOEFICIJENATA

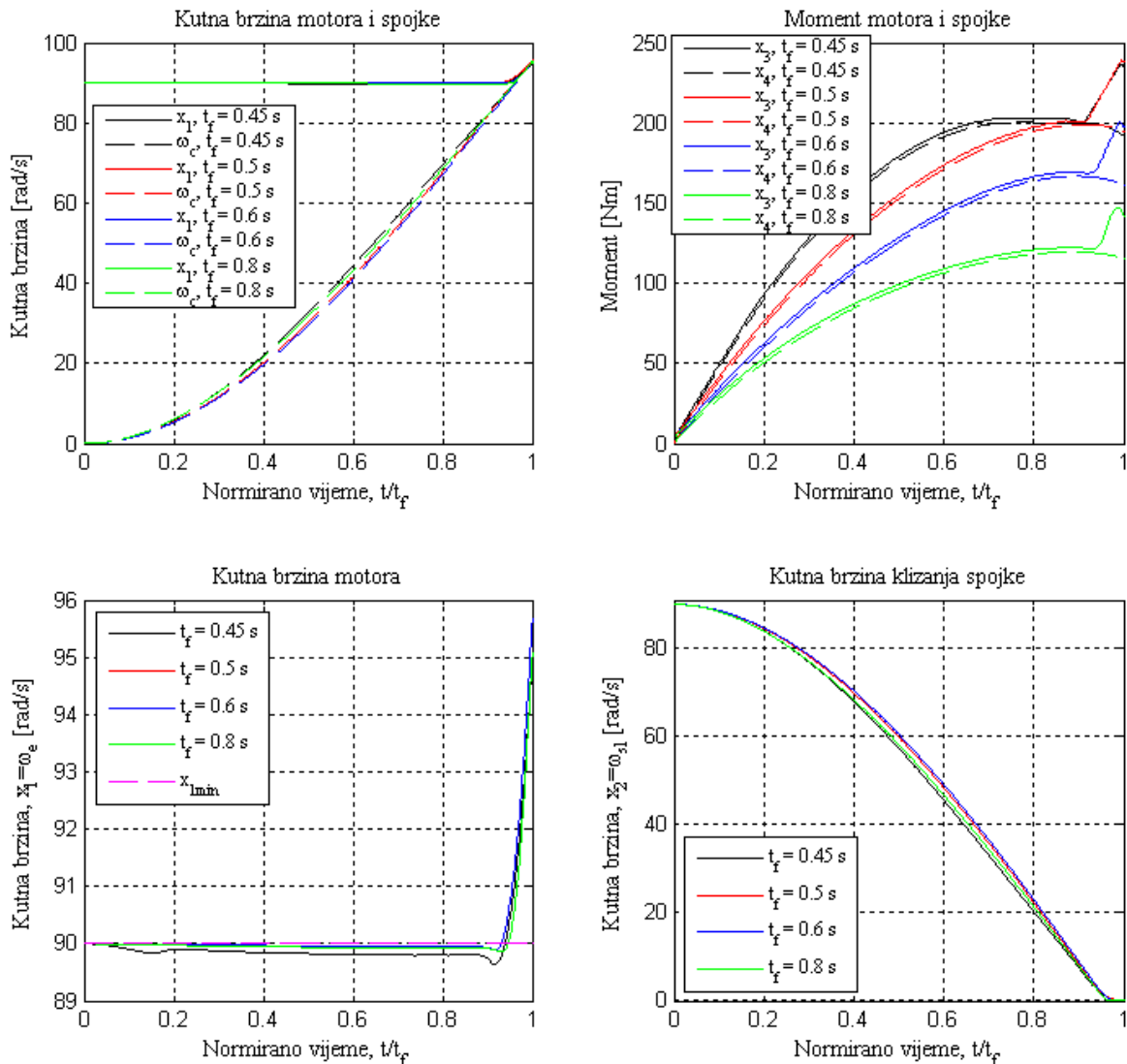
Težinski koeficijenti funkcije cilja (3.20)-(3.21) predstavljaju podesive parametre postupka optimiranja, koji se podešavaju na slijedeći način:

1. Težinski koeficijent K_{b1} postavlja se na vrijednost koja je dovoljno velika da se zadovolji rubni uvjet uključivanja spojke $x_2(t_f) = 0$. Istovremeno, podešava se težinski koeficijent K_{g1} kako bi se zadovoljio donji limit brzine motora. Paralelnim ugađanjem težinskih koeficijenata K_{c2} i K_{b1} može se olakšati zadovoljavanje uvjeta $x_2(t_f) = 0$. Ako tijekom ovog procesa iznosi momenta motora ili spojke prijeđu svoje limite potrebno je podesiti težinske koeficijente K_{g2} i K_{g4} .
2. Težinski koeficijent K_{b2} postavlja se na dovoljno velik iznos kako bi se zadovoljio uvjet „mekog“ ukapčanja $\dot{x}_2(t_f) = 0$.
3. Ukoliko iznosi derivacija momenta motora i spojke prijeđu zadana ograničenja podešavamo težinske koeficijente $K_{g6} - K_{g9}$.
4. Ako moment motora pokazuje značajne oscilacije, povećavamo iznos težinskog koeficijenta K_{c1} , kako bi se prigušio odziv.
5. Podešava se težinski koeficijent K_{t1} kako bi se maksimizirala brzina motora, a time i vozila.

3.5 REZULTATI OPTIMIRANJA I SIMULACIJE

U optimizacijski program, napisan u programskom jeziku C implementiran je matematički model pogona vozila (3.17), s početnim uvjetima (3.18) i funkcijom cilja (3.19). Primjenom optimizacijskog programa provedeno je optimiranje upravljačkih varijabli (momenta motora $x_3 = T_e$ i momenta spojke $x_4 = T_{cl}$). Optimiranje upravljačkih varijabli provedeno je za nekoliko vremena ukapčanja spojke t_f .

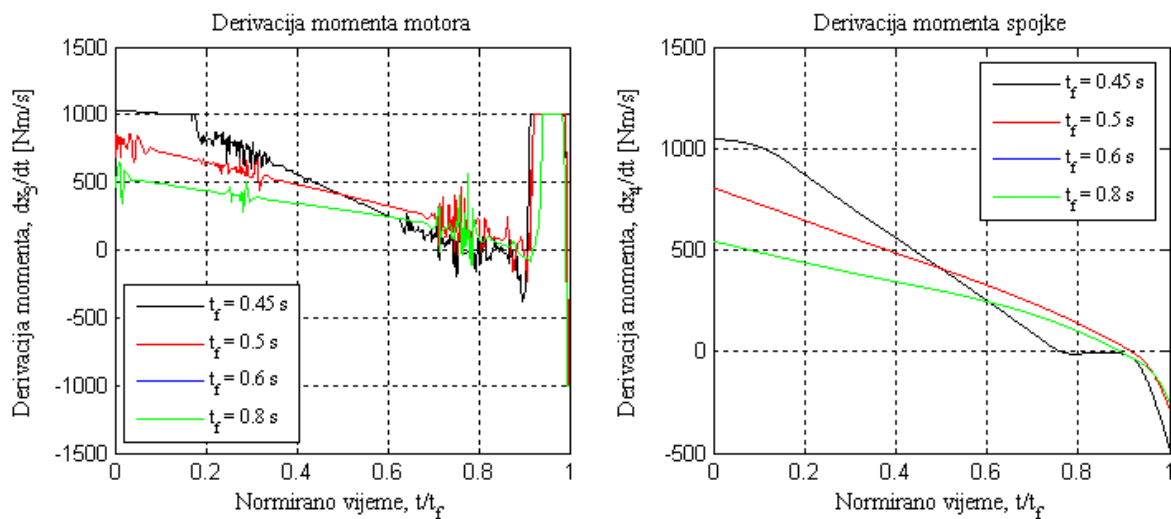
Rezultati optimiranja za različite iznose vremena ukapčanja t_f prikazani su u normiranom vremenu t/t_f na slikama 3.1-3.3. Kutna brzina motora $x_1 = \omega_e$ zadržava se na minimalnoj brzini motora $x_{1,min}$ sve do završne faze ukapčanja, dok se kutna brzina spojke ω_c podiže, u početnoj fazi lagano, a zatim približno linearno do završne faze ukapčanja kada se izjednači s kutnom brzinom motora i zajedno s njom dalje linearno raste (Slika 3.1). Kutna brzina motora zadržava se na minimalnoj brzini u većem dijelu odziva kako bi se minimizirala disipirana energija. Iz istog razloga, u početnoj fazi odziva dok je kutna brzina klizanja $x_2 = \omega_{sl} = \omega_e - \omega_c$ velika, moment spojke $x_4 = T_{cl}$ raste relativno sporo. Kutna brzina klizanja spojke nakon početnog laganog pada započinje gotovo linearno padati do završne faze ukapčanja kada se zbog zadovoljavanja uvjeta „mekog“ ukapčanja asimptotski približava nultoj vrijednosti. Asimptotsko približavanje postiže se naglim porastom momenta motora $x_3 = T_e$, koji prisiljava kutnu brzinu motora da poraste i da se približi kutnoj brzini spojke.



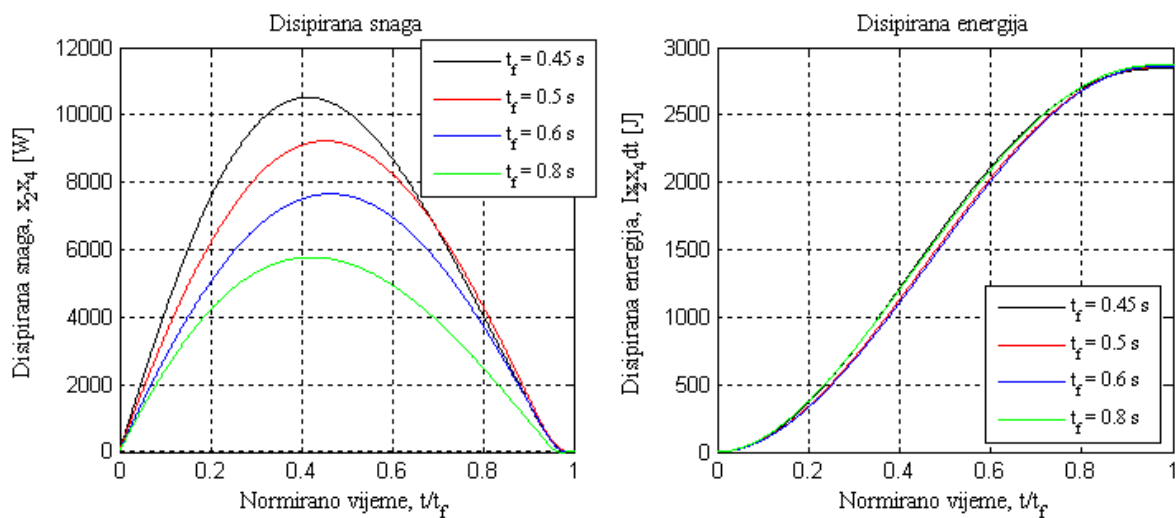
Slika 3.1 Rezultati optimiranja upravljačkih varijabli – kutne brzine i momenti motora i spojke.

Prema dobivenim rezultatima prikazanim u normiranom vremenu (Slika 3.1), vidljivo je da vrijeme ukapčanja t_f nema značajan utjecaj na dobivene oblike trajektorija kutne brzine motora i kutne brzine klizanja spojke. Također, disipirana energija u spojci ne zavisi o vremenu ukapčanja (Slika 3.3). Međutim, vrijeme ukapčanja ima značajan utjecaj na vršne iznose momenata (Slika 3.1) i disipirane snage (Slika 3.3), pri čemu smanjivanjem vremena ukapčanja rastu vršni iznosi momenta i disipirane snage.

Iznos minimalnog vremena ukapčanja određen je graničnim vrijednostima momenta motora i momenta spojke (Slika 3.1), kao i njihovim derivacijama (Slika 3.2). Kod vremena ukapčanja $t_f = 0.45$ s derivacija momenta motora (Slika 3.2) ulazi u limit u početnoj fazi ukapčanja, dok moment spojke doseže limit relativno rano, što onemogućava neko značajnije dodatno smanjenje vremena ukapčanja. Derivacija momenta motora kod svih vremena ukapčanja doseže svoj limit u završnoj fazi ukapčanja zbog naglog porasta momenta motora u svrhu ispunjenja uvjeta „mekog“ ukapčanja (Slika 3.2).

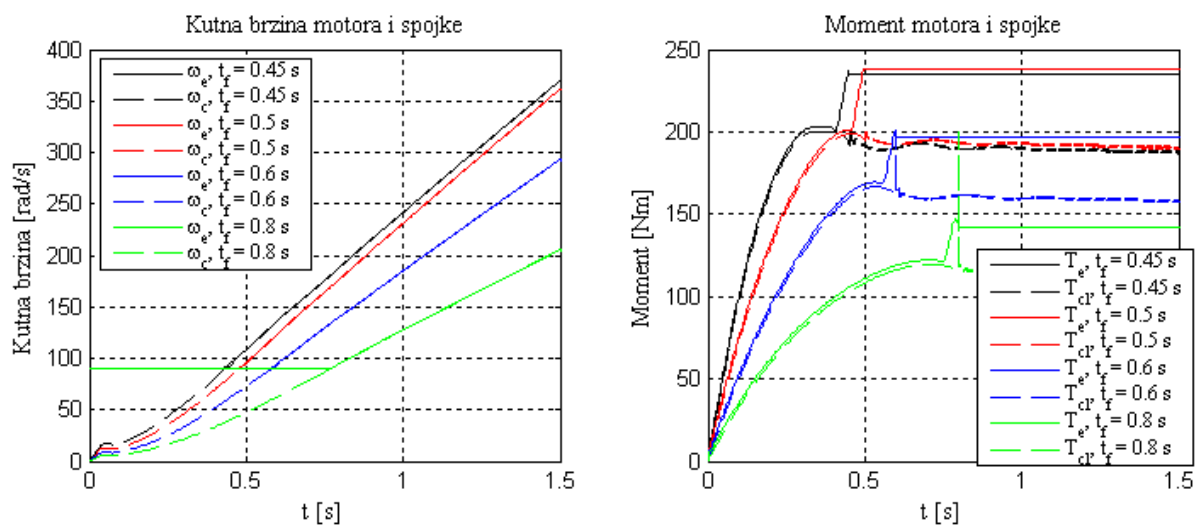


Slika 3.2 Rezultati optimiranja - derivacije upravljačkih varijabli (momenta motora i momenta spojke).

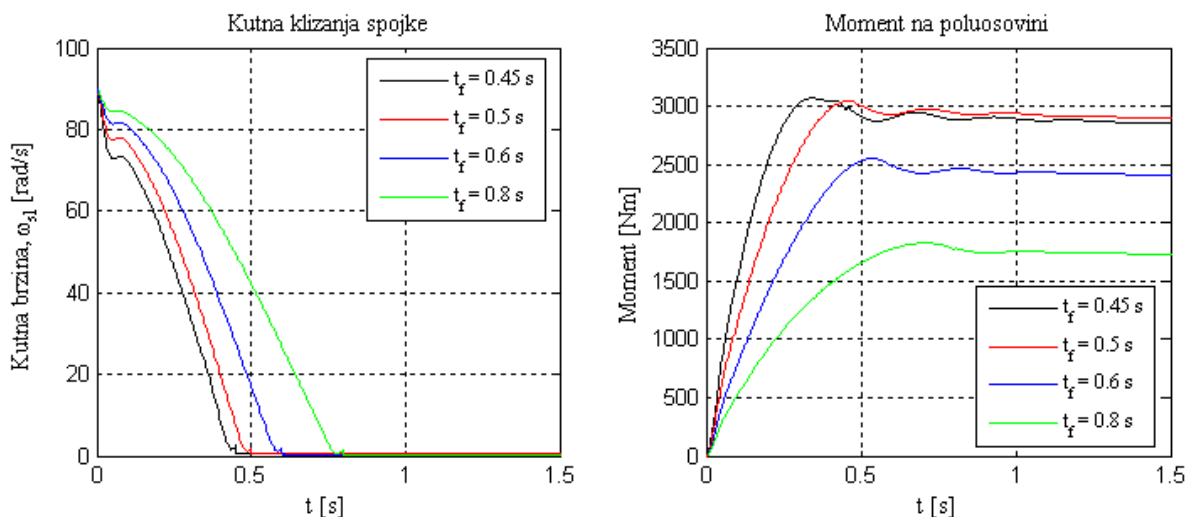


Slika 3.3 Rezultati optimiranja - disipirana snaga i disipirana energija u spojci.

Rezultati optimiranja provjereni su računalnom simulacijom procesa šestog reda, gdje se kao ulazne varijable procesa koriste optimirane trajektorije upravljačkih signala (momenta motora i momenta spojke). Nakon ukapčanja spojke moment motora se zadržava konstantnim ($T_e(t) = T_e(t_f)$, za $t > t_f$), dok je moment spojke sam po sebi dovoljno velik da zadrži spojku uključenom (Slika 3.4). Rezultati simulacije prikazani su na slikama (3.4 i 3.5) u nenormiranom vremenu. Kutne brzine motora i spojke imaju oblike slične prethodno dobivenima na modelu nižeg reda. Izvjesna razlika odnosi se na strmi početni rast kutne brzine spojke ω_c , tj. strmi početni pad brzine klizanja spojke ω_{sl} što je posljedica elastičnosti poluosovine (Slika 3.5). Izlazna kutna brzina spojke ω_c ima približno jednake iznose za sva vremena ukapčanja kod konačnog trenutka ukapčanja t_f , dok su dosegnute kutne brzine kod danog vremena $t > t_f$ veće kod manjih vremena ukapčanja t_f (bolja vozna svojstva). Slika 3.5 pokazuje da vibracije momenta poluosovine nakon trenutka ukapčanja t_f imaju malu amplitudu, što potvrđuje da je uvjet „mekog“ ukapčanja zadovoljen i na modelu višeg reda.



Slika 3.4 Rezultati simulacije – kutna brzina motora i kutna brzina spojke, te moment motora i spojke.



Slika 3.5 Rezultati simulacije - kutna brzina klizanja spojke i moment na poluosovini.

4 OPTIMALNA REGULACIJA STANJA

Rezultati optimalnog upravljanja iz poglavlja 3 nisu izravno upotrebljivi za regulaciju mjenjača jer su osjetljivi na poremećaje i pogreške modeliranja (npr. u otvorenom krugu). Stoga se u ovom poglavlju predlaže realni optimalni (LQR) regulator, koji kao referentne vrijednosti koristi optimalne trajektorije optimirane u poglavlju 3.

4.1 FORMULACIJA LQR REGULATOR

Dobivene optimalne trajektorije kutne brzine motora i kutne brzine klizanja spojke, za vrijeme ukapčanja $t_f = 0.6$ s, koriste se kao referentne trajektorije prilikom optimalne regulacije stanja. Za praćenje referentnih trajektorija koristi se linearni kvadratični regulator (LQR). Kako se ukapčanje spojke provodi unutar konačnog vremena, predlaže se sinteza LQR regulatora za konačni vremenski horizont, što ima za posljedicu vremenski promjenjiva pojačanja regulatora. Sinteza LQR regulatora izvršiti će se na pojednostavljenom modelu pogona vozila 2. reda, a ispitivanje LQR regulatora provest će se simulacijom procesa temeljenoj na modelu pogona šestog reda.

Model prikazan jednadžbama (3.11) i (3.12), može se zapisati na sljedeći način:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{\beta_e}{J_e}x_1(t) + \frac{1}{J_e}u_1(t) - \frac{1}{J_e}u_2(t), \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = \left(-\frac{\beta_e}{J_e} + \frac{\beta_v}{J_v}\right)x_1(t) - \frac{\beta_v}{J_v}x_2(t) + \frac{1}{J_e}u_1(t) - \left(\frac{1}{J_e} + \frac{1}{J_v}\right)u_2(t) + \frac{1}{J_v}T_L, \quad (4.2)$$

gdje je $x_1 = \omega_e$, $x_2 = \omega_{sl}$, $u_1 = T_e$ i $u_2 = T_{cl}$.

Sustav jednadžbi (4.1)-(4.2) daje se u prostoru stanju:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_e}{J_e} & 0 \\ -\frac{\beta_e}{J_e} + \frac{\beta_v}{J_v} & -\frac{\beta_v}{J_v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_e} & -\frac{1}{J_e} \\ \frac{1}{J_e} & -\left(\frac{1}{J_e} + \frac{1}{J_v}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_v} \end{bmatrix} T_L, \quad (4.3)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\Psi}T_L.$$

Početni uvjeti dinamičkog procesa su:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \omega_{e0} \\ \omega_{e0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \text{ rad/s} \\ 90 \text{ rad/s} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Za proces prikazan jednadžbama (4.3), s početnim uvjetima (4.4), treba pronaći upravljački vektor $\mathbf{u}(t)$ koji minimizira sljedeći kvadratični kriterij optimalnosti

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ref}(t))^T \mathbf{Q} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ref}(t)) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right] dt, \quad (4.5)$$

gdje je t_f odabrano konačno vrijeme. Izborom vrijednosti matrice \mathbf{S} utječe se na veličinu konačnog odstupanja $\mathbf{x}(t_f)$ (rubni uvjet), matricom \mathbf{Q} na kvalitetu i smanjenje oscilatornosti praćenja referentne trajektorije $\mathbf{x}_{ref}(t)$, a preko matrice \mathbf{R} utječe se na ograničenje iznosa energije upravljanja.

4.2 RICCATIJEVA MATRIČNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Linearni dinamički sustav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.6)$$

gdje je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ je vektor upravljanja, a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ su vremenski invarijantne (konstantne) matrice.

Cilj optimiranja je pronalazak upravljačkog vektora $\mathbf{u}(t)$ koji će minimizirati kvadratični kriterij optimalnosti

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (4.7)$$

gdje su $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ konstantne težinske matrice. \mathbf{S} je pozitivno-semidefinitna težinska matrica konačnog stanja (rubnog uvjeta), \mathbf{Q} je pozitivno-semidefinitna težinska matrica stanja sustava za vrijeme prijelaznog procesa, a \mathbf{R} je pozitivno-definitna realna simetrična matrica upravljačkih varijabli.

Poznato je da je rješenje problema optimalnog upravljanja dano s [6]

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t), \quad (4.8)$$

gdje je $\mathbf{K}(t)$ vremenski varijabilno rješenje Riccatijeve matrice diferencijalne jednačine

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = -\mathbf{K}(t) \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{K}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{D}_1 \mathbf{K}(t) - \mathbf{Q}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{K}(t_f) = \mathbf{S}, \quad (4.10)$$

uz

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T. \quad (4.11)$$

Uobičajeno se promatra slučaj kada terminalni trenutak teži u beskonačnost, $t_f \rightarrow \infty$, što daje $\dot{\mathbf{K}}(t) = 0$, te se Riccatijeve matrice diferencijalne jednačine reducira na dobro poznatu algebarsku jednačbu:

$$0 = -\mathbf{K}_S \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{K}_S + \mathbf{K}_S \mathbf{D}_1 \mathbf{K}_S - \mathbf{Q}, \quad (4.12)$$

koja se numerički rješava npr. primjenom Matlab naredbe *lqr* [14].

4.3 RJEŠENJE RICCATIJEVE MATRIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Ideja rješavanja matricne diferencijalne Riccatijeve jednadžbe (4.9) uz rubne uvjete (4.10) svodi se na transformaciju ove jednadžbe u Ljapunovljevu linearnu vektorsku jednadžbu s početnim uvjetima [5]. Najprije se Riccatijeva diferencijalna jednadžba (4.9) oduzme od stacionarne jednadžbe (4.12), što daje

$$-\dot{\mathbf{K}}(t) = (\mathbf{K}(t) - \mathbf{K}_S)\mathbf{A} + \mathbf{A}^T(\mathbf{K}(t) - \mathbf{K}_S) - \mathbf{K}(t)\mathbf{D}_1\mathbf{K}(t) + \mathbf{K}_S\mathbf{D}_1\mathbf{K}_S. \quad (4.13)$$

Jednadžba (4.13) može se nadalje zapisati kao

$$-\dot{\mathbf{K}}(t) = \mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_c + \mathbf{A}_c^T\mathbf{K}_1(t) - \mathbf{K}_1(t)\mathbf{D}_1\mathbf{K}_1(t), \quad (4.14)$$

uz

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{D}_1\mathbf{K}_S, \quad \mathbf{K}_1(t) = \mathbf{K}(t) - \mathbf{K}_S. \quad (4.15)$$

Koristeći jednadžbe (4.10) i (4.15), dobiva se

$$\mathbf{K}_1(t_f) = \mathbf{S} - \mathbf{K}_S. \quad (4.16)$$

Kako bi riješili jednadžbu (4.14), pretpostavlja se da je $\mathbf{K}_1(t_f)$ invertibilna, te se uvodi matrica $\mathbf{P}(t)$ preko transformacije

$$\mathbf{P}^{-1}(t) = \mathbf{K}_1(t). \quad (4.17)$$

Diferenciranje jednadžbe (4.17), daje

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = -\mathbf{P}^{-1}(t)\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{P}^{-1}(t). \quad (4.18)$$

Supstitucijom jednadžbi (4.17) i (4.18) u jednadžbu (4.14) dobiva se

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A}_c^T + \mathbf{A}_c\mathbf{P}(t) - \mathbf{D}_1, \quad (4.19)$$

pri čemu je rubni uvjet dan s

$$\mathbf{P}(t_f) = (\mathbf{S} - \mathbf{K}_S)^{-1}. \quad (4.20)$$

Uvođenjem nove vremenske varijable $t_1 = t_f - t$, jednadžbe (4.19) i (4.20) transformiramo u

$$\dot{\mathbf{P}}(t_1) = -\mathbf{P}(t_1)\mathbf{A}_c^T - \mathbf{A}_c\mathbf{P}(t_1) + \mathbf{D}_1, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{P}(0) = (\mathbf{S} - \mathbf{K}_S)^{-1}. \quad (4.22)$$

Jednadžba (4.21), predstavlja linearnu Lyapunovljevu matričnu diferencijalnu jednadžbu s početnim uvjetom (4.22), koja može biti riješena primjenom Kroneckerovog produkta [7,13] (vidi dodatak 8.3).

Primjenom operatora vektorizacije (dodatak 7.3) na jednadžbu (4.21) dobivamo

$$\text{vec}(\dot{\mathbf{P}}(t_1)) = -\text{vec}(\mathbf{P}(t_1)\mathbf{A}_c^T) - \text{vec}(\mathbf{A}_c\mathbf{P}(t_1)) + \text{vec}(\mathbf{D}_1). \quad (4.23)$$

Primjenom svojstva operatora vektorizacije matrice i Kroneckerovog produkta matrica (dodatak 7.3), $\text{vec}(\mathbf{AX}) = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{X})$ i $\text{vec}(\mathbf{XB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_m)\text{vec}(\mathbf{X})$ dobiva se

$$\text{vec}(\dot{\mathbf{P}}(t_1)) = -(\mathbf{A}_c \otimes \mathbf{I})\text{vec}(\mathbf{P}(t_1)) - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_c)\text{vec}(\mathbf{P}(t_1)) + \text{vec}(\mathbf{D}_1), \quad (4.24)$$

odnosno

$$\dot{\mathbf{P}}_v(t_1) = -[\mathbf{A}_c \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_c]\mathbf{P}_v(t_1) + (\mathbf{D}_1)_v, \quad (4.25)$$

gdje $\mathbf{P}_v(t_1)$ i $(\mathbf{D}_1)_v$ jesu vektorski oblici za matrice $\mathbf{P}(t_1)$ i \mathbf{D}_1 , a \otimes označava Kroneckerov produkt. Jednadžba (4.25) može se zapisati kao

$$\dot{\mathbf{P}}_v(t_1) = -\mathbf{A}_1\mathbf{P}_v(t_1) - (\mathbf{D}_1)_v, \quad (4.26)$$

gdje je

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{A}_c \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_c]. \quad (4.27)$$

Jednadžba (4.26) je linearna vektorska diferencijalna jednadžba s početnim uvjetom (4.22), koja se lako rješava simulacijom $n(n+1)/2=3$ linearnih diferencijalnih jednadžbi.

4.4 REFORMULACIJA LQR PROBLEMA

Slijedeći opis procesa prema izrazima (4.3), model pogona vozila 2. reda može se zapisati u obliku

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 90 \text{ rad/s} \\ 90 \text{ rad/s} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\Psi}T_L, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

gdje su a_{ij} , $i, j = 1, 2$ elementi matrice \mathbf{A} , b_{ij} , $i, j = 1, 2$ elementi matrice \mathbf{B} , a $\Gamma = T_L/J_v$. Potrebno je pronaći vektor upravljanja $\mathbf{u}(t)$ koji minimizira funkciju cilja

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ref}(t))^T \mathbf{Q} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ref}(t)) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right] dt. \quad (4.29)$$

Kako bi na sustav (4.28) s funkcijom cilja (4.29) mogli primijeniti prethodno izloženi postupak dobivanja optimalnog regulatora (4.8) temeljen na modelu procesa (4.6), model (4.28) zapisuje se u obliku

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \text{ rad/s} \\ 0 \text{ rad/s} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_c \bar{\mathbf{u}}(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0,$$

s funkcijom cilja

$$J = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T(t_f) \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{u}}^T(t) \mathbf{R} \bar{\mathbf{u}}(t)] dt, \quad (4.31)$$

gdje su uvedene supstitucije

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= x_1(t) - x_{1ref}(t), & \tilde{x}_2(t) &= x_2(t) - x_{2ref}(t), \\ \dot{\tilde{x}}_1(t) &= \dot{x}_1(t) - \dot{x}_{1ref}(t), & \dot{\tilde{x}}_2(t) &= \dot{x}_2(t) - \dot{x}_{2ref}(t), \end{aligned} \quad (4.32)$$

i novi transformirani vektor upravljanja $\bar{\mathbf{u}}(t)$. Vektor upravljanja $\bar{\mathbf{u}}(t)$ koji za sustav (4.30) minimizira funkciju cilja (4.31) ima slijedeći oblik

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_c^T \mathbf{K}(t) \tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (4.33)$$

Veza između transformiranog vektora upravljanja $\bar{\mathbf{u}}(t) = [\bar{u}_1(t) \ \bar{u}_2(t)]^T$ i originalnog vektora upravljanja $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$ dana je izrazima

$$\bar{u}_1(t) = -\dot{x}_{1ref}(t) + a_{11}x_{1ref}(t) + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t), \quad (4.34)$$

$$\bar{u}_2(t) = -\dot{x}_{2ref}(t) + a_{21}x_{1ref}(t) + a_{22}x_{2ref}(t) + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t) + \Gamma. \quad (4.35)$$

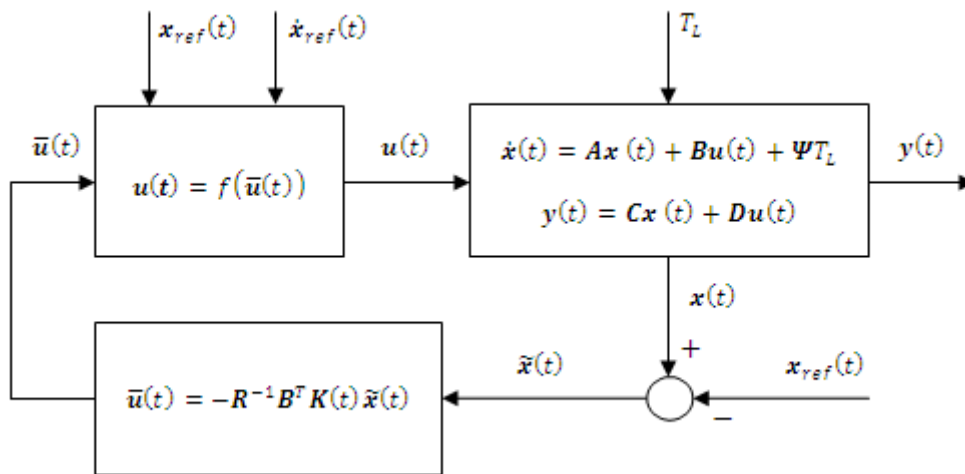
Konačni zakon upravljanja sadrži unaprijedna djelovanja po vektoru referenci $[x_{1ref} \ x_{2ref}]^T$; njenoj derivaciji, te po poremećaju Γ :

$$u_1 = \frac{(a_{11}x_{1ref} - \dot{x}_{1ref} - \bar{u}_1)b_{22} + (-a_{21}x_{1ref} - a_{22}x_{2ref} + \dot{x}_{2ref} - \bar{u}_2 - \Gamma)b_{12}}{(b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22})}, \quad (4.36)$$

$$u_2 = \frac{(a_{11}x_{1ref} - \dot{x}_{1ref} - \bar{u}_1)b_{21} + (-a_{21}x_{1ref} - a_{22}x_{2ref} + \dot{x}_{2ref} + \bar{u}_2 - \Gamma)b_{11}}{(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21})}, \quad (4.37)$$

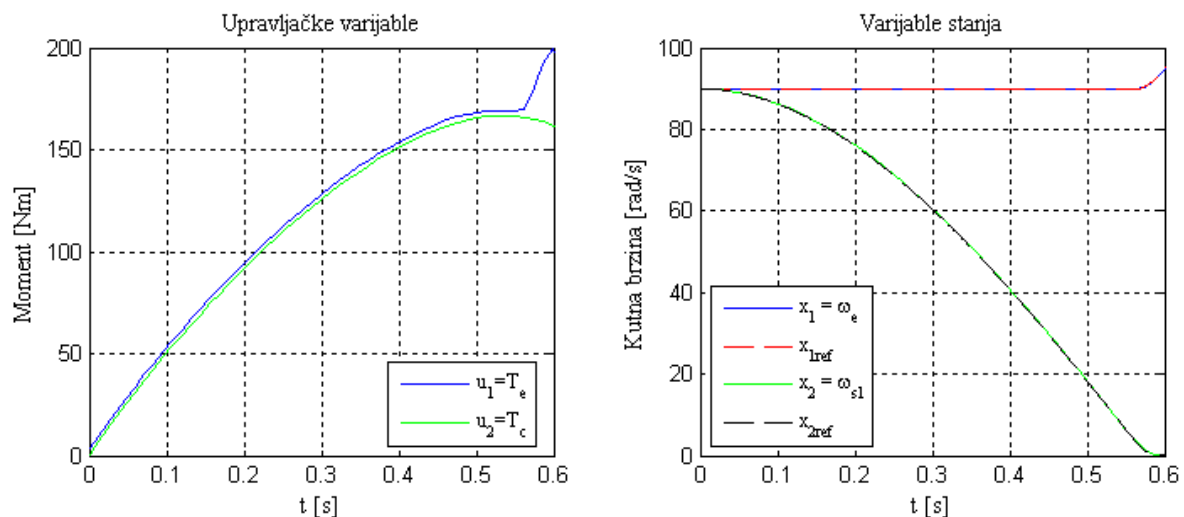
i optimalni regulator stanja (4.33) koji daje međuupravljački vektor $\bar{\mathbf{u}}(t) = [\bar{u}_1(t) \ \bar{u}_2(t)]^T$. Zbog preglednosti, izbjegnuto je označavanje eksplicitne ovisnosti o vremenu kod izraza (4.36) i (4.37).

Cjelokupni regulacijski sustav prikazan je blokovskim dijagramom na slici 4.1.

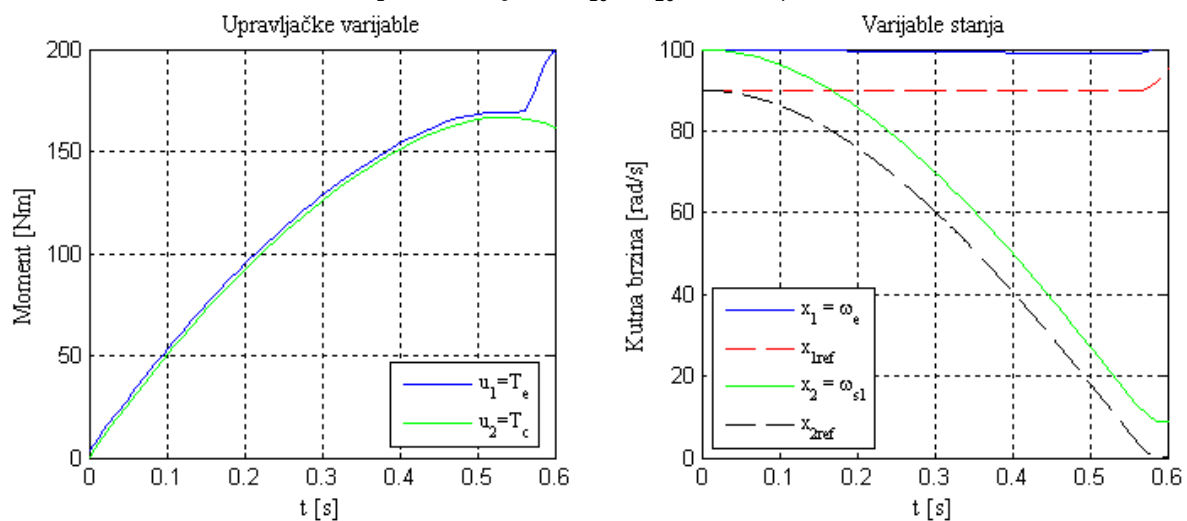


Slika 4.1 Blok shema konačnog zakona upravljanja.

Simulacijom rezultati prikazani na slici 4.2 potvrđuje se da unaprijedno djelovanje, pojačanje regulatora ($K(t) = 0$), omogućuje točno slijedenje referentne trajektorije. No, u prisustvu netočnih početnih stanja $\mathbf{x}(0)$ (ili bilo kojeg drugog poremećaja) javlja se pogreška slijedenja (Slika 4.3).



Slika 4.2 Rezultati simulacije sustav s čistim unaprijednim djelovanjem $K(t)$ na modelu procesa 2. reda s točnim početnim uvjetima $x_{10} = x_{20} = 90$ rad/s.



Slika 4.3 Rezultati simulacije sustav s čistim unaprijednim djelovanjem $K(t)$ na modelu procesa 2. reda s netočnim početnim uvjetima $x_{10} = x_{20} = 100$ rad/s.

4.5 PRIMJER SINTEZE OPTIMALNOG REGULATORA

Za sustav opisan sustavom diferencijalnih jednadžbi (4.30) vektor upravljanja $\bar{\mathbf{u}}(t)$ koji minimizira funkciju cilja (4.31), ima oblik (4.33), pri čemu su težinske matrice ciljne funkcije odabrane kao

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Za optimalni regulator (4.33) potrebno je odrediti vremenski varijabilnu matricu pojačanja $\mathbf{K}(t)$.

Matricu pojačanja $\mathbf{K}(t)$ dobivamo na slijedeći način:

Iz izraza (4.11) dobivamo \mathbf{D}_1

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Korištenjem jednadžbe (4.12) dobivamo \mathbf{K}_S , a zatim korištenjem jednadžbe (4.15) \mathbf{A}_c :

$$\mathbf{K}_S = \begin{bmatrix} 2.9687 & -0.1311 \\ -0.1311 & 14.0985 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -3.1728 & 0.1311 \\ -0.0299 & -14.1416 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Iz izraza (4.27) dobivamo \mathbf{A}_1 Kroneckerovim produktom

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{A}_c \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_c] = \begin{bmatrix} -6.3456 & 0.1311 & 0.1311 & 0 \\ -0.0299 & -17.3144 & 0 & 0.1311 \\ -0.0299 & 0 & -17.3144 & 0.1311 \\ 0 & -0.0299 & -0.0299 & -28.2832 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

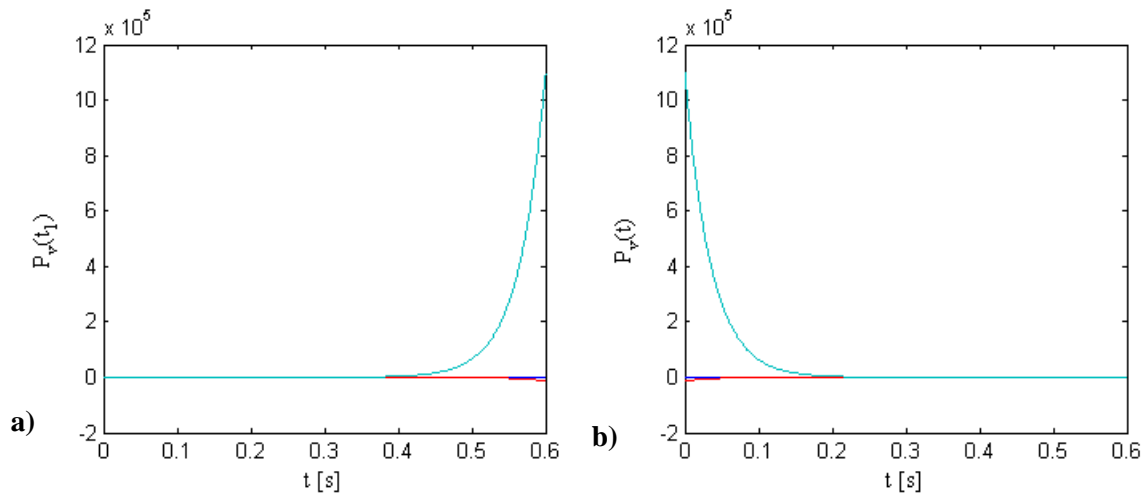
Pomoću izraza (4.26) dobivamo

$$\dot{\mathbf{P}}_v(t_1) = - \begin{bmatrix} -6.3456 & 0.1311 & 0.1311 & 0 \\ -0.0299 & -17.3144 & 0 & 0.1311 \\ -0.0299 & 0 & -17.3144 & 0.1311 \\ 0 & -0.0299 & -0.0299 & -28.2832 \end{bmatrix} \mathbf{P}_v(t_1) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Primjenjujući jednadžbu (4.22), dobivamo početne uvjete

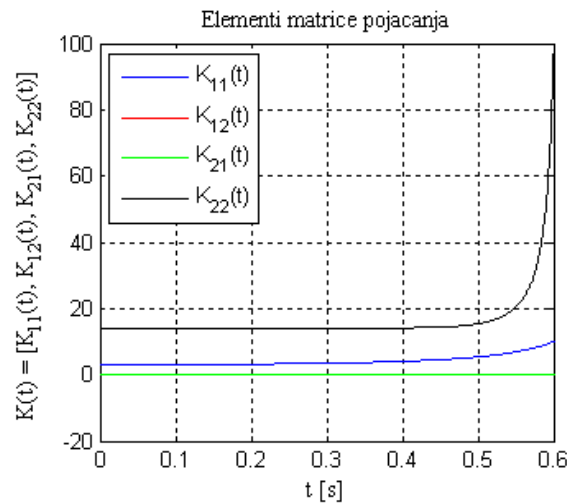
$$\mathbf{P}_v(0) = [-0.1422 \quad -0.0002 \quad -0.0002 \quad 0.0116]^T, \quad (4.42)$$

Rješenjem Lyapunovljeve diferencijalne jednadžbe (4.41) primjenom Matlab funkcije *ode45* dobivamo $\mathbf{P}_v(t_1)$. Rješenje $\mathbf{P}_v(t_1)$ se na trivijalan način transformira u vektor $\mathbf{P}_v(t)$ (pri čemu je $t = t_f - t_1$), a zatim inverznom vektorizacijom u matricu $\mathbf{P}(t)$.



Slika 4.4 a) Rješenje jednadžbe (4.41) $P_v(t_1)$, te b) pretvorba $P_v(t_1)$ u $P_v(t)$.

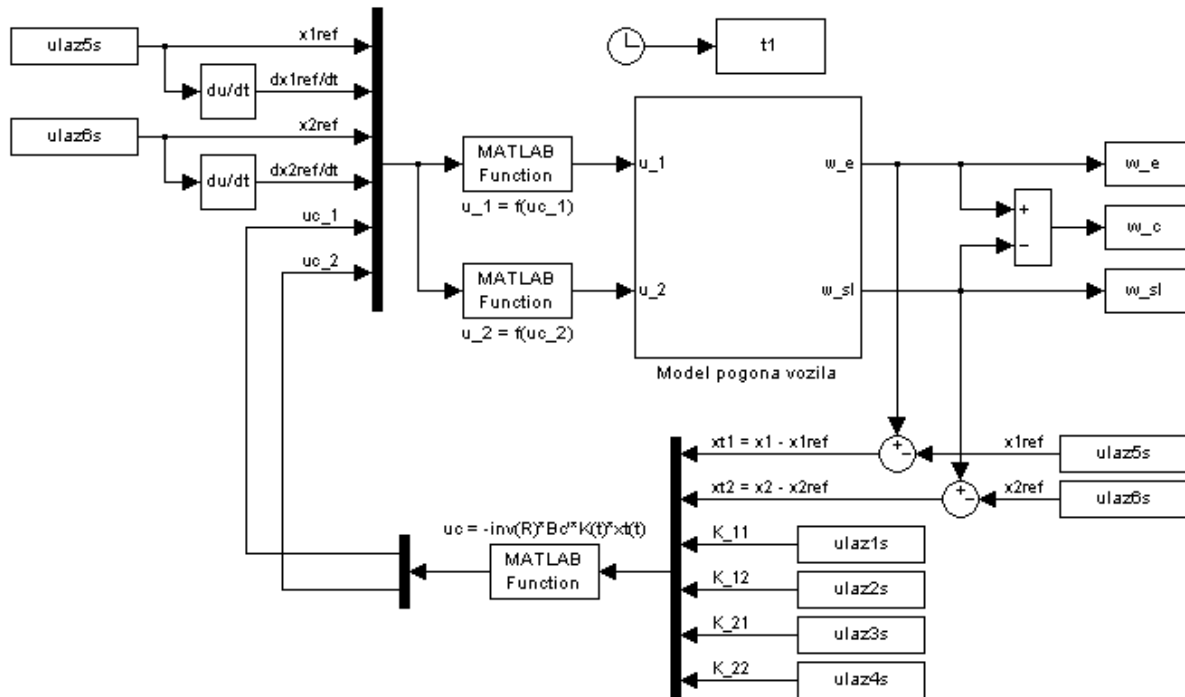
Pronalaskom $\mathbf{P}(t)$, korištenjem izraza (4.17) dobivamo $\mathbf{K}_1(t)$, pomoću kojeg primjenom izraza (4.15) i prethodno određenog stacionarnog pojačanja \mathbf{K}_s (primjenom Matlab funkcije *lqr*) dobivamo vremenski varijabilnu matricu pojačanja $\mathbf{K}(t)$ (Slika 4.5). Na početku ukapčanja spojke ($t \ll t_f = 0.6$ s), matrica pojačanja $\mathbf{K}(t)$ odgovara stacionarnom pojačanju \mathbf{K}_s . Kako se približava trenutak ukapčanja $t_f = 0.6$ s rastu pojačanje vremenski varijantnog LQR regulatora kako bi se povećala preciznost regulacije, naročito rubnog uvjeta $\omega_{sl}(t_f) = 0$.



Slika 4.5 Matrica pojačanja $\mathbf{K}(t)$ ($K_{12}(t)$ i $K_{21}(t)$ se poklapaju).

4.6 IMPLEMENTACIJA OPTIMALNOG REGULATORA I REZULTATI SIMULACIJE

Dobivanjem matrice pojačanja $K(t)$ imamo sve potrebno za implementaciju optimalnog regulatora (4.33). Optimalni regulator i unaprijedno djelovanje implementirano je u Matlabu/Simulinku, kako je prikazano na slici 4.6.



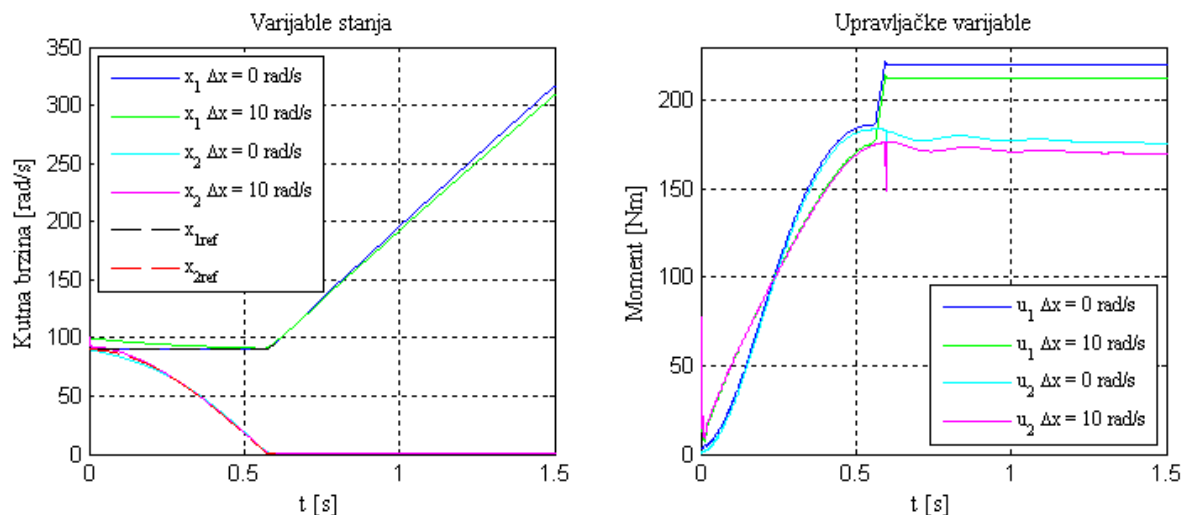
Slika 4.6 Simulacijski model u Simulinku.

Optimalni regulator ispitat ćemo simulacijom na procesu šestog reda tako da mijenjamo početne uvjete

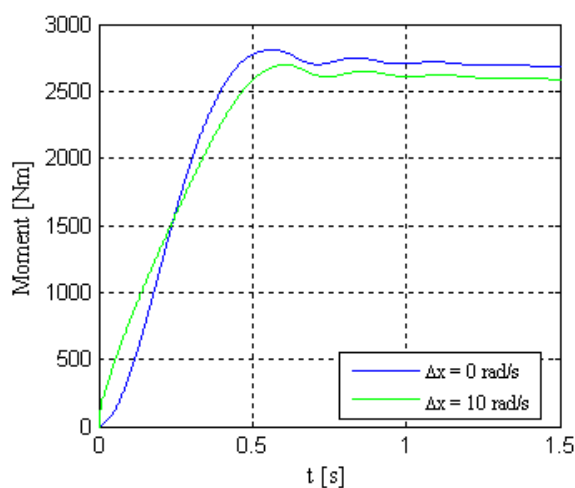
$$x_1(0) = x_{10} + \Delta x_{10},$$

$$x_2(0) = x_{20} + \Delta x_{20},$$

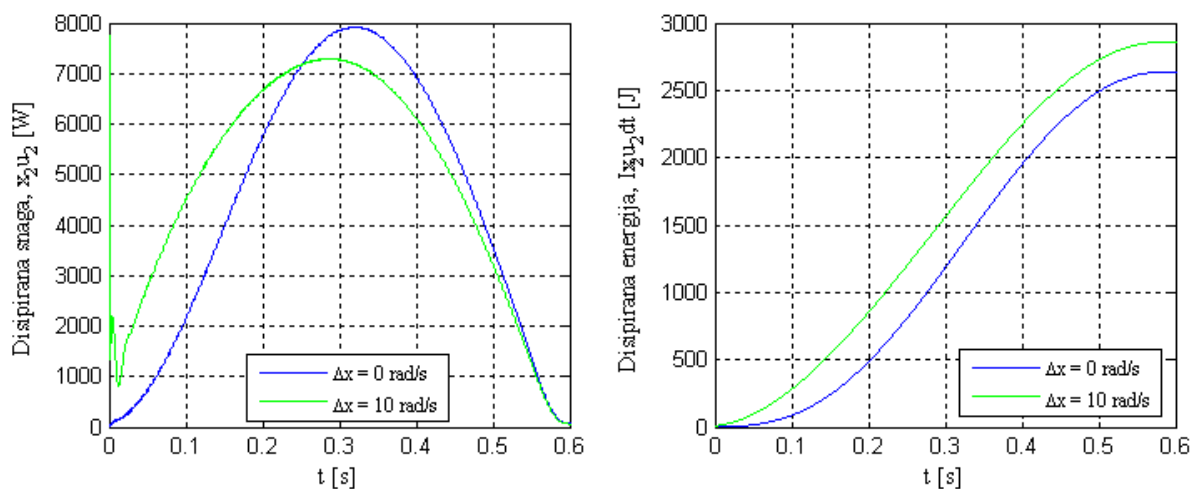
gdje je $x_{10} = x_{20} = 90 \text{ rad/s}$, dok će se poremećajno odstupanje od početnih uvjeta $\Delta x_{10} = \Delta x_{20}$ mijenjati. Nakon ukapčanja spojke moment motora je zadržan konstantnim ($T_e(t) = T_e(t_f)$, za $t > t_f$), dok je moment spojke dovoljno velik da zadrži spojku uključenom. Rezultati simulacije prikazani su na slikama 4.7-4.9. Kutna brzina motora $x_1 = \omega_e$ s porastom odstupanja od početnih uvjeta sporije se približava referentnoj trajektoriji ali je dobro zadovoljeno praćenje referentne trajektorije u završnoj fazi ukapčanja. Kutna brzina klizanja spojke $x_2 = \omega_{sl}$ (Slika 4.7) dobro prati referentnu trajektoriju i odstupanje od početnih uvjet nema značajan utjecaj na praćenje referentne trajektorije. Porastom odstupanja od početnih uvjeta iznosi momenata (Slika 4.7) kao i iznos disipirane snage se smanjuju, dok se iznos disipirane energije povećava (Slika 4.9). Disipirana snaga i disipirana energija prikazane su samo za vrijeme trajanja ukapčanja spojke ($t \leq t_f$). Slika 4.8 pokazuje da oscilacije momenta poluosovine nakon trenutka ukapčanja t_f imaju malu amplitudu, što potvrđuje da je praćenjem trajektorija dobivenih optimiranjem upravljačkih varijabli na modelu nižeg reda, zadovoljen uvjet „mekog“ ukapčanja i na modelu višeg reda uz primjenu LQR pristupa.



Slika 4.7 Rezultati simulacije LQR regulacije- kutna brzina motora $x_1 = \omega_e$ i kutna brzina klizanja spojke $x_2 = \omega_{sl}$, te moment motora $u_1 = T_e$ i moment spojke $u_2 = T_{cl}$.



Slika 4.8 Rezultati simulacije LQR regulacije - moment na poluosovini.



Slika 4.9 Rezultati simulacije LQR regulacije - disipirana snaga i disipirana energija u spojci.

5 ZAKLJUČAK

U radu su primijenjene napredne tehnike optimalnog upravljanja za rješavanje problema ukapčanja spojke automatiziranog mjenjača prilikom pokretanja vozila (ukapčanja u prvi stupanj prijenosa). Najprije je primjenom algoritma optimalnog upravljanja iz [2,3] provedeno optimiranje upravljačkih varijabli momenta motora i spojke za zadani kriterij optimalnosti, koji objedinjuje zahtjeve na maksimalnu brzinu vozila nakon ukapčanja spojke, minimalno pobuđivanje torzijski vibracija pogona i minimalnu disipiranu energiju u spojci. Optimalne trajektorije kutne brzine motora i kutne brzine klizanja spojke korištene su zatim kao referentne varijable optimalnog regulatora pogona vozila namijenjenog za izvođenje u realnom vremenu.

Rezultati optimiranja upravljačkih varijabli pogona pokazuju da se kutna brzina motora treba držati na minimalnom iznosu sve do završne faze ukapčanja spojke, kako bi se smanjila dispirana energija u spojci. U završnom dijelu odziva brzina motora naglo raste radi poboljšanja voznih svojstava. Nakon početnog blagog pada, optimalna trajektorija kutne brzine klizanja spojke ima približno linearni pad u većem dijelu odziva. Neposredno prije trenutka ukapčanja spojke, brzina klizanja se asimptotski približava nuli, kako bi se izbjegle torzijske vibracije pogona po ukapčanju spojke. Trajektorije brzine motora i brzine klizanja približno su neovisne o vremenu ukapčanja spojke, ako se prikažu u vremenu normiranom na vrijeme ukapčanja. Minimalno vrijeme ukapčanja ograničeno je maksimalnim momentom spojke i motora.

Za potrebe regulacije korišten je linearni kvadratični regulator (LQR) s unaprijednim djelovanjima po referentnim i poremećajnim varijablama. Kako se regulacija odvija u unaprijed poznatom konačnom vremenu koje odgovara vremenu ukapčanja spojke, predložen je vremenski varijantni LQR. U tu svrhu primijenjen je postupak transformacije nelinearne matrične diferencijalne Riccatijeve jednadžbe u linearnu Ljapunovljevu vektorsku diferencijalnu jednadžbum, koja se lako rješava simulacijom na računalo i dobiva vremenski varijantni vektor pojačanja regulatora. Simulacijski rezultati pokazuju da ovaj regulator osigurava precizno slijeđenje optimalnih referentnih trajektorija kutnih brzina u prisustvu poremećaja, uz točno vrijeme ukapčanja i bez pobuđivanja torzijskih vibracija pogona.

6 ZAHVALA

Zahvaljujem mentorima prof. dr. sc. Jošku Deuru i doc. dr. sc. Josipu Kasaću na korisnim savjetima, diskusijama, strpljenju i mentorstvu tijekom izrade ovog rada.

B.T.

7 POPIS LITERATURE

- [1] F. Garofalo, L. Glielmo, L. Iannelli, and F. Vasca, "Optimal tracking for automotive dry clutch engagement," *15th IFAC World Congress*, July 21-26, 2002, Barcelona, Spain.
- [2] J. Kasać, J. Deur, B. Novaković, M. Hancock, and F. Assadian, "Optimization of global chassis control variables," *17th IFAC World Congress*, July 6-11, 2008, Seoul, Korea.
- [3] J. Kasać, J. Deur, B. Novaković, I. Kolmanovsky, and F. Assadian, "A Conjugate Gradient-Based BPTT-like Optimal Control Algorithm with Vehicle Dynamics Control Application," submitted for *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- [4] M. H. M. Dassen, "Modeling and Control of Automotive Clutch System," Eindhoven, 22. 7. 2003., Report 2003.73.
- [5] J. Nazarzadeh, M. Razzaghi, K. Y. Nikraves, „Solution of the Matrix Riccati Equation for the Linear Quadratic Control Problems“, *Mathl. Comput. Modelling* Vol. 27, No. 7, pp. 51-55, 1998.
- [6] J. Kasać, „Vođenje tehničkih sustava - materijali za predavanja i vježbe“, Interna skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2007.
- [7] J. Kasać, „Opća teorija sustava – linearne matrične jednadžbe“, Interna skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2009.
- [8] U. Kiencke and L. Nielsen, *Automotive Control Systems*, New York, Springer-Verlag, 2005, ch. 7.
- [9] M. Bernd, "Dual Clutch Transmission – Lessons Learned and Future Potential," SAE paper #2005-01-1021, 2005.
- [10] J. T. Betts, „Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming“, SIAM Advances in Design and Control, Philadelphia, 2001.
- [11] Jecić, S., *Mehanika II, Kinematika i dinamika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.
- [12] *Tehnika motornih vozila*, HOK/POUZ, Zagreb, 2005.
- [13] P. J. Olver and C. Shakiban. *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall, 2005.
- [14] M. Essert, T. Žilić, „Matlab – matrični laboratorij“, Interna skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2004
- [15] D. Hrovat and W.E. Tobler, "Bond graph modeling of automotive power trains", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 328, no. 5-6, pp. 623-662, 1991.

8 DODACI

8.1 PARAMETRI MATEMATIČKOG MODELA

Za sintezu i simulaciju korišteni su slijedeći realni parametri osobnog automobila srednje veličine:

$$J_e = 0.147 \text{ kgm}^2, \beta_e = 0.03 \text{ Nms}, J_c = 0.004 \text{ kgm}^2, k_{cm} = 1500 \text{ Nm}, \beta_{cm} = 1 \text{ Nms},$$

$$J_m = 0.008 \text{ kgm}^2, J_{s_1} = 0.05 \text{ kgm}^2, J_{s_2} = 0.015 \text{ kgm}^2, J_t = 0.0005 \text{ kgm}^2,$$

$$k_{tw} = 20000 \text{ Nm}, \beta_{tw} = 250 \text{ Nms}, \beta_w = 7.32 \text{ Nms}, J_w = 166 \text{ kgm}^2.$$

Prijenosni omjer i_g možemo odabrati za pet različitih brzina (1/0.256, 1/0.35, 1/0.5, 1/0.75, 1/0.95) i $i_d = 4$, prijenosni omjer diferencijala. Moment tereta T_{load} pretpostavlja se kao konstantan i iznosi 10 Nm.

8.2 IZNOSI GRANIČNIH VRIJEDNOSTI VARIJABLI STANJA

Prilikom optimiranja upravljačkih varijabli u funkciji cilja (3.19) postavljena su ograničenja na iznose varijabli stanja (3.21). Iznosi realnih graničnih vrijednosti korištenih u optimiranju su slijedeći: $x_{1,\min} = 90 \text{ rad/s}$, $x_{3,\min} = 0 \text{ Nm}$, $x_{3,\max} = 250 \text{ Nm}$, $x_{4,\min} = 0 \text{ Nm}$, $x_{4,\max} = 200 \text{ Nm}$, $\dot{x}_{3,\min} = -1000 \text{ Nm/s}$, $\dot{x}_{3,\max} = 1000 \text{ Nm/s}$, $\dot{x}_{4,\min} = -4000 \text{ Nm/s}$, $\dot{x}_{4,\max} = 4000 \text{ Nm/s}$.

8.3 KRONECKEROV PRODUKT

8.3.1 DEFINICIJA

Kroneckerov produkt matrica $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ definiran je na slijedeći način

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

točnije

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

gdje je $A \otimes B \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$.

Kroneckerov produkt $A \otimes B$ je $m \times n$ blok matrica, čiji (i, j) – blok je $p \times q$ matrica $a_{ij}B$.

8.3.2 SVOJSTVA

Bilinearnost i asocijativnost

Kroneckerov produkt je specijalan slučaj tenzorskog produkta, tako je bilinearan i asocijativan

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}, \\
(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} &= \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}, \\
(k\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} &= \mathbf{A} \otimes (k\mathbf{B}) = k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}), \\
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} &= \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}),
\end{aligned} \tag{6.2}$$

gdje su \mathbf{A}, \mathbf{B} i \mathbf{C} matrice, a k je skalar.

Kroneckerov produkt općenito nije komutativan, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ i $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ su različite matrice. Međutim, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ i $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ su permutacijski ekvivalentne, znači da postoje permutacijske matrice \mathbf{P} i \mathbf{Q} takve da

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{P}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})\mathbf{Q}. \tag{6.3}$$

Ako su \mathbf{A} i \mathbf{B} kvadratne matrice, tada $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ i $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ su čak permutacijski slične, znači da možemo uzeti $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T$.

Svojstvo mješovitog produkta

Ako su matrice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} takvih dimenzija da se može formirati produkt \mathbf{AC} i \mathbf{BD} , tada

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}. \tag{6.4}$$

To je svojstvo mješovitog produkta, jer kombinira običan produkt matrica i Kroneckerov produkt. Slijedi da je $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ invertibilan ako i samo ako \mathbf{A} i \mathbf{B} nisu singularne, u tom slučaju inverz je dan

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}. \tag{6.5}$$

Kroneckerova suma

Ako je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $\mathbf{I}_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ označava $k \times k$ jediničnu matricu, tada možemo definirati tzv. Kroneckerovu sumu

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}. \tag{6.6}$$

Za Kroneckerovu sumu matrica imamo slijedeći matični eksponencijal

$$e^{\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \otimes e^{\mathbf{B}}. \tag{6.7}$$

Nadalje, za kvadratne matrice, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, vrijede slijedeća svojstva

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) &= \text{tr}(\mathbf{A})\text{tr}(\mathbf{B}), \\
\det(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) &= \det(\mathbf{A})^n \det(\mathbf{B})^m, \\
\text{rank}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) &= \text{rank}(\mathbf{A})\text{rank}(\mathbf{B}), \\
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

8.3.3 VEKTORIZACIJA MATRICA

Vektorizacija matrica je transformacija matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ u vektor $\text{vec}(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}^{mn}$,

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = [a_{11} \ \cdots \ a_{m1} a_{12} \ \cdots \ a_{m2} \ \cdots \ a_{1n} \ \cdots \ a_{mn}]^T. \quad (6.9)$$

Za operator vektorizacije vrijedi svojstvo linearnih operatora

$$\text{vec}(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha \text{vec}(\mathbf{A}) + \beta \text{vec}(\mathbf{B}). \quad (6.10)$$

Vektorizacija se često koristi zajedno s Kroneckerovim produktom.

Slijedeća svojstva operatora vektorizacije matrica i Kroneckerovog produkta matrica koriste se za njihovu primjenu u rješavanju linearnih matičnih jednažbi:

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{AX}) &= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{X}), \\ \text{vec}(\mathbf{XB}) &= (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_m)\text{vec}(\mathbf{X}), \\ \text{vec}(\mathbf{AX} + \mathbf{XB}) &= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_m)\text{vec}(\mathbf{X}), \\ \text{vec}(\mathbf{AXB}) &= (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (6.11)$$

9 SAŽETAK

Tepeš Bojan: Optimalno upravljanje pogonom vozila s automatiziranim mjenjačem

Kod automatiziranih mjenjača računalo upravlja radom spojke i motora s unutarnjim izgaranjem, kako bi se smanjio upravljački napor vozača, te postigle visoke vozne značajke pogona, udobnost vožnje i niska potrošnja. Radi zadovoljenja ovih često oprečnih upravljačkih zadataka neophodno je koristiti tehnike optimalnog upravljanja. U ovom se radu predlaže projektiranje sustava upravljanja automatiziranim mjenjačem primjenom naprednih pristupa optimalnog upravljanja. Prvo se provodi numeričko optimiranje upravljačkih varijabli pogona za zadani sveobuhvatni kriterij optimalnosti. Zatim se optimalne trajektorije kutne brzine motora i kutne brzine klizanja spojke koriste kao referentne varijable optimalnog regulatora. S obzirom na konačni vremenski horizont upravljanja vezan uz konačno vrijeme ukapčanja spojke, predlaže se vremenski varijantni oblik linearnog kvadratičnog regulatora s unaprijednim djelovanjima po referentim i poremećajnim varijablama.

Ključne riječi: Optimalno upravljanje, automatizirani mjenjač, spojka, sinteza, linearni kvadratični regulator

10 SUMMARY

Bojan Tepeš: Optimal Control of Automotive Power Train with Automated Transmission

In automated transmissions, a computer controls the clutch and internal combustion engine, in order to reduce the driver's control effort, and achieve good driving performance, high level of driving comfort, and low fuel consumption. With the aim to satisfy these often opposite control requirements, it is necessary to apply optimal control techniques. In this work, design of the automated transmission control system is proposed using advanced optimal control approaches. First, numerical optimization of the power train control variables is conducted for a given comprehensive optimal criterion. Next, the engine and clutch slip speed trajectories are used as reference variables of an optimal feedback controller. Since the time horizon is finite due to the finite clutch engagement time, the use of a time-variant form of the linear quadratic controller is proposed, which also includes feedforward actions with respect to reference and disturbance variables.

Keywords: Optimal control, automated transmission, clutch, design, linear quadratic regulator

ŽIVOTOPIS

Bojan Tepeš rođen je 1986. godine u Celju, Slovenija. Nakon završetka Tehničke škole Ruđer Bošković u Zagrebu, 2005. godine upisao je Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Na drugoj godini studija opredijelio se za smjer Mehatronika i robotika. Preddiplomski dio studija završio je 2009. godine uz obranu završnog rada pod nazivom "Modeliranje i regulacija automatskog mjenjača s dvostrukom spojkom" uz mentorstvo prof. dr. sc. Joška Deura. Trenutno pohađa zadnji semestar diplomskog studija na istom smjeru. Na studiju se iskazao redovitim polaganjem ispita uz visoki ukupni prosjek ocjena od 4,6.