

Sveučilište u Zagrebu
PMF–Matematički odjel

Dražen Petrović

O JEDNOM KONTRAPRIMJERU U TEORIJI TIJEŠTENJA

Zagreb, 2010.

Ovaj rad izrađen je u Zavodu za topologiju PMF–Matematičkog odjela Sveučilišta u Zagrebu pod vodstvom doc. dr. sc. Sonje Štimac i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2009./2010.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Dinamika jednodimenzionalnih preslikavanja	3
2.1	Osnovni pojmovi i definicije	3
2.2	Simbolička dinamika	8
2.3	Unimodalne funkcije	13
2.4	Itinereri i nizovi tiještenja	15
2.5	Topološka entropija	18
3	Rezultati	23
4	Zaključak	37
	Zahvale	39
	Literatura	40
	Sažetak	42
	Summary	43

1 Uvod

Teorija dinamičkih sustava izvire kao posebna tema iz teorije običnih diferencijalnih jednadžbi krajem devetnaestog stoljeća. H. Poincaré prvi promatra globalna svojstva rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi drugoga reda. Sustavno uvodi topološke metode i pojam trajektorije.

Istovremeno A. M. Ljapunov otkriva svoju teoriju stabilnosti rješenja sustava n običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Precizno definira stabilnost i asimptotičku stabilnost. No, A. M. Ljapunov proučava strogo lokalna svojstva rješenja, te je njegova teorija potpuno različita od Poincaré-ove teorije.

Suštinsku ulogu u formulaciji apstraktnih pojmova u teoriji dinamičkih sustava imali su A. A. Markov i H. Whitney, no istinski temelj teorija dinamičkih sustava dobiva u radovima G. D. Birkhoffa. Njegova poznata monografija [2] iz 1927. godine bila je poticaj mnogim istraživanjima u tridesetim i četrdesetim godinama prošlog stoljeća.

Godine 1964., A. N. Šarkovski objavljuje značajan rad [13] o periodičnim točkama neprekidnih funkcija na segmentu. Rad je objavljen u Ukrajini, te 1975. godine T.-Y. Li i J. A. Yorke objavljuju sličan rezultat u [7]. Godine 1977., J. Milnor i W. Thurston uvode invarijante tiještenja u [9]. To su bili važni poticaji za razvoj teorije dinamičkih sustava.

Jednodimenzionalni diskretni dinamički sustavi značajni su i zanimljivi iz više razloga. Istraživanje preslikavanja realnog segmenta izgleda kao jednostavan zadatak, no takva preslikavanja mogu imati bogatu i složenu dinamiku. Uz to, razumijevanje problema jednodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sustava često nam rasvjetljava mnoge probleme koji se pojavljuju kod višedimenzionalnih dinamičkih sustava.

U ovom radu posebna pažnja posvećena je neprekidnim simetričnim šatorskim funkcijama na jediničnom segmentu, to jest njihovim reskaliranim jezgrama. Promatramo višestruko djelovanje jedne reskalirane jezgre na određenu točku. Preciznije, gledat ćemo kako takva funkcija djeluje na kritičnu točku, to jest točku u kojoj se poprima maksimum. Ponašanje tog djelovanja kodiramo nizom elemenata, iz skupa od tri simbola, kojeg zovemo itinerer. Itinerer prve iteracije kritične točke nazivamo nizom tiještenja.

Poznato je da dvije šatorske funkcije s različitim nagibima posjeduju različite nizove tiještenja. Komponiranjem različitih jezgri dobivamo multimodalnu funkciju i u toj situaciji teorija tiještenja postaje mnogo kompliciranija. Stoga se i nameće pitanje može li se ona za određenu klasu multimodalnih funkcija pojednostavniti.

Promatrat ćemo nizove tiještenja reskaliranih jezgri dviju šatorskih funkcija, te pokušati odgovoriti na pitanje možemo li na temelju dvaju beskonačnih nizova, koji su sastavljeni od tri simbola, vršenjem određenih „operacija” dobiti niz tiještenja koji odgovara kompoziciji dviju promatranih jezgri. Odnosno, zanima nas „veza” između kompozicije jezgri i šatorske funkcije koja ima isti niz tiještenja kao i sama kompozicija. Pod pojmom „veze” podrazumjevamo da postoji homeomorfizam $h : A \rightarrow B$ između dinamičkih sustava $f : A \rightarrow A$ i $g : B \rightarrow B$, takav da je $h \circ f = g \circ h$ i pri čemu su A i B segmenti realnih brojeva. U tom slučaju kažemo da su funkcije f i g topološki konjugirane ili, jednostavnije, konjugirane. Činjenica da su dva sustava konjugirana govori da oni imaju esencijalno iste dinamike. Osim što je pitanje samo po sebi dovoljno intrigantno, zanimljivost ovoga rada leži i u činjenici da do sada nije bilo odgovora na to pitanje.

2 Dinamika jednodimenzionalnih preslikavanja

2.1 Osnovni pojmovi i definicije

Osnovni cilj teorije dinamičkih sustava jest razumijevanje završnog ili asimptotičkog ponašanja dinamičkog procesa. Ako je fenomen koji se proučava opisan diferencijalnom jednačbom čija je nezavisna varijabla vrijeme, onda teorija pretendira odgovoriti kako će se rješenje problema ultimativno ponašati u dalekoj budućnosti, ili pak, kako se ponašalo u dalekoj prošlosti.

Ukoliko je proces diskretan, kao što je iteriranje funkcije, tada teorija pokušava odgovoriti kakvo će biti ponašanje niza točaka

$$x, f(x), (f \circ f)(x), \dots, \underbrace{(f \circ f \dots \circ f)(x)}_{n \text{ puta}}, \dots$$

kako se n povećava. Ovdje postavljamo pitanja koja isprva zvuče krajnje nematematički: gdje točke odlaze i što čine tamo gdje već dođu? Iako pitanje zvuči krajnje jednostavno, dati odgovor kad-kad je vrlo iscrpan posao.

Definirajmo sada osnovne pojmove koje ćemo intenzivno koristiti u ovome radu. Radi jednostavnije notacije, pišemo: $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$, za $n > 2$.

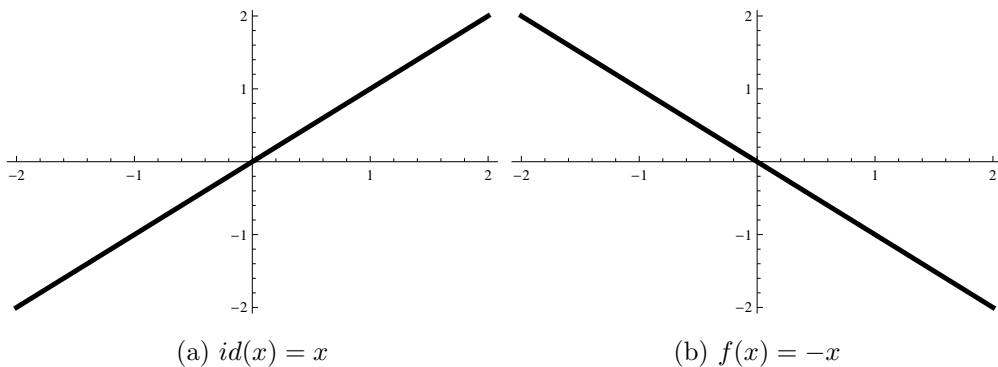
Definicija 2.1.1. Neka su $I, J \subset \mathbb{R}$ segmenti. Za funkciju $f : I \rightarrow J$ kažemo da je *homeomorfizam* ako je f neprekidna bijekcija čiji je inverz također neprekidna funkcija.

Definicija 2.1.2. *Prednjom orbitom* točke x zovemo skup $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x), f^n(x), \dots\}$ koji označavamo $O^+(x)$. Ako je f homeomorfizam, tada definiramo *punu orbitu* od x , u oznaci $O(x)$, kao skup $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$. *Stražnja orbita* $O^-(x)$ točke x je skup $\{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots, f^{-n}(x), \dots\}$.

Osnovni cilj teorije jest razumijeti sve orbite nekog preslikavanja. Prednje orbite neke točke mogu biti poprilično komplicirani skupovi već za jednostavne nelinearne funkcije. Međutim, postoje neke orbite koje su jednostavnije za proučavanje, a koje pak igraju centralnu ulogu u cijeloj teoriji.

Definicija 2.1.3. Točka x je *fiksna točka* za funkciju f ako je $f(x) = x$. Točka x je *periodična točka* perioda n ako je $f^n(x) = x$. Najmanji nenegativan cijeli broj n za koji je $f^n(x) = x$ nazivamo *osnovnim periodom* od x .

Skup periodičnih točaka perioda (ne nužno osnovnog) n označavamo sa $Per_n(f)$, a skup svih fiksnih točaka sa $Fix(f)$. Očito je $Fix(f) \subseteq Per_n(f)$. Nadalje, skup svih periodičnih točaka funkcije f , u oznaci $Per(f)$, je unija po $n \in \mathbb{N}$ svih skupova periodičnih točaka perioda n , to jest $Per(f) = \cup_{n \in \mathbb{N}} Per_n(f)$. Uočimo da preslikavanja mogu imati mnogo fiksnih točaka. Primjerice, identiteta na skupu realnih brojeva $id(x) = x$ fiksira sve točke iz \mathbb{R} . S druge strane, preslikavanje $f(x) = -x$ fiksira samo ishodište, dok su sve ostale točke periodične točke s osnovnim periodom 2 jer je $f(x) = -x$, a $f^2(x) = f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x$.

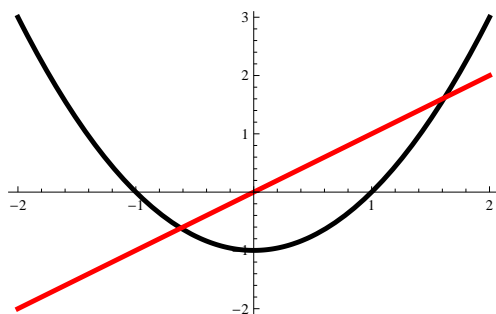


Slika 1: Atipični dinamički sustavi

Napomenimo ovdje da su gornji primjeri vrlo atipični dinamički sustavi. Naime, preslikavanja kod kojih imamo čitave intervale fiksnih ili periodičnih

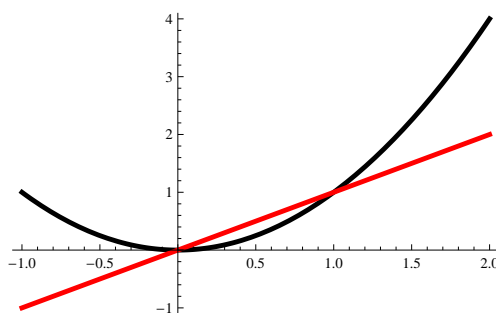
točkaka su vrlo rijetki, osobito zato jer periodične točke imaju tendenciju da budu više raspršenije na realnoj osi.

Sljedeći jednostavan primjer na kojem možemo ilustrirati pojmove iz Definicije 2.1.3 je funkcija $f(x) = x^2 - 1$. Rješavajući kvadratnu jednadžbu $x^2 - 1 = x$ dobivamo da su $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ fiksne točke, a 0 i -1 leže na periodičnoj orbiti perioda 2 jer $0 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{f} 0$. Uočimo da ova notacija osim što pojednostavljuje zapis kompozicije funkcija $(f \circ f)(0) = 0$ i $(f \circ f)(-1) = -1$, omogućuje da lakše pratimo ponašanje promatrane točke višestrukom primjenom funkcije f .



Slika 2: Funkcija $f(x) = x^2 - 1$

Promotrimo sada funkciju $f(x) = x^2$.



Slika 3: Funkcija $f(x) = x^2$

S obzirom da je $f(1) = 1$, zaključujemo da je 1 fiksna točka. Nadalje, $f(-1) = 1$. Primijetimo da se točka -1 u prvoj iteraciji preslikala u fiksnu

točku 1 koja je ujedno i periodična točka osnovnog perioda 1. Ovaj fenomen je sam po sebi, koliko god jednostavno izgledao, zanimljiv jer sugerira da postoje preslikavanja i točke koje će se nakon određenog broja iteracija preslikati u periodične ili fikse točke. To motivira sljedeću definiciju:

Definicija 2.1.4. Točka x je *predperiodična* perioda n ako postoji $m > 0$ takav da je $f^{n+i}(x) = f^i(x)$ za svaki $i \geq m$. Odnosno, $f^i(x)$ je periodična točka za $i \geq m$.

Definicija 2.1.5. Neka je $I = [0, 1]$ jedinični segment. Funkciju $T_s : I \rightarrow I$ definiranu sa

$$T_s(x) = \begin{cases} sx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ s(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

nazivamo *šatorska funkcija s nagibom* $s \in [1, 2]$.

Napomenimo da je takozvana jednoparametarska familija šatorskih funkcija $\{T_s : s \in [1, 2]\}$ na jediničnom segmentu izrazito važna jer je primjer brojnih dinamičkih fenomena koje susrećemo u puno općenitijim jednodimenzionalnim dinamičkim sustavima.

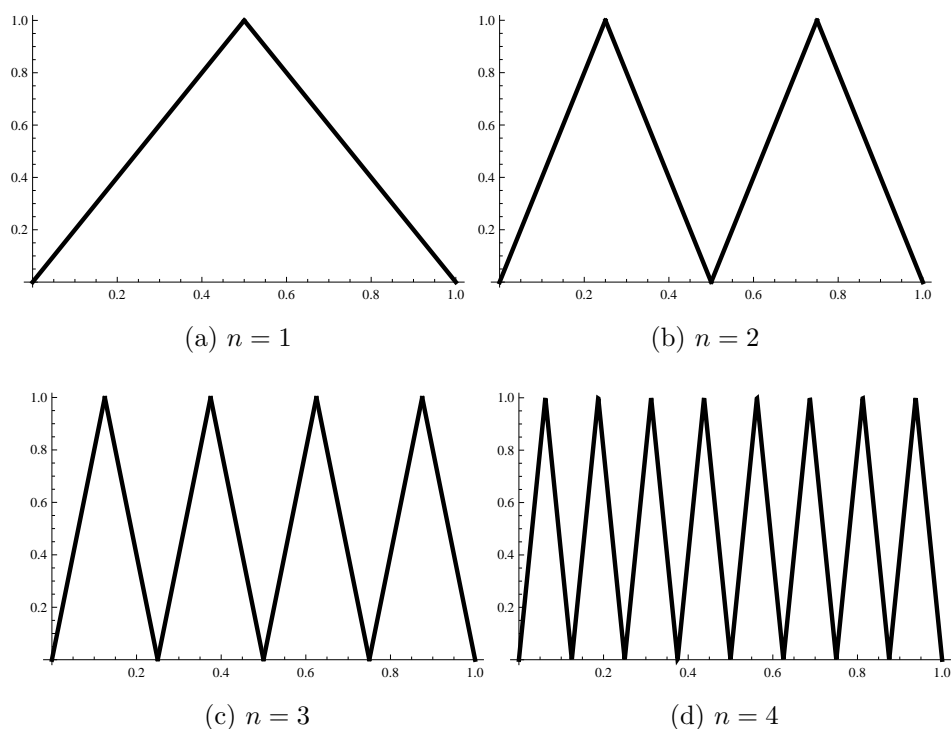
Opišimo na jednostavnom primjeru kako izgledaju iteracije šatorske funkcije T_s . Promotrimo šatorsku funkciju $T_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ s nagibom $s = 2$, to jest neka je

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Lako se provjerava da za proizvoljni prirodni broj n funkcija T_2^n ima oblik

$$T_2^n(x) = \begin{cases} 2^n x - 2k, & \frac{2k}{2^n} \leq x \leq \frac{2k+1}{2^n}, \\ -2^n x + 2k + 2, & \frac{2k+1}{2^n} \leq x \leq \frac{2(k+1)}{2^n}, \end{cases}$$

gdje je $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$. Na slici su nacrtani grafovi za $n = 1, 2, 3, 4$.



Slika 4: Prve četiri iteracije šatorske funkcije T_2

Uočimo da su periodične točke osnovnog perioda n neke funkcije f u biti fiksne točke n -te iteracije funkcije f . Primjerice, u gornjem slučaju za šatorsku funkciju T_2 točka $\frac{2}{5}$ je periodična točka osnovnog perioda 2. Naime,

$$x \xrightarrow{T_2} 2x \xrightarrow{T_2} 2(1 - 2x) = x.$$

Rješavanjem jednadžbe $2(1 - 2x) = x$ dobivamo da je $x = \frac{2}{5}$. Primijetimo da je $\frac{2}{5} \xrightarrow{T_2} \frac{4}{5} \xrightarrow{T_2} \frac{2}{5}$. Prema tome, i točka $\frac{4}{5}$ je periodična točka osnovnog perioda 2. Nadalje,

$$T_2^2(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ -4x + 2, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 4x - 2, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ -4x + 4, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Rješavajući funkcijsku jednadžbu $T_2(T_2(x)) = x$, to jest $4x = x$, $-4x + 2 = x$, $4x - 2 = x$, $-4x + 4 = x$, dobivamo da su fiksne točke redom $0, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$. Dakle, $T_2(T_2(\frac{2}{5})) = \frac{2}{5}$ i $T_2(T_2(\frac{4}{5})) = \frac{4}{5}$.

Na kraju, definirajmo još nekoliko pojmova:

Definicija 2.1.6. Neka je $J \subset \mathbb{R}$ segment. Kažemo da je $f : J \rightarrow J$ *osjetljiva na početne uvjete* ako postoji $\delta > 0$ takvo da za svaki $x \in J$ i svaku okolinu N od x , postoji $y \in N$ i $n \in \mathbb{N}$ takav da je $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Definicija 2.1.7. Neka su $A, B \subset \mathbb{R}$ segmenti, te $f : A \rightarrow A$ i $g : B \rightarrow B$ dva preslikavanja. Kažemo da su f i g *topološki konjugirani* ako postoji homeomorfizam $h : A \rightarrow B$ takav da je $h \circ f = g \circ h$. Drugim riječima, donji dijagram komutira. Homeomorfizam h zovemo *topološka konjugacija*.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

2.2 Simbolička dinamika

Kao što smo već spomenuli u uvodu, teorija diskretnih dinamičkih sustava pokušava razumijeti prirodu svih orbita, te nastoji identificirati takve skupove.

Generalno gledajući to je nemoguće za postići. Naime, već kod promatranja kvadratne familije preslikavanja, to jest polinoma drugog stupnja, eksplicitno traženje periodičnih točaka perioda n zahtijeva rješavanje polinomialne jedndžbe $f^n(x) = x$ stupnja 2^n . Na žalost, niti računala nisu od velike pomoći i to iz više razloga. Prije svega, iracionalni brojevi ne mogu

se pohraniti u računalu, već se oni aproksimiraju na određeni broj decimala. Nadalje, računanje s takvim brojevima, te postupak zaokruživanja nakon određenog broja iteracija može akumulirati takvu grešku zbog koje brojne periodične točke računalu postanu nevidljive. To se osobito događa kod funkcija koje su osjetljive na početne uvjete kao što su šatorske funkcije s nagibom $s \in (\sqrt{2}, 2]$.

Da bismo bili u stanju opisati bogatu dinamičku strukturu pojedinih preslikavanja, moramo razviti modele koji će u potpunosti opisivati dinamiku promatranih funkcija i to na najjednostavniji mogući način.

Definicija 2.2.1. $\Sigma_2 = \{\mathbf{s} = s_0s_1s_2\dots : s_j \in \{0, 1\}\}$ zovemo *prostorom nizova* sa dva simbola 0 i 1.

Općenito, možemo definirati i prostor nizova sa n simbola $0, 1, \dots, n-1$ kojeg označavamo sa Σ_n . Primijetimo da su elementi od Σ_2 beskonačni nizovi nula i jedinica. Sada bismo željeli prostor Σ_2 opskrbiti metrikom, te ga na taj način učiniti metričkim prostorom. Razlozi za to su mnogi. Prije svega, metrika nam omogućuje da efektivno izračunavamo udaljenosti između pojedinih točaka prostora. Nadalje, svaka metrika inducira topologiju na prostoru na kojem je definirana, pa smo u stanju detektirati koji su podskupovi metričkog prostora otvoreni, a koji zatvoreni.

Definiramo $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ kao $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$, gdje je $\mathbf{s} = s_0s_1s_2\dots$ i $\mathbf{t} = t_0t_1t_2\dots$. S obzirom da je $|s_i - t_i|$ bilo 0 ili 1, to je gornji red majoriziran geometrijskim redom $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$, pa je stoga i konvergentan. Pokažimo da je d uistinu metrika na Σ_2 . ([6] str. 40)

Propozicija 2.2.2. d je metrika na Σ_2 .

Dokaz: Da bismo pokazali da je d metrika na Σ_2 , moramo provjeriti da je to simetrična nenegativna funkcija koja zadovoljava nejednakost trokuta i

svojstvo strogosti. Očito je $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \geq 0$ za bilo koji $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$ i $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = 0$ ako i samo ako je $s_i = t_i$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Time je nenegativnost, odnosno strogost funkcije d provjerena. Budući da je $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, to je $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = d(\mathbf{t}, \mathbf{s})$, to jest d zadovoljava i svojstvo simetričnosti. Pokažimo na kraju da je ona i subaditivna, to jest da zadovoljava relaciju trokuta. No, evidentno je $|s_i - t_i| \leq |s_i - r_i| + |r_i - t_i|$, pa slijedi $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq d(\mathbf{s}, \mathbf{r}) + d(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ za svaki $\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{r} \in \Sigma_2$. Time je propozicija dokazana. \square

Sljedeći rezultat je važan jer nam omogućuje da brzo odgovorimo na pitanje jesu li dva niza blizu jedan drugome. ([6] str. 41)

Propozicija 2.2.3. Neka su $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$ i pretpostavimo da je $s_i = t_i$ za $i = 0, 1, \dots, n$. Tada je $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \frac{1}{2^n}$. Obratno, ako je $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < \frac{1}{2^n}$, tada je $s_i = t_i$ za $i \leq n$.

Dokaz: Ako je $s_i = t_i$ za $i \leq n$, tada je

$$\begin{aligned} d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) &= \underbrace{\sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i}}_{=0 \text{ jer je } s_i=t_i \text{ za } i \leq n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

S druge strane, ako je $s_j \neq t_j$ za neki $j \leq n$, onda imamo

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}.$$

Pretpostavimo li sada da je $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < \frac{1}{2^n}$, tada vrijedi $s_i = t_i$ za $i \leq n$, a to smo i željeli pokazati. \square

Definirat ćemo sada preslikavanje koje je od velike važnosti za teoriju simboličke dinamičke.

Definicija 2.2.4. Pomak je preslikavanje $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ definirano sa

$$\sigma(s_0s_1s_2\dots) = s_1s_2s_3\dots$$

Preslikavanje pomaka naprosto „zaboravlja” prvi element niza, a sve ostale elemente translacija ulijevo za jedno mjesto. Očito je σ dva-u-jedan preslikavanje na Σ_2 jer s_0 može biti ili 0 ili 1. Nadalje, σ je u metrici d neprekidno preslikavanje. ([6] str. 41)

Propozicija 2.2.5. Preslikavanje $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ je neprekidno preslikavanje.

Dokaz: Pokazat ćemo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svake dvije točke $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$ za koje je $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < \delta$ slijedi $d(\sigma(\mathbf{s}), \sigma(\mathbf{t})) < \varepsilon$. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji i $\mathbf{s} = s_0s_1s_2\dots$ proizvoljna točka iz Σ_2 . Odaberimo n takav da je $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ i $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Ako $\mathbf{t} = t_0t_1t_2\dots$ zadovoljava $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < \delta$, onda je prema Propoziciji 2.2.3 $s_i = t_i$ za sve $i \leq n+1$. No, tada se $\sigma(\mathbf{s})$ i $\sigma(\mathbf{t})$ podudaraju na prvih n mjesta, pa je prema istoj propoziciji $d(\sigma(\mathbf{s}), \sigma(\mathbf{t})) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, a to smo i tvrdili. \square

Dinamiku od σ smo u stanju u potpunosti razumijeti. Na primjer, periodične točke korespondiraju nizu oblika $\underbrace{s_0\dots s_{n-1}} \underbrace{s_0\dots s_{n-1}} \underbrace{s_0\dots s_{n-1}} \dots = (s_0\dots s_{n-1})^\infty$. Drugim riječima, postoji 2^n periodičnih točaka perioda n za funkciju σ , od kojih je svaka generirana konačnim nizom nula i jedinica duljine n . Također smo u stanju detektirati i predperiodične točke. Naime, niz oblika $s_0\dots s_n1111\dots$ je predfiksna točka.

Drugo zanimljivo svojstvo od σ jest da periodične točke tvore gusti podskup od Σ_2 . U općenitim topološkim prostorima, kažemo da je neki podskup gust ukoliko je njegovo zatvorenje cijeli prostor. Da bismo vidjeli da je skup $Per(\sigma)$ gust, moramo konstruirati niz periodičnih točaka τ_n koji će konvergirati proizvoljnoj točki $\mathbf{s} = s_0s_1s_2\dots$ iz Σ_2 . Definirajmo niz

$\tau_n = \underbrace{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} \dots$ kao ponavljajući niz koji se sa s podudara na prvih n mjesta. Prema Propoziciji 2.2.3 slijedi da je $d(\tau_n, s) \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, to jest $\tau_n \rightarrow s$.

Uočimo da nisu sve točke u Σ_2 periodične ili predperiodične. Naime, bilo koji neponavljajući niz nikada neće biti periodičan. Uočimo da su neperiodični nizovi daleko brojniji od periodičnih nizova u Σ_2 . Štoviše, postoje neperiodične orbite koje su guste u Σ_2 . Drugim riječima, postoje točke u Σ_2 čije orbite dolaze proizvoljno blizu bilo kojoj danoj točki u Σ_2 . Da bismo opravdali ovaj fenomen, promotrimo sljedeću točku

$$s^\clubsuit = \underbrace{0\ 1}_{1\ \text{blok}} \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{2\ \text{blok}} \underbrace{000\ 001}_{3\ \text{blok}} \dots \underbrace{\dots}_{4\ \text{blok}} \dots$$

s^\clubsuit smo konstruirali tako da smo redom nizali sve moguće konačne nizove sastavljene od 0 i 1 prvo duljine 1, zatim duljine 2 i tako dalje. Evidentno postoji iteracija od σ koja se slaže s nekim danim nizom na proizvoljno mnogo mjesta, pa su te točke prema Propoziciji 2.2.3 po volji blizu.

Svojstva od σ koja smo gore nabrojali možemo postulirati u obliku teorema ([6] str. 42):

Teorem 2.2.6.

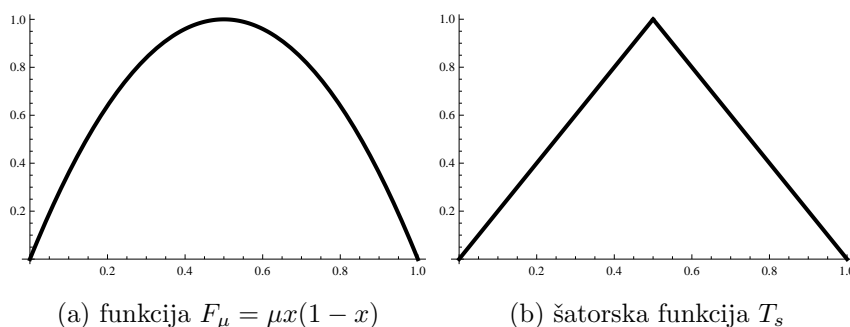
- (1) Postoji 2^n periodičnih točaka osnovnog perioda n za σ .
- (2) $Per(\sigma)$ je gusti podskup od Σ_2 .
- (3) Postoji gusta orbita od σ u Σ_2 .

2.3 Unimodalne funkcije

Definicija 2.3.1. Neka je $I = [0, 1]$ jedinični realni segment. Neprekidnu funkciju $f : I \rightarrow I$ zovemo *unimodalna* ako vrijedi:

- (1) Postoji točno jedna točka ekstrema $c \in (0, 1)$.
- (2) Funkcija f je strogo rastuća na $I_0 = [0, c]$ i strogo padajuća na $I_1 = (c, 1]$.

Tipični primjeri su kvadratna familija $F_\mu = \mu x(1 - x)$ za $\mu > 1$ i familija šatorskih funkcija $\{T_s : s \in [1, 2]\}$.



Slika 5: Unimodalne funkcije

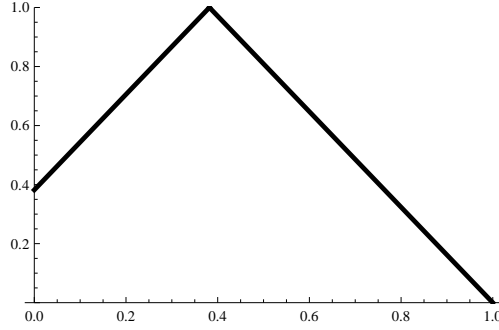
Uočimo da je funkcija T_s , u skladu s gornjom definicijom, unimodalna. Naime, $\frac{1}{2}$ je točka ekstrema na intervalu $(0, 1)$, te je strogo rastuća na $[0, \frac{1}{2})$ i strogo padajuća na $[\frac{1}{2}, 1]$. Drugim riječima, u točki $\frac{1}{2}$ funkcija T_s poprima maksimum koji iznosi $\frac{s}{2}$.

Za svaki $s \in (1, 2]$ vrijedi $T_s(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$ i $T_s^2(\frac{1}{2}) = s(1 - \frac{s}{2}) < \frac{1}{2}$. Nadalje, $T_s(x) \leq T_s(\frac{1}{2})$ za svaki $x \in [0, 1]$. Neka je $x \in [T_s^2(\frac{1}{2}), T_s(\frac{1}{2})]$. Ako je $x < \frac{1}{2}$, iz $x < T_s(x)$ dobivamo da je $T_s^2(\frac{1}{2}) \leq x < T_s(x)$. Ako je $x > \frac{1}{2}$, iz $x < T_s(\frac{1}{2})$ i činjenice da je $T_s|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ padajuća funkcija slijedi da je $T_s(x) > T_s^2(\frac{1}{2})$. Dakle,

$T_s(x) \in [T_s^2(\frac{1}{2}), T_s(\frac{1}{2})]$ za svaki $x \in [T_s^2(\frac{1}{2}), T_s(\frac{1}{2})]$. Restrikcija $T_s|_{[T_s^2(\frac{1}{2}), T_s(\frac{1}{2})]}$ zove se *jezgra* funkcije T_s .

Reskaliranjem jezgre gornje funkcije T_s na segment $[0, 1]$ dobivamo funkciju $f_s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$f_s(x) = \begin{cases} sx + 2 - s, & 0 \leq x \leq \frac{s-1}{s}, \\ s(1-x), & \frac{s-1}{s} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Slika 6: Reskalirana jezgra

Primijetimo da je funkcija f_s unimodalna i surjektivna.

Definicija 2.3.2. Funkcija $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ je *lokalno završna surjektivna* ako za svake dvije točke $x, y \in (a, b)$, gdje je $x < y$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $f^k((x, y)) = [a, b]$.

Propozicija 2.3.3. Neka je T_s šatorska funkcija s nagibom $s \in (\sqrt{2}, 2]$. Tada je T_s lokalno završna surjektivna na $I_s = [f_s^2(\frac{1}{2}), f_s(\frac{1}{2})]$. ([4] i [11])

Dokaz: Neka je $s \in (\sqrt{2}, 2]$, te $J \subseteq I_s$ bilo koji interval. Za svaki nenegativan cijeli broj i vrijedi ili $|f_s^{i+1}(J)| \geq \frac{s^2|f_s^{i-1}(J)|}{2}$ ili $f_s^{i+1}(J) = I_s$. Da bismo to vidjeli, uzmimo bilo koji interval K iz I_s . Tada je $|f_s(K)| \geq s|K|$ ako $\frac{1}{2} \notin K$ i $|f_s(K)| \geq \frac{s|K|}{2}$ ako $\frac{1}{2} \in K$, gdje je $|K|$ duljina intervala K . Iz ovoga slijedi, $|f_s^2(K)| \geq \frac{s^2|K|}{2}$ ako $\frac{1}{2} \notin K \cap f_s(K)$. Isto tako, $\frac{1}{2} \in K \cap f_s(K)$

povlači da je $\frac{1}{2}, f_s(\frac{1}{2}) \in f_s(K)$, pa je stoga $f_s^2(K) \supset I_s$, odnosno imamo ili $|f_s^{i+1}(J)| \geq \frac{s^2|f_s^{i-1}(J)|}{2}$ ili $f_s^{i+1}(J) = I_s$. S obzirom da je $s > \sqrt{2}$, vrijedi $\frac{s^2}{2} > 1$, pa je time propozicija dokazana. \square

2.4 Itinereri i nizovi tiještenja

Cilj nam je proučiti orbitu kritične točke c unimodalne funkcije f na jediničnom segmentu $I = [0, 1]$. Razlog zašto gledamo baš takve funkcije leži u činjenici da je orbita kritične točke unimodalne funkcije „zarobljena” unutar jediničnog segmenta. Naime, postoje cijele familije funkcija kod kojih orbita kritične točke pobjegne iz promatranog segmenta, pa se pod iteracijama sve više i više udaljava, bilo u $+\infty$ ili $-\infty$. Na primjer, kvadratna familija $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ za $\mu > 4$ je takva.

Definicija 2.4.1. Neka je $I = [0, 1]$, $x \in I$ i f unimodalna funkcija na I s kritičnom točkom c . *Itinerer* od x je beskonačni niz $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$, pri čemu je

$$s_j = \begin{cases} 0 & \text{ako je } f^j(x) < c, \\ 1 & \text{ako je } f^j(x) > c, \\ C & \text{ako je } f^j(x) = c. \end{cases}$$

Za nas će od velike važnosti biti itinerer prve iteracije kritične točke.

Definicija 2.4.2. *Niz tiještenja*, u oznaci $K(f)$, unimodalne funkcije f je itinerer točke $f(c)$, gdje je c kritična točka, to jest $K(f) = S(f(c))$.

Neka je $f(x) = 4x(1 - x)$. Točka $c = \frac{1}{2}$ je kritična točka funkcije f jer iz $f'(c) = 0$ slijedi da je $c = \frac{1}{2}$. Uočimo: $\frac{1}{2} \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0 \dots$, to jest

$f(c) = 1$ i $f^j(c) = 0$ za sve $j > 1$. Stoga u skladu s Definicijom 2.4.1 pišemo

$$K(f) = 1000\dots = 1(0)^\infty.$$

Neka je f unimodalna funkcija. Ako za itinerer $S(x) = s_0s_1s_2\dots$ točke $x \in [0, 1]$ vrijedi $s_j = C$, onda je $s_{j+k} = \alpha_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, gdje je $K(f) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$. Niz ćemo zvati *regularnim* ako je $s_j = 0$ ili $s_j = 1$ za svaki j , odnosno ako je $s_j \neq C$ za bilo koji j .

Uvodimo sada uređaj \prec na skup itinerera. Neka je $\mathbf{s} = s_0s_1s_2\dots$ i $\mathbf{t} = t_0t_1t_2\dots$. Reći ćemo da \mathbf{s} i \mathbf{t} imaju *diskrepanciju* n ako je $s_i = t_i$ za $0 \leq i < n$, ali $s_n \neq t_n$. Označimo sa $\tau_n(\mathbf{s})$ broj jedinica unutar prvih n elemenata niza \mathbf{s} , to jest među elementima s_0, s_1, \dots, s_n . Taj broj je važan iz sljedećeg razloga. Naime, broj jedinica u itinereru od x određuje je li f^n rastuća ili padajuća funkcija u maloj okolini od x . Ako je broj jedinica neparan, onda je funkcija f^n padajuća, u suprotnom je rastuća. Uređaj na nizovima definiramo induktivnim postupkom. Primijetimo da je $0 < C < 1$.

Definicija 2.4.3. Pretpostavimo da \mathbf{s} i \mathbf{t} imaju diskrepanciju n . Kažemo da je $\mathbf{s} \prec \mathbf{t}$ ako je zadovoljeno jedno od donjih svojstava:

- (a) $\tau_{n-1}(\mathbf{s})$ je paran i $s_n < t_n$.
- (b) $\tau_{n-1}(\mathbf{s})$ je neparan i $s_n > t_n$.

U skladu s gornjom definicijom imamo

$$\begin{aligned} 0101\dots &\prec 010C\dots &\prec 0100\dots \\ 110\dots &\prec 11C\dots &\prec 111\dots \end{aligned}$$

Pokažimo da je ovaj uređaj na itinererima ekvivalentan uređaju na realnim brojevima. ([6] str. 140)

Teorem 2.4.4. Neka je $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ unimodalna funkcija i $x, y \in [0, 1]$.

(1) Ako je $S(x) \prec S(y)$, tada je $x < y$.

(2) Ako je $x < y$, tada je $S(x) \preceq S(y)$.

Dokaz: Dokazat ćemo samo (1) jer (2) zatim neposredno slijedi. Neka je $S(x) = s_0s_1s_2\dots$ i $S(y) = t_0t_1t_2\dots$. Teorem dokazujemo indukcijom po n , gdje je n diskrepancija od $S(x)$ i $S(y)$. Ako je $n = 0$, tvrdnja slijedi iz činjenice da je $0 < C < 1$, a to je uređaj na realnim brojevima. Pretpostavimo da rezultat vrijedi za nizove čija je diskrepancija $n - 1$ i pokažimo da tada vrijedi i za diskrepanciju n .

Primijenimo f na x i y . Koristeći preslikavanje pomaka dobivamo

$$S(f(x)) = s_1s_2s_3\dots$$

$$S(f(y)) = t_1t_2t_3\dots$$

Razlikujemo tri slučaja: $s_0 = 0$, $s_0 = C$ i $s_0 = 1$. Ako je $s_0 = 0$, tada je $S(f(x)) \prec S(f(y))$ jer nismo promijenili ukupan broj jedinica u nizu s_1, \dots, s_n . Prema pretpostavci indukcije je $f(x) < f(y)$. No, budući da je f rastuća na $[0, c)$ slijedi da je $x < y$. Ako je $s_0 = 1$, tada je $S(f(x)) \succ S(f(y))$ jer u nizu s_1, \dots, s_n imamo jednu jedinicu manje. Po pretpostavci indukcije, tada slijedi $f(x) > f(y)$. Budući da je f padajuća na $(c, 1]$, onda je $x < y$. Na kraju, ako je $s_0 = C$, slijedi da je $x = y = c$. Time je teorem dokazan. \square

Za šatorske funkcije vrijedi nešto jači rezultat:

Lema 2.4.5. Neka je $T_s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ šatorska funkcija s nagibom $s \in (\sqrt{2}, 2]$. Ako je $x < y$ za $x, y \in [0, 1]$, onda je $S(x) \prec S(y)$.

Dokaz: Neka je $s > 1$, te $x, y \in [0, 1]$ takvi da je $x < y$. Tvrdimo da je $S(x) \neq S(y)$. Naime, ako to pokažemo, tada iz prethodnog teorema slijedi

da je $S(x) \prec S(y)$. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $S(x) = S(y)$. Tada je $T_s^n(x) < \frac{1}{2}$ ako i samo ako je $T_s^n(y) < \frac{1}{2}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. S obzirom da je šatorska funkcija T_s strogo rastuća na $[0, \frac{1}{2})$, te strogo padajuća na $[\frac{1}{2}, 1]$, onda je $T_s^n|_{[x,y]}$ monotona za svaki n , a to je u suprotnosti s činjenicom da je T_s lokalno završna surjekcija. Time je lema dokazana. \square

Iz gornje leme slijedi da je za šatorske funkcije T_s s nagibom $s > 1$, preslikavanje $x \mapsto S(x)$ injekcija. Nadalje, iteriranjem šatorske funkcije određenog nagiba, dobijemo multimodalnu funkciju, to jest funkciju koja na segmentu $[0, 1]$ ima više točaka u kojima poprima lokalne ekstreme i te točke particioniraju veliki interval na manje intervale na kojima je funkcija naizmjenično strogo rastuća, pa onda strogo padajuća.

2.5 Topološka entropija

Želimo pokazati sljedeći važan rezultat ([15] str. 13):

Teorem 2.5.1. Neka je $s \in [\sqrt{2}, 2]$ i $K(f_s)$ niz tiještenja reskalirane jezgre f_s šatorske funkcije nagiba s . Preslikavanje $s \mapsto K(f_s)$ je strogo rastuće.

Međutim, da bismo razumjeli njegov dokaz uvodimo pojam topološke entropije.

Neka je (X, d) kompaktni metrički prostor i $f : X \rightarrow X$ (ne nužno neprekidna) funkcija. Tada se možemo zapitati: koliko puno orbita ima dinamički sustav $f : X \rightarrow X$? S obzirom da svaka točka ima vlastitu orbitu, sustav će imati onoliko orbita koliko ima i točaka. Međutim, u brojnim situacijama te se orbite ponašaju na jednak način. Primjerice, za translaciju na kružnici $T_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$ danu sa $T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pri čemu je bilo koja točka s kružnice prezentirana kutom θ izraženim u radijanima, vrijedi da

se orbite dviju različitih točaka $x, y \in S^1$ ponašaju esencijalno isto. Naime, ako su x i y udaljene za ε , tada su i njihove slike $T_\lambda(x)$ i $T_\lambda(y)$ isto udaljene za ε , pa za svaki $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $|T_\lambda^n(x) - T_\lambda^n(y)| = \varepsilon$.

Stoga bi gornje pitanje trebalo malo reformulirati: koliko bitno različitih orbita ima promatrani dinamički sustav? Odovor na ovo pitanje uvelike ovisi o tome što pod pojmom „bitno različitih” mislimo. Ima smisla reći da su orbite $O(x)$ i $O(y)$ dviju različitih točaka x i y barem za ε udaljene ukoliko postoji $i \in \mathbb{Z}$ takvo da je $d(f^i(x), f^i(y)) > \varepsilon$. Ako „bitno različitih” shvatimo kao „barem ε udaljene”, tada translacija na kružnici, iz gornjeg primjera, ima $\frac{1}{\varepsilon}$ bitno različitih orbita. Primijetimo da onda dinamički sustav koji je osjetljiv na početne uvjete ima beskonačno mnogo bitno različitih orbita jer po definiciji u svakoj okolini proizvoljne točke x , postoji točka y takva da su $f^n(x)$ i $f^n(y)$ barem ε udaljene.

Ako su točke x i y blizu jedna drugoj, tada bismo potencijalno morali promatrati puno iteracija prije nego bismo postigli $d(f^i(x), f^i(y)) > \varepsilon$, a pitanje je bismo li to uopće i uspjeli. Stoga je korisno izračunati koliko puno bitno različitih orbita duljine n ima naš promatrani sustav, pri čemu orbitu duljine n definiramo kao skup $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)\}$. U tu svrhu na kompaktnom metričkom prostoru X definiramo novu metriku:

$$d_n(x, y) = \max\{d(f^i(x), f^i(y)) : i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Propozicija 2.5.2. d_n je metrika na kompaktnom metričkom prostoru (X, d) za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: S obzirom da je d metrika na X i da funkcija \max čuva uređaj, tvrdnja trivijalno slijedi. \square

Iako broj ε -različitih orbita u ovoj metrici, općenito, teži u beskonačnost

kako n raste, brzina kojom se to događa važna je mjera koja govori o složenosti dinamičkog sustava i nju zovemo *topološka entropija*.

Da bismo mogli dati preciznu definiciju topološke entropije moramo definirati još nekoliko pojmova. Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i $f : X \rightarrow X$ bilo koja (ne nužno neprekidna) funkcija. Za podskup S od X kažemo da je (n, ε) -razapinjući skup ako za svaku točku $x \in X$, postoji $y \in S$ takav da je $d_n(x, y) \leq \varepsilon$. Uočimo da kompaktnost od X implicira postojanje konačnog (n, ε) -razapinjućeg skupa. Uistinu, neka je $\{U_1, \dots, U_m\}$ otvoreni pokrivač od X takav da je $\text{diam}(U_i) < \varepsilon$ za svaki i . Izaberimo točku iz svakog nepraznog skupa oblika

$$\bigcap_{j=0}^n f^{-j}(U_{i_j}),$$

pri čemu je $1 \leq i_j \leq m$. Time smo odabrali najviše m^n točaka koje određuju (n, ε) -razapinjući skup. Na primjer, neka je $x \in X$. Za svaki $0 \leq j \leq n$ uzmimo i_j takav da je $f^j(x) \in U_{i_j}$. Tada x pripada skupu koji je dan gornjom formulom. Nadalje, ako je w bila izabrana iz tog skupa, onda je $d(f^j(x), f^j(w)) \leq \varepsilon$ za svaki $0 \leq j \leq n$ jer $f^j(x)$ i $f^j(w)$ pripadaju U_{i_j} dijametra manjeg ili jednakog ε .

Neka je $s_{n,\varepsilon}(X, f) := \inf\{\text{card}(S) : S \text{ je } (n, \varepsilon)\text{-razapinjući skup}\}$. Budući da je $s_{n,\varepsilon}(X, f) \leq m^n$, to je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(s_{n,\varepsilon}(X, f))$$

konačan.

Definicija 2.5.3. Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i $f : X \rightarrow X$ bilo koja (ne nužno neprekidna) funkcija. *Topološka entropija* od f , u oznaci $h(f)$, je

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \ln(s_{n,\varepsilon}(X, f)).$$

Definicija 2.5.4. Funkciju $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ zovemo *po dijelovima monotona* ako postoji particija $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ segmenta $[a, b]$ takva da je $f|_{(x_{i-1}, x_i)}$ neprekidna i monotona.

Definicija 2.5.5. Neka je f po dijelovima monotona funkcija. Ako je J najveći interval na kojem je $f|_J$ neprekidna i monotona, tada se $f : J \rightarrow f(J)$ zove *grana* od f . Za $n \in \mathbb{N}$, $l(f^n)$ označava broj grana funkcije f^n .

Sljedeća dva rezultata navodimo bez dokaza jer je za njihovo razumijevanje potrebno veće znanje iz teorije topološke entropije. Teoremi su pokazani u [3] na stranicama 137-139 i u [8] na stranicama 169-171.

Teorem 2.5.6. Neka je $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ po dijelovima monotona funkcija sa skupom kritičnih točaka $C = \{a_0, a_1, \dots, a_N\}$. Tada je

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln l(f^n).$$

Teorem 2.5.7. Neka je $T_s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ šatorska funkcija s nagibom $s \in [1, 2]$. Tada je

$$h(T_s) = \ln(s).$$

Spomenimo da su Teorem 2.5.6 prvi dokazali Rothschild [12] 1971. godine, te Misiurewicz i Szlenk 1980. godine [10]. Postoje velike razlike između njihovih dokaza i dokaza koji je dan, na primjer, u [3]. Naime, stariji dokazi bitno koriste otvorena pokrivenja kompaktnog metričkog prostora X , preko kojih su Adler, Konheim i McAndrew prvi i definirali topološku entropiju [1], dok se moderniji dokazi zasnivaju na (n, ε) -razapinjućim skupovima.

Dokaz teorema 2.5.1: Za svaki $s \in [\sqrt{2}, 2]$ i $n \in \mathbb{N}$, f_s^n inducira particiju koja se sastoji od maksimalnih intervala na kojima je f_s^n strogo monotona.

Neka je $l_n(s)$ broj tih intervala. Iz Teorema 2.5.6 slijedi da je topološka entropija $h(f_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln l_n(s)$, a iz Teorema 2.5.7 imamo $h(f_s) = \ln s$.

Budući da je $f_s(1) = 0$ za svaki s , prve dvije znamenke u $K(f_s)$ za svaki s su 1 pa 0. Primijetimo da je $S_s(1) = S(f_s(c_s)) = K(f_s)$ i $S_s(0) = S(f_s(1))$, pri čemu je c_s kritična točka reskalirane jezgre f_s , za svaki s . Za $s, t \in [\sqrt{2}, 2]$ takve da je $S_s(1) \preceq S_t(1)$ vrijedi $S_t(0) \preceq S_s(0)$. Neka je za $s \in [\sqrt{2}, 2]$, $\widetilde{S}_s = \{x_0 \dots x_{n-1} \in \{0, 1\}^n : s_{s,0}(0) \dots s_{s,n-1}(0) \preceq x_0 \dots x_{n-1} \preceq s_{s,0}(1) \dots s_{s,n-1}(1)\}$. Ako je $S_s(1) \preceq S_t(1)$, tada je $\text{card } \widetilde{S}_s \leq \text{card } \widetilde{S}_t$. Iz Teorema II.3.8 u [5] slijedi da za svaki $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ sa svojstvom $S_s(0) \preceq \mathbf{s} \preceq S_s(1)$ i $\sigma^k(\mathbf{s}) \preceq S_s(1)$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, postoji $y \in I$ takav da je $S_s(y) = \mathbf{s}$. Svaki $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ takav da je $S_s(0) \preceq \mathbf{s} \preceq S_s(1)$ i $\sigma^k(\mathbf{s}) \preceq S_s(1)$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, zovemo dopustiv niz. Tada iz $\text{card } \widetilde{S}_s \leq \text{card } \widetilde{S}_t$ slijedi $\text{card } \{x_0 \dots x_{n-1} \in \widetilde{S}_s : x_0 \dots x_{n-1} \text{ je dopustiv}\} \leq \text{card } \{x_0 \dots x_{n-1} \in \widetilde{S}_t : x_0 \dots x_{n-1} \text{ je dopustiv}\}$.

Neka je $s \in [\sqrt{2}, 2]$ i $x_0 \dots x_{n-1} \in \{0, 1\}^n$ dopustiv niz u odnosu na f_s . Primijetimo da je $\{y \in I : s_{s,0}(y) \dots s_{s,n-1}(y) = x_0 \dots x_{n-1}\}$ segment maksimalne duljine na kojemu je f_s^n strogo monotona pa je $\text{card } \{x_0 \dots x_{n-1} \in \widetilde{S}_s : x_0 \dots x_{n-1} \text{ je dopustiv}\} = l_n(s)$. Stoga za $s, t \in [\sqrt{2}, 2]$ takve da je $S_s(1) \preceq S_t(1)$, to jest $K(f_s) \preceq K(f_t)$ vrijedi $l_n(s) \leq l_n(t)$.

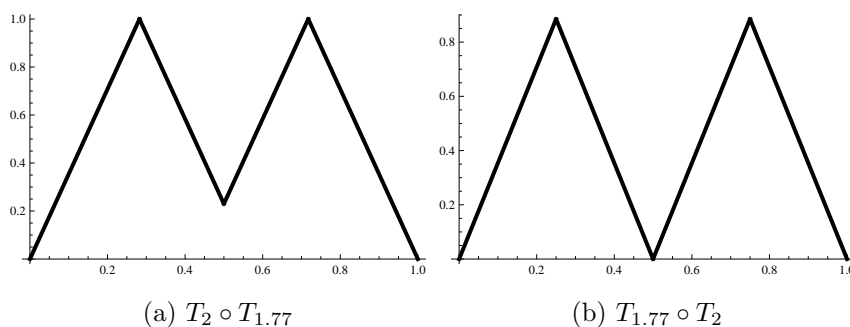
Pretpostavimo da je $s > t$ i $K(f_s) \preceq K(f_t)$. Tada je $l_n(s) \leq l_n(t)$, pa je $h(f_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln l_n(s) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln l_n(t) = h(f_t)$ što je u suprotnosti sa $h(f_s) = \ln s > \ln t = h(f_t)$. Dakle, preslikavanje $s \mapsto K(f_s)$ je strogo rastuće, a to smo i tvrdili. \square

Ovaj teorem u biti kaže da svake dvije šatorske funkcije s različitim nagibima imaju različite nizove tiještenja.

3 Rezultati

U ovom poglavlju radimo s reskaliranim jezgrama f_s i f_t dviju šatorskih funkcija T_s i T_t , za $s, t \in (\sqrt{2}, 2]$. Glavni razlog zbog kojeg promatramo reskalirane jezgre leži u činjenici da je prilikom komponiranja $f_t \circ f_s$, slika od f_s sadržana u domeni od f_t , što neće biti slučaj kod uzastopnog komponiranja šatorskih funkcija T_s i T_t . Naime, reskalirane jezgre definirane su na cijelom segmentu $[0, 1]$ i surjektivna su preslikavanja.

Kao što je spomenuto u uvodu, pokušat ćemo odgovoriti na pitanje možemo li na temelju dvaju beskonačnih nizova tiještenja dviju reskaliranih jezgri šatorskih funkcija, koji su sastavljeni od tri simbola: 0, C i 1, vršenjem određenih „operacija” dobiti niz tiještenja koji odgovara kompoziciji dviju promatranih šatorskih funkcija. Odnosno, zanima nas jesu li kompozicija jezgri i šatorske funkcije s istim nizovima tiještenja topološki konjugirane. Uočimo da komponiranjem dviju šatorskih funkcija dobivamo multimodalnu funkciju.



Slika 7: Kompozicije šatorskih funkcija T_2 i $T_{1.77}$

U toj situaciji je dosta teško pratiti što se događa s iteracijama svih kritičnih točaka takve funkcije. Štoviše, definicija itinerera bi se trebala nadopuniti dodatnim simbolima. Iz tog razloga ćemo se poslužiti mali „trikom”.

Uzet ćemo kritičnu točku reskalirane jezgre f_s šatorske funkcije T_s i pogledati gdje se $f_s(\frac{s-1}{s})$ nalazi s obzirom na kritičnu točku $\frac{t-1}{t}$ reskalirane jezgre f_t šatorske funkcije T_t , te na nju primijeniti odgovarajuću granu od f_t . Sada ispitujemo gdje se nalazi točka $f_t(f_s(\frac{s-1}{s}))$ s obzirom na kritičnu točku od f_s i na nju djelujemo odgovarajućom granom od f_s . Postupak ponavljamo i u skladu sa Definicijom 2.4.1, ponašanje kritične točke kodiramo nizom simbola: $0, 1, C$. Isto tako ćemo promatrati i obrnutu situaciju, to jest prvo ćemo gledati djelovanje od f_t , a potom od f_s . Ilustrirajmo gornji postupak na jednom primjeru.

Neka je $f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ reskalirana jezgra šatorske funkcije s nagibom $s = 2$,

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Uočimo:

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{f_2} 1 \xrightarrow{f_2} 0 \xrightarrow{f_2} 0 \dots$$

Budući da je $\frac{1}{2}$ u prvoj iteraciji bila desno od $\frac{1}{2}$ to kodiramo s 1. U drugoj iteraciji se nalazila lijevo od $\frac{1}{2}$ pa to kodiramo s 0. U trećoj iteraciji je ponovno slijeva $\frac{1}{2}$, pa se u kodu pojavljuje 0, i tako dalje. Štoviše, $f_2(\frac{1}{2}) = 1$ i $f_2^j(\frac{1}{2}) = 0$ za sve $j > 1$. Dakle, niz tiještenja za f_2 je $K(f_2) = 100000\dots = 1(0)^\infty$.

Definicija 3.1. Neka su f_s, f_t dvije reskalirane jezgre šatorskih funkcija T_s i T_t s nagibima $s, t \in (\sqrt{2}, 2]$. Niz tiještenja za $f_s \circ f_t$, u oznaci $K(f_s \circ f_t) = 10k_3k_4k_5\dots$, definiramo na sljedeći način:

$$k_j = \begin{cases} 0 & \text{ako je } \underbrace{(f_s \circ f_t \circ \dots \circ f_s \circ f_t)(x)}_{\text{duljine } j} < \frac{t-1}{t}, \\ 1 & \text{ako je } \underbrace{(f_s \circ f_t \circ \dots \circ f_s \circ f_t)(x)}_{\text{duljine } j} > \frac{t-1}{t}, \\ C & \text{ako je } \underbrace{(f_s \circ f_t \circ \dots \circ f_s \circ f_t)(x)}_{\text{duljine } j} = \frac{t-1}{t}. \end{cases}$$

za $j \equiv 0 \pmod{2}$ ili

$$k_j = \begin{cases} 0 & \text{ako je } \underbrace{(f_t \circ f_s \circ \dots \circ f_s \circ f_t)(x)}_{\text{duljine } j} < \frac{s-1}{s}, \\ 1 & \text{ako je } \underbrace{(f_t \circ f_s \circ \dots \circ f_s \circ f_t)(x)}_{\text{duljine } j} > \frac{s-1}{s}, \\ C & \text{ako je } \underbrace{(f_t \circ f_s \circ \dots \circ f_s \circ f_t)(x)}_{\text{duljine } j} = \frac{s-1}{s}. \end{cases}$$

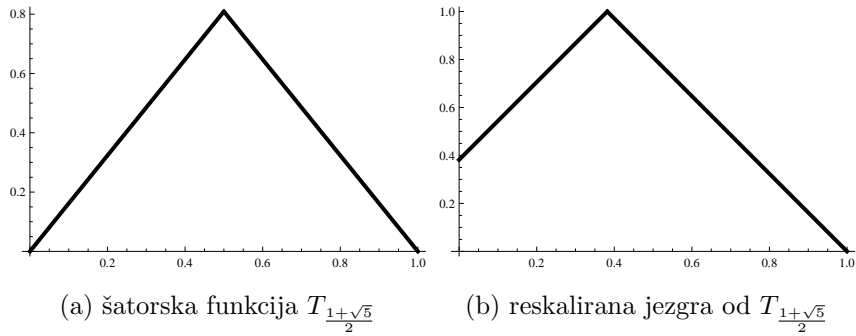
za $j \equiv 1 \pmod{2}$.

Pronađimo sada šatorsku funkciju T_t s nagibom t , koja će imati sljedeći niz tiještenja $K(T_t) = (10C)^\infty$. Dakle, tražimo takav t za koji će $\frac{1}{2}$ biti periodična točka s osnovnim periodom 3. Računamo: $\frac{1}{2} \xrightarrow{T_t} \frac{t}{2}$. S obzirom da se u kod pojavljuje 1 zaključujemo da je $\frac{t}{2} > \frac{1}{2}$ i primjenjujemo odgovarajuću granu šatorske funkcije T_t , to jest $\frac{t}{2} \xrightarrow{T_t} t(1 - \frac{t}{2})$. Budući da je na drugom mjestu u nizu tiještenja 0, to znači da je $t(1 - \frac{t}{2}) < \frac{1}{2}$, pa djelujući granom tx dobivamo $t(1 - \frac{t}{2}) \xrightarrow{T_t} t^2(1 - \frac{t}{2})$. Kako se na trećem mjestu u kodu nalazi simbol C , to je $t^2(1 - \frac{t}{2}) = \frac{1}{2}$.

Sređivanjem gornjeg izraza dobivamo polinoma trećeg stupnja $t^3 - 2t^2 + 1 = 0$. Odmah uočavamo da će jedno rješenje biti $t = 1$, pa faktoriziranjem dobivamo $(t - 1)(t^2 - t - 1) = 0$. Iz kvadratne jednadžbe slijedi da su druga dva rješenja $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Uzimamo $t > \sqrt{2}$, pa je traženi nagib $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Reskaliranjem jezgre šatorske funkcije $T_{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ dobivamo funkciju $f_{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definiranu na sljedeći način:

$$f_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}(1-x), & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Slika 8: Šatorska funkcija $T_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ i njena reskalirana jezgra

Korištenjem gore opisanog postupka dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{3-\sqrt{5}}{2} &\xrightarrow{f_t} \underbrace{1}_{> \frac{1}{2}} \xrightarrow{f_2} \underbrace{0}_{< \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \xrightarrow{f_t} \underbrace{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}_{< \frac{1}{2}} \xrightarrow{f_2} \underbrace{3-\sqrt{5}}_{> \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \xrightarrow{f_t} \\ &\xrightarrow{f_t} \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}(\sqrt{5}-2)}_{< \frac{1}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{f_2} \underbrace{3-\sqrt{5}}_{> \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \xrightarrow{f_t} \underbrace{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}_{< \frac{1}{2}} \xrightarrow{f_2} \dots \end{aligned}$$

Stoga je $K(f_2 \circ f_t) = 10010101010\dots = 10(01)^\infty$. U obrnutom slučaju imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\xrightarrow{f_2} \underbrace{1}_{> \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \xrightarrow{f_t} \underbrace{0}_{< \frac{1}{2}} \xrightarrow{f_2} \underbrace{0}_{< \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \xrightarrow{f_t} \underbrace{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}_{< \frac{1}{2}} \xrightarrow{f_2} \\ &\xrightarrow{f_2} \underbrace{3-\sqrt{5}}_{> \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \xrightarrow{f_t} \underbrace{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}_{< \frac{1}{2}} \xrightarrow{f_2} \underbrace{3-\sqrt{5}}_{> \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \xrightarrow{f_t} \underbrace{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}_{< \frac{1}{2}} \xrightarrow{f_2} \dots \end{aligned}$$

Niz tiještenja je $K(f_s \circ f_2) = 100010101010\dots = 100(01)^\infty$.

Primijetimo da smo u ovom primjeru imali sreće, jer smo uspjeli egzaktno riješiti polinom trećeg stupnja. Općenito, to nećemo moći napraviti u svakoj situaciji, pa stoga moramo posegnuti za numeričkim metodama rješavanja. U tu svrhu koristit ćemo programski paket Wolfram Mathematica[®] 7. Za gornji primjer imamo

```
In[1]:=NSolve[t^3-2t^2+1==0, t, 15]
Out[1]={{t->-0.61803398874989},{t->1.000000000000000},
        {t->1.6180339887499}}
```

Kod računanja s takvim brojevima greška u aproksimaciji nakon određenog broja koraka može biti toliko velika da znamenke koje se pojavljuju u kodu, to jest nizu tiještenja, ne moraju odgovarati pravoj situaciji ponašanja kritične točke. Naime, zbog zaokruživanja broj koji je blizu kritičnoj točki, računalo može prezentirati kao broj koji je veći od nje, pa u kodu zapisujemo to s 1, a u stvarnosti je taj broj možda manji, što sugerira da u kodu umjesto 1 treba doći 0. No, uz dovoljno veliku točnost decimalnog zapisa na računalu, kodiranje će do neke iteracije ipak davati pravilnu sliku ponašanja kritične točke pod višestrukim djelovanjem šatorske funkcije T_s s nagibom $s \in (\sqrt{2}, 2]$.

Da bismo si olakšali račun, u Mathematici ćemo napisati jednostavan kod pomoću kojeg vršimo kodiranje:

```
prva[x_, t_] := t*x + 2 - t /; x >= 0 && x < (t - 1)/t
prva[x_, t_] := t*(1 - x) /; x >= (t - 1)/t && x <= 1
druga[x_, s_] := s*x + 2 - s /; x >= 0 && x < (s - 1)/s
druga[x_, s_] := s*(1 - x) /; x >= (s - 1)/s && x <= 1
```

```

var = 0;
var1 = 0;

Do[If[var1 < (t - 1)/t, Print[var1, " kod: ", 0],
  Print[var1, " kod: ", 1]];
var = SetPrecision[prva[var1, t],k];
If[var < (s - 1)/s, Print[var, " kod: ", 0],
  Print[var, " kod: ", 1]];
var1 = SetPrecision[druga[var, s], k], {i, 1, n}]

```

U prve četiri linije definiramo reskaliranu jezgru f_t šatorske funkcije T_t i reskaliranu jezgru f_s šatorske funkcije T_s . Gdje se nalazi varijabla t , upisujemo nagib od T_t , a umjesto s nagib funkcije T_s . U funkciji `SetPrecision` zadnji parametar k govori o točnosti decimalnog zapisa, a u dijelu $\{i, 1, n\}$ vršimo iteriranje. Ako želimo izvršiti 100 iteracija, tada u kodu umjesto n upisujemo 50. Naime, iteriranje vršimo naizmjeničnom primjenom funkcija f_s i f_t . Napomenimo ovdje da kod svakog novog unosa s i t parametre `var` i `var1` moramo postaviti na nulu, jer se u njima pokranjuju zadnje ispisani brojevi, pa može doći do grešaka u računu.

Uočimo da nam iz do sada razvijene teorije proizlazi da će svaki niz tiještenja šatorskih funkcija započeti s 10. Iz toga razloga, u ispisu su izostavljena prva dva simbola. Isto tako ćemo gledati samo $K(f_s \circ f_t)$, jer se u obrnutoj situaciji, kao što smo vidjeli gore, pojavljuje jedna 0 više. Naime, u slučaju $K(f_t \circ f_s)$ imamo $\frac{1}{2} \xrightarrow{f_s} 1 \xrightarrow{f_t} 0 \xrightarrow{f_s} 0 \xrightarrow{f_t} \dots$.

U našem primjeru, uz točnost zapisa na 15 decimala i 60 iteracija, Mathematica daje sljedeći ispis:

In[4] :=0.381966011250100 kod: 0
In[4] :=0.763932022500200 kod: 1
In[4] :=0.381966011250123 kod: 0
In[4] :=0.763932022500246 kod: 1
In[4] :=0.381966011250048 kod: 0
In[4] :=0.763932022500097 kod: 1
In[4] :=0.381966011250290 kod: 0
In[4] :=0.763932022500580 kod: 1
In[4] :=0.381966011249508 kod: 0
In[4] :=0.763932022499016 kod: 1

In[4] :=0.381966011252039 kod: 0
In[4] :=0.763932022504079 kod: 1
In[4] :=0.381966011243847 kod: 0
In[4] :=0.763932022487694 kod: 1
In[4] :=0.381966011270359 kod: 0
In[4] :=0.763932022540717 kod: 1
In[4] :=0.381966011184565 kod: 0
In[4] :=0.763932022369130 kod: 1
In[4] :=0.381966011462199 kod: 0
In[4] :=0.763932022924398 kod: 1

In[4] :=0.381966010563757 kod: 0
In[4] :=0.763932021127513 kod: 1
In[4] :=0.381966013471177 kod: 0
In[4] :=0.763932026942354 kod: 1
In[4] :=0.381966004062567 kod: 0

In[4] :=0.763932008125135 kod: 1
In[4] :=0.381966034509467 kod: 0
In[4] :=0.763932069018935 kod: 1
In[4] :=0.381965935981229 kod: 0
In[4] :=0.763931871962458 kod: 1

In[4] :=0.381966254825306 kod: 0
In[4] :=0.763932509650613 kod: 1
In[4] :=0.381965223024198 kod: 0
In[4] :=0.763930446048396 kod: 1
In[4] :=0.381968562002724 kod: 0
In[4] :=0.763937124005448 kod: 1
In[4] :=0.381957756841238 kod: 0
In[4] :=0.763915513682477 kod: 1
In[4] :=0.381992723078313 kod: 0
In[4] :=0.763985446156627 kod: 1

In[4] :=0.381879569958221 kod: 0
In[4] :=0.763759139916442 kod: 1
In[4] :=0.382245741146706 kod: 0
In[4] :=0.764491482293413 kod: 1
In[4] :=0.381060786289366 kod: 0
In[4] :=0.762121572578732 kod: 1
In[4] :=0.384895380757987 kod: 0
In[4] :=0.769790761515975 kod: 1
In[4] :=0.372486372391384 kod: 0
In[4] :=0.744972744782768 kod: 1

```

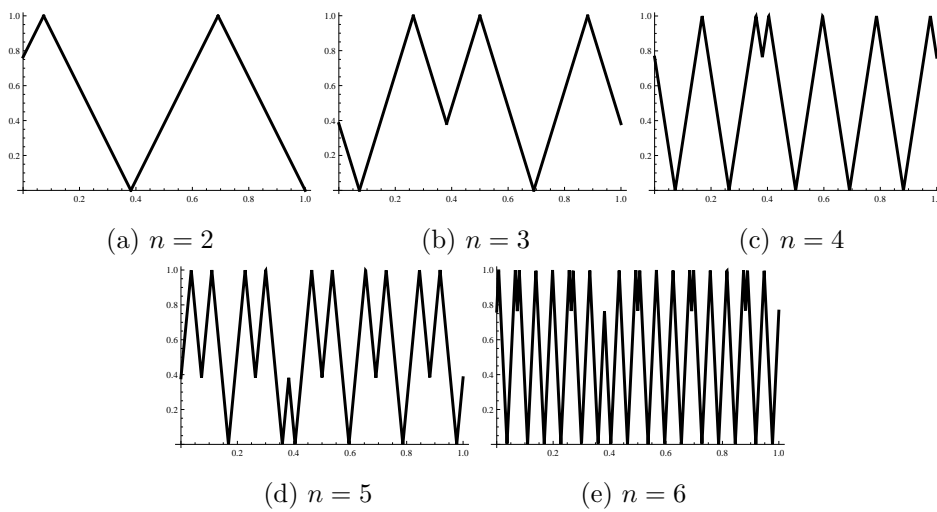
In[4] :=0.412642766999076 kod: 0
In[4] :=0.825285533998153 kod: 1
In[4] :=0.282693944317278 kod: 0
In[4] :=0.565387888634556 kod: 1
In[4] :=0.703217168111645 kod: 1
In[4] :=0.593565663776709 kod: 1
In[4] :=0.657624570204289 kod: 1
In[4] :=0.684750859591421 kod: 1
In[4] :=0.510083824105270 kod: 1
In[4] :=0.979832351789460 kod: 1

```

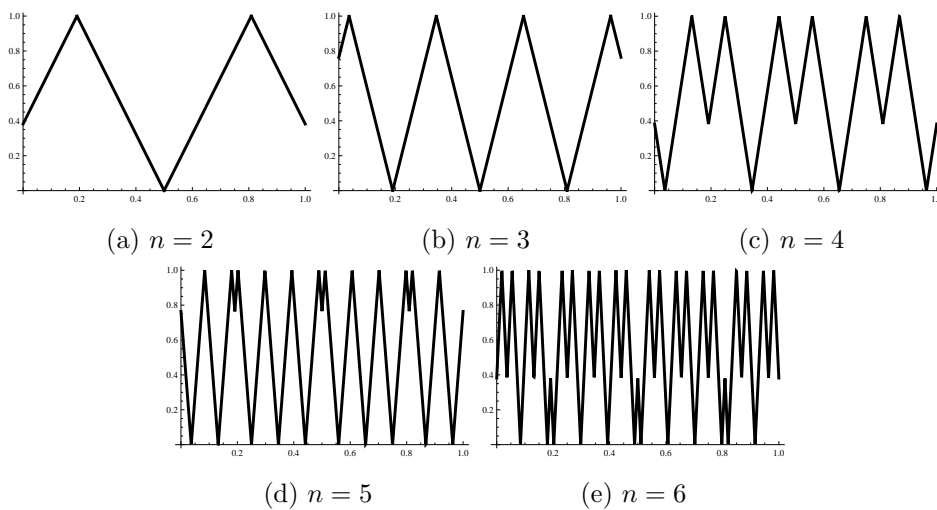
Primijetimo da će zaokruživanje akumulirati grešku tek u 55. iteraciji.

Slike na sljedećoj stranici prikazuju grafove naizmjeničnog djelovanje reskaliranih jezgri $f_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ i f_2 na kritičnu točku $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, pri čemu reskalirana jezgra $f_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ djeluje prva, i to za iteracije duljine $n = 2, 3, 4, 5$ i 6 . Pod duljinom iteracije smatramo broj naizmjeničnog pojavljivanja funkcija $f_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ i f_2 . Na primjer, za iteraciju $(f_2 \circ f_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}})(\frac{3-\sqrt{5}}{2})$ ćemo reći da je duljine 2 .

U obrnutoj situaciji, prvo djeluje funkcija f_2 na kritičnu točku $\frac{1}{2}$, pa zatim reskalirana jezgra $f_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ i tako naizmjenično. Na slikama su prikazane iteracije duljine $n = 2, 3, 4, 5$ i 6 .



Slika 9: Iteracije duljine n za $f_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ i f_2 .



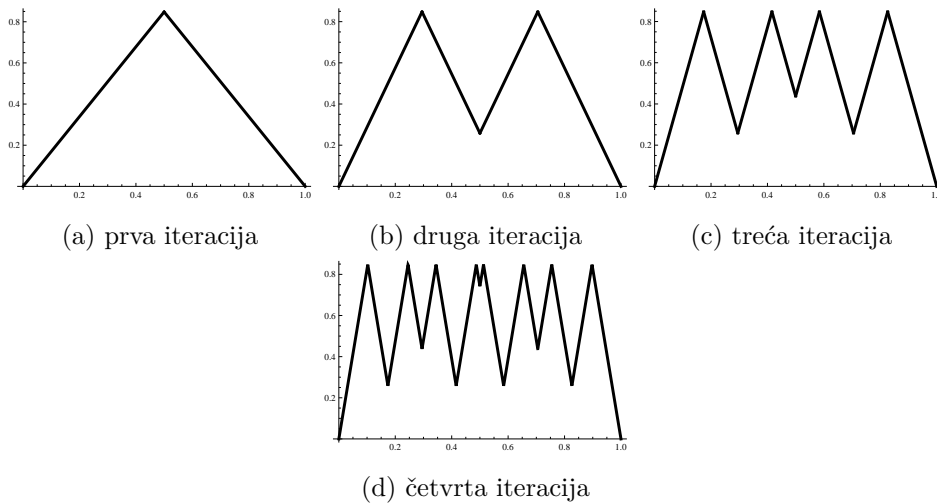
Slika 10: Iteracije duljine n za f_2 i $f_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Prisjetimo se: promatramo reskaliranu jezgru šatorske funkcije T_2 i reskaliranu jezgru šatorske funkcije T_t , gdje je $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Izračunali smo sljedeće nizove tiještenja: $K(f_2) = 1(0)^\infty$, $K(T_t) = (10C)^\infty$, $K(f_2 \circ f_t) = 10(01)^\infty$ i $K(f_t \circ f_s) = 100(01)^\infty$.

Primijetimo da postoji šatorska funkcija T_k čiji je niz tiještenja upravo $10(01)^\infty$. Izračunajmo njezin nagib.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \xrightarrow{T_k} \frac{k}{2} \xrightarrow{T_k} k\left(1 - \frac{k}{2}\right) \xrightarrow{T_k} k^2\left(1 - \frac{k}{2}\right) \xrightarrow{T_k} \\ \xrightarrow{T_k} k^3\left(1 - \frac{k}{2}\right) \xrightarrow{T_k} t\left(1 - k^3\left(1 - \frac{k}{2}\right)\right) = k^2\left(1 - \frac{k}{2}\right). \end{aligned}$$

Računanjem nultočaka polinoma petog stupnja dobivamo da je $k = 1.695621$.



Slika 11: Šatorska funkcija $T_{1.695621}$ i njene prve četiri iteracije

No, šatorska funkcija T_k nije u nikakvoj vezi s funkcijom koja je dobivena kao kompozicija funkcija f_2 i f_t . Pod pojmom „veze” podrazumjevamo da postoji topološka konjugacija između funkcija T_k i $f_2 \circ f_t$.

Vrijedi sljedeći jednostavan rezultat ([14] str. 57):

Teorem 3.2. Neka je I jedinični segment $[0, 1]$. Ako su $f, g : I \rightarrow I$ topološki konjugirane i $h : I \rightarrow I$ topološka konjugacija između f i g , tada vrijedi

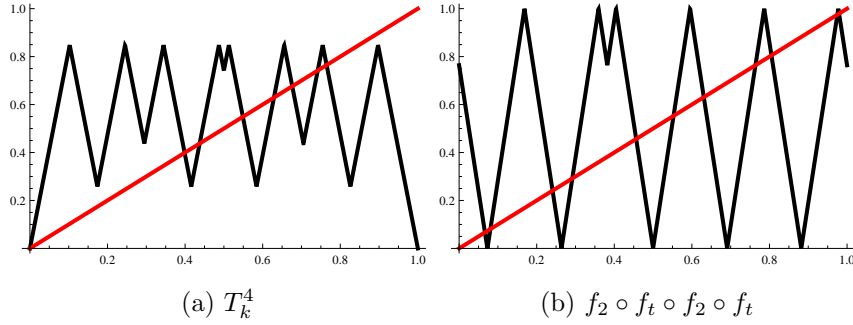
$h(f^n(x)) = g^n(h(x))$ za svaki prirodan broj n i za svaki $x \in I$, to jest h preslikava orbitu od f na orbitu od g . Posebno, točka $x \in I$ je periodična točka od f s periodom n , to jest $f^n(x) = x$, ako i samo ako je $h(x)$ periodična točka od g s periodom n , to jest $g^n(h(x)) = h(x)$.

Dokaz: Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n . Budući da je h topološka konjugacija između f i g , vrijedi da je $h(f(x)) = g(h(x))$. Pretpostavimo da za proizvoljni prirodni broj n vrijedi $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$. No, sada vidimo da je $h(f^{n+1}(x)) = h(f^n(f(x))) = h(f^n(y)) = g^n(h(y)) = g^n(h(f(x))) = g^n(g(h(x))) = g^{n+1}(h(x))$.

Točka $x \in I$ je periodična točka od f perioda n , to jest $f^n(x) = x$, ako i samo ako vrijedi $h(x) = h(f^n(x)) = g^n(h(x))$, to jest $h(x)$ je periodična točka od g perioda n . □

Drugim riječima, ako su dva sustava topološki konjugirana, tada se brojni fenomeni jednog dinamičkog sustava po konjugaciji prenose na drugi i obratno. Prema tome, ako su T_k i $f_2 \circ f_t$ topološki konjugirane funkcije, onda postoji homeomorfizam h takav da je $h \circ T_k = (f_2 \circ f_t) \circ h$. Prema Teoremu 3.2 slijedi da h preslikava orbitu jedne funkcije na orbitu druge funkcije. Odavde možemo zaključiti da je ukupan broj periodičnih točaka osnovnog perioda n za T_k jednak ukupnom broju periodičnih točaka osnovnog perioda n za $f_2 \circ f_t$. Štoviše, to će zbog Teorema 3.2 vrijediti za bilo koji $n \in \mathbb{N}$. Isto tako, ako je p fiksna točka za funkciju T_k^n , $n \in \mathbb{N}$, onda je $h(p)$ fiksna točka za $(f_2 \circ f_t)^n$, $n \in \mathbb{N}$, jer je $h(p) = h(T_k^n(p)) = (f_2 \circ f_t)^n(h(p))$ za $n \in \mathbb{N}$. Prema tome, ukupan broj fiksnih točaka funkcije T_k^n odgovara ukupnom broju fiksnih točaka funkcije $(f_2 \circ f_t)^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Međutim, iz jednostavne grafičke analize vidimo da četvrta iteracija funkcije T_k ima 8 fiksnih točaka, dok ih kompozit $f_2 \circ f_t \circ f_2 \circ f_t$ ima barem 10.



Slika 12: Fiksne točke

Dakle, gore spomenute funkcije nisu topološki konjugirane, pa stoga nismo u mogućnosti iz nizova tiještenja reskalirane jezgre f_2 i reskalirane jezgre f_t , uz neke operacije, dobiti niz tiještenja koji odgovara njihovoj kompoziciji. Iz istog razloga to neće vrijediti niti u obrnutoj situaciji, to jest u slučaju kada na kritičnu točku $\frac{1}{2}$ prvo djeluje f_2 , pa onda f_t i tako naizmjenično.

Neka je $t \in (\sqrt{2}, 2]$ bilo koji nagib šatorske funkcije T_t , a f_t njena reskalirana jezgra čija je kritična točka c_t . Pretpostavimo da je t odabran tako da je $K(f_t) = (10s_3s_4s_5 \dots s_{n-1}s_n)^\infty$ niz tiještenja za f_t , pri čemu je $n \in \mathbb{N}$, te $s_i \in \{0, C, 1\}$ za svaki i , $3 \leq i \leq n$. Drugim riječima, c_t je kritična točka osnovnog perioda n . Dakle,

$$c_t \xrightarrow{f_t} 1 \xrightarrow{f_t} 0 \xrightarrow{f_t} 2 - t \xrightarrow{f_t} \dots \xrightarrow{f_t} 1.$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{n \text{ puta}}$

Primijetimo da za proizvoljni $s \in (\sqrt{2}, 2]$ reskalirane jezgre šatorske funkcije T_s vrijedi

$$c_t \xrightarrow{f_t} 1 \xrightarrow{f_s} 0 \xrightarrow{f_t} 2 - t \xrightarrow{f_t} \dots \xrightarrow{f_t} 1.$$

Dakle, kompozit $(f_t^{n-1} \circ f_s)(f_t(c_t))$ ima isti niz tiještenja $(10s_3 \dots s_n)^\infty$ kao i funkcija f_t . Međutim, te funkcije nisu iste. Štoviše, jednostavna grafička analiza, kao gore, pokazuje da te funkcije nisu ni topološki konjugirane, jer ne posjeduju isti broj fiksnih točaka za neki $n \in \mathbb{N}$. Stoga, i u ovom slučaju,

zaključujemo da iz nizova tiještenja od f_t i f_s ne možemo dobiti niz tiještenja njihovog kompozita.

4 Zaključak

U ovome radu proučavali smo dinamiku jednodimenzionalnih preslikavanja. Kao što smo spomenuli prije, iskraživanje preslikavanja realnog segmenta izgleda kao jednostavan zadatak. Međutim, takva preslikavanja mogu imati veoma bogatu i složenu dinamiku. Između ostalog, razumijevanje problema jednodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sustava često rasvjetljava brojne probleme koji se pojavljuju u višedimenzionalnom slučaju.

Kod jednodimenzionalnih preslikavanja značajnu ulogu imaju su takozvane unimodalne i multimodalne funkcije. Unimodalna funkcija je funkcija definirana na realnom segmentu koja ima jednu točku lokalnog ekstrema, dok multimodalna funkcija ima više takvih točaka. Veliku smo pažnju posvetili simetričnim šatorskim funkcijama definiranih na jediničnom segmentu $[0, 1]$, odnosno njihovim reskaliranim jezgrama. Vidjeli smo da je za nagib $s \in (\sqrt{2}, 2]$ reskalirana jezgra f_s šatorske funkcije T_s unimodalno i surjektivno preslikavanje.

Osnovna motivacija zbog koje smo uveli pojam reskalirane jezgre leži u činjenici da je prilikom komponiranja jezgri, slika jedne jezgre uvijek sadržana u domeni druge, što nije slučaj kod uzastopnog komponiranja samih šatorskih funkcija. Primijetimo da komponiranjem šatorskih funkcija i/ili njihovih reskaliranih jezgri dobivamo multimodalne funkcije. Osnovni cilj teorije je klasificirati sve orbita svih točaka dinamičkog sustava. Upravo zbog bogate dinamike, orbite prezentiraju vrlo složene skupove. Iz tog razloga uvodimo model koji će na jednostavan način opisivati dinamiku svake točke.

Za nas je od velikog interesa ponašanje kritične točke šatorske funkcije, odnosno kritične točke reskalirane jezgre. Orbitu kritične točke kodiramo pomoću skupa od tri simbola: $0, C$ i 1 , te dobivamo takozvani niz tiještenja.

Pokazali smo da šatorske funkcije s različitim nagibima imaju različite nizove tiještenja. Za razliku od unimodalnih funkcija, teorija tiještenja kod multimodalnih funkcija bitno je složenija, pa smo se stoga i zapitali možemo li za neke specijalne klase multimodalnih funkcija dobiti nešto jednostavniju teoriju.

Zanimalo nas je kako iz nizova tiještenja dviju reskaliranih jezgri šatorskih funkcija dobiti vezu sa nizom tiještenja njihove kompozicije, pri čemu smo takvu kompoziciju reskaliranih jezgri definirali na sasvim prirodan način. Odnosno, zanima nas jesu li kompozicija reskaliranih jezgri i šatorska funkcija koja ima isti niz tiještenja kao i kompozicija jezgri topološki konjugirane.

Odgovor na to pitanje je negativan. Naime, pronašli smo dva konkretna protuprimjera za koje ne postoji topološka konjugacija koja bi povezala dva promatrana sustava.

Zahvale

Zahvaljujem se svojoj mentorici, doc. dr. sc. Sonji Štimac, na vrlo zanimljivoj temi, velikom razumijevanju, nesebičnoj pomoći, te korisnim i stručnim savjetima koji su pomogli pri izradi ovog rada i pobudili u meni veliki interes za nelinearne dinamičke sustave.

Zahvaljujem se i svojim dragim prijateljima, Mateju Mihelčiću i Igoru Luliću, na velikoj pomoći oko Mathematice.

Literatura

- [1] R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. McAndrew: *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 309-319
- [2] G. D. Birkhoff: *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 9, New York (1927)
- [3] K. M. Brucks, H. Bruin: *Topics from One-Dimensional Dynamics*, London Math. Soc., Student Texts **62**, Cambridge University Press, Cambridge (2004)
- [4] K. M. Brucks, B. Diamond, M. V. Otera-Espinar, and C. Tresser: *Dense orbits of critical points for the tent map*, Cont. Math. **117** (1991), 57-61
- [5] P. Collet, J.-P. Eckmann: *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Progress in Physics, **1**, Birkhäuser, Basel (1980)
- [6] R. L. Devaney: *An introduction to chaotical dynamical systems*, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1989)
- [7] T.-Y Li and J. A. Yorke: *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly, **82** (1975) 985-992
- [8] W. de Melo, S. van Strien: *One-dimensional dynamics*, Springer-Verlag, Berlin New York (1993)
- [9] J. Milnor, W. Thurston: *On iterated maps of the interval, I. The Kneading Theory, II. Periodic Points*, Preprint, Princeton (1977). Published in: “Dynamical Systems: Proc. Univ. of Maryland 1986-87”, (1988), Lecture Notes in Mathematics 1342, Springer-Verlag, Berlin New Yourk, str. 465-563

- [10] M. Misiurewicz, W. Szlenk: *Entropy of piecewise monotone mappings*, Studia Math. **67** (1980), no. 1, 45-63
- [11] M. Pollicott, M. Yuri: *Dynamical systems and Ergodic theory*, Cambridge University Press, Cambridge, (1998)
- [12] J. Rothschild: *Computation of topological entropy*, Ph.D. Dissertation, City Univ. New York (1971)
- [13] A. N. Šarkovskii: *Sosušestvovanie ciklov neprerivnogo preobrazavanja prjamoî v sebja*, Ukrain. mat. ž., **16**, no.1, (1964) 61-71
- [14] S. Štimac: *Dinamika jednodimenzionalnih preslikavanja*, Magistarski rad, Zagreb (1997)
- [15] S. Štimac: *Topološka klasifikacija Knasterovih kontinuuma s konačno krajnjih točaka*, Doktorska dizertacija, Zagreb (2002)

Sažetak

Dražen Petrović: **O jednom kontraprimjeru u teoriji tiještenja**

U prvom dijelu rada izlažemo osnovne pojmove i definicije iz teorije jednodimezionalnih dinamičkih sustava. Definiramo što je šatorska funkcija i pokazujemo neka njezina osnovna svojstva. Kako bismo bili u mogućnosti razumijeti prirodu svih orbita, te identificirati takve skupove, razvijamo simboličku dinamiku, kao model koji će u potpunosti opisivati dinamiku promatranog sustava i to na najjednostavniji mogući način.

Nadalje, definiramo unimodalne funkcije te promatramo itinerere, nizove tiještenja i susrećemo se s pojmom topološke entropije koji predstavlja mjeru koja govori o složenosti dinamičkog sustava. Dokazujemo već poznati, ali važan rezultat za ovaj rad, a to je da šatorske funkcije s različitim nagibima $s, t \in [\sqrt{2}, 2]$ imaju različite nizove tiještenja.

U dijelu s rezultatima, računajući nizove tiještenja reskaliranih jezgri šatorskih funkcija i njihovih kompozicija, zaključujemo da nije moguće iz nizova tiještenja dviju reskaliranih jezgri, uz određene operacije, dobiti niz tiještenja njihove kompozicije. Naime, pokazujemo da ne postoji topološka konjugacija između kompozicije reskaliranih jezgri i šatorske funkcije koja posjeduje isti niz tiještenja kao i spomenuta kompozicija.

Ključne riječi: simbolička dinamika, niz tiještenja, šatorska funkcija, topološka konjugacija

Summary

Dražen Petrović: **On a Counterexample in the Kneading Theory**

In the first part of this paper we introduce some basic definitions and techniques of the theory of one-dimensional dynamical systems. We define tent maps and give proofs to some of its basic properties. In order to understand the nature of all orbits we introduce the symbolic dynamics, a model which describes the dynamics of particular system in the simplest way.

Further, we define unimodal maps and study their itineraries, kneading sequences and the topological entropy which measures the complexity of a dynamical system. We give a proof of well known result important to this paper. It says that two tent maps with different slopes $s, t \in (\sqrt{2}, 2]$ have different kneading sequences.

In the part which contains the results, by calculating the kneading sequences for the rescaled cores of the tent maps and their composition, we conclude that it is impossible that by undertaking certain operations over the kneading sequences of the rescaled cores, we could obtain the kneading sequence of their composition. In fact, we show that there is no topological conjugacy between the composition of two rescaled cores and the tent map that has the same kneading sequence as the corresponding composition.

Key words: symbolic dynamics, kneading sequences, tent maps, topological conjugacy