

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ivan Čudina

**ODREĐIVANJE ELASTIČNOG KRITIČNOG  
MOMENTA NOSAČA JEDNOOSNO SIMETRIČNOG  
POPREČNOG PRESJEKA PRIMJENOM  
NUMERIČKIH SIMULACIJA**

Zagreb, 2017.

Ovaj rad izrađen je na Zavodu za konstrukcije Građevinskog fakulteta u Zagrebu, pod vodstvom dr. sc. Ivana Lukačevića, dipl. ing. građ. i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2016./2017.

---

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	i
1 UVOD .....	1
1.1 Općenito .....	1
1.2 Problematika stabilnosti čeličnih elemenata .....	4
1.2.1 Pojam stabilnosti .....	4
1.2.2 Načini otkazivanja.....	6
1.2.3 Razlike između centrično i ekscentrično opterećenih nosača. ....	10
2 HIPOTEZA I CILJ ISTRAŽIVANJA .....	16
3 METODE ISTRAŽIVANJA.....	18
4 BOČNO TORZIJSKO IZVIJANJE DVOOSNO SIMETRIČNIH I JEDNOOSNO SIMETRIČNIH PROFILA .....	20
4.1 Savijanje.....	20
4.2 Torzija .....	22
4.3 Problematika gubitka stabilnosti .....	25
4.4 Elastični kritični moment .....	27
4.4.1 Utjecaj rubnih uvjeta .....	27
4.4.2 Utjecaj položaja unosa opterećenja.....	28
4.4.3 Utjecaj dijagrama momenata savijanja .....	29
4.5 Proračun otpornosti dvoosno simetričnih nosača na bočno izvijanje .....	29
4.5.1 Uvodne napomene.....	29
4.5.2 Proračun elastičnog kritičnog momenta.....	30
4.5.3 Proračun elastičnog kritičnog momenta za konzole.....	31
4.5.4 Realna otpornost na bočno torzijsko izvijanje .....	34
4.5.5 Opći slučaj.....	35

---

4.5.6	Valjani i ekvivalentni zavareni presjeci .....	36
4.6	Proračun otpornosti nosača izvedenih iz U profila na bočno izvijanje .....	38
4.6.1	Modificirana $\chi_{LT}$ metoda.....	38
4.6.2	Modificirana $\kappa_M$ metoda .....	40
4.6.3	Modificirana Merchant-Rankine metoda .....	41
4.6.4	Opća metoda.....	42
4.6.5	Predloženi proračunski postupak prema Snijder et al. ....	42
4.6.6	Predloženi proračunski postupak prema D. Brownu.....	44
4.7	Zaključne napomene .....	45
5	KALIBRACIJA NUMERIČKIH MODELA .....	46
5.1	Kalibracija numeričkog modela na primjeru nosača izvedenog iz I profila .....	46
5.1.1	Opis kalibracijskog modela nosača izvedenog iz I profila.....	46
5.1.2	Usporedba karakteristika poprečnog presjeka I profila .....	49
5.1.3	Prilagođeni model nosača izvedenog iz I profila .....	58
5.1.4	Modeliranje nosača I profila s prostornim elementima.....	60
5.2	Kalibracija numeričkog modela na primjeru nosača izvedenog iz U profila.....	61
5.2.1	Opis kalibracijskog modela nosača izvedenog iz U profila .....	61
5.2.2	Određivanje ekscentriciteta poprečnog presjeka.....	63
5.2.3	Usporedba karakteristika poprečnog presjeka U profila .....	66
5.2.4	Prilagođeni model nosača izvedenog iz U profila.....	74
5.3	Zaključne napomene .....	76
6	REZULTATI I RASPRAVA .....	78
6.1	Područje analize .....	78
6.2	Jednostavno oslonjen nosač .....	80
6.3	Konzola .....	82
6.4	Obostrano upeti nosač .....	85
6.5	Modeliranje nosača U profila s prostornim elementima .....	87

---

---

6.6	Parametarska analiza utjecaja iznosa ekscentriciteta na vrijednosti elastičnog kritičnog momenta .....	90
7	ZAKLJUČAK .....	93
7.1	Neposredni zaključci .....	93
7.2	Preporuke za daljnja istraživanja .....	95
	ZAHVALE .....	96
	POPIS LITERATURE .....	97
	POPIS SLIKA .....	99
	POPIS TABLICA .....	101
	SAŽETAK .....	103
	SUMMARY .....	104
	ŽIVOTOPIS AUTORA .....	105

# 1 UVOD

## 1.1 Općenito

U građevinarstvu, ako promatramo različite konstrukcije, možemo primjetiti da se sve one sastoje od određenih nosivih dijelova – stupova, nosača i sl. Svaki taj nosivi element karakteriziran je oblikom svog poprečnog presjeka. Primjerice kod drvenih konstrukcija, većina poprečnih presjeka je pravokutna dok se kod betonskih konstrukcija, uz pravokutne često javljaju i kružni oblici poprečnih presjeka. Dimenzije tih poprečnih presjeka određuju se prilikom projektiranja.

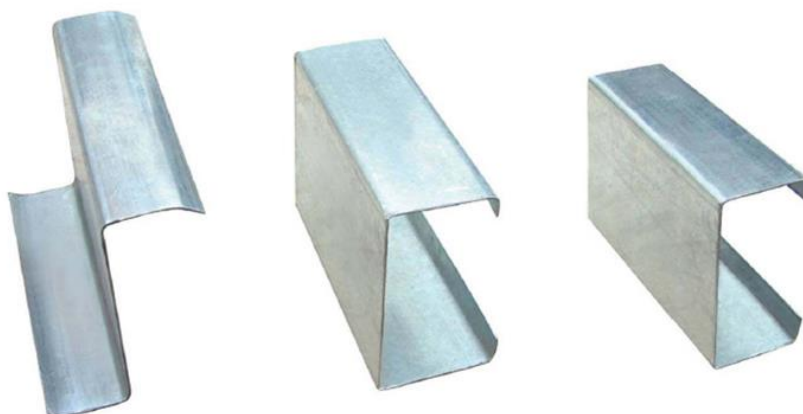
Kod projektiranja čeličnih elemenata na raspolaganju je cijela paleta različitih tipova poprečnih presjeka. Jedan od razloga je taj da su kroz povijest različite države razvijale svoju industriju proizvodnje čeličnih proizvoda, a time i različite oblike i dimenzije poprečnih presjeka čeličnih elemenata. Različite vrste profila možemo podijeliti u tri osnovne skupine: zavareni limeni nosači, hladno oblikovani profili te vruće valjani profili [1].

Zavareni limeni nosači proizvode se zavarivanjem limova u željene oblike koji su često slični oblicima vruće valjanih profila. Oni se koriste u slučajevima kada vruće valjani profili ne mogu pružiti dovoljnu nosivost ili njihova upotreba nije ekonomična. Takva potreba se javlja kod nosača čeličnih ili spregnutih mostova, kod nosača kranskih staza i sl. Njihove dimenzije nisu propisane te ih određuje inženjer projektant u postupku projektiranja. Primjer takvog nosača prikazan je na slici 1.1. Možemo uočiti tri glavna lima međusobno zavarena koji tvore I poprečni presjek. Na slici 1.1. također su uočljivi i dodatni ukružujući elementi.

Nadalje, hladno oblikovani profili, slika 1.2., su profili dobiveni prešanjem ili savijanjem čeličnih limova. Iako su jednostavniji za proizvodnju i većih oblikovnih mogućnosti, kod njih se javlja problematika većih imperfekcija elemenata i zaostalih napona pa pokazuju smanjenu otpornost u odnosu na ekvivalentne vruće valjane profile [3]. Također su ekonomičniji po utrošku materijala.

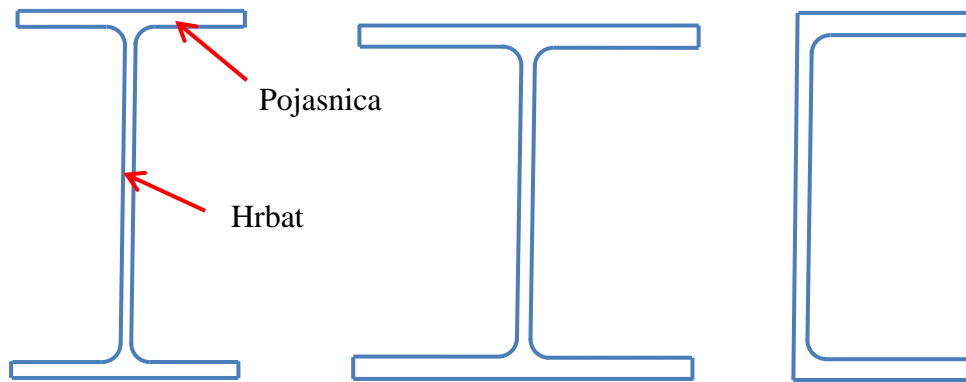


**Slika 1.1.** *Zavareni limeni nosač* [2]



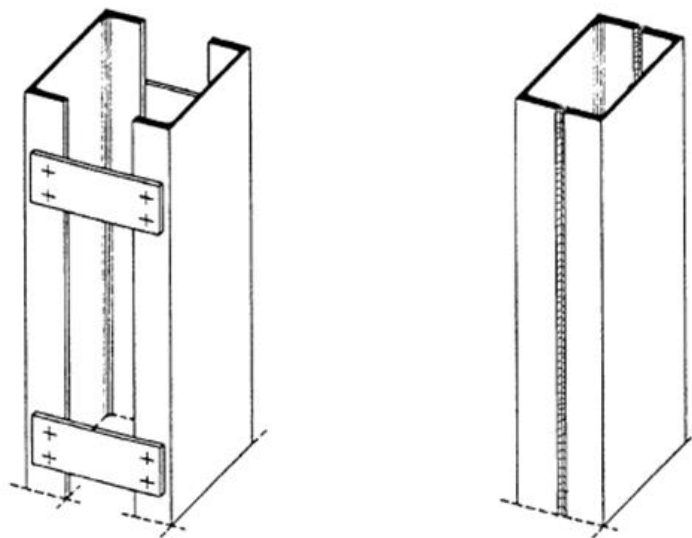
**Slika 1.2.** *Hladnooblikovani čelični profili različitih oblika* [4]

I konačno, vruće valjani profili najčešće su korišten oblik poprečnih presjeka u čeličnim konstrukcijama. Njihove dimenzije su točno propisane te se mogu naći u stručnoj literaturi, kao na primjer [5]. Oblici takvih poprečnih presjeka obično jesu: I profili, H profili te U profili. Osnovnu podjelu među tim profilima mogli bi uvesti kao podjelu na dvoosno simetrične profile (I i H profili), te jednoosno simetrične (U profili), slika 1.3. Takvi profili sastoje se od hrpta i pojasnica. Hrbat ima funkciju prijenosa posmične sile dok pojasnice imaju funkciju prijenosa momenta savijanja. Profili I te H oblika se najčešće koriste u praksi iz razloga jer se njihov oblik posebno pogodan za naprezanja savijanja kao dominantnog oblika opterećenja. Profili U oblika se nešto rjeđe koriste u praksi.



**Slika 1.3.** Vruće valjani I profil i U profil

U profili se često koriste u obliku dvodijelnih presjeka, odnosno presjeka nastalih spajanjem dvaju U profila. Oni mogu biti spojeni metalnim vezicama ili pak zavarivanjem, slika 1.4. Spajanjem dvaju U profila dobivamo simetrični poprečni presjek gdje izbjegavamo ekscentričnost opterećenja i učinke torzije koji se javljaju pri savijanju takvih presjeka. Takve dvodijelne presjeke obično koristimo kao stupove, ali primjenjuju se i kao nosači [6].



**Slika 1.4.** Dvodijelni U presjeci spojeni vezicama (lijevo), odnosno varenjem (desno) [6]

U slučaju primjene U profila kao samostalnog elementa, zbog asimetričnog oblika poprečnog presjeka takvih profila, tijekom savijanja se javlja i torzija koja potom umanjuje njihovu otpornost na savijanje. Nadalje, nedostatak propisanog proračunskog postupka u normama za dimenzioniranje takvih profila obeshrabruje inženjere projektante od korištenja U profila.



Postavlja se pitanje koji bi bili razlozi primjene U profila. Naime, ako su I profili i H profili jednostavniji za dimenzioniranje te otporniji na savijanje, logičan izbor bio bi odabir takvih profila u inženjerskoj praksi. Ipak, U profili imaju određene prednosti pred ostalim vrstama profila te se danas sve više koriste upravo iz tih razloga.

Jedna od glavnih prednosti korištenja U profila leži u jednostavnoj izvedbi spojeva s drugim elementima. Naime, zbog svog specifičnog oblika, hrbat se može jednostavno zavariti ili vijčano spojiti s bilo kojom drugom ravnom površinom. Inače, takva mogućnost ne postoji kod I profila gdje bi pojasnice to onemogućavale. Nadalje, U profili mogu se rabiti i iz estetskih razloga jer razbijaju monotoniju koju postavljaju dvoosno simetrični profili.

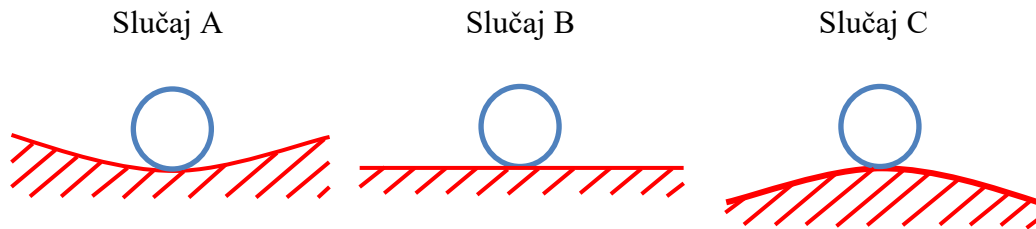
Stoga, cilj ovog istraživanja je rješavanje problematike otpornosti U profila izloženih savijanju te postavljanje podloga za uvođenje proračunskog postupka za dimenzioniranje U profila. U ovom istraživanju razmatrani su vruće valjani U profili, ali dobiveni zaključci se mogu primijeniti i na hladno oblikovane profile ili zavarene nosače U poprečnog presjeka.

## **1.2 Problematika stabilnosti čeličnih elemenata**

### **1.2.1 Pojam stabilnosti**

Stabilnost možemo definirati kao svojstvo fizikalnog sustava da se vrati u ravnotežu nakon neznatnog poremećaja [7]. Taj fizikalni sustav može biti konstrukcijski element (nosač, stup) ili konstrukcijski sustav (rešetka, okvir). Za nedeformabilna tijela, stabilnost sustava može se definirati primjerom kuglice na zakrivljenoj plohi. Na slici 1.5. možemo vidjeti 3 moguća slučaja ravnoteže. Slučaj A prikazuje stanje stabilne ravnoteže. Ako na sustav djeluje kratkotrajna sila poremećaja, on će se na kraju vratiti u početni položaj. Slučaj C) prikazuje stanje nestabilne ravnoteže. Ako na nestabilan sustav djeluje sila poremećaja, doći će do velikih odklona od ravnotežnog položaja, a sustav se više ne može vratiti u ravnotežni položaj. Kažemo da je sustav izgubio stabilnost. Slučaj B prikazuje poseban slučaj neutralne ravnoteže. Ako na takav sustav djeluje sila poremećaja on će se pomaknuti iz ravnotežnog položaja, ali neće izgubiti stabilnost. Taj sustav pronaći će novi ravnotežni položaj.

Gubitak stabilnosti nosivih elemenata ili sustava nazivamo izvijanjem. Preduvjet za gubitak stabilnosti nosivih elemenata je postojanje tlačnih naprezanja u jednom dijelu elementa ili pak u čitavom elementu [7]. Dalje u radu će biti opisani različiti načini gubitka stabilnosti nosivih elemenata, odnosno načini otkazivanja.



**Slika 1.5.** *Ravnotežna stanja*

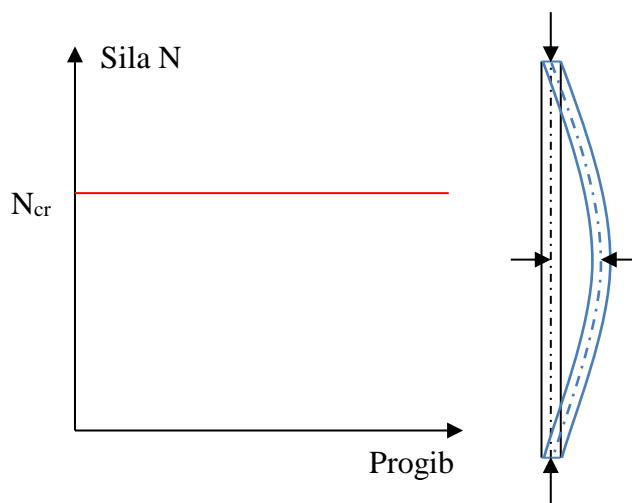
Klasična teorija stabilnosti podrazumijeva da je ponašanje elemenata idealno elastično te da su ti elementi idealno ravni [8]. Postupnim povećavanjem opterećenja takvi elementi zadržavaju stabilno stanje ravnoteže. Daljnjim povećavanjem opterećenja doseže se stanje neutralne ravnoteže. Element još nije izgubio stabilnost, ali beskonačno mali prirast opterećenja dovest će do gubitka stabilnosti. Vrijednost opterećenja pri kojoj element doseže stanje neutralne ravnoteže nazivamo elastično kritično opterećenje. Takav oblik gubitka stabilnosti nazivamo račvanje ravnoteže.

Na slici 1.6. prikazana je problematika račvanja ravnoteže na primjeru idealno elastičnog tlačno opterećenog štapa. Povećanjem uzdužne sile  $N$ , element ne doživljava nikakve bočne progibe, odnosno ostaje savršeno ravan. Dosezanjem kritičnog opterećenja, odnosno sile  $N_{cr}$ , element doživljava nagle i velike bočne pomake, a sila  $N$  se ne može više povećavati. U tom trenutku je došlo do gubitka stabilnosti, odnosno element se izvio. Isti zaključci doneseni za tlačno opterećen štapa vrijede i za bočno torzijsko izvijanje o kojem će kasnije biti riječ.

Realni čelični konstrukcijski elementi ne pokazuju idealno elastično ponašanje. Njihovo ponašanje je značajno različito od onog opisanog za idealne elemente zbog različitih imperfekcija sadržanih u realnom čeličnom nosaču [3]:

- 1) Geometrijske imperfekcije, početno odstupanje od idealno ravnog konstrukcijskog elementa, neparalelne pojasnice, asimetrija poprečnog presjeka itd.
- 2) Materijalne imperfekcije, rezidualni naponi ili neelastično ponašanje materijala

- 3) Odstupanje uzdužnih sila koje djeluju na konstrukcijski element od idealnog položaja zbog nesavršenih spojeva, tolerancija izvedbe itd.



**Slika 1.6.** Ponašanje idealnog elastičnog elementa

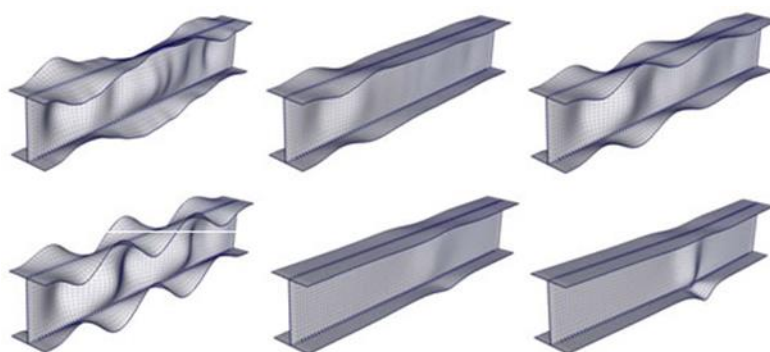
Opterećenjem takvih elemenata, progibi su vidljivi već od samog početka opterećenja i rastu povećanjem opterećenja. Dosezanjem granične vrijednosti opterećenja progibi elementa se naglo povećavaju, a krutost elementa pada. Ne dolazi do naglog gubitka stabilnosti do kakvog bi došlo u slučaju da je taj element idealan. Tada govorimo o gubitku stabilnosti divergencijom ravnoteže. Realni elementi nikada ne mogu doseći vrijednost elastičnog kritičnog opterećenja. Drugim rječima, otpornost realnih elemenata sa imperfekcijama uvijek će biti manja od otpornosti idealnih elemenata. U realnosti ne postoje idealni elementi i svi otkazuju divergencijom ravnoteže. Račvanje ravnoteže je pojam koji neminovno ostaje u domeni teorijskih razmatranja.

### 1.2.2 Načini otkazivanja

Izvijanje je u prethodnom poglavlju definirano kao gubitak stabilnosti konstrukcijskog elementa. U inženjerskoj praksi, nosivi elementi najčešće otkazuju gubitkom nosivosti poprečnog presjeka ili gubitkom stabilnosti elementa, odnosno sustava. Vitki elementi skloniji su gubitku stabilnosti. Upravo je zbog tog razloga problematika stabilnosti izražena puno više kod čeličnih konstrukcija nego kod ostalih tipova konstrukcija. U nastavku će biti izloženi mogući načini otkazivanja čeličnih elemenata. Kada govorimo o lokalnim načinima koristit će se pojam izbočavanja, a kada govorimo o globalnim načinima koristit će se pojam izvijanja.

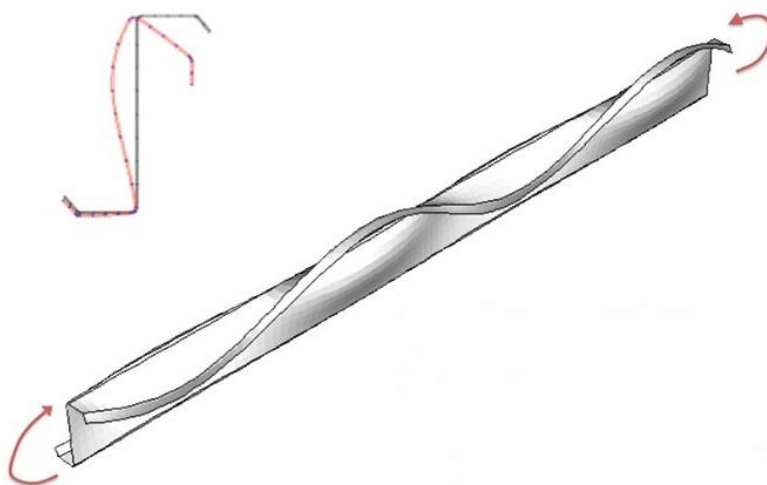
Također javlja se i distorzijsko izbočavanje kao granični slučaj između ta dva. U ovom radu gotovo isključivi naglasak će se staviti na bočno torzijsko izvijanje kao globalni oblik izvijanja.

Lokalno izbočavanje mjerodavno je kod elemenata koji imaju jako vitke hrptove, odnosno pojasnice. Takav način gubitka stabilnosti izražava se kovrcanjem pojasnica ili lokalnim izbočavanjem hrpta. Kod hrpta, duljina izvijanja iznosi približno koliko i širina samog hrpta. Kod pojasnica, duljina izvijanja može iznositi između jednostruke do peterostuke vrijednosti širine pojasnice [8]. Lokalni načini izbočavanja konstrukcijskog elementa su brojni i raznoliki, a neki od njih su prikazani na slici 1.7.



**Slika 1.7.** Prikaz nekih lokalnih modova izbočavanja I nosača [9]

Distorzijsko izbočavanje je rezultat istovremene interakcije lokanog i globalnog načina otkazivanja. Kada dođe do distorzijskog izbočavanja, hrbat se izobličiti, a pojasnice se uvijaju i deformiraju u bočnom smjeru kako je prikazano na slici 1.8. Posljedica je smanjena otpornost na torziju [8].



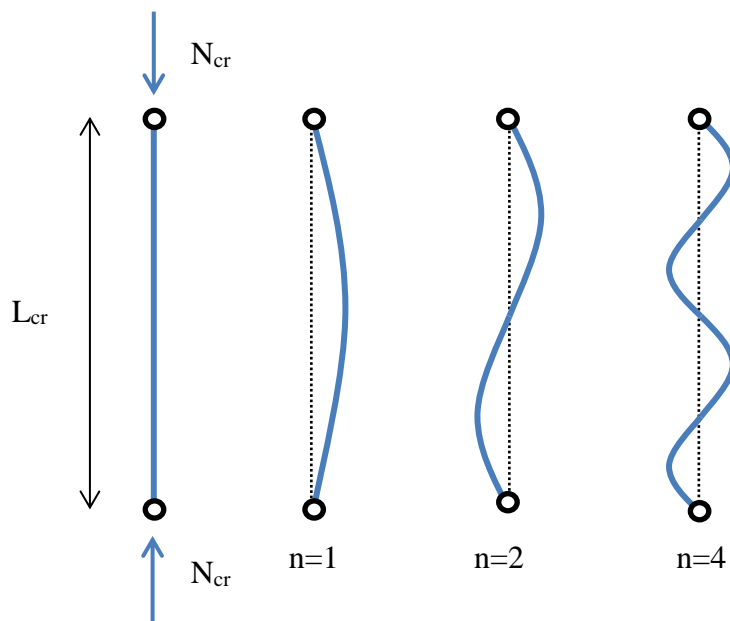
**Slika 1.8.** Distorzijsko izbočavanje Z profila

Globalno izvijanje je tip izvijanja koje utječe na cijeli konstrukcijski element. Ovisno o vrsti opterećenja koje djeluje na element i obliku deformacija koje se javljaju, razlikujemo više tipova globalnog izvijanja:

- 1) Izvijanje savijanjem
- 2) Izvijanje torzijom
- 3) Bočno torzijsko izvijanje

Izvijanje savijanjem je oblik izvijanja koji se događa kod elemenata izloženih tlaku ili istovremenom djelovanju tlaka i savijanja kod bočno pridržanih elemenata. Naprezani element se progiba bočno, bez pojave tordiranja. Progibni oblik elementa ima oblik sinusoide, a može imati jedan ili više polualova [3]. Udaljenosti između točaka infleksije progibne linije nazivamo duljinom izvijanja, a označavamo je s  $L_{cr}$ . Kod zglobno oslonjenog štapa ona je jednaka sustavnoj duljini elementa. Ovisno o rubnim uvjetima i načinima pridržanja, tlačni element može se izviti na više različitih načina. Te načine izvijanja nazivamo modovima.

Na slici 1.9. možemo vidjeti različite modove izvijanja tlačnog štapa. Modova izvijanja u teoriji ima beskonačno mnogo, ali će u općem slučaju doći do izvijanja prvim modom jer je za njega potrebna najmanja sila. Iz izraza za kritičnu silu tlačnog štapa je vidljivo da je za izvijanje drugim modom potrebna 4 puta veća sila nego za prvi mod. Viši modovi su mogući u slučaju da je tlačni štap bočno pridržan.



**Slika 1.9.** Modovi izvijanja tlačnog štapa

Izraz za kritičnu silu izvijanja tlačnog štapa glasi [3]:

$$N_{cr} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L_{cr}^2} \quad (1.1)$$

pri čemu  $n$  predstavlja mod izvijanja, a  $EI_z$  je fleksijska krutost oko slabije osi. Ovaj izraz prvi je izveo Leonhard Euler 1744. godine za slučaj zglobno oslonjenog, tlačno opterećenog elementa iz diferencijalne jednadžbe progibne linije [7].

Torzijsko izvijanje je oblik gubitka stabilnosti koji se može dogoditi kod elemenata izloženih uzdužnoj sili čiji poprečni presjeci imaju malu torzijsku krutost. U slučaju kad su izloženi uzdužnoj sili oni se tordiraju [3]. U većini slučajeva tlačno opterećenih štapova bit će mjerodavan način izvijanja savijanjem. Kritična sila koja će uzrokovati torzijsko izvijanje elementa računa se prema sljedećem izrazu [3]:

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_0^2} \cdot \left( G \cdot I_t + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_w}{L_T^2} \right) \quad (1.2)$$

gdje su:

$$i_0^2 = i_y^2 + i_z^2 + y_0^2 + z_0^2 \quad (1.3)$$

$E$  modul elastičnosti,

$G$  modul posmika,

$I_t$  torzijska konstanta poprečnog presjeka,

$I_w$  konstanta krivljenja poprečnog presjeka,

$L_T$  duljina nosača za izvijanje torzijom, a uzima se da je jednaka sustavnoj dužini elementa osim ako se posebnim konstrukcijskim elementima ne sprječava krivljenje na krajevima elementa,

$y_0$  i  $z_0$  su koordinate centra posmika s obzirom na težište,

$i_y$  radijus inercije poprečnog presjeka oko jače osi,

$i_z$  radijus inercije poprečnog presjeka oko slabije osi.

Bočno torzijsko izvijanje je oblik gubitka stabilnosti koji se događa kod nosača savijanog oko jače osi tromosti poprečnog presjeka naglim izbacivanjem oko slabije osi. Ovakav oblik otkazivanja iskazan je istovremenim bočnim progibanjem i tordiranjem nosača [3]. To je najčešći oblik gubitka nosivosti nepridržanih nosača opterećenih na savijanje oko jače osi tromosti poprečnog presjeka. Ukoliko je nosač idealan, uslijed savijanja doći će samo do vertikalnog progibanja. Dosezanjem kritičnog opterećenja, nosač se naglo izbacuje oko slabije osi i tordira [3]. Izraz za elastični kritični moment savijanja nosača je uspostavio Ludwig Prandtl 1899. godine [7]:

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 \cdot G \cdot I_t}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}} \quad (1.4)$$

gdje su:

- E     modul elastičnosti,
- G     modul posmika,
- $I_z$    moment tromosti oko slabije osi,
- $I_t$    torzijska konstanta,
- $I_w$    konstanta krivljenja,
- L     duljina nosača.

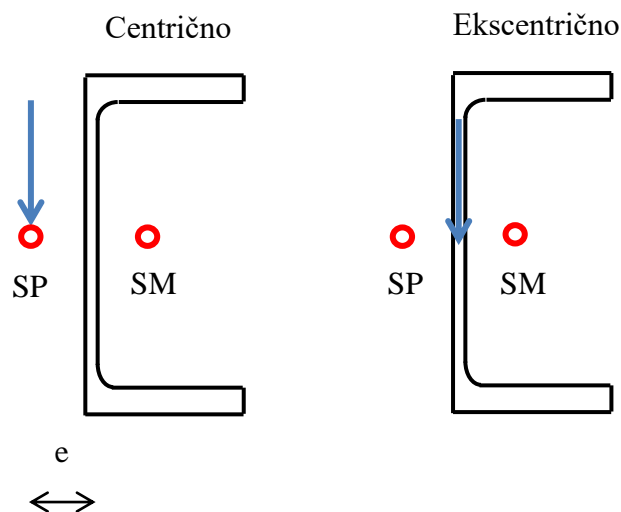
Navedeni izraz vrijedi samo za jednostavno oslonjene nosače kod kojih ležajevi sprječavaju bočni pomak i tordiranje na kraju nosača, ali je presjek slobodan na krivljenje.

### 1.2.3 Razlike između centrično i ekscentrično opterećenih nosača.

Za problematiku ekscentričnosti opterećenja, prvo je potrebno definirati što je središte masa poprečnog presjeka, a što središte posmika. Središte masa ili težište poprečnog presjeka definiramo kao točku koja se nalazi na prosječnoj udaljenosti od svih čestica koje čine taj poprečni presjek. Središte masa možemo i definirati kao hvatište ukupne vanjske sile koja djeluje na sustav čestica koje čine taj presjek [10]. S druge strane, središte posmika definiramo kao točku kroz koju prolazi rezultanta svih unutarnjih posmičnih sila [11]. Ako je presjek izložen torziji, on će rotirati oko središta posmika. Ono se u općem slučaju ne poklapa sa težištem poprečnog presjeka.

Ako opterećenje koje djeluje okomito na os nosača prolazi kroz središte posmika tada govorimo o centrično opterećenim profilima. Kod dvoosno simetričnih profila, kao što su I i H profili, središte posmika podudara se sa samim težištem poprečnog presjeka. Pri većini slučajeva opterećenja takvih profila, rezultanta sile prolazi kroz hrbat, odnosno kroz samo središte posmika te se ne javlja problematika torzije.

Ako se dogodi da rezultanta vanjskih sila ne prolazi kroz središte posmika, javit će se torzija nosača. Kod nosača izvedenih iz U profila, središte posmika nalazi se izvan samog presjeka, te je za očekivati da u realnoj situaciji rezultanta vanjskih opterećenja neće nikada prolaziti kroz središte posmika. Ona će najčešće prolaziti kroz hrbat. Kao što je rečeno, tada se pojavljuje torzija zajedno sa savijanjem, a rezultat je smanjena otpornost nosača. Na slici 1.10. može se jasno vidjeti razlika između centrično i ekscentrično opterećenog U profila. Točka SP predstavlja središte posmika dok točka SM predstavlja središte mase. Ukoliko sila prolazi kroz središte posmika kako je prikazano na slici 1.10. na desnom profilu, neće doći do pojave torzije, a rezultat će biti samo progibanje nosača. Ukoliko opterećenje prolazi kroz hrbat, tada govorimo o ekscentrično opterećenom nosaču. U realnoj građevinskoj praksi, rezultanta vanjskih sila gotovo uvijek prolazi kroz hrbat. Oblik opterećenja gdje rezultanta prolazi kroz središte posmika obično postoji samo u teoretskim razmatranjima.



**Slika 1.10.** Slučaj centričnog i ekscentričnog opterećenja

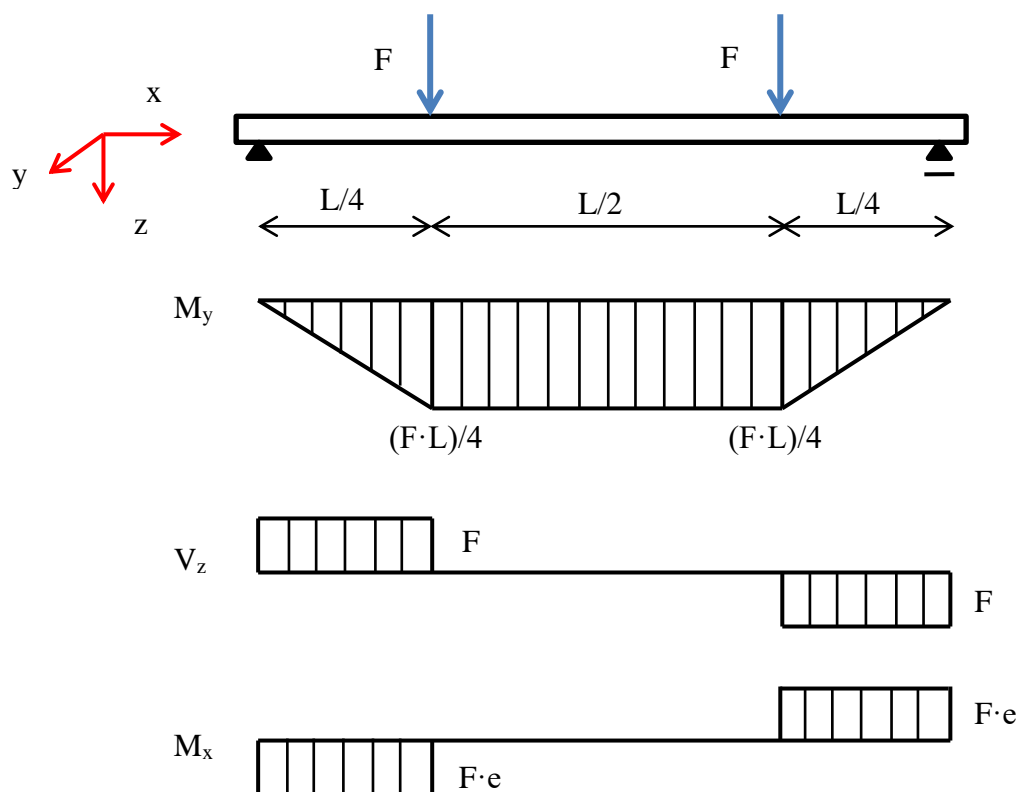
Da bi smo promotri razlike centrično i ekscentrično opterećenih nosača, promatrat ćemo primjer slobodno oslonjenog nosača, opterećenog s dvije koncentrirane sile na udaljenostima  $L/4$  od oslonca, gdje je  $L$  raspon nosača. U prvom primjeru promatra se nosač koji je opterećen



centrično, odnosno, hvatište sile prolazi kroz središte posmika (SP). U drugom slučaju promatra se identični nosač koja je ekscentrično opterećen, odnosno, rezultanta sile prolazi kroz hrbat.

Na slici 1.11. prikazan je nosač sa djelujućim opterećenjima i dijagramima unutarnjih sila. Orijehtacija koordinatnih osi je sljedeća: x je uzdužna os nosača, z je vertikalna os, a y horizontalna. Napomena: Ovako postavljen koordinatni sustav upotrebljavat će se u svim analizama i primjerima u ovom radu.

U slučaju centričnog opterećenja može se uočiti da na nosač djeluje samo moment savijanja oko jače osi  $M_y$  i posmična sila u vertikalnom smjeru  $V_z$ . Takav oblik opterećenja odgovara jednoosnom savijanju. Torzija se ne javlja



**Slika 1.11.** Prikaz statičkog sustava s dijagramima unutarnjih sila i momenata savijanja

Maksimalne unutarnje sile i momenti savijanja koji se javljaju u nosaču, pojavljuju se u presjeku udaljenom  $L/4$  od oslonca, a iznose:

$$M_{y,\max} = \frac{F \cdot L}{4} \quad (1.5)$$

$$V_{z,\max} = F \quad (1.6)$$

Sukladno unutarnjim silama i momentima savijanja u nosaču se javljaju normalna i posmična naprezanja. Normalna naprezanja u poprečnom presjeku  $\sigma_x$  nastaju od momenta savijanja  $M_y$ . Ako sa  $z$  označimo udaljenost od neutralne osi, možemo zapisati izraz za normalna naprezanja:

$$\sigma_x = \sigma_{tot} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (1.7)$$

Iz izraza (1.7) može se uočiti da se normalna naprezanja linearno povećavaju sa udaljenošću od neutralne osi. Posmična naprezanja u presjeku nastaju samo od posmične sile  $V_z$ , a možemo ih izračunati prema sljedećem izrazu :

$$\tau_z = \tau_{tot} = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot t(s)} \quad (1.8)$$

U izrazu (1.8)  $S_y$  predstavlja statički moment tromosti poprečnog presjeka, a  $t(s)$  je debljina stijenke presjeka izražena kao funkcija koordinate poprečnog presjeka.

Ako razmotrimo taj isti nosač, ali ovaj put u slučaju da rezultanta vanjskih sila prolazi kroz hrbat, doći će do torzije nosača. Maksimalne unutarnje sile i momenti koje se javljaju u nosaču, u presjeku udaljenom  $L/4$  od oslonca, iznose:

$$M_{y,\max} = \frac{F \cdot L}{4} \quad (1.9)$$

$$V_{z,\max} = F \quad (1.10)$$

$$M_x = M_{x,t} + M_{x,w} = F \cdot e \quad (1.11)$$

Kao posljedica torzije u proizvoljnom poprečnom presjeku se sada javljaju normalna naprezanja kao posljedica bimomenta koji uzrokuje krivljenje presjeka. Također, javljaju se i dodatna posmična naprezanja od torzije. Ukupna torzija koja djeluje na presjek, sukladno izrazu

(1.11), može se rastaviti na čistu, odnosno Saint Venantovu torziju  $M_{x,t}$ , te torziju krivljenja  $M_{x,w}$ . Sukladno tome, javit će se i dvije komponente posmičnih naprezanja u poprečnom presjeku. Kao posljedica čiste torzije javljaju se posmična naprezanja koja se linearno mijenjaju po debljini stijenke poprečnog presjeka. Torzija krivljenja uzrokuje nelinearnu raspodjelu posmičnih naprezanja duž konture presjeka. Izraz za ukupna normalna normalna naprezanja sada glasi [11]:

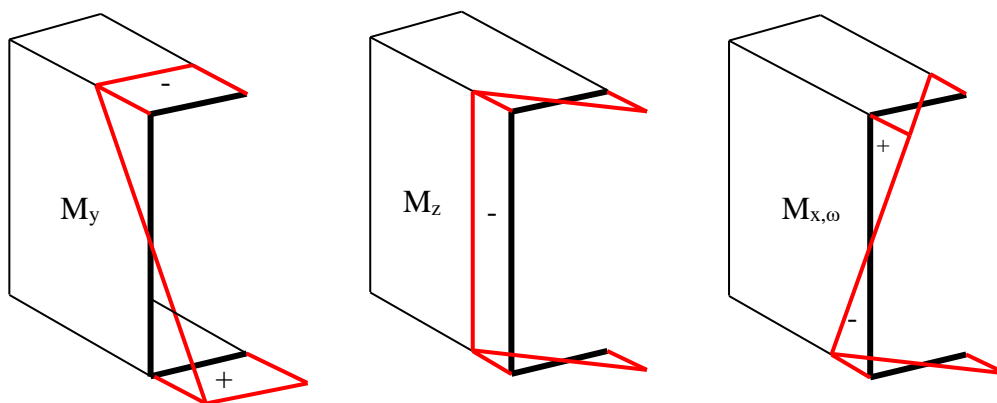
$$\sigma_x = \sigma_{tot} = \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{B_\omega}{I_w} \cdot \omega \quad (1.12)$$

gdje je  $B_\omega$  bimoment krivljenja,  $I_w$  je konstanta krivljenja koja ovisi o karakteristikama poprečnog presjeka, a  $\omega$  je sektorska koordinata presjeka.

Izraz za ukupna posmična naprezanja možemo napisati [11]:

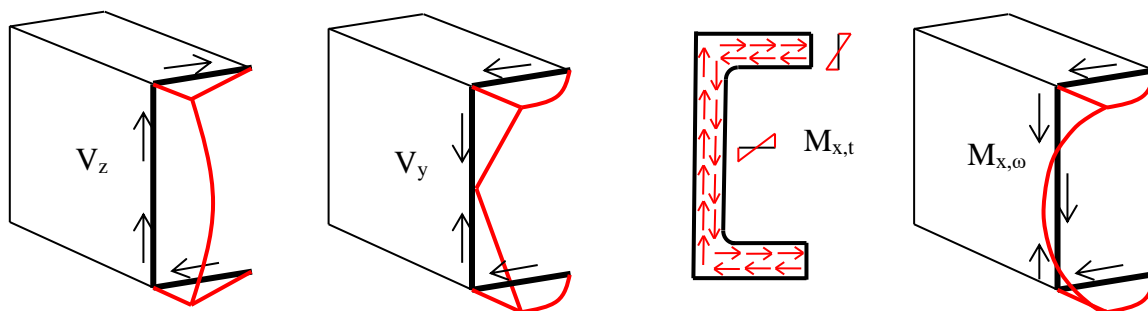
$$\tau_z = \tau_{tot} = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot t(s)} \pm \frac{M_{x,t}}{I_t} \cdot t(s) + \frac{M_{x,w}}{I_t \cdot t(s)} \cdot S_\omega \quad (1.13)$$

gdje je  $I_t$  torzijska konstanta, a  $S_\omega$  je sektorski statički moment poprečnog presjeka. Na slikama 1.12. i 1.13. mogu se vidjeti raspodjele normalnih i posmičnih naprezanja u poprečnom presjeku U profila u slučaju ekscentričnog opterećenja.



**Slika 1.12.** Prikaz normalnih naprezanja u poprečnom presjeku U profila u slučaju ekscentričnog opterećenja

Iako se intuitivno doima da je ekscentrično opterećenje nosača izrazito slično centričnom, promatranjem raspodjela naprezanja može se zaključiti da ekscentrično opterećenje uzrokuje znatno složenije stanje naprezanja i da je pronalaženje izraza za određivanje otpornosti takvih nosača na savijanje također znatno složenije.



**Slika 1.13.** Prikaz posmičnih naprezanja u poprečnom presjeku U profila u slučaju ekscentričnog opterećenja

U slučaju centričnog opterećenja stanja naprezanja javlja se samo jedna komponenta normalnih naprezanja i to uslijed momenta savijanja oko osi  $y$ . Kod ekscentričnog opterećenja javlja se druga komponenta normalnih naprezanja od bimomenta. U slučaju posmičnih naprezanja javljaju se nove dvije komponente posmičnih naprezanja, jedna od čiste torzije, a jedna komponenta od torzije krivljenja.

## 2 HIPOTEZA I CILJ ISTRAŽIVANJA

Proračun nosača koji imaju dvoosno simetrične presjeke kao što su I profili i H profili, detaljno je razrađen u Europskim normama (EN), ali i u različitim normama diljem svijeta. Norme pokrivaju slučajeve opterećenja kao što su vlak, tlak, savijanje itd., ali i istodobno djelovanje više različitih slučajeva opterećenja. To je i jedan od razloga zašto su takvi nosači najčešće primjenjivani u praksi. Nažalost, kao što je već u uvodu spomenuto, danas u svijetu ne postoji normirani postupak za proračun nosača U profila izloženih savijanju. Prema [6], proučavanjem nizozemskih, belgijskih, njemačkih, švicarskih, američkih, kanadskih i australskih normi, nije pronađen razrađen postupak za proračun nosača U profila izloženih savijanju. Kod takvih nosača, prilikom savijanja, rezultanta opterećenja obično prolazi kroz hrbat, što odstupa od centra posmika te se javlja torzija zajedno sa savijanjem. Zbog takve složene problematike nije lako pronaći općenite izraze, odnosno formule s kojima bismo mogli proračunati njihovu otpornost na savijanje. Neki autori [8] ipak navode da se u slučaju centrično opterećenih U profila, otpornost takvih nosača može računati na isti način kao da se radi o dvoosno simetričnim poprečnim presjecima. Kao što je već objašnjeno, u realnoj situaciji takvo opterećenje ne postoji. S obzirom da je savijanje dominantni oblik opterećenja nosivih elemenata u građevinarstvu, slijedi da je upotreba takvih profila značajno limitirana u praksi. Danas svakako možemo zamijetiti porast u proizvodnji i korištenju takvih nosivih elemenata, te je potreba za normiranim i jednostavnim proračunskim postupkom veća nego ikad.

Neki autori [12], [13] su već dali prijedloge za proračun ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila dobivene na temelju laboratorijskih ispitivanja i upotrebom softvera koji se koriste metodom konačnih elemenata (MKE). Ipak, nijedan od tih prijedloga još nije usvojen u normama. Također, u navedenim prijedlozima ne postoje gotovo nikakve informacije o načinu izračuna elastičnog kritičnog momenta ekscentrično opterećenih U profila. Izračun elastičnog kritičnog momenta nosača predstavlja prvi i neizostavan korak pri određivanju otpornosti na savijanje nekog nosača. Taj problem se može riješiti korištenjem MKE softvera kao što su Ansys i Abaqus. Ta metoda svakako je suviše složena za svakodnevnu praksu i potrebno je pronaći jednostavnije rješenje.

Osnovna motivacija za provođenje ovog istraživačkog rada je bila želja i potreba da se istraži određivanje otpornosti U profila izloženih savijanju. Poseban naglasak stavljen je na izučavanje elastične otpornosti nosača U profila, odnosno, određivanje elastičnog kritičnog momenta. Kao što je prethodno spomenuto, ne postoje gotovo nikakve dostupne informacije niti objavljeni znanstveni članci vezani uz tu problematiku.

U ovom istraživanju napravljena je usporedba izračunatih elastičnih kritičnih momenata ekscentrično opterećenih nosača i centrično opterećenih te se razmatralo koliko iznosi to odstupanje čime se željelo istražiti sljedeću hipotezu: *Elastični kritični moment ekscentrično opterećenih nosača može se računati na isti način kao i centrično opterećenih ukoliko je ekscentricitet ograničen.*

Cilj ovog istraživanja je da se donesu zaključci i preporuke za izračun elastičnih kritičnih momenata ekscentrično i centrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila koje će poslužiti kao podloga za predlaganje postupka za dimenzioniranje nosača izvedenih iz U profila. Na temelju rezultata ovog istraživanja planira se provođenje eksperimenata za određivanje realne otpornosti nosača U profila izloženih savijanju, te provođenje parametarskog numeričkih analiza. Na taj način će se valorizirati postojeći predloženi postupci za proračun nosača izvedenih iz U profila, te po potrebi predložiti modifikaciju postojećih postupaka.

Za kraj treba također napomenuti da se vruće valjani profili, a time i U profili, ne koriste samo u građevinarstvu, već i na području strojarstva i brodogradnje, te se rezultati ovog istraživanja mogu primijeniti i u tim strukama.

### 3 METODE ISTRAŽIVANJA

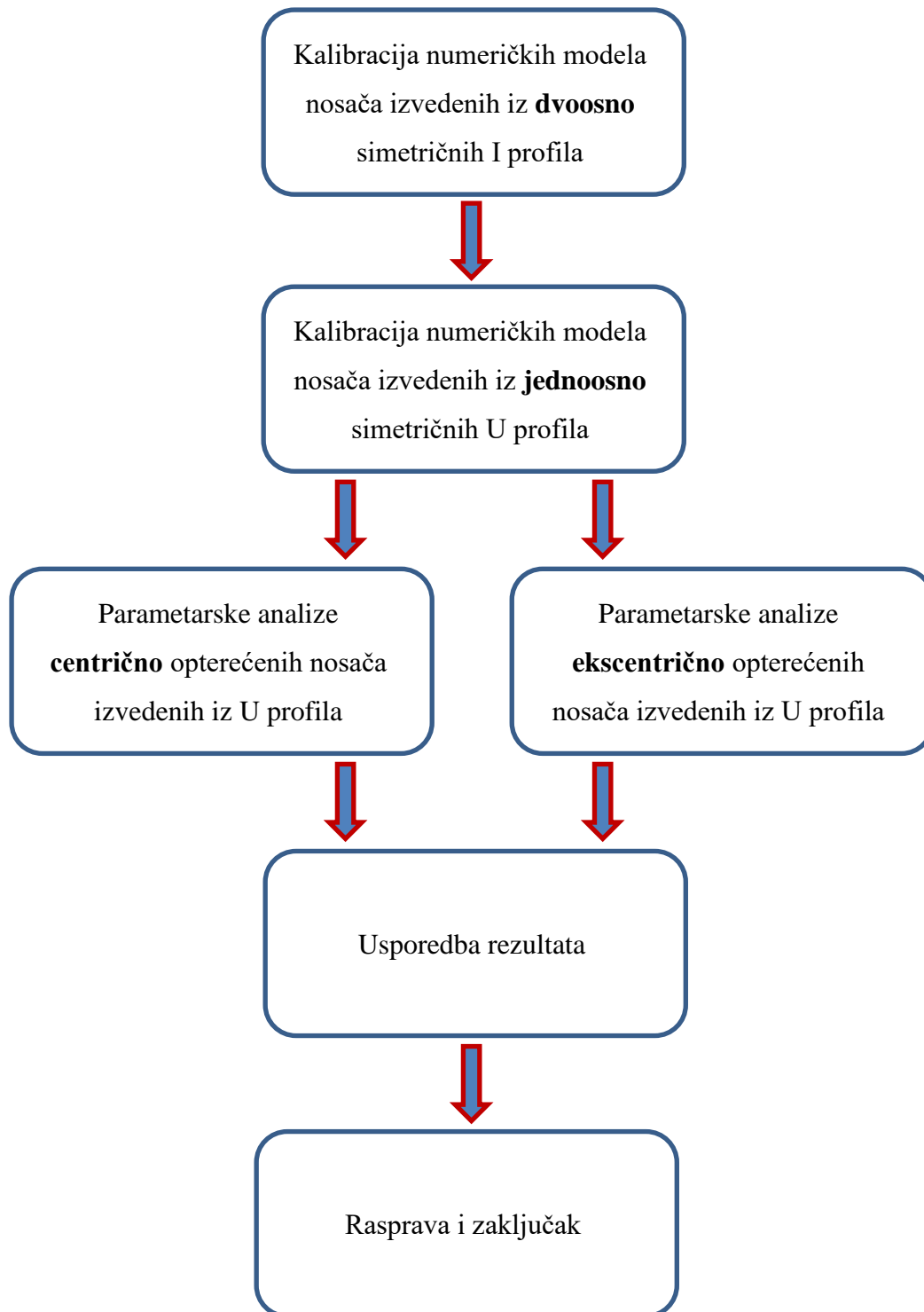
U radu su provedena opsežna parametarska numerička istraživanja problema određivanja elastičnog kritičnog momenta nosača izvedenih iz U profila. Da bi se moglo definirati područje i opseg istraživanja prvo je napravljen pregled metoda određivanja otpornosti na savijanje dvoosno simetričnih i jednoosno simetričnih profila. U dostupnoj literaturi [6], [8] i [14] proučeni su različiti načini određivanja elastičnog kritičnog momenta primjenom numeričkih simulacija.

Na temelju izloženog definiran je plan istraživanja koji je podijeljen u nekoliko koraka:

1. Definiranje opsega istraživanja na temelju detaljnog pregleda stanja područja određivanja otpornosti na bočno torzijsko izvijanje dvoosno simetričnih i jednoosno simetričnih profila.
2. Kalibracija numeričkih modela za određivanje elastičnog kritičnog momenta nosača izvedenih iz dvoosno simetričnih (I profila) i jednoosno simetričnih profila (U profila).
3. Numeričko određivanje elastičnog kritičnog momenta centrično i ekscentrično opterećenih jednoosno simetričnih U profila za različite vitkosti i rubne uvjete i usporedba dobivenih rezultata.
4. Diskusija i zaključak

Struktura istraživanja prikazana je na slici 3.1.

Ovakav pristup omogućuje proširenje saznanja o određivanju elastičnog kritičnog momenta centrično i ekscentrično opterećenih jednoosno simetričnih profila. Dobiveni rezultati dat će podlogu za valorizaciju postojećih postupaka i po potrebi podloge za razvoj novog postupka određivanja otpornosti na bočno torzijsko izvijanje jednoosno simetričnih profila koji će biti primijenjiv u praksi.



Slika 3.1. Struktura istraživanja



## 4 BOČNO TORZIJSKO IZVIJANJE DVOOSNO SIMETRIČNIH I JEDNOOSNO SIMETRIČNIH PROFILA

### 4.1 Savijanje

Promatramo ravni nosač izložen djelovanju opterećenja koje leži u jednoj ravnini nazvanom ravninom opterećenja koja prolazi kroz uzdužnu os štapa. Pod djelovanjem danog opterećenja uzdužna os štapa se iskrivljuje, odnosno mijenja se zakriljenost. Vlakna usporedna s osi štapa se skraćuju na konkavnoj strani, a produljuju na konveksnoj. Opisani oblik opterećenja se naziva savijanje. Ako se u poprečnim presjecima nosača javljaju moment savijanja i poprečna sila takav oblik savijanja nazivamo poprečno savijanje ili savijanje silama. Ako se javlja samo moment savijanja tada govorimo o čistom savijanju [10].

U inženjerskoj praksi savijanje se razmatra prema Euler-Bernoulli hipotezi. Uzimanjem u obzir određenih pretpostavki, ta metoda daje dovoljno točnu aproksimaciju momenata savijanja i deformacija elementa uslijed djelovanja poprečne sile.

Da bi se takva teorija mogla primijeniti potrebno je ostvariti sljedeće pretpostavke [6]:

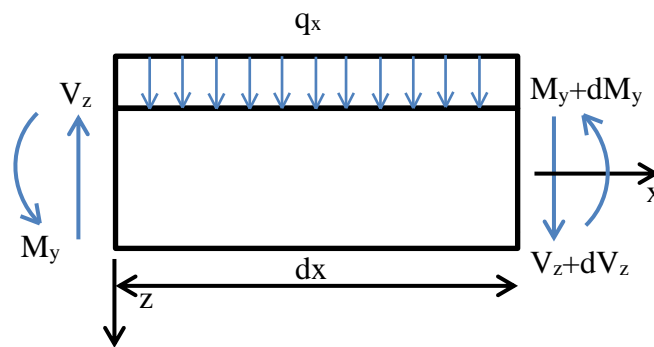
- 1) Elementi koje promatramo su prizmatični.
- 2) Deformacije od savijanja su male.
- 3) Rotacije oko uzdužne osi su infinitezimalne.
- 4) Deformacije od posmika su zanemarive.
- 5) Poprečni presjeci uslijed savijanja ostaju ravni.
- 6) Ponašanje materijala je linearno elastično.

Svi ovi zahtjevi su u inženjerskoj praksi obično i ostvareni. Karakterističan je jedino četvrti uvjet koji ne vrijedi u slučaju zdepastih elemenata gdje deformacije od posmika postaju značajne i u tom slučaju nosač je potrebno promatrati prema Timošenkovoj teoriji. Međutim, kod elemenata za koje vrijedi  $b/L < 10$  i  $h/L < 10$ , gdje su  $b$  i  $h$  visina i širina poprečnog presjeka, a  $L$  raspon, taj uvjet je ispunjen [6].

Diferencijalnu jednadžbu savijanja po Euler-Bernoulli hipotezi dobivamo promatrajući ravnotežu infinitezimalnog odsječka nosača duljine  $dx$  prikazanog na slici 4.1. Na slici vidimo da se od unutarnjih sila javlja moment savijanja oko jače osi  $M_y$  i posmična sila  $V_z$ . Diferencijalna jednadžba savijanja glasi [10]:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{M_y}{E \cdot I_y} \quad (4.1)$$

pri čemu je  $M_y$  moment savijanja oko horizontalne osi  $y$ , a  $EI_y$  je fleksijska krutost oko osi  $y$ .



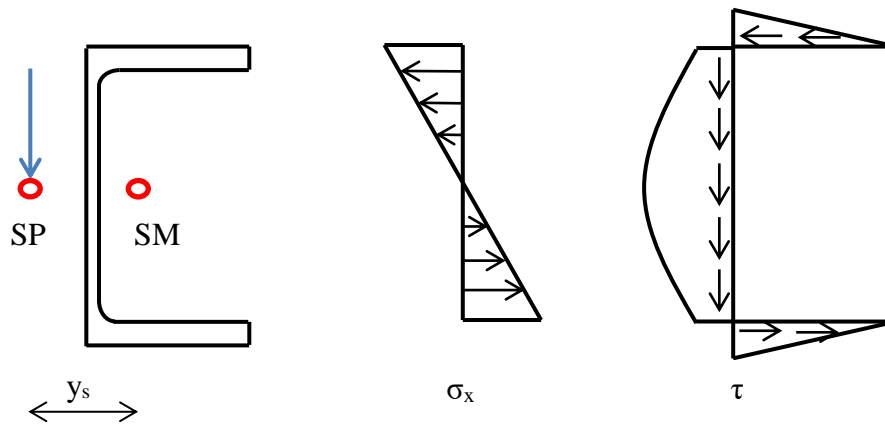
**Slika 4.1.** Ravnoteža infinitezimalnog odsječka pod savijanjem

Dvostrukim deriviranjem diferencijalne jednadžbe za savijanje (4.1), dobiva se sljedeći izraz:

$$E \cdot I_y \cdot \frac{d^4 z}{dx^4} = -q(x) \quad (4.2)$$

pri čemu je  $q(x)$  poprečna sila koja djeluje na element.

Uslijed savijanja, u poprečnom presjeku elementa javljaju se normalna i posmična naprezanja. Raspodjela naprezanja za U profil izložen savijanju je prikazana na slici 4.2. Sa slike se može vidjeti da je raspodjela normalnih naprezanja  $\sigma_x$  linearna, odnosno povećava se linearno udaljavanjem od neutralne osi. Kod posmičnih naprezanja  $\tau$ , može se uočiti linearna raspodjela naprezanja u pojasnicama presjeka i parabolična raspodjela u hrptu. Rezultanta posmičnih naprezanja u hrptu mora biti jednaka sili  $F$ . Također treba primjetiti da se posmična naprezanja u pojasnicama ne uravnotežuju međusobno već stvaraju moment torzije. Da presjek nebi bio izložen torziji, sila  $F$  mora djelovati na udaljenosti  $y_s$  od središta mase, odnosno mora prolaziti kroz središte posmika. Tada će momenti torzije od vanjskih sila i od unutarnjih biti u ravnoteži.



**Slika 4.2.** *Raspodjela normalnih i posmičnih naprezanja pri savijanju centrično opterećenog U profila*

## 4.2 Torzija

Ako je ravni štap opterećen momentima  $M_x$  koji djeluju u ravnini okomitoj na os štapa, onda u bilo kojem poprečnom presjeku štapa postoji samo moment torzije  $M_t$ , a sve ostale komponente unutarnjih sila su jednake nuli. Taj slučaj opterećenja štapa naziva se torzija [10].

Promatrajući torziju vrućevaljanih profila, neminovno ulazimo u područje torzije tankostijenih štapova koja se ponešto razlikuje, odnosno, složenija je od torzije štapova punog poprečnog presjeka. Tankostijeni štapovi su takvi elementi kod kojih je debljina stijenke znatno manja od ostalih dimenzija poprečnog presjeka štapa koje su znatno manje od duljine štapa [11]. Tankostijeni štapovi mogu biti otvorenog ili zatvorenog poprečnog presjeka. Kod štapova zatvorenog poprečnog presjeka uvijek vrijedi Bernuolijeva hipoteza ravnih presjeka, dok kod štapova otvorenog poprečnog presjeka hipoteza će samo vrijediti ako rezultanta vanjskih sila prolazi kroz središte posmika [11]. U protivnom dolazi do torzije krivljenja koja za sobom povlači pojavu bimomenta i krivljenje presjeka što će biti objašnjeno u nastavku.

Torzija se može podijeliti na dva osnovna oblika: čista torzija (Saint Venantova) i torzija krivljenja. Kod čiste torzije svi se poprečni presjeci u elementu mogu slobodno deformirati. Udaljenost između presjeka se ne mijenja, odnosno, nema pojave normalnih naprezanja. Raspodjela posmičnih naprezanja je jednaka u svim presjecima. Jednadžba Saint Venantove torzije glasi [11]:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \quad (4.3)$$

pri čemu je  $d\phi/dx$  kut tordiranja po jedinici duljine elementa,  $M_t$  je moment torzije, a  $GI_t$  je torzijska krutost poprečnog presjeka elementa.

Pretpostavke Saint Venantove torzije su sljedeće [6]:

- 1) Kut tordiranja po duljini elementa ( $d\phi/dx$ ) je konstantan.
- 2) Linije paralelne sa osi štapa postaju spiralne nakon tordiranja.
- 3) Ne dolazi do pojave normalnih naprezanja prilikom tordiranja.
- 4) Poprečni presjeci rotiraju kao kruta tijela oko uzdužne osi, tj. ne deformiraju se.

Ako je ograničeno krivljenje jednog ili više poprečnih presjeka tada govorimo o ograničenoj torziji, odnosno torziji krivljenja. Razmaci poprečnih presjeka se mijenjaju, a u presjeku se uz posmična naprezanja pojavljuju i normalna. Posljedica pojave normalnih naprezanja uzduž osi štapa je stvaranje bimomenta koji uzrokuje krivljenje presjeka. Bimoment možemo jednostavno definirati kao par momenata koji djeluju na udaljenosti  $h$ , a potrebni su da bi sprječili krivljenje presjeka [11]. Matematički to možemo izraziti sljedećom formulom:

$$B_w = M \cdot h \quad (4.4)$$

gdje je  $h$  visina poprečnog presjeka, a  $M$  su momenti koji djeluju na udaljenosti  $h$ , ili možemo kazati, u razinama pojasnica poprečnog presjeka. Torzija krivljenja javlja se u slučaju da je ostvaren jedan ili više sljedećih uvjeta [11]:

- 1) Uzduž osi štapa mijenja se moment torzije.
- 2) Uzduž osi štapa mijenja se poprečni presjek štapa.
- 3) Jedan ili oba ruba štapa su upeti.

Jednadžbu torzije krivljenja razvio je V. Z. Vlasov [8]:

$$E \cdot I_w \frac{d^4\phi}{dx^4} - G \cdot I_t \frac{d^2\phi}{dx^2} = m_x \quad (4.5)$$

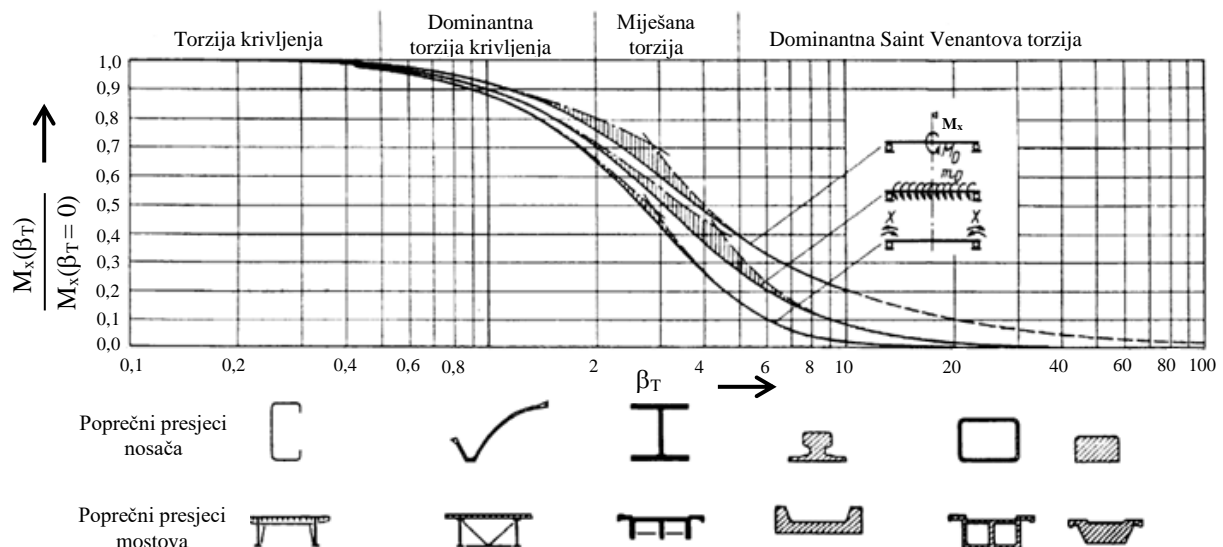
gdje je  $m_x$  kontinuirani moment torzije uzduž osi grede.

Ako uvjeti za Saint Venantovu torziju nisu ispunjeni, tada će nastupiti interakcija Saint Venantove torzije i torzije krivljenja. Primjetimo da postoji slučaj kada uz ostvarenje prethodno spomenutih uvjeta može nastupiti slučaj u kojem se u presjeku javlja samo Saint Venantova torzija. Ali ne može nastupiti slučaj gdje imamo samo torziju krivljenja uz odsustvo Saint Venantove torzije. Izraz za interakciju Saint Venantove torzije i torzije krivljenja glasi [11]:

$$M_x = M_{x,t} + M_{x,w} = G \cdot I_t \frac{d\phi}{dx} - E \cdot I_w \frac{d^4\phi}{dx^4} \quad (4.6)$$

pri čemu je  $M_x$  ukupni moment torzije koji djeluje na poprečni presjek,  $M_{x,t}$  je dio momenta torzije koji otpada na Saint Venantovu torziju, a  $M_{x,w}$  otpada na torziju krivljenja.

Kod štapova punog poprečnog presjeka ili tankostijernih štapova zatvorenog poprečnog presjeka, torzija krivljenja gotovo nema utjecaj na raspodjelu naprezanja u poprečnom presjeku, ali kod tankostijernih štapova otvorenog poprečnog presjeka, ona značajno utječe na raspodjelu naprezanja i krivljenje poprečnog presjeka. Veličina utjecaja pojedinog oblika torzije u ovisnosti od oblika poprečnog presjeka je ilustrirana na slici 4.3.



**Slika 4.3.** Ovisnost koeficijenta  $\beta_T$  i dominantnog oblika torzije

Da bismo mogli odrediti koji oblik torzije će biti dominantan, koristimo se koeficijentom  $\beta_T$  koji se izračunava prema sljedećem izrazu [6]:

$$\beta_T = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w}} \cdot L \quad (4.7)$$

gdje je L duljina elementa.

### 4.3 Problematika gubitka stabilnosti

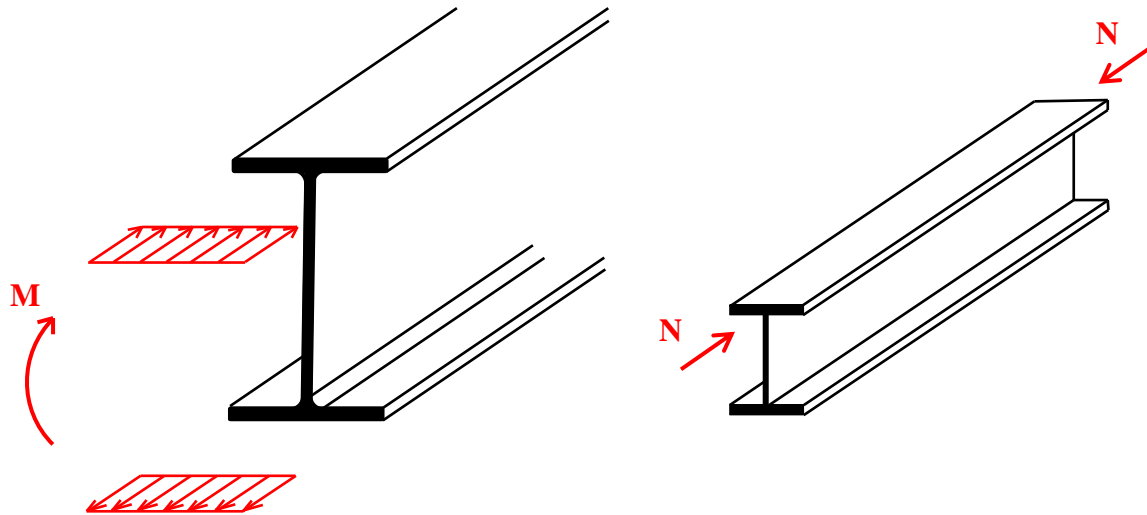
Bočno torzijsko izvijanje je oblik gubitka stabilnosti nosivih elemenata savijanih oko jače osi. Ono predstavlja najčešći oblik gubitka stabilnosti elemenata opterećenih na savijanje oko jače osi tromosti poprečnog presjeka.

Pojavu gubitka stabilnosti bočnim izvijanjem možemo opisati na nosaču I oblika poprečnog presjeka. Analogan postupak može se primjeniti i na U profile, ali radi jednostavnosti, pojašnjenje će se ipak provesti na nosaču I oblika poprečnog presjeka.

Ilustracija bočnog torzijskog izvijanja dana je na slici 4.4. Prilikom savijanja nosača dolazi do linearne raspodjele naprezanja koja se povećava udaljavanjem od neutralne osi. Slijedi da su pojasnice profila najopterećenije na tlak, odnosno vlak. Pojasnica koja je opterećena na tlak izložena je gubitku stabilnosti izvijanjem savijanjem. Kada tlačna naprezanja postanu dovoljno velika dolazi do izvijanja pojasnice oko jače osi. Pojasnica se ne može izviti oko slabije osi jer je pridržana hrptom. Izvijanje pojasnice konačno uzrokuje gubitak stabilnosti čitavog nosača. Taj oblik gubitka stabilnosti nazivamo bočnim torzijskim izvijanjem, ili jednostavnije kazano, bočnim izvijanjem.

Postoje slučajevi kada ne može doći do bočnog izvijanja, a to su sljedeći [3]:

- 1) Elementi savijani oko slabije osi tromosti.
- 2) Elementi koji imaju pridržanu tlačnu pojasnicu.
- 3) Zdepasti elementi (otkazuju dosežanjem plastične otpornosti).
- 4) Elementi koji nemaju izraženu jaču i slabiju os tromosti presjeka (cijevni profili, kvadratni presjeci itd.).

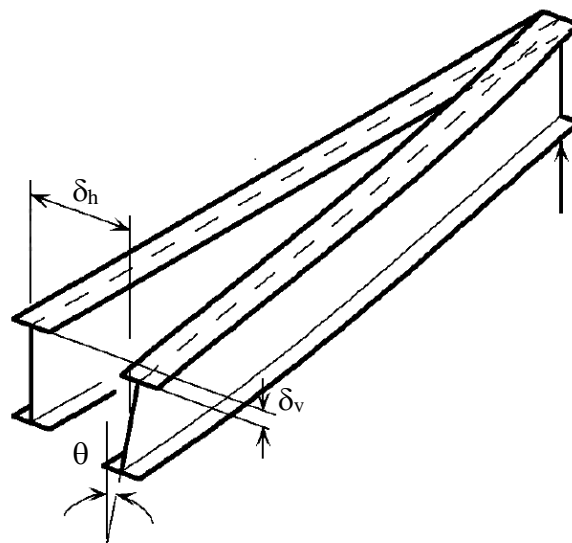


Slika 4.4. Gubitak stabilnosti tlačne pojasnice

Promatrajući deformaciju proizvoljnog poprečnog presjeka nosača vidljive su sljedeće komponente deformacije:

- vertikalni pomak,
- bočni pomak i
- tordiranje.

Iz toga možemo zaključiti da prilikom bočnog izvijanja na nosač istodobno djeluju: savijanje oko jače osi, savijanje oko slabije osi te torzija. Na slici 4.5. prikazana je deformacija konzole opterećene na savijanje. Uslijed gubitka stabilnosti dolazi do vertikalnog pomaka  $\delta_v$ , horizontalnog pomaka  $\delta_h$ , te kuta rotacije  $\theta$ .



Slika 4.5. Deformacija konzole prilikom bočno torzijskog izvijanja

## 4.4 Elastični kritični moment

Elastični kritični moment nosača (u nastavku  $M_{cr}$ ) predstavlja moment savijanja pri kojem bi došlo do gubitka stabilnosti nosača bočno torzijskim izvijanjem kada bi on bio idealan, odnosno kada bi bio početno savršeno ravan i bez rezidualnih napona, i kad bi ponašanje materijala idealno elastično. Iz razloga što takvi nosači ne postoje u praksi, realni nosači nikada neće doseći takvo opterećenje. Ipak, računanje elastičnog kritičnog opterećenja je od presudne važnosti za proračun otpornosti realnih nosača jer predstavlja osnovnu veličinu u proračunskom postupku što je detaljnije objašnjeno u nastavku.

Osnovni izraz za elastični kritični moment je postavio Prandtl 1899 godine rješavanjem diferencijalne jednačbe nosača [7]. Modificirani oblik tog izraza koristi se i danas za određivanje  $M_{cr}$ .

Iako u samoj europskoj normi za projektiranje čeličnih konstrukcija EN 1993-1-1 [15] ne postoji razrađen postupak za proračun  $M_{cr}$ , detaljno razrađen postupak za proračun  $M_{cr}$  za dvoosno simetrične profile može se naći u obliku neoprečnih dopunskih podataka, engl. NCCI (Non contradictory complementary information). Takav postupak bit će objašnjen u ovom radu. Kasnije će se objasniti moguća primjena tog postupka za procjenu  $M_{cr}$  nosača izvedenih iz U profila.

### 4.4.1 Utjecaj rubnih uvjeta

Osnovni uvjeti oslanjanja nosača izloženog bočnom torzijskom izvijanju jesu viličasti uvjeti pridržanja. Kod takvih uvjeta pridržanja spriječena je torzija nosača te vertikalni i horizontalni pomaci. Savijanje oko jače i slabije osi je slobodno. Ti uvjeti odgovaraju slučaju jednostavno oslonjeno grede [3].

U slučaju da ti minimalni zahtjevi nisu ispunjeni, izraz za izračun elastičnog kritičnog momenta ne vrijedi [3]. S druge strane, ako dolazi do djelomične ili potpune upetosti na savijanje oko jače ili slabije osi,  $M_{cr}$  se povećava. U slučaju potpune upetosti na oba ruba grede, govorimo o obostrano upetogj gredi. Takvi rubni uvjeti rezultiraju najvećim iznosom  $M_{cr}$ .



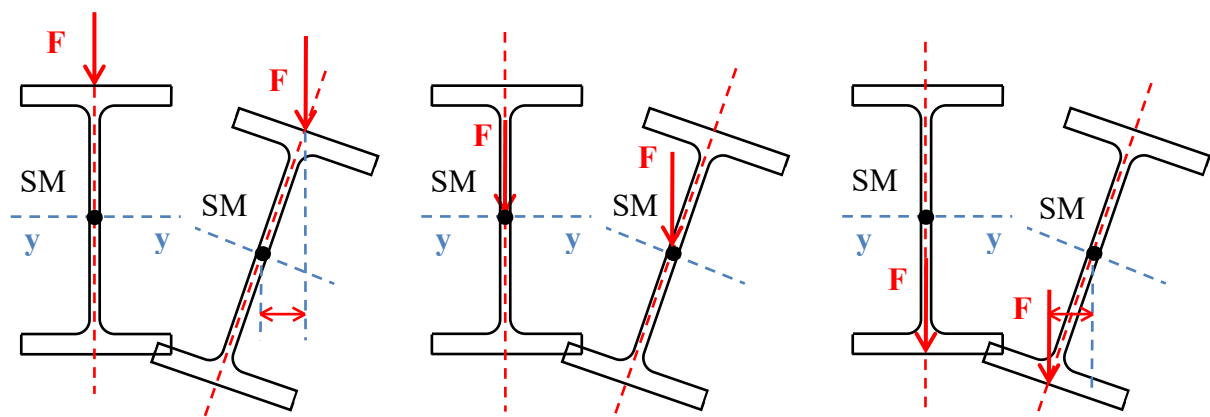
#### 4.4.2 Utjecaj položaja unosa opterećenja

Ovisno o točki poprečnog presjeka u kojoj se opterećenje unosi u element,  $M_{cr}$  može značajno varirati. Tri karakteristične točke unosa opterećenja prikazane su na slici 4.6. Ako se točka unosa opterećenja nalazi poviše središta posmika (SP), tada će stvarati destabilizirajući učinak, a elastični kritični moment će biti manji. Što se ona nalazi više iznad središta posmika, time će i redukcija elastičnog momenta biti veća [3].

U drugom slučaju točka unosa opterećenja može se nalaziti ispod središta posmika. Tada će ona imati stabilizirajući učinak na opterećeni element i  $M_{cr}$  će biti veći, a u konačnici bit će veća i otpornost elementa na bočno torzijsko izvijanje.

Razlikujemo i treći slučaj kada opterećenje djeluje točno u središtu posmika. Tada neće imati ni stabilizirajući ni destabilizirajući učinak. U praksi opterećenje se najčešće nalazi na gornjoj pojasnici, odnosno, uzrokuje destabilizirajući učinak.

Razlog takvog ponašanja može se relativno jednostavno objasniti. Naime, uslijed savijanja nosača, tlačna pojasnica počinje gubiti stabilnost uzrokujući početno tordiranje nosača. Kada dođe do tordiranja nosača, sila opterećenja će djelovati na određenom ekscentricitetu od središta posmika stvarajući dodatni moment torzije. Ako se sila nalazi iznad središta posmika, taj dodatni moment bit će istog predznaka kao i moment torzije koji uzrokuje tlačna pojasnica uslijed izvijanja. Zato će doći do redukcije elastičnog momenta. Suprotno tome, ako se sila nalazi ispod centra posmika, dodatni moment torzije bit će suprotnog predznaka od onog kojeg uzrokuje tlačna pojasnica uslijed izvijanja. Zato će doći do povećanja elastičnog kritičnog momenta.



Slika 4.6. Položaj unosa opterećenja u odnosu na centar posmika

Odstupanje unosa opterećenja od centra posmika označavamo sa  $z_g$  te se dogovorno uzima da je  $z_g$  pozitivan ako opterećenje djeluje iznad centra posmika. Odnosno, uzimamo da je  $z_g$  negativan ako opterećenje djeluje ispod centra posmika.

Ovu ekscentričnost ne smijemo miješati s ekscentričnošću koja se javlja prilikom savijanja nosača izvedenog iz U profila gdje rezultanta sila prolazi izvan centra posmika. Naime, u tom slučaju, ekscentricitet opterećenja se javlja od samog početka, odnosno tordiranje je inducirano od samog početka savijanja nosača. U slučaju dvoosno simetričnih profila kod kojih opterećenje djeluje na gornjoj ili donjoj pojasnici i dalje govorimo o centrično opterećenim nosačima jer rezultanta vanjskog opterećenja prolazi kroz centar posmika sve dok ne dođe do početka izvijanja i tordiranja nosača. Tek tada će sila djelovati na određenom ekscentricitetu koji će umanjiti ili povećati  $M_{cr}$ .

#### **4.4.3 Utjecaj dijagrama momenata savijanja**

Različiti oblici momentnog dijagrama uzrokovat će različite vrijednosti  $M_{cr}$  savijanog nosača. Najnepovoljniji slučaj je onaj kada na krajevima nosača djeluju koncentrirani momenti savijanja. Uzrok tome leži u činjenici što u tom slučaju cijela gornja pojasnica se nalazi pod maksimalnim tlačnim naprezanjem i više je sklona izvijanju.

Ako promotrimo primjerice slučaj koncentriranog opterećenja na sredini raspona, tada je samo tlačna pojasnica u sredini raspona opterećena maksimalnom tlačnom naprezanju. Tlačne pojasnice nad osloncima nemaju nikakvo naprezanje.

Pri računanju  $M_{cr}$ , utjecaj različitih oblika dijagrama momenata savijanja uzimaju se pomoću različitih koeficijenata dobivenih tablično ili pomoću interakcijskih dijagrama. Osnovni slučajevi su prikazani u tablici 4.1.

### **4.5 Proračun otpornosti dvoosno simetričnih nosača na bočno izvijanje**

#### **4.5.1 Uvodne napomene**

Proračunski postupak za proračun stabilnosti čeličnih nosača izloženih savijanju koji će ovdje biti izložen i objašnjen je onaj koji daje Europska norma EN-1993-1-1, uz napomenu da se za proračun  $M_{cr}$  služimo dodacima NCCI [16] [17] koji nisu dio europske norme. Postupak se

sastoji iz određivanja  $M_{cr}$  idealnog nosača koji se potom umanjuje da bi se uzeo u obzir utjecaj imperfekcija konstrukcijskog elementa i nelinearno ponašanje čelika kao materijala.

Također vrijedi napomena da se izrazi za određivanje  $M_{cr}$  navedeni u [16] [17] smiju koristiti samo u slučaju dvoosno simetričnih poprečnih presjeka. Nadalje, proračunski postupci dani u EN 1993-1-1 za određivanje realne otpornosti nosača također se smiju upotrebljavati samo u slučaju dvoosno simetričnih poprečnih presjeka, odnosno I i H nosača.

U nastavku je dan pregled proračunskih postupaka za izračun otpornosti na savijanje dvoosno simetričnih poprečnih presjeka temeljen na EN 1993-1-1 i NCCI dokumentima [16] [17].

#### 4.5.2 Proračun elastičnog kritičnog momenta

Izraz dan u [17] za proračun  $M_{cr}$ , kako je već kazano, se odnosi samo na dvoosno simetrične profile savijane oko jače osi. Nadalje, da bi dani izraz bio primjenjiv, na krajevima nosača trebaju biti spriječeni bočni pomaci i tordiranje, a krivljenje presjeka nosača smije biti slobodno (viličasti uvjeti oslanjanja). Ako su uvjeti oslanjanja upeti, izraz je također primjenjiv [17]:

$$M_{cr} = C_1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{(k \cdot L)^2} \cdot \left[ \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k \cdot L)^2 \cdot G \cdot I_t}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z} + (C_2 \cdot z_g)^2} - C_2 \cdot z_g \right] \quad (4.8)$$

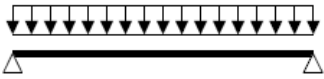

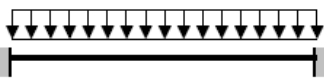





gdje su:

- E modul elastičnosti,
- G modul posmika,
- $I_z$  moment tromosti oko slabije osi,
- $I_t$  torzijska konstanta,
- $I_w$  konstanta krivljenja,
- L duljina nosača,
- k i  $k_w$  faktori efektivne dužine,
- $z_g$  udaljenost između točke unosa opterećenja i središta posmika.

Faktor k odnosi se na deformaciju od savijanja izvan ravnine opterećenja, a faktor  $k_w$  na deformaciju od torzije krivljenja [3]. Za viličaste uvjete oslanjanja oni iznose 1,0. Ako su uvjeti

oslanjanja upeti ove faktore uzimamo sa 0,5. Ako su rubni uvjeti djelomično upeti, najbolje ih je uzeti sa vrijednošću 1,0. Ta je pretpostavka na strani sigurnosti [3].

**Tablica 4.1.** Vrijednosti faktora  $C_1$  i  $C_2$  za vertikalno opterećenje ( $i$  za  $k=1,0$ ) [17]

Slučaj opterećenja	Oblik momentnog dijagrama	$C_1$	$C_2$
		1,127	0,454
		2,578	1,554
		1,348	0,630
		1,683	1,645

Za proračun  $M_{cr}$  U profila, kao što je već kazano, ne postoje nikakvi izrazi u različitim normama u svijetu. Prethodno naveden izraz smije se koristiti samo za centrično opterećene dvoosno simetrične profile opterećene na savijanje.

#### 4.5.3 Proračun elastičnog kritičnog momenta za konzole

Za određivanje elastičnog kritičnog momenta konzola opterećenih na savijanje izraz (4.8) dan u [17] za proračun  $M_{cr}$  se ne može primijeniti. Postupak određivanja  $M_{cr}$  za konzole nije razrađen u Eurocodu, ali jest u dokumentu NCCI [16]. Nadalje, za primjenu ovog izraza također postoje ograničenja vezana uz geometriju, uvjete oslanjanja i primijenjeno opterećenje [16]:

- Nosač ima nepromijenjiv dvoosno simetričan poprečni presjek,
- Nosač nema pridržanja na slobodnom kraju,
- Na osloncu su spriječeni pomaci od torzije,
- Opterećenja su primijenjena okomito na os nosača i uzrokuju savijanje oko jače osi poprečnog presjeka,
- Opterećenje prolazi kroz središte posmika.

Za određivanje  $M_{cr}$  bitni su uvjeti oslanjanja konzole. Prema [16] dva uvjeta oslanjanja konzole su uzeta u obzir:

- Krivljenje presjeka u potpunosti slobodno,
- Krivljanje presjeka spriječeno.

Ako je krivljenje presjeka spriječeno,  $M_{cr}$  će biti veći, a samim time i krajnja otpornost nosača. Ipak, u realnoj građevinskoj praksi, takve uvjete oslanjanja je teško postići, stoga je preporuka računati  $M_{cr}$  za slučaj slobodnog krivljenja presjeka nosača osim ako se pouzdanim konstruktivnim mjerama krivljenje nije spriječilo.

Prema [16], izraz za elastični kritični moment konzole je sljedeći:

$$M_{cr} = C \cdot M_{cr,0} \quad (4.9)$$

Pri tome je  $M_{cr,0}$  elastični kritični moment za ekvivalentnu jednostavno oslonjenu gredu opterećenu jednolikim momentom savijanja duž čitave grede i uz zanemarenje krutosti grede na krivljenje. Izraz za  $M_{cr,0}$  je sljedeći [16]:

$$M_{cr,0} = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t} \quad (4.10)$$

gdje su:

- E     modul elastičnosti,
- G     modul posmika,
- $I_z$    moment tromosti oko slabije osi,
- $I_t$    torzijska konstanta,
- L     duljina nosača.

Koeficijent C je globalni koeficijent dobiven numeričkim simulacijama programom LTBeam koji uzima u obzir [16]:

- Oblik dijagrama momenta savijanja oko jače osi,
- Krutost grede na krivljenje,
- Položaj unosa opterećenja u poprečni presjek (gornja pojasnica, donja pojasnica...),

- Uvjeti oslanjanja na krajevima.

Koeficijent C očitava se iz tablica priloženih u [16], a ovisi o dva parametra:

- 1) Parametar  $\kappa_w$  koji uzima u obzir krutost konzole na krivljenje:

$$\kappa_w = \frac{1}{L} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_w}{G \cdot I_t}} \quad (4.11)$$

gdje je  $I_w$  krutost poprečnog presjeka nosača na krivljenje,

- 2) Parametar  $\eta$  koji uzima u obzir položaj unosa opterećenja u poprečni presjek:

$$\eta = \frac{z_g}{h_s / 2} \quad (4.12)$$

gdje je  $z_g$  udaljenost točke unosa opterećenja od centra posmika, a uzima se na isti način kao što je to objašnjeno u točki 3.4.2.

Veličina  $h_s$  je definirana izrazom za bilo koji oblik poprečnog presjeka [16]:

$$h_s = 2 \cdot \sqrt{\frac{I_w}{I_z}} \quad (4.13)$$

Kao što je već kazano, vrijednosti faktora C se očitavaju iz tablica ovisno o parametrima  $\kappa_w$  i  $\eta$ , a dobiveni su za sljedeće slučajeve opterećenja [16]:

- Jednoliko raspodijeljeno opterećenje duž konzole,
- Koncentrirano opterećenje koje djeluje na slobodnom kraju grede,
- Koncentrirani moment koji djeluje na slobodnom kraju grede.

Nadalje, vrijednosti faktora C definirane su za sljedeća područja vrijednosti parametara  $\kappa_w$  i  $\eta$  [16]:

$$0 \leq \kappa_w \leq 1$$

$$-2 \leq \eta \leq 3$$

Tablice za očitavanje vrijednosti faktora C radi preglednosti neće biti iznesene unutar ovog rada, ali su dostupne unutar [16].

#### 4.5.4 Realna otpornost na bočno torzijsko izvijanje

Nakon što smo odredili  $M_{cr}$ , znamo moment savijanja pri kojem će se idealni nosač izviti. Naravno, kao što smo već spomenuli, naš nosač ima određene imperfekcije koje je potrebno uzeti u obzir. Prema tome, potrebno je napraviti redukciju  $M_{cr}$  i odrediti otpornost realnog nosača. Prema normi [15], otpornost realnog nosača na bočno izvijanje proračunava se prema sljedećem izrazu:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot \frac{W_y \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (4.14)$$

gdje su:

$M_{b,Rd}$  otpornost elementa na bočno izvijanje,

$\chi_{LT}$  redukcijski faktor za bočno torzijsko izvijanje,

$W_y$  je moment otpora poprečnog presjeka,

$f_y$  je granica popuštanja čelika,

$\gamma_{M1}$  je parcijalni faktor za otpornost elemenata izloženih gubitku stabilnosti.

Za klase poprečnog presjeka 1 i 2 vrijedi  $W_y = W_{pl,y}$ , za klasu 3 vrijedi  $W_y = W_{el,y}$ , a za klasu 4 je  $W_y = W_{eff,y}$ . Uz napomenu da su  $W_{pl,y}$  i  $W_{el,y}$  plastični, odnosno elastični moment otpora poprečnog presjeka na savijanje, a  $W_{eff,y}$  je efektivni moment otpora koji uzima u obzir učinke lokalnog izbočavanja na otpornost poprečnog presjeka klase 4 [3]. Nadalje, prema europskoj normi, parcijalni faktor za otpornost elemenata izloženih gubitku stabilnosti se uzima 1,0. Prema hrvatskom nacionalnom dodatku on iznosi 1,1 [18].

U europskoj normi [15] dana su dva različita proračunska postupka za izračun otpornosti elementa na izvijanje: opći slučaj i metoda za valjane i ekvivalentne zavarene profile. Ukoliko nema ograničenja u nacionalnom dodatku moguće je koristiti oba postupka.

Opći slučaj je metoda primjenjiva u svim situacijama, odnosno vrijedi za sve oblike dvoosno simetričnih poprečnih presjeka pa tako i za valjane oblike poprečnih presjeka, čak i za one koji su izvan standardnog područja. Također je brža i jednostavnija za korištenje što predstavlja njezinu glavnu prednost nad drugom metodom. Metoda za valjane i ekvivalentne zavarene presjeke vrijedi samo, kao što joj naziv implicira, za nosače koji su dobiveni postupkom vrućeg valjanja i za nosače dobivene postupkom zavarivanja, a njihovi poprečni presjeci oblikom odgovaraju onima dobivenim vrućim valjanjem. Ova metoda, iako je nešto složenija od opće metode, daje veće otpornosti na izvijanje za valjane i ekvivalentne zavarene presjeke [15].

#### 4.5.5 Opći slučaj

Po ovoj metodi, faktor redukcije računa se prema izrazu navedenom u normi EN 1993-1-1:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq 1,0 \quad (4.15)$$

U gornjem izrazu su:

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2] \quad (4.16)$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_y}{M_{cr}}} \quad (4.17)$$

Veličina  $\Phi_{LT}$  je pomoćna veličina za računanje faktora redukcije, a  $\bar{\lambda}_{LT}$  je svedena vitkost promatranog elementa. Faktor imperfekcije  $\alpha_{LT}$  odabiru se ovisno o krivulji izvijanja za bočno torzijsko izvijanje promatranog elementa. Postoje 4 krivulje izvijanja za bočno torzijsko izvijanje kao što je vidljivo iz tablice 4.2 [15].

**Tablica 4.2.** Faktori imperfekcije za krivulje bočnog torzijskog izvijanja (Tablica 6.3 EN 1993-1-1)

Krivulja izvijanja	a	b	c	d
Faktor imperfekcije $\alpha_{LT}$	0,21	0,34	0,49	0,76



Odabir odgovarajuće krivulje ovisi o tipu i dimenzijama poprečnog presjeka, a može se provesti pomoću tablice 4.3.

**Tablica 4.3.** Krivulje izvijanja za bočno torzijsko izvijanje za opći slučaj (Tablica 6.4 EN 1993-1-1)

Poprečni presjek	Ograničenja	Krivulja izvijanja
Valjani I presjeci	$h/b \leq 2$	a
	$h/b > 2$	b
Zavareni I presjeci	$h/b \leq 2$	c
	$h/b > 2$	d
Ostali presjeci	-	d

#### 4.5.6 Valjani i ekvivalentni zavareni presjeci

Po metodi za valjane i ekvivalentne zavarene presjeke faktor redukcije računa se na sličan način, ali ovaj put koristimo faktor  $\beta = 0,75$  (minimalna vrijednost). Faktor redukcije prema EN1993-1-1 u ovom slučaju iznosi:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2}} \quad (4.18)$$

Također vrijedi:  $\chi_{LT} \leq 1,0$  i  $\chi_{LT} \leq \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2}$ .

Pomoćna veličina za određivanje faktora redukcije računa se prema izrazu:

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[ 1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - \bar{\lambda}_{LT,0}) + \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] \quad (4.19)$$

Svedena vitkost  $\chi_{LT}$  računa se prema istom izrazu kao i u općoj metodi, a vrijednost  $\bar{\lambda}_{LT,0}$  se uzima sa vrijednošću 0,4 [15].

Faktor imperfekcije  $\alpha_{LT}$  za krivulje bočnog torzijskog izvijanja se odabire prema tablici 4.2., odnosno vrijede isti faktori imperfekcije za pridružene krivulje bočnog torzijskog izvijanja kao u općem slučaju.

Odabir krivulja bočnog torzijskog izvijanja s obzirom na dimenzije i vrstu poprečnog presjeka se razlikuje u odnosu na opći slučaj. U tablici 4.4. možemo vidjeti da u slučaju ove proračunske metode valjanim presjecima dodjeljujemo strožu krivulju bočno torzijskog izvijanja. Ipak, u konačnici, postupak rezultira većom otpornošću elementa na bočno torzijsko izvijanje u odnosu na opću metodu.

**Tablica 4.4.** Krivulje izvijanja za bočno torzijsko izvijanje za valjane i ekvivalentne zavarene presjeke (Tablica 6.5 EN 1993-1-1)

Poprečni presjek	Ograničenja	Krivulja izvijanja
Valjani I presjeci	$h/b \leq 2$	b
	$h/b > 2$	c
Zavareni I presjeci	$h/b \leq 2$	c
	$h/b > 2$	d

Ova metoda uključuje i dodatni faktor  $f$  koji se rabi za modifikaciju  $\chi_{LT}$  prema izrazu [15]:

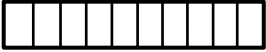




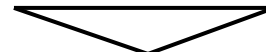

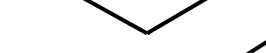
$$\chi_{LT, \text{mod}} = \frac{\chi_{LT}}{f} \leq 1,0 \quad (4.20)$$

Ova modifikacija povećava otpornost na bočno torzijsko izvijanje. Faktor  $f$  izveden je na temelju numeričkih istraživanja i dan je sljedećim izrazom [15]:

$$f = 1 - 0,5 \cdot (1 - k_c) \cdot \left[ 1 - 2,0 \cdot (\bar{\lambda}_{LT,0} - 0,8)^2 \right] \quad (4.21)$$

Faktor  $f$  ovisan je o obliku dijagrama momenata savijanja promatranog nosača, a može se očitati iz tablice 4.5 (Tablica 6.6 EN 1993-1-1).

**Tablica 4.5.** Korekcijski faktor  $k_c$  (Tablica 6.6 EN 1993-1-1)

Raspodjela momenata	Faktor $k_c$
 $\Psi = 1$	1,0
 $-1 \leq \Psi \leq 1$	$1 / (1 - 0,33\Psi)$
  	0,94 0,90 0,91
  	0,86 0,77 0,82

## 4.6 Proračun otpornosti nosača izvedenih iz U profila na bočno izvijanje

### 4.6.1 Modificirana $\chi_{LT}$ metoda

Kao što je već spomenuto, u europskoj normi EN 1993-1-1 ne postoji proračunski postupak za otpornost nosača U profila opterećenih na savijanje. Ipak, brojni su autori na temelju istraživanja predložili metode za proračun takvih nosača [12], [13]. Potrebno je napomenuti da sve metode navedene u ovom poglavlju za proračun ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila vrijede samo ako rezultanta vanjskih sila prolazi kroz hrbat nosača [12]. Jedna od tih metoda je modificirana  $\chi_{LT}$  metoda koja je izvedena na temelju metode za proračun dvoosno simetričnih nosača izloženih savijanju koju daje europska norma, a opisana je u točki 4.5.5.

Dvije metode se razlikuju samo u načinu izračuna svedene vitkosti. Naime, svedena vitkost za bočno torzijsko izvijanje  $\bar{\lambda}_{LT}$  je sada zamjenjena sa modificiranom svedenom vitkošću  $\bar{\lambda}_{MT}$  koja uzima u obzir utjecaj torzije na stabilnost nosača izloženog savijanju.

Po modificiranoj  $\chi_{LT}$  metodi, redukcijski faktor se računa prema izrazu [12]:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{MT}^2}} \leq 1,0 \quad (4.22)$$

U gornjem izrazu je [12]:

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[ 1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{MT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{MT}^2 \right] \quad (4.23)$$

gdje je  $\alpha_{LT}$  faktor imperfekcije za odgovarajuću krivulju bočnog torzijskog izvijanja.

Modificirana svedena vitkost se računa prema izrazu[12]:

$$\bar{\lambda}_{MT} = \bar{\lambda}_{LT} + \bar{\lambda}_T \quad (4.24)$$

Veličina  $\bar{\lambda}_{LT}$  je svedena vitkost na bočno torzijsko izvijanje, a računa se prema poznatom izrazu:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_y}{M_{cr}}} \quad (4.25)$$

Veličina  $\bar{\lambda}_T$  je novi faktor uveden s ciljem da obuhvati utjecaj torzije na redukciju otpornosti ekscentrično opterećenih nosača U profila izloženih savijanju. Računa se prema izrazu [12]:

$$\bar{\lambda}_T = \begin{cases} 1,1 - \bar{\lambda}_{LT} & \text{ako je } 0,5 \leq \bar{\lambda}_{LT} < 0,75 \\ 0,69 - 0,44 \cdot \bar{\lambda}_{LT} & \text{ako je } 0,75 \leq \bar{\lambda}_{LT} < 1,14 \\ 0,19 & \text{ako je } \bar{\lambda}_{LT} \geq 1,14 \end{cases} \quad (4.26)$$

Faktor imperfekcije  $\alpha_{LT}$  odabire se zavisno o istim krivuljama izvijanja kao u općem slučaju, odnosno, ovisno o krivuljama navedenim u tablici 4.2 i 4.3 (Tablica 6.3 EN 1993-1-1) [12].

U konačnici, otpornost ekscentrično opterećenog nosača izvedenog iz U profila slijedi prema već poznatom izrazu:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot \frac{W_y \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (4.27)$$

#### 4.6.2 Modificirana $\kappa_M$ metoda

Modificirana  $\kappa_M$  metoda se temelji na proračunskom postupku za proračun otpornosti dvoosno simetričnih nosača na bočno torzijsko izvijanje danom u normi DIN 18800 [19]. Proračunski postupak vrijedi samo ako rezultanta vanjskih opterećenja prolazi kroz hrbat nosača. Otpornost na bočno torzijsko izvijanje se računa prema izrazu [19]:

$$\frac{M}{\kappa_{MT} \cdot M_{pl}} \leq 1,0 \quad (4.28)$$

gdje su:

$M$  moment savijanja od vanjskog opterećenja koje djeluje na nosač,

$M_{pl}$  plastični moment otpornosti poprečnog presjeka nosača,

$\kappa_{MT}$  redukcijski faktor na bočno torzijsko izvijanje.

Redukcijski faktor na bočno torzijsko izvijanje se računa prema sljedećem izrazu [19]:

$$\kappa_{MT} = \left(1,0 + \bar{\lambda}_{MT}^{-5}\right)^{-0,4} \quad (4.29)$$

Izraz za svedenu vitkost mora se prilagoditi na način da se uzme u obzir utjecaje torzije koja se javlja pri ekscentričnom opterećenju. Izraz za svedenu vitkost sada glasi [19]:

$$\bar{\lambda}_{MT} = \bar{\lambda}_M + \bar{\lambda}_T \quad (4.30)$$

Relativna vitkost koja ne uzima u obzir utjecaj torzije  $\bar{\lambda}_M$  se računa prema izrazu:

$$\bar{\lambda}_M = \sqrt{\frac{M_{pl}}{M_{cr}}} \quad (4.31)$$

Koeficijent  $\bar{\lambda}_T$  koji uzima u obzir utjecaj torzije, ovisi o svedenoj vitkosti  $\bar{\lambda}_M$  prema sljedećoj zakonitosti [19]:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_T &= 1,11 - \bar{\lambda}_M, & \text{za } 0,50 \leq \bar{\lambda}_M < 0,75 \\ \bar{\lambda}_T &= 0,69 - 0,44 \cdot \bar{\lambda}_M, & \text{za } 0,75 \leq \bar{\lambda}_M < 1,14 \\ \bar{\lambda}_T &= 0,19, & \text{za } \bar{\lambda}_M \geq 1,14\end{aligned}\quad (4.32)$$

#### 4.6.3 Modificirana Merchant-Rankine metoda

Sljedeća metoda zasniva se na korištenju Merchant-Rankine interakcijskog izraza za proračun otpornosti ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila na bočno torzijsko izvijanje. Izvorni Merchant-Rankine interakcijski izraz je sada modificiran za proračun bočne stabilnosti ekscentrično opterećenih nosača [12]:

$$F_{MR} = \frac{1}{\frac{1}{F_{cr}} + \frac{1}{F_{pl}}} + \mu \cdot F_{pl} \quad (4.33)$$

gdje su:

- $F_{MR}$  sila potrebna za dosezanje otpornosti nosača na bočno torzijsko izvijanje,
- $F_{pl}$  sila koja uzrokuje dosezanje plastične otpornosti nosača prikazanog u tablici 4.6,
- $F_{cr}$  sila koja uzrokuje dosezanje elastične otpornosti nosača prikazanog u tablici 4.6,
- $\mu$  korekcijski faktor dan u tablici 4.6.

**Tablica 4.6.** Korkcijski faktori za modificiranu Merchant – Rankine metodu [12]

Slučaj opterećenja	Mjesto unosa opterećenja	$\mu$
	A	0,06
	B	0,11
	C	0,15

#### 4.6.4 Opća metoda

Prema Eurocodu 3 opća metoda smije se primjenjivati na bilo koji konstrukcijski element, pa tako i za proračun ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila. Proračun prema ovoj metodi se zasniva na sljedećem izrazu [1]:

$$\frac{\chi_{op} \cdot \alpha_{ult,k}}{\gamma_{M1}} \quad (4.34)$$

Parcijalni faktor sigurnosti za stabilnost elemenata  $\gamma_{M1}$  se prema Eurocodu 3 uzima sa vrijednošću 1,0. Ipak, kako je već ranije navedeno, prema hrvatskom Nacionalnom dodatku se uzima sa vrijednošću 1,1 [18].

Redukcijski faktor  $\chi_{op}$  je manja vrijednosti redukcijskih faktora za bočno torzijsko izvijanje  $\chi_{LT}$  i za izvijanje savijanjem  $\chi$ , a njegova vrijednost se računa na temelju relativne vitkost  $\lambda_{op}$  prema izrazu [1]:

$$\bar{\lambda}_{op} = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr,op}}} \quad (4.35)$$

U izrazu (4.35)  $\alpha_{ult,k}$  je minimalni faktor računskih opterećenja potreban za doseganje karakteristične otpornosti najkritičnijeg poprečnog presjeka konstrukcijskog elementa za ponašanje u ravnini. On ne uzima u obzir bočno torzijsko izvijanje, ali uzima u obzir učinke uslijed geometrijskih deformacija i imperfekcija u ravnini [1].

Faktor  $\alpha_{cr,op}$  je minimalni faktor računskih opterećenja potreban za doseganje elastične kritične otpornosti konstrukcijskog elementa, a ne uzima u obzir izvijanje savijanjem u ravnini [1]. Vrijedi napomena da se za računanje faktora  $\alpha_{ult,k}$  i  $\alpha_{cr,op}$  može koristiti metoda konačnih elemenata.

#### 4.6.5 Predloženi proračunski postupak prema Snijder et al.

Na temelju provedenih nelinearnih numeričkih analiza, Snijder et al u svojem članku [12] predlažu novi proračunski postupak za ekscentrično opterećene nosače izvedene iz U profila.

Ovaj proračunski postupak također vrijedi samo u slučaju da rezultanta vanjskih opterećenja prolazi kroz hrbat nosača. Parametarskim analizama su utvrdili da  $\kappa_M$  metoda daje rezultate otpornosti najbliže realnim vrijednostima, ali koristi DIN krivulje izvijanja koje nisu dio Eurocode-a 3 [12].

Modificirana  $\chi_{LT}$  metoda se zasniva na proračunskom postupku navedenom u Eurocode-u 3 za proračun dvoosno simetričnih profila, ali daje rezultate otpornosti koji su previše na strani sigurnosti [12]. S ciljem dobivanja točnijih rezultata otpornosti U profila na bočno torzijsko izvijanje, Snijder et al predlažu novi proračunski postupak analogan modificiranoj  $\chi_{LT}$  metodi, ali uz drugačiju vrijednost faktora  $\bar{\lambda}_M$  koji uzima u obzir utjecaj torzije na bočnu stabilnost nosača. Proračunski postupak zasniva se na sljedećem izrazu [12]:

$$\frac{M}{\chi_{LT} \cdot M_{pl}} \leq 1,0 \quad (4.36)$$

gdje su:

- M proračunski moment savijanja koji djeluje na nosač,
- $M_{pl}$  plastični moment otpornosti poprečnog presjeka,
- $\chi_{LT}$  redukcijski faktor za bočno torzijsko izvijanje.

Relativna vitkost koja zanemaruje utjecaj torzije se računa prema izrazu [12]:

$$\bar{\lambda}_M = \sqrt{\frac{M_{pl}}{M_{cr}}} \quad (4.37)$$

Vrijednost faktora  $\bar{\lambda}_T$  sada postaje [12]:

$$\bar{\lambda}_T = \left\{ \begin{array}{ll} 1,0 - \bar{\lambda}_{LT} & \text{ako je } 0,5 \leq \bar{\lambda}_{LT} < 0,80 \\ 0,43 - 0,29 \cdot \bar{\lambda}_{LT} & \text{ako je } 0,80 \leq \bar{\lambda}_{LT} < 1,50 \\ 0 & \text{ako je } \bar{\lambda}_{LT} \geq 1,50 \end{array} \right\} \quad (4.38)$$

Izraz za relativnu vitkost koji uzima utjecaj torzije na bočnu stabilnost nosača slijedi [12]:



$$\bar{\lambda}_{MT} = \bar{\lambda}_M + \bar{\lambda}_T \quad (4.39)$$

Redukcijski faktor izračunava se na jednak način kao kod modificirane  $\chi_{LT}$  metode:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{MT}^2}} \leq 1,0 \quad (4.40)$$

gdje je:

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[ 1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{MT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{MT}^2 \right] \quad (4.41)$$

#### 4.6.6 Predloženi proračunski postupak prema D. Brownu

Većina dosadašnjih predloženih proračunskih postupaka za izračun otpornosti U profila na bočno torzijsko izvijanje zasniva se na već postojećim proračunskim postupcima za proračun otpornosti dvoosno simetričnih profila na bočno torzijsko izvijanje. Kod modificirane  $\chi_{LT}$  metode i modificirane  $\kappa_M$  metode, utjecaj torzije na stabilnost nosača uzima se modificiranjem izraza za svedenu vitkost. Pregled tih metoda je dan u prethodnim točkama. Za izračun faktora imperfekcije  $\alpha_{LT}$  koriste se krivulje za bočno torzijsko izvijanje na isti način kao i u slučaju dvoosno simetričnih profila. To najčešće rezultira odabirom krivulje izvijanja „a“.

Britanski autor D. Brown predlaže [13] proračunski postupak za određivanje otpornosti ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila na bočno torzijsko izvijanje. Naime, Brown navodi da se otpornost na bočno torzijsko izvijanje ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila može računati na isti način kao za dvoosno simetrične profile, ali uz uvjet da se koristi najstroža krivulja izvijanja „d“. Taj prijedlog potkrijepljuje tvrdnjom da se tako dobivene otpornosti ekscentrično opterećenih nosača U profila podudaraju s onima koje su naveli Snijder et al u [12].

Ovakav proračunski postupak izrazito je zanimljiv jer predstavlja daleko najjednostavniji način za proračun ekscentrično opterećenih U profila na bočno torzijsko izvijanje. Nadalje, pronađeno je jako malo podataka o ovakvom proračunskom postupku što taj postupak čini izrazito zanimljivim za daljnja istraživanja.

## 4.7 Zaključne napomene

U ovom dijelu rada detaljno je opisana problematika bočnog torzijskog izvijanja kao središnjeg predmeta provedenog istraživanja. Izloženi su normirani proračunski postupci za određivanje otpornosti dvoosno simetričnih nosača na bočno torzijsko izvijanje. Također, dan je i pregled predloženih proračunskih postupaka za određivanje otpornosti ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila. Predloženi proračunski postupci temelje se na postupcima za određivanje otpornosti dvoosno simetričnih nosača na bočno torzijsko izvijanje te su jednostavni za korištenje. Vrijedi bitna napomena: svi predloženi proračunski postupci za određivanje otpornosti ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila su primjenjivi samo u slučaju da rezultanta vanjskih sila prolazi kroz hrbat [12].

Time je riješena problematika određivanja otpornosti ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila na bočno torzijsko izvijanje, ali uz pretpostavku da poznamo elastični kritični moment ekscentrično opterećenog nosača. Ipak, u tim predloženim postupcima nigdje nije definiran postupak proračuna  $M_{cr}$  za ekscentrično opterećene nosače izvedene iz U profila. Navedeni problem je rješiv provođenjem linearne analize vlastitih vrijednosti. Taj postupak je suviše složen za svakodnevnu inženjersku primjenu. Stoga je glavni cilj ovog istraživanja provesti opširnu parametarsku analizu u kojoj će se računati  $M_{cr}$  za različite statičke sustave i uvjete opterećenja.

Kao rezultat pregleda u ovom poglavlju definira se opseg i područje numeričkog istraživanja određivanja  $M_{cr}$ . Razmatrana su tri tipa statičkih sustava: jednostavno oslonjen nosač, konzola te obostrano upeti nosač. Poprečni presjek nosača je uzet kao nepromjenjivi parametar te je odabran profil UPE 200. Raspon nosača je razmatran kao promjenjiva veličina. Analizirano je područje od jako zdepastih elemenata koji otkazuju lokalnim izbočavanjem pa sve do jako vitkih elemenata kod kojih se elastična otpornost približava stvarnoj otpornosti.

Od tipova opterećenja u obzir su uzeta dva slučaja: koncentrirana sila na sredini raspona i jednoliko raspodjeljeno opterećenje po čitavoj duljini nosača. U slučaju konzole, koncentrirana sila je postavljena na slobodnom kraju nosača. Mjesto unosa opterećenja se variralo u odnosu na tri točke poprečnog presjeka: gornja pojasnica, sredina visine hrpta i donja pojasnica. Također, razmatrano je centrično i ekscentrično opterećenje nosača.

## 5 KALIBRACIJA NUMERIČKIH MODELA

### 5.1 Kalibracija numeričkog modela na primjeru nosača izvedenog iz I profila

#### 5.1.1 Opis kalibracijskog modela nosača izvedenog iz I profila

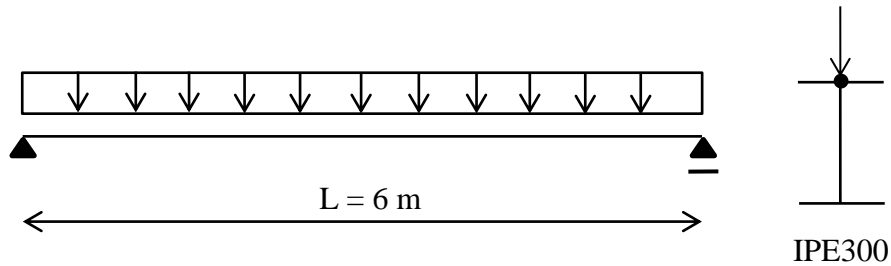
Metoda konačnih elemenata, iako je jako moćna i korisna u inženjerskoj praksi, ne daje uvijek točne rezultate. Odstupanja najčešće proizlaze kao posljedica ljudske pogreške, netočnosti ili pojednostavljenja uvedenih u model, nesavršenosti samog softvera itd. Da bismo bili sigurni u ispravnost dobivenih rezultata, potrebno je prije samog istraživanja napraviti kalibraciju korištenog modela. To se radi tako da se rješenja numeričke analize usporede s rješenjima za koja se pouzdano zna da su točna, a podudaranje rezultata će to potvrditi.

U ovom istraživanju modeliran je centrički opterećen nosač izveden iz profila IPE300 koji je opterećen na savijanje. Kalibracija je provedena usporedbom  $M_{cr}$  dobivenog numeričkim modelom i egzaktno vrijednost  $M_{cr}$  dobivene pomoću analitičkog izraza, odnosno izraza (4.8).

Za izradu modela i provedbu numeričkih simulacija, korišten je programski paket Ansys Workbench 17.1 [20]. Za određivanje elastičnog kritičnog momenta koristila se linearna analiza određivanja vlastitih vrijednosti. Za potrebe modeliranja korišteni su plošni i prostorni konačni elementi.

Statički sustav modela na kojem je provedena kalibracija s uvjetima opterećenja prikazan je na slici 5.1. Kako se može vidjeti na slici 5.1. radi se o jednostavno oslonjenom nosaču raspona 6 m opterećenom kontinuiranim opterećenjem nanesenim na gornju pojasnicu. Rubni uvjeti su modelirani kao viličasti. Odnosno, spriječena je torzija nosača te bočni pomaci. Savijanje nosača oko jače i slabije osi, te krivljenje presjeka na ležajevima je omogućeno. Materijal modeliranja je čelik modula elastičnosti  $E = 210\,000\text{ N/mm}^2$  i Poissonovog koeficijenta 0,3.

Za izradu ovog modela korišteni su plošni elementi. U ovom slučaju to su elementi „Shell181“. Takav tip plošnog elementa ima četiri integracijske točke, a u svakoj posjeduje 6 stupnjeva slobode, tri translacijska i tri rotacijska. Takvi elementi pogodni su za analize vitkih i srednje vitkih plošnih struktura [20].



**Slika 5.1.** Prikaz statičkog sustava kalibracijskog modela (I profil)

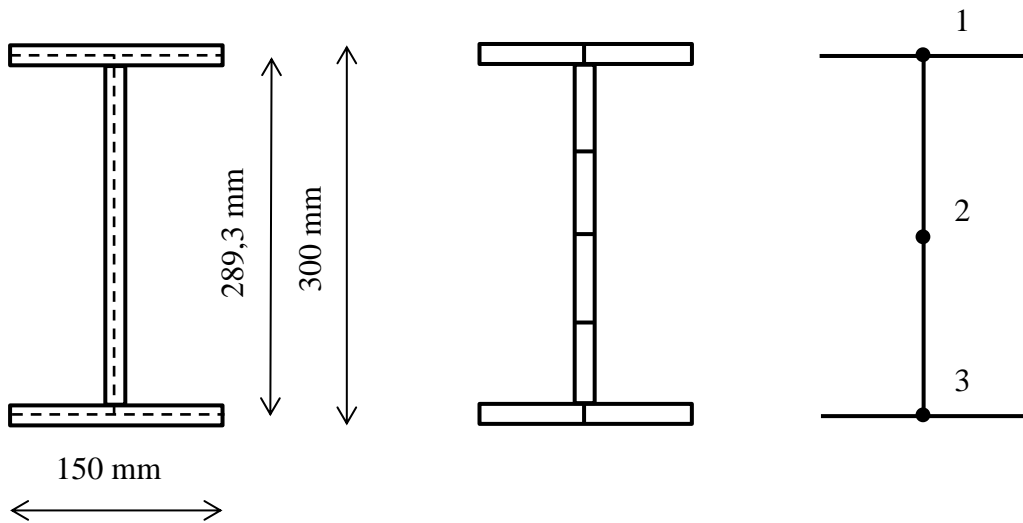
Kao što je već spomenuto, za tip porečnog presjeka odabran je profil IPE300 čije geometrijske karakteristike iznose [5]:

$h = 300 \text{ mm}$	visina poprečnog presjeka
$b = 150 \text{ mm}$	širina pojasnice
$t_w = 7,1 \text{ mm}$	debljina hrpta
$t_f = 10,7 \text{ mm}$	debljina pojasnice

Hrbat će se modelirati sa visinom  $h_w = 289,3 \text{ mm}$  što predstavlja osnu udaljenost između pojasnica. Modeliranje sa plošnim elementima povlači za sobom posljedicu nemogućnosti egzaktnog modeliranja radijusa zaobljenja. Na slici 5.2 možemo jasno vidjeti da se modelirani poprečni presjek razlikuje od stvarnog IPE300 profila. U nastavku će se pokazati da takvo pojednostavljenje ima značajan utjecaj na konačni rezultat, odnosno dobivenu vrijednost  $M_{cr}$ .

Broj konačnih elemenata utvrđen je provedbom numeričkih analiza u programskom paketu Ansys. Konačni broj konačnih elemenata je utvrđen na način da su provedene analiza s malim brojem konačnih elemenata, odnosno grubom diskretizacijom. Nakon toga se provodene analize postupno povećavajući broj konačnih elemenata dok rješenja ne konvergiraju. Broj konačnih elemenata korištenih pri izradi modela iznosi 800. Proizvoljni poprečni presjek elementa sastoji se od 8 konačnih elementata, 2 u svakoj pojasnici i 4 u hrptu, kako je prikazano na slici 5.2. Po duljini, nosač je podijeljen na 100 jednakih dijelova.

Da bi se simulirali viličasti rubni uvjeti, u točkama 1 i 3 spriječeni su bočni pomaci, a u točki 2 bočni, vertikalni i uzdužni pomaci na jednom kraju nosača, odnosno, bočni i vertikalni na drugom.

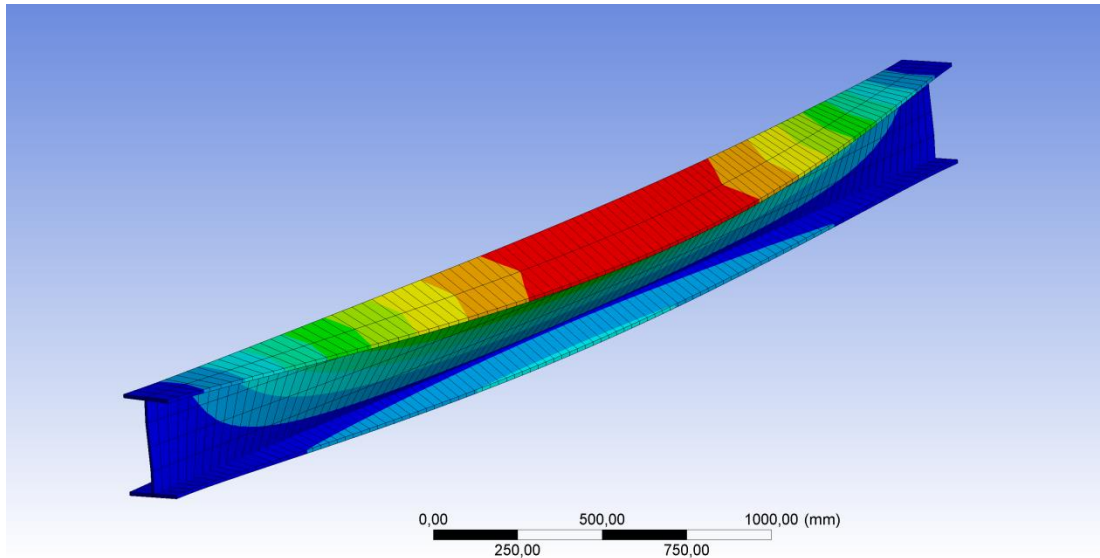


**Slika 5.2.** Prikaz modela I poprečnog presjeka

Opterećenje u programskom paketu Ansys je zadano kao linijsko opterećenje na gornjoj pojasnici, u iznosu od 1 kN/m'. Na takav način dobiven je moment savijanja u sredini nosača u iznosu od 4,5 kNm. Množenjem te vrijednosti sa kritičnim množiteljem opterećenja ( $\alpha_{cr}$ ), kao rezultatom provedene analize, izračunat je  $M_{cr}$ . Analiza izvijanja rezultirala je kritičnim množiteljem opterećenja  $\alpha_{cr} = 15,206$  što znači da je vrijednost elastičnog kritičnog momenta dobivena numeričkom analizom jednaka  $M_{cr} = 68,43$  kNm. Prikaz numeričkog modela nosača i njegov prvi mod izvijanja prikazani su na slici 5.3.

Elastični kritični moment proračunat pomoću izraza (4.8) iznosi  $M_{cr} = 79,33$  kNm, uz napomenu da je koeficijent  $z_g$  uzet sa  $z_g = +144,7$  mm, a ne 150 mm što predstavlja udaljenost osi pojasnice od težišta poprečnog presjeka. Karakteristike poprečnog presjeka preuzete su iz [5], a navedene su u tablici 5.1. u sljedećoj točki.

Usporedbom egzaktne analitičke vrijednosti  $M_{cr}$  i one dobivene numeričkom analizom može se uočiti odstupanje od 13%. Toliko odstupanje svakako nije zanemarivo, odnosno ukazalo je na grešku u početnom modelu. S ciljem provođenja daljnjeg istraživanja, potrebno je pronaći grešku te kalibrirati model.



**Slika 5.3.** Prikaz numeričkog modela (prvi mod izvijanja)

### 5.1.2 Usporedba karakteristika poprečnog presjeka I profila

S ciljem ispravljanja greške u numeričkom modelu, uspoređene su karakteristike stvarnog profila IPE300 i poprečnog presjeka korištenog u modelu. Naime, modeliranjem plošnim elementima, nije moguće prikazati radijuse zaobljenja na spoju hrpta i pojasnica, odnosno u numeričkom modelu oni ne postoje. Da bi ispitali koliki je utjecaj radijusa zaobljenja na karakteristike poprečnog presjeka uspoređene su egzaktno karakteristike profila IPE300 preuzete iz literature [5] i karakteristike poprečnog presjeka korištenog u numeričkom modelu. U tablici 5.1 prikazana je usporedba između egzaktnih vrijednosti karakteristika poprečnog presjeka koje uzimaju u obzir utjecaj radijusa zaobljenja i ručno proračunatih vrijednosti karakteristika za poprečni presjek koji ne uzima u obzir radijuse zaobljenja.

**Tablica 5.1.** Usporedba ručno proračunatih karakteristika poprečnog presjeka korištenog u numeričkom modelu s karakteristikama IPE 300 profila

IPE300	Egzaktne vrijednosti (s radijusom zaobljenja)	Ručni proračun (bez radijusa zaobljenja)	Odstupanje
$I_y$	8356 cm <sup>4</sup>	8152 cm <sup>4</sup>	-2,5 %
$I_z$	603,8 cm <sup>4</sup>	602,7 cm <sup>4</sup>	-0,2 %
$I_t$	20,12 cm <sup>4</sup>	15,70 cm <sup>4</sup>	-28 %
$I_w$	125 900 cm <sup>6</sup>	135 608 cm <sup>6</sup>	+7,2 %

Karakteristike poprečnog presjeka u modelu dobivene su pomoću sljedećih izraza:

Moment tromosti oko jače osi:

$$I_y = \frac{t_w \cdot h_w^3}{12} + 2 \cdot \frac{b \cdot t_f^3}{12} + 2 \cdot b \cdot t_f \cdot \left(\frac{h_w}{2}\right)^2 \quad (5.1)$$

Moment tromosti oko slabije osi:

$$I_z = \frac{h_w \cdot t_w^3}{12} + 2 \cdot \frac{t_f \cdot b^3}{12} \quad (5.2)$$

Torzijska konstanta:

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot h_w \cdot t_w^3 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot b \cdot t_f^3 \quad (5.3)$$

Konstanta krivljenja [21]:

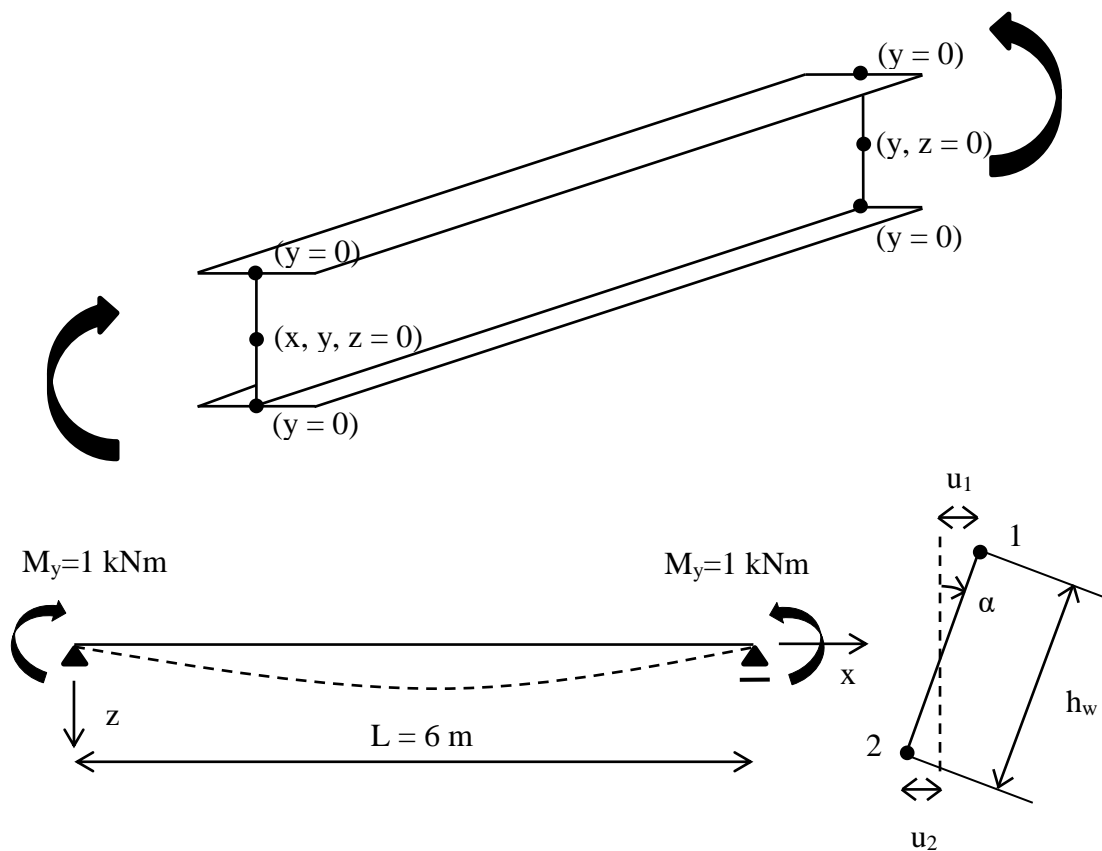
$$I_w = \frac{(h - t_f)^2 \cdot I_z}{4} \quad (5.4)$$

Vidljivo je radijusi zaobljenja imaju veliki utjecaj na karakteristike poprečnog presjeka, posebice na torzijsku konstantu  $I_t$ . Razlog zašto izraz (5.3) podcjenjuje torzijsku konstantu je taj što ne uzima u obzir područja zaobljenja. Naime, na tim mjestima dolazi do koncentracije posmičnih naprezanja koja povećavaju otpornost presjeka na torziju [6].

Prethodna analiza je potvrdila pretpostavku da je odstupanje rezultata posljedica odstupanja karakteristika između stvarnog poprečnog presjeka i onog modeliranog u računalnom programu. U sljedećem koraku za proračun karakteristika poprečnog presjeka modela korišten je računalni program. Dobivene vrijednosti su uspoređene s egzaktnim vrijednostima i onim dobivenim ručnim proračunom za presjek bez radijusa zaobljenja. Cilj ovog dijela istraživanja je prilagoditi korišteni numerički model i dobiti točnije vrijednosti proračuna.

## Proračun $I_y$

Za proračun vrijednost momenta tromosti poprečnog presjeka oko jače osi u računalnom programu, modeliran je jednostavno oslonjen nosač koji je opterećen koncentriranim momentima savijanja na krajevima nosača. Koncentrirani momenti savijanja su korišteni kako bi se dobio slučaj čistog savijanja, bez posmičnih naprezanja. Odnosno, da posmična naprezanja nebi utjecala na veličinu deformacija od savijanja. Karakteristike ovog nosača u potpunosti odgovaraju onima iz prethodnog modela uključujući i definiranje rubnih uvjeta. Veličina momenta savijanja zadana je kao 1 kNm na svakom kraju. Statički sustav modeliranog nosača i uvjeti opterećenja prikazani su na slici 5.4.



Slika 5.4. Prikaz numeričkog modela za proračun  $I_y$

Nakon provedene analize mjereno je kut zaokreta nosača oko horizontalne osi na krajevima nosača te je pomoću vrijednosti kuta zaokreta izračunat moment tromosti poprečnog presjeka  $I_y$ . Numerički dobivene vrijednosti uzdužnih pomaka na vrhovima nosača u točkama 1 i 2 iznose  $u_1 = u_2 = 0,0253$  mm iz čega slijedi kut zaokreta nosača oko horizontalne osi te moment tromosti:

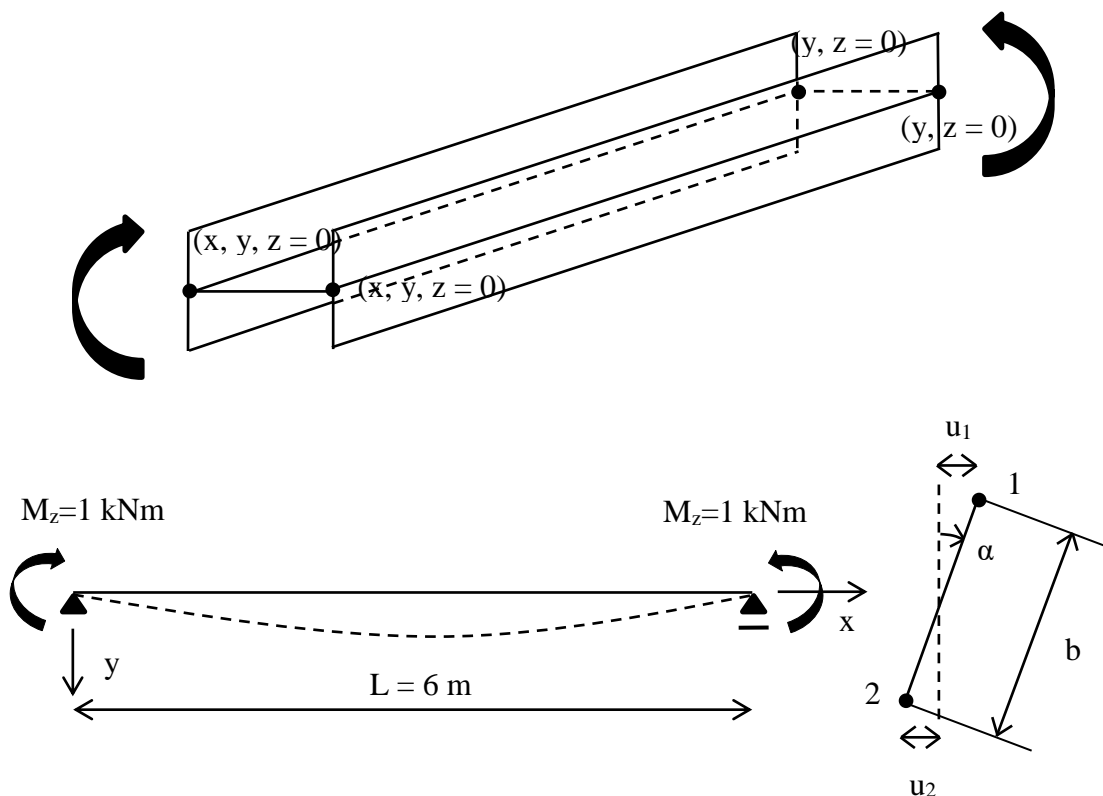


$$\alpha = \frac{u_1}{h_w/2} = \frac{u_2}{h_w/2} = \frac{0,0253 \text{ mm}}{289,3 \text{ mm}/2} = 1,749 \cdot 10^{-4} \quad (5.5)$$

$$I_y = \frac{M_y \cdot L}{2 \cdot E \cdot \alpha} = \frac{100 \text{ kNcm} \cdot 600 \text{ cm}}{2 \cdot 21000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 1,749 \cdot 10^{-4}} = 8167,9 \text{ cm}^4 \quad (5.6)$$

### Proračun $I_z$

Za proračun momenta tromosti presjeka oko slabije osi, definiran je model jednostavnog oslonjenog nosača opterećenog koncentriranim momentima na krajevima nosača iznosa 1 kNm, koji djeluju oko slabije osi poprečnog presjeka kako je prikazano na slici 5.5. Zakrivljenost nosača je dobivena mjerenjem uzdužnih pomaka točaka na vrhovima pojasnica poprečnog presjeka. Mjerenjem zakrivljenosti nosača nad osloncima, izračunata je krutost nosača na savijanje oko slabije osi, odnosno moment tromosti  $I_z$ .



Slika 5.5. Prikaz numeričkog modela za proračun  $I_z$

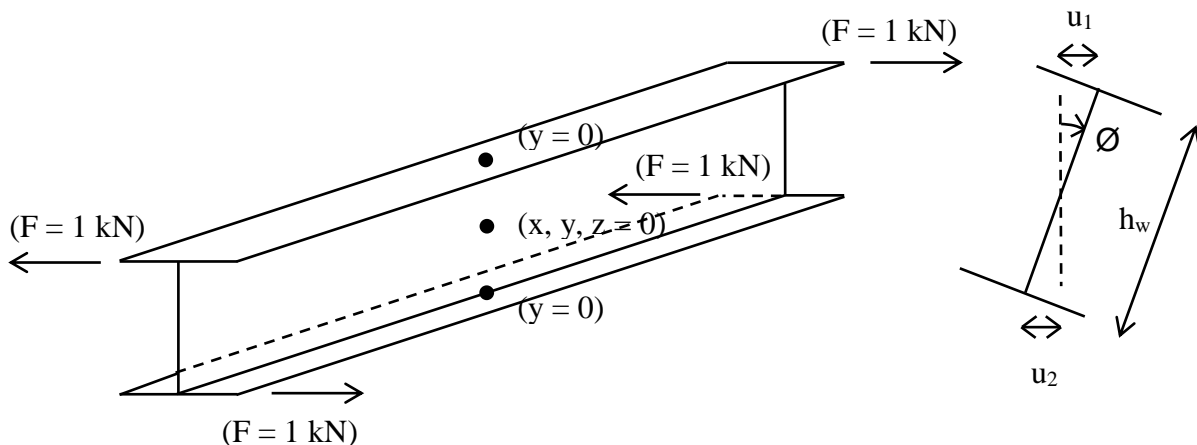
Numerički dobivene vrijednosti uzdužnih pomaka na vrhovima nosača u točkama 1 i 2 iznose  $u_1 = u_2 = 0,00237 \text{ mm}$  iz čega slijedi kut zaokreta nosača oko horizontalne osi te moment tromosti:

$$\alpha = \frac{u_1}{b/2} = \frac{u_2}{b/2} = \frac{0,17775 \text{ mm}}{150 \text{ mm} / 2} = 0,00237 \quad (5.7)$$

$$I_y = \frac{M_y \cdot L}{2 \cdot E \cdot \alpha} = \frac{100 \text{ kNcm} \cdot 600 \text{ cm}}{2 \cdot 21000 \text{ kN} / \text{cm}^2 \cdot 0,00237} = 602,8 \text{ cm}^4 \quad (5.8)$$

### Proračun $I_t$

Za proračun torzijske konstante poprečnog presjeka, element je izložen djelovanju čiste torzije te je mjereno kut tordiranja. S ciljem postizanja stanja čiste torzije, krivljenje presjeka mora biti slobodno. To je postignuto na način da su postavljeni jednostavni rubni uvjeti na sredini nosača, a krajevi su modelirani kao slobodni (slika 5.6.). Nadalje, na krajevima nosača će se postaviti moment torzije pomoću sprega dviju sila koje će djelovati na gornju, odnosno donju pojasnicu. Sile će biti jednakog iznosa ali suprotnog smjera. Također je potrebno napomenuti da se u softveru koristila opcija „weak springs“ da bi se spriječila nestabilnost elementa u modelu.



Slika 5.6. Prikaz numeričkog modela za proračun  $I_t$

Numerički dobivena vrijednost bočnog pomaka na vrhu nosača iznosi  $u_1 = u_2 = 10,44 \text{ mm}$ . Iz toga slijedi kut tordiranja na krajevima nosača:

$$\phi = \frac{u_1}{h/2} = \frac{u_2}{h/2} = \frac{10,44 \text{ mm}}{144,65 \text{ mm}} = 0,0722 \quad (5.9)$$

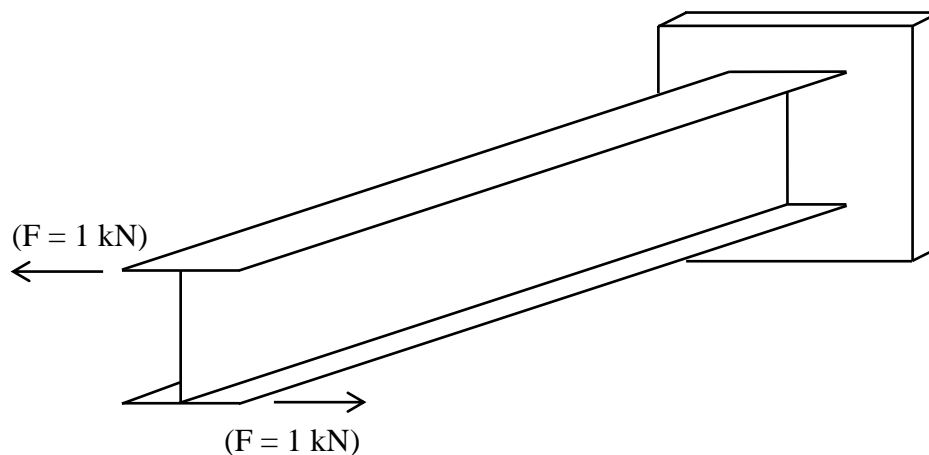
Sada možemo izračunati torzijsku konstantu iz poznatog izraza:

$$I_t = \frac{M_t}{G} \cdot \frac{L/2}{\phi} = \frac{1000 \text{ N} \cdot 289,3 \text{ mm}}{80770 \text{ N/mm}^2} \cdot \frac{6000 \text{ mm}/2}{0,0722} = 14,88 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = 14,88 \text{ cm}^4 \quad (5.10)$$

Upravo iz ovog proračuna je vidljivo koliko je veliko odstupanje torzijske konstante od egzaktne vrijednosti zbog nemogućnosti modeliranja radijusa zaobljenja. Ovakan nosač daje puno manju torzijsku krutost nego što bi trebao. To svakako objašnjava netočnost rezultata izračuna  $M_{cr}$  u točki 5.1.1. S ciljem dobivanja ispravnih rezultata, potrebno je napraviti prilagođeni model koji će uzeti u obzir manjak torzijske krutosti i dati odgovarajuće rješenje.

### Proračun $I_w$

Proračun konstante krivljenja pokazao se nešto složenijim od proračuna prethodnih karakteristika poprečnog presjeka. Da bi se izračunala konstanta krivljenja korišten je postupak naveden u [6]. Ovog puta nosač je modeliran kao konzola opterećena momentom torzije na vrhu nosača kako je prikazano na slici 5.7. Duljina konzole iznosi 6 m. Kut torzije na vrhu nosača mjeren je na isti način kao i kod izračuna torzijske konstante. Korištenjem izraza koji uvodi korelaciju između kuta tordiranja na vrhu nosača  $\phi$  i konstante krivljenja  $I_w$  izračunat će se konstanta krivljenja modeliranog nosača.



**Slika 5.7.** Prikaz numeričkog modela za proračun  $I_w$

Numerički dobivena vrijednost kuta tordiranja na kraju nosača:  $\phi = 0,1076$

Izraz koji uvodi korelaciju između kuta tordiranja i konstante krivljenja nosača statičkog sustava konzole glasi [6]:

$$\phi(x, \lambda) = \frac{M_t}{\lambda \cdot G \cdot I_t} \cdot \left[ (sh(\lambda \cdot L) - th(\lambda \cdot L) \cdot ch(\lambda \cdot L) + th(\lambda \cdot L)) \cdot (ch(x \cdot \lambda) - 1) - sh(x \cdot \lambda) + x \cdot \lambda \right] \quad (5.11)$$

Nadalje, promatran je kut tordiranja na vrhu nosača, odnosno vrijedi  $x = L$  te slijedi:

$$\phi(x, \lambda) = \phi(\lambda).$$

U izrazu (5.11), koeficijent  $\lambda$  predstavlja omjer između torzijske krutosti i krutosti na krivljenje poprečnog presjeka a definiran je izrazom:

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w}} \quad (5.12)$$

S obzirom da konstantu krivljenja ne možemo dobiti eksplicitno iz izraza (5.11) već je zadana implicitno preko koeficijenta  $\lambda$ , proračun je proveden iterativno. Naime, u izraz (5.11) su uvrštene tri proizvoljne vrijednosti konstante krivljenja, te su dobivena tri odgovarajuća kuta tordiranja na vrhu nosača. Dobivene vrijednosti su prikazane grafički na  $\phi/I_w$  grafu te je za numerički dobiven kut tordiranja očitana konstanta krivljenja za modelirani nosač. Potrebno je napomenuti da je u izraz (5.12) uvrštavana torzijska konstanta  $I_t = 14,88 \text{ cm}^4$ , odnosno vrijednost dobivena numeričkim proračunom.

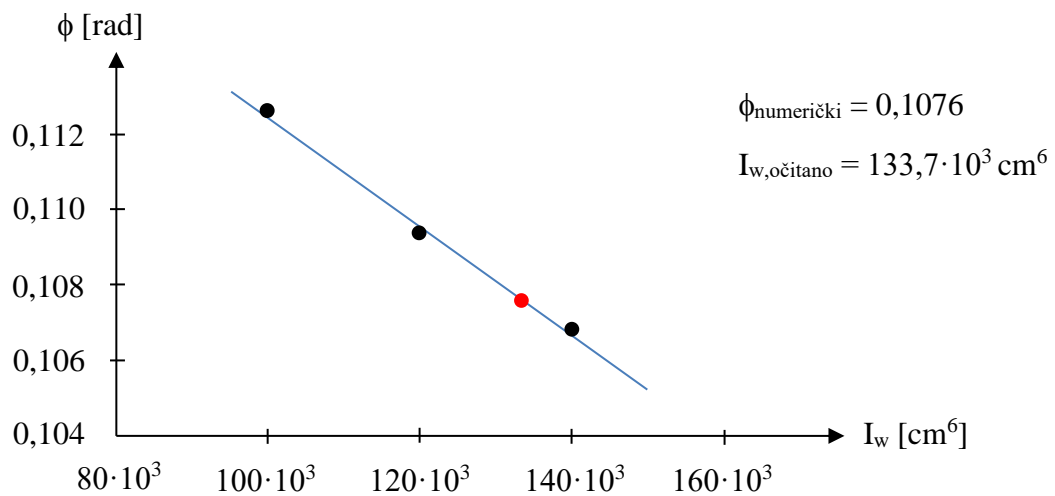
U tablici 5.2 navedene su proizvoljno odabrane konstante krivljenja korištene u proračunu i njihovi pripadni kutevi zaokreta dobiveni izrazom (5.11). Pomoću tih vrijednosti možemo dobiti  $\phi/I_w$  ovisnost potrebnu za proračun konstante krivljenja modeliranog nosača. Vidljivo je da porastom konstante krivljenja dolazi do smanjenja kuta tordiranja nosača, odnosno povećanja njegove torzijske krutosti, iako je torzijska konstanta nepromjenjiva varijabla.

Na slici 5.8. grafički je prikazana ovisnost između konstante krivljenja i kuta torzije na kraju nosača. Crne točke prikazuju vrijednosti dobivene proračunom pomoću izraza (5.12), a crvena točka prikazuje vrijednost očitane sa grafa za izračunati kut torzije. Numeričkim proračunom

dobivena je vrijednost kuta torzije na vrhu nosača  $\phi_{\text{Ansys}} = 0,1076$ . Za tu vrijednost pomoću grafa je očitana vrijednost  $I_{w,\text{očitano}} = 133,7 \cdot 10^3 \text{ cm}^6$ .

**Tablica 5.2.** Tablični prikaz  $\phi/I_w$  ovisnosti

$I_w$ [ $\text{cm}^6$ ]	$\phi$ [rad]
$100 \cdot 10^3$	0,112576
$120 \cdot 10^3$	0,109338
$140 \cdot 10^3$	0,106801



**Slika 5.8.** Grafički prikaz  $\phi/I_w$  ovisnosti

U tablici 5.3 dana je usporedba karakteristika poprečnog presjeka. Uspoređujući numerički proračunate karakteristike s egzaktnim vrijednostima primjećujemo da sve karakteristike pokazuju približno iste vrijednosti osim torzijske konstante  $I_t$  koja pokazuje značajno odstupanje od -35%. Ovime se još jednom potvrdila činjenica da radijusi zaobljenja značajno povećavaju torzijsku krutost nosača.

Nadalje, uspoređujući numerički dobivene karakteristike presjeka s onim izračunatim ručno, vidimo da je odstupanje zanemarivo za sve karakteristike. Takvi rezultati potvrđuju točnost proračunskih modela za ispitivanje karakteristika poprečnog presjeka. Ipak vidljivo je odstupanje konstante krivljenja u iznosu od +5,8%, ali smatra se da toliko odstupanje neće značajnije utjecati na rezultate proračuna.

**Tablica 5.3.** Usporedba numerički proračunatih karakteristika poprečnog presjeka s ručno proračunatim i egzaktnim vrijednostima

IPE300	Egzaktne vrijednosti (s radijusima zaobljenja)	Ručni proračun (bez radijusa zaobljenja)	Numerički proračun	$\Delta_1$	$\Delta_2$
$I_y$	8356 cm <sup>4</sup>	8152 cm <sup>4</sup>	8168 cm <sup>4</sup>	-2,3 %	+0,20 %
$I_z$	603,8 cm <sup>4</sup>	602,7 cm <sup>4</sup>	602,8 cm <sup>4</sup>	-0,16 %	+0,02 %
$I_t$	20,12 cm <sup>4</sup>	15,70 cm <sup>4</sup>	14,88 cm <sup>4</sup>	-35 %	-5,5 %
$I_w$	125 900 cm <sup>6</sup>	126 300 cm <sup>6</sup>	133 700 cm <sup>6</sup>	+5,8 %	+5,5 %

Potrebno je napomenuti da su se odstupanja  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  računala prema sljedećim izrazima:

$$\Delta_1 = \frac{\text{numerički proračun} - \text{egzaktne vrijednosti}}{\text{numerički proračun}}$$

$$\Delta_2 = \frac{\text{numerički proračun} - \text{ručni proračun}}{\text{numerički proračun}}$$

Izračunate vrijednosti  $M_{cr}$  pomoću analitičkog izraza (4.8) koristeći različite karakteristike poprečnog presjeka te njihova usporedba s vrijednosti  $M_{cr}$  dobivene numeričkom analizom, prikazane su u tablici 5.4.

**Tablica 5.4.** Usporedba vrijednosti  $M_{cr}$

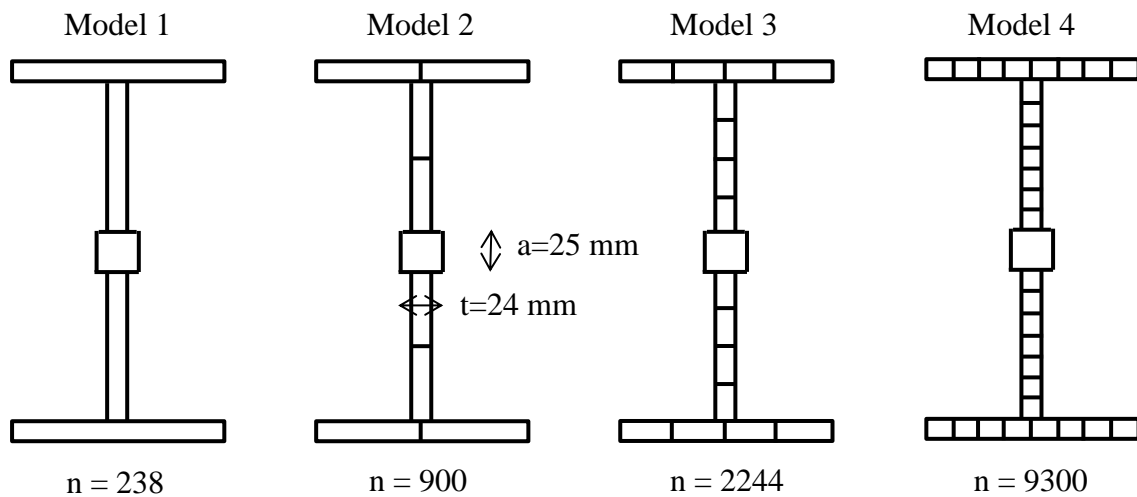
Karakteristike poprečnog presjeka	$M_{cr}$ – elastični kritični moment	Odstupanje
Egzaktne vrijednosti	79,33 kNm	+13,7 %
Ručno proračunate vrijednosti	71,13 kNm	+3,80 %
Numerički proračunate vrijednosti	71,01 kNm	+3,63 %
Numerički model	68,43 kNm	0 %

Kako je vidljivo u tablici 5.4. vrijednosti elastičnog kritičnog momenta značajno odstupaju od egzaktno dobivene vrijednosti.

### 5.1.3 Prilagođeni model nosača izvedenog iz I profila

S ciljem dobivanja ispravnih rezultata  $M_{cr}$  model je korigiran povećanjem torzijske konstante poprečnog presjeka, pritom ne mijenjajući ostale karakteristike poprečnog presjeka koje su ispravne. To je se napravljeno zadebljanjem središnjeg dijela hrpta poprečnog presjeka. Na taj način povećana je torzijska krutost presjeka, odnosno nadomješten je izostanak radijusa zaobljenja. Ostale karakteristike poprečnog presjeka promjenjene su neznatno.

Visina zadebljanja hrpta iznosi  $a = 25$  mm, a debljina zadebljanja  $t = 24$  mm kako je prikazano na slici 5.9. Dimenzije zadebljanja su izračunate na takav način da torzijska konstanta prilagođenog poprečnog presjeka odgovara egzaktnoj vrijednosti torzijske konstante za presjek sa radijusima zaobljenja. Numeričkim proračunom dobivena je torzijska konstanta prilagođenog presjeka  $I_t = 20,17$  cm<sup>4</sup> čime je potvrđena ispravnost modela.



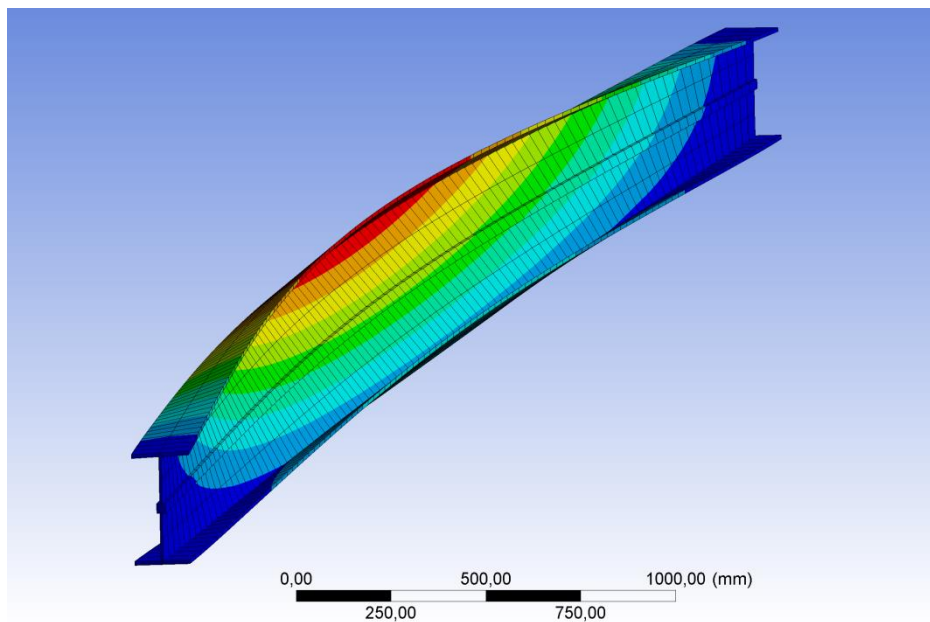
**Slika 5.9.** Prikaz numeričkog modela za proračun  $I_w$

Kad je napravljen novi numerički model, istražen je utjecaj broja konačnih elemenata na rezultate. Istražen je utjecaj 4 tipa modela prikazanih na slici 5.9. na  $M_{cr}$ , pri čemu  $n$  predstavlja broj konačnih elemenata u modelu. Dobivene vrijednosti  $M_{cr}$  su potom uspoređene s egzaktnom vrijednošću  $M_{cr}$  proračunatom pomoću analitičkog izraza (4.8). Rezultati proračuna prikazani su u tablici 5.5.

**Tablica 5.5.** *Usporedba vrijednosti  $M_{cr}$* 

	$M_{cr}$	Odstupanje
Model 1	85,76 kNm	+8,11 %
Model 2	82,46 kNm	+3,94 %
Model 3	81,32 kNm	+2,51 %
Model 4	79,73 kNm	+0,50 %
Egzaktna vrijednost	79,33 kNm	0 %

Iz vrijednosti prikazanih u tablici 5.5 možemo zaključiti sljedeće. Povećanjem broja konačnih elemenata vrijednost  $M_{cr}$  se smanjuje, odnosno konvergira prema egzaktnoj vrijednosti. Time smo potvrdili ispravnost prilagođenog modela. Nadalje, možemo primjetiti da model 1 prikazuje značajno odstupanje vrijednosti  $M_{cr}$  od egzaktna vrijednosti što znači da takav broj konačnih elemenata nije dovoljan za proračunavanje elastičnog kritičnog momenta. To pokazuje da je korišteni model 2 bio ispravan za proračun  $M_{cr}$  ne samo u početnom modelu, već i u prilagođenom. Na slici 5.10 prikazan je numerički model 2, te njegov prvi mod izvijanja.

**Slika 5.10.** *Prikaz prilagođenog numeričkog modela (prvi mod izvijanja)*

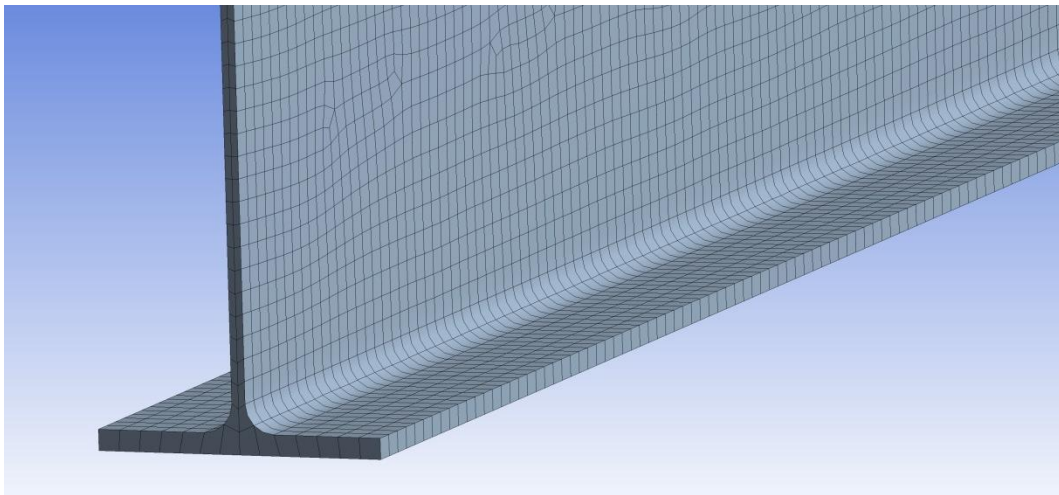
Na temelju kalibracije modela s I poprečnim presjekom razvijen je postupak koji je korišten za kalibraciju modela sa U poprečnim presjekom.. Kalibracija modela s U poprečnim presjekom provedena je na identičan način kako je prikazano na primjeru nosača s I poprečnim presjekom.



### 5.1.4 Modeliranje nosača I profila s prostornim elementima

Modeliranje prostornim elementima nije učestala praksa u svakodnevnim inženjerskim problemima u građevinarstvu i češće se koristi u znanstvenoistraživačke svrhe. Glavni razlog izbjegavanja ovakvog tipa modeliranja leži u činjenici da su ovakve analize vremenski izrazito zahtjevne, pogotovo ako se radi o parametarskim analizama kao što je u ovom slučaju riječ.

Za potrebe ovog istraživanja provedene su dvije analize. U prvoj analizi korišten je model s manjim brojem prostornih konačnih elemenata (model 1), dok se kod drugog modela usvojio značajno veći broj konačnih elemenata (model 2). Mreža konačnih elemenata za model 2 je prikazana na slici 5.11. Rubni uvjeti modelirani su na isti način kao i kod analize s plošnim elementima. Opterećenje je modelirano kao jednoliko raspodijeljeno, i to na gornju pojasnicu poprečnog presjeka elementa.



**Slika 5.11.** Prikaz mreže konačnih elemenata

Tip konačnog elementa koji je korišten je konačni element „Solid186“. To je prostorni element s 20 integracijskih točaka, a u svakoj posjeduje 3 stupnja slobode (translaciju u x, y i z smjeru) [20].

U prvoj analizi korišten je model s približno 30 000 čvorova. Nakon provedene analize izvijanja dobiveno je elastično kritično opterećenje  $M_{cr} = 76,33$  kNm. U drugoj analizi korišten je model s približno 200 000 čvorova, a dobiveno rješenje iznosi  $M_{cr} = 74,55$  kNm.

**Tablica 5.6.** *Usporedba vrijednosti  $M_{cr}$* 

	$M_{cr}$	Odstupanje
Model 1	76,33 kNm	-3,00 %
Model 2	74,55 kNm	-5,46 %
Egzaktna vrijednost	78,62 kNm	0 %

Iz rezultata proračuna mogu se donijeti sljedeći zaključci.

- provođenjem analize na modelu 1 koji ima manji broj konačnih elemenata dobivena je vrijednost  $M_{cr}$  relativno bliska egzaktnoj vrijednosti.
- vremenski utrošak potreban za provođenje analize izvijanja na takvom modelu nije se pokazao prevelik.
- Model 2 koji je imao finiju diskretizaciju je pokazao veće odstupanje  $M_{cr}$  od egzaktno vrijednosti, a analiza je bila vremenski vrlo dugačka.

S obzirom da su modeli izvedeni plošnim elementima pokazivali manje odstupanje  $M_{cr}$  od egzaktno vrijednosti, te je sama analiza vremenski puno učinkovitija, čak i u usporedbi s modelom 1, odlučilo se nastavak istraživanja provesti modeliranjem plošnim elementima.

## 5.2 Kalibracija numeričkog modela na primjeru nosača izvedenog iz U profila

### 5.2.1 Opis kalibracijskog modela nosača izvedenog iz U profila

Za kalibraciju nosača U profila modeliran je se nosač raspona  $L = 4$  m te profila UPE200. Za izradu modela ponovo su korišteni plošni elementi Shell181. Nosač je centrično opterećen koncentriranom silom na sredini raspona iznosa  $F = 1$  kN. Da bi nosač bio centrično opterećen sila mora prolaziti kroz središte posmika. To je postignuto pomoću funkcije „remote force“. Odnosno, koncentrirana sila djeluje u točki koja je krutom vezom povezana s točkom na sredini visine hrpta poprečnog presjeka na sredini raspona. Udaljenost točaka mora odgovarati ekscentricitetu poprečnog presjeka  $e$ .

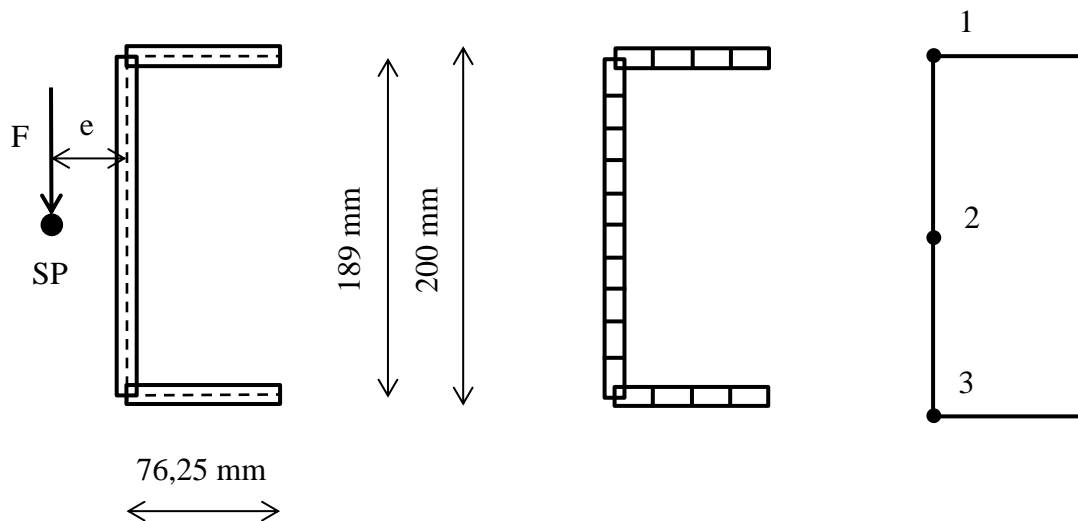
Poprečni presjek korišten za kalibraciju modela je UPE200. Osnovne karakteristike poprečnog presjeka jesu [5]:

$h = 200$  mm                      visina poprečnog presjeka

$b = 80 \text{ mm}$	širina pojasnice
$t_w = 7,5 \text{ mm}$	debljina hrpta
$t_f = 11,0 \text{ mm}$	debljina pojasnice

Kao i kod I profila, modelirana je se osna visina hrpta  $h_w = 189 \text{ mm}$ . Širina pojasnica modelirana je se sa vrijednošću  $b_f = 76,25 \text{ mm}$  što odgovara udaljenosti između osi hrpta i ruba pojasnice poprečnog presjeka.

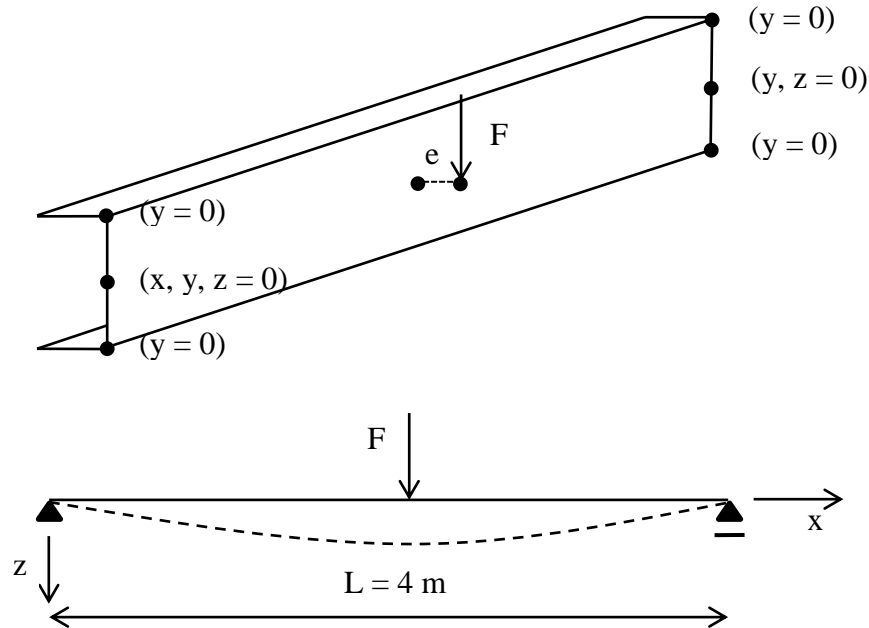
Diskretizacija nosača na konačne elemente provedena je na sljedeći način. Promatrajući proizvoljni poprečni presjek nosača, svaka pojasnica sadržava 4 konačna elementa, a hrbat 10, kako je prikazano na slici 5.12. Po duljini, nosač je podijeljen na 200 konačnih elemenata što znači da će model ukupno sadržavati 3600 konačnih elemenata.



**Slika 5.12.** Prikaz poprečnog presjeka modela

Materijal koji je korišten za za modeliranje kalibracijskog modela je čelik modula elastičnosti  $E = 210\,000 \text{ Mpa}$  i Poissonovog koeficijenta  $\nu = 0,3$ . To znači da je modul posmika jednak  $G = 80\,770 \text{ Mpa}$ .

Da bi se simulirali viličasti rubni uvjeti, u točkama 1 i 3 spriječeni su bočni pomaci, a u točki 2 bočni, vertikalni i uzdužni pomaci na jednom kraju nosača, odnosno, bočni i vertikalni na drugom. Ilustracija statičkog sustava zajedno s uvjetima oslanjanja je dana na slici 5.13.



Slika 5.13. Prikaz kalibracijskog modela

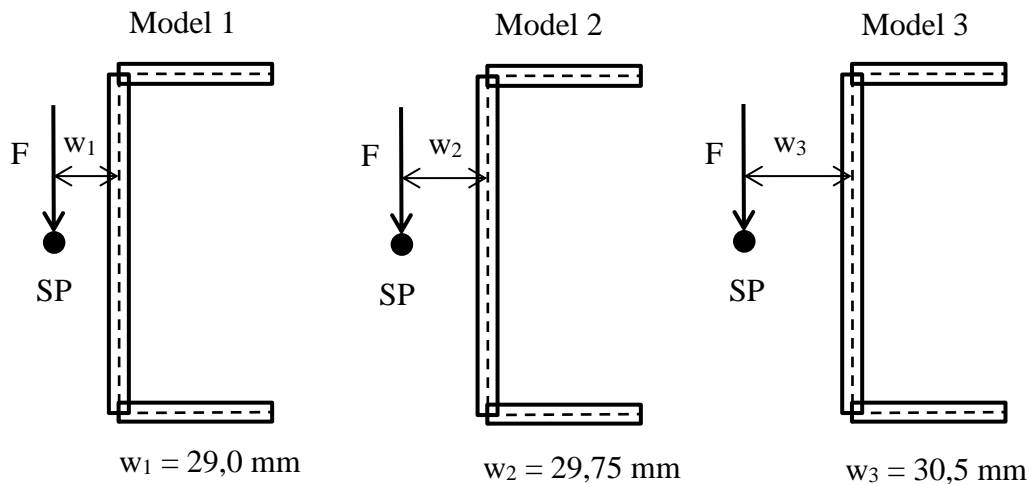
### 5.2.2 Određivanje ekscentriciteta poprečnog presjeka

Kod kalibracije modela nosača I profila postizanje uvjeta centričkog opterećenja nije predstavljalo problem s obzirom da se središte posmika poklapalo sa središtem mase. Odnosno, postavljanjem opterećenja na gornju pojasnicu dobivamo uvjete centrično opterećenog nosača.

Kod nosača U profila, postavljanjem opterećenja na gornju pojasnicu, dobivamo ekscentrično opterećen nosač. Da bi se mogla postaviti sila u središte posmika prvo je potrebno odrediti ekscentricitet poprečnog presjeka. To se izvelo na način da se pravac djelovanja vanjske sile postavio na trima različitim udaljenostima od hrpta. Mjeren je kut tordiranja nosača  $\phi$  u ovisnosti od položaja djelovanja sile. Rezultati su prikazani grafički u obliku  $w/\phi$  ovisnosti, gdje  $w$  označava udaljenost pravca djelovanja sile od osi hrpta poprečnog presjeka kako je prikazano na slici 5.14.

Da bi se dobila prvu aproksimacija veličine ekscentriciteta, korišteni su izrazi iz otpornosti materijala, prema kojima slijedi veličina ekscentriciteta [11]:

$$e = \frac{h^2 \cdot b^2 \cdot t_f}{4 \cdot I_y} = \frac{(18,9 \text{ cm})^2 \cdot (7,625 \text{ cm})^2 \cdot 1,1 \text{ cm}}{4 \cdot 1922 \text{ cm}^4} = 29,72 \text{ cm} \quad (5.13)$$



**Slika 5.14.** Prikaz modela za određivanje ekscentriciteta poprečnog presjeka

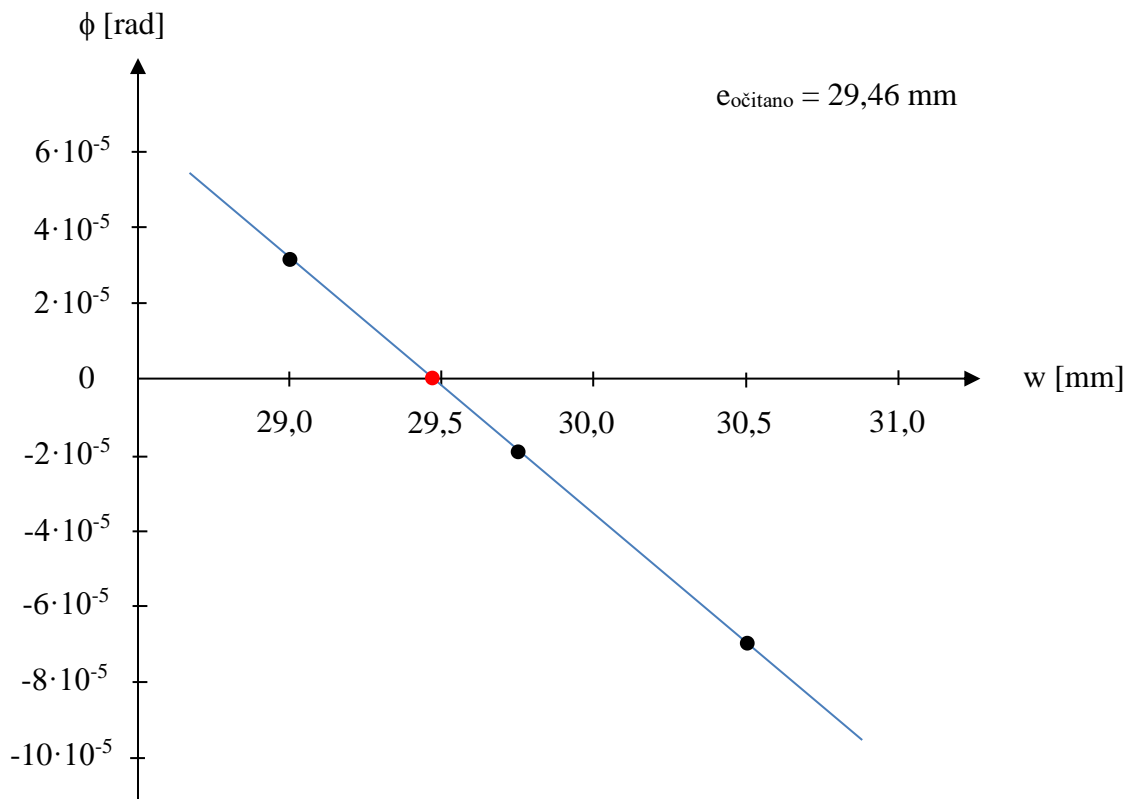
Potrebno je napomenuti da u ovoj fazi modeliranja još nije izračunata vrijednost momenta tromosti poprečnog presjeka oko jače osi  $I_y$ , pa se ona računala koristeći izraze iz otpornosti materijala. Ali s obzirom da je veličina ekscentriciteta dobivena izrazom (5.13) samo prva aproksimacija, a točna vrijednost ekscentriciteta će se dobiti numeričkom analizom, tada je vrijednost  $I_y$  dobivena na takav način, dovoljno točna.

Za svrhe proračuna ekscentriciteta poprečnog presjeka, pravac djelovanja sile postavljen je na tri različite udaljenosti od hrpta  $w$ . Statički sustav je slobodno oslonjen nosač opterećena koncentriranom silom na sredini raspona. Uvjeti oslanjanja nosača su modelirani kao viličasti na način objašnjen u poglavlju 5.2.1. Za tri različita pravca djelovanja sile, dobivamo tri različita kuta tordiranja nosača  $\phi$ . Kut tordiranja mjeren je se na sredini raspona mjerenjem bočnih pomaka točaka poprečnog presjeka. Vrijednosti proračuna prikazane su u tablici 5.7.

**Tablica 5.7.** Tablični prikaz  $w/\phi$  ovisnosti

	$w$ [mm]	$\phi$ [rad]
Model 1	29,0	$3,101 \cdot 10^{-5}$
Model 2	29,75	$-1,920 \cdot 10^{-5}$
Model3	30,5	$-6,942 \cdot 10^{-5}$

Iz grafa prikazanog na slici 5.15 možemo vidjeti da postavljanjem pravca djelovanja sile na udaljenost  $w = 29,46$  mm od osi hrpta, neće doći do tordiranja nosača. Tu vrijednost možemo potvrditi i linearnom interpolacijom, a ona predstavlja numerički izračunatu vrijednost ekscentriciteta  $e$ . Da bi se potvrdila valjanost ovog postupka, napravljen je model kod kojeg je postavljen pravac djelovanja sile na udaljenosti  $w = 29,46$  mm od osi hrpta. Dobivena vrijednost kuta torzije na sredini nosača iznosi  $\phi = 2,16 \cdot 10^{-7}$  što je zanemariva veličina, i time je potvrđena točnost ovog proračunskog postupka.



**Slika 5.15.** Grafički prikaz  $\phi/e$  ovisnosti

Nakon što je proračunat ekscentricitet poprečnog presjeka nosača, dobivena je vrijednost elastičnog kritičnog momenta  $M_{cr}$  za centrično opterećen nosač U profila. Ta vrijednost je uspoređena sa vrijednošću dobivenom pomoću egzaktnog analitičkog izraza (4.8), uz napomenu da je u izrazu uzeto  $z_g = 94,5$  mm što predstavlja razmak osi pojasnice od težišta poprečnog presjeka. Dobivene vrijednosti  $M_{cr}$  jesu:

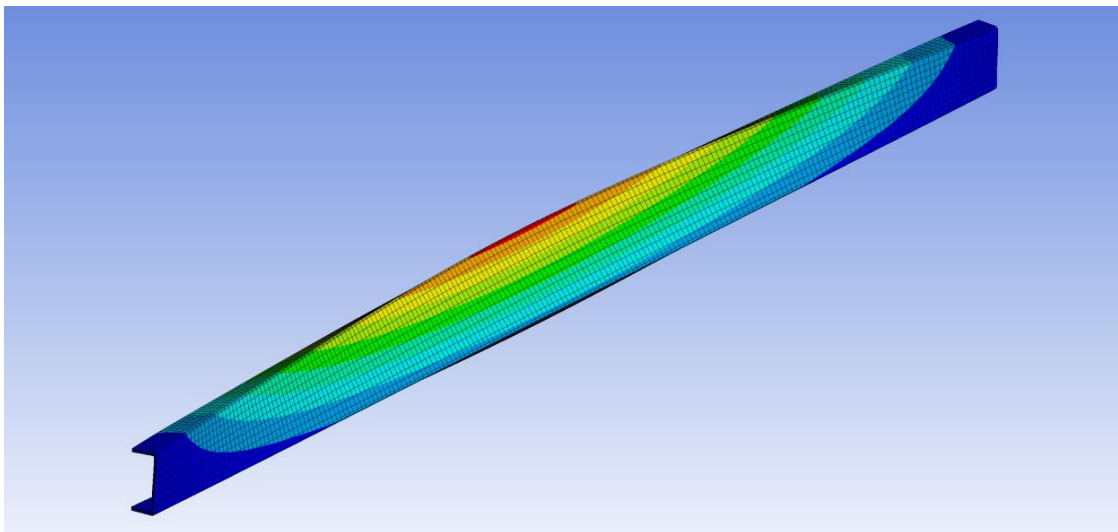
$$M_{cr}^{MKE} = 46,25 \text{ kNm}$$

$$M_{cr}^{EGZAKTNO} = 49,93 \text{ kNm}$$

$$\Delta = \frac{M_{cr}^{MKE} - M_{cr}^{EGZAKTNO}}{M_{cr}^{MKE}} = -7,96\%$$

Vidljivo je da se ponovno pojavljuje značajno odstupanje između egzaktne vrijednosti  $M_{cr}$  i one dobivene numerički. Razlog tome jest odstupanje karakteristika poprečnog presjeka nosača modeliranog konačnim elementima i egzaktnih vrijednosti karakteristika poprečnog presjeka, koje nastaje zbog nemogućnosti modeliranja radijusa zaobljenja u kutovima poprečnog presjeka.

U nastavku je provedena usporedba karakteristika poprečnog presjeka modela dobivenih numerički i egzaktnih vrijednosti. Nakon toga kalibracijski model je prilagođen s ciljem dobivanja korektnih vrijednosti  $M_{cr}$ . Na slici 5.16 prikazan je neprilagođeni kalibracijski model nosača koji je korišten za određivanje ekscentriciteta poprečnog presjeka i proračun  $M_{cr}$ .



**Slika 5.16.** Numerički model nosača U profila (prvi mod izvijanja)

### 5.2.3 Usporedba karakteristika poprečnog presjeka U profila

U prvom koraku usporedit će se karakteristike poprečnog presjeka modeliranog nosača s egzaktnim vrijednostima koju uzimaju u obzir područja radijusa zaobljenja, ali i s ručno proračunatim karakteristikama za poprečni presjek koji ne uzima u obzir područja radijusa zaobljenja.. Za određivanje karakteristika poprečnog presjeka nosača u numeričkom modelu

korišten je postupak analogan onom koji je korišten za određivanje karakteristika poprečnog presjeka nosača izvedenog iz I profila. Postupak je dan u nastavku.

### Proračun $I_y$

Za proračun momenta tromosti oko jače osi poprečnog presjeka, numerički je modeliran je statički sustav jednostavno oslonjenog nosača. U ovom slučaju, nosač je opterećen koncentriranom silom na sredini raspona u iznosu od 1 kN. Koncentrirana sila djeluje u središtu posmika. Razlog zašto se ovdje ne koriste koncentrirani momenti kao u slučaju nosača izvedenog iz I profila je taj što se korištenjem koncentriranih momenata na krajevima nosača stvara moment torzije i onemogućava točno određivanje progiba uslijed savijanja.

Mjerenjem progiba od savijanja u sredini nosača, određen je moment tromosti poprečnog presjeka oko jače osi. Naravno, sada je potrebno uzeti u obzir deformacije nosača koje nastaju uslijed posmičnih naprezanja jer više nemamo slučaj čistog savijanja. Statički sustav, uvjeti oslanjanja i opterećenja prikazani su na slici 5.17.

Numerički dobivena vrijednost progiba na sredini nosača iznosi  $w = 0,34388$  mm. Potrebno je izračunati i koliki dio dobivenog progiba nastaje uslijed posmičnih naprezanja, a koliki uslijed savijanja. Za proračun progiba od posmičnih naprezanja korišten je postupak dan u [22]. Izraz za progib od posmičnih naprezanja slijedi:

$$w_{posmik} = \frac{F \cdot L \cdot \alpha}{4 \cdot A \cdot G} = \frac{1 \text{ kN} \cdot 400 \text{ cm} \cdot 2,42}{4 \cdot 30,95 \text{ cm}^2 \cdot 8077 \text{ kN} / \text{cm}^2} = 0,00968 \text{ mm} \quad (5.14)$$

Koeficijent  $\alpha$  se računa prema izrazu:

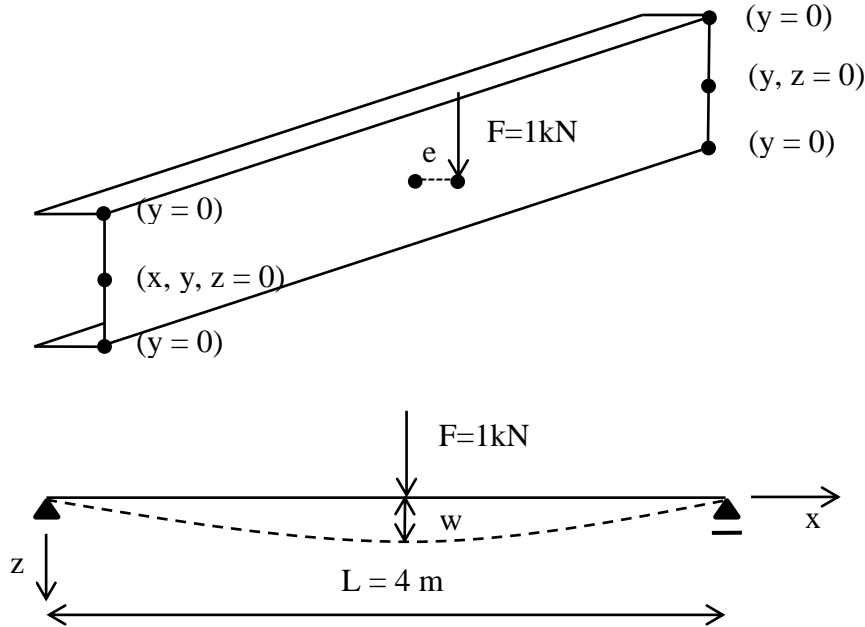
$$\alpha = \frac{a \cdot \gamma \cdot A}{I_y \cdot t_w} = \frac{15,48 \text{ cm}^2 \cdot 7,29 \text{ cm} \cdot 30,95 \text{ cm}}{1922 \text{ cm}^4 \cdot 0,75 \text{ cm}} = 2,42 \quad (5.15)$$

gdje su:

a površina poprečnog presjeka iznad neutralne osi,



- $\gamma$  udaljenost težišta površine presjeka koji se nalazi iznad neutralne osi i težišta cijele površine poprečnog presjeka,
- $A$  površina poprečnog presjeka,
- $t_w$  debljina hrpta nosača.



Slika 5.17. Prikaz numeričkog modela za proračun  $I_y$

Numerički izračunata vrijednost progiba nosača pod djelovanjem koncentrirane sile iznosi  $w = 0,34388$  mm. Od te vrijednosti ukupnog progiba treba oduzeti vrijednost progiba koji nastaje uslijed posmika kako bismo dobili progib nosača od savijanja:

$$w = w_{\text{posmik}} + w_{\text{savijanje}} = 0,34388 \text{ mm}$$

$$w_{\text{posmik}} = 0,00968 \text{ mm}$$

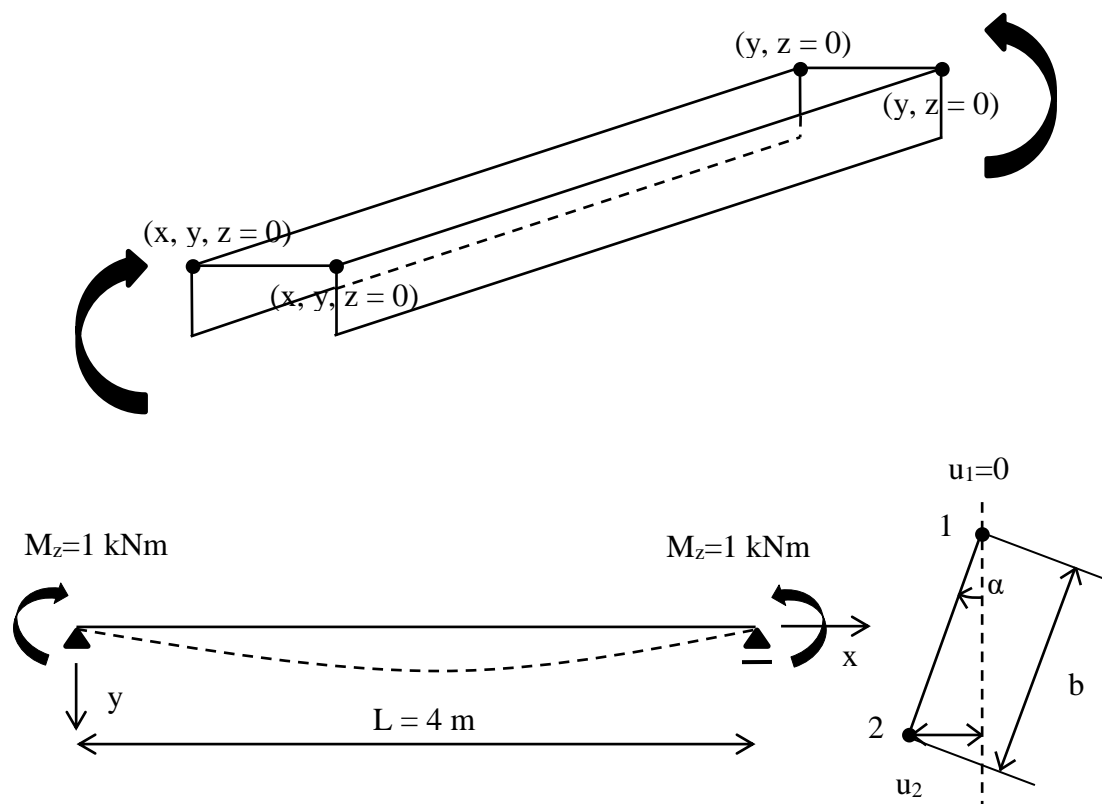
$$w_{\text{savijanje}} = w - w_{\text{posmik}} = 0,34388 \text{ mm} - 0,00968 \text{ mm} = 0,33420 \text{ mm}$$

Prema teoriji elastičnosti možemo iraćunati moment tromosti oko jače osi poprečnog presjeka:

$$I_y = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot w_{\text{savijanje}}} = \frac{1 \text{ kN} \cdot (400 \text{ cm})^3}{48 \cdot 21000 \text{ kN} / \text{cm}^2 \cdot 0,03342 \text{ cm}} = 1900 \text{ cm}^4 \quad (5.16)$$

## Proračun $I_z$

Razmatra se statički sustav jednostavno oslonjene grede opterećene koncentriranim momentima na krajevima nosača iznosa 1 kNm, koji djeluju oko slabije osi poprečnog presjeka. Numerički model je prikazan na slici 5.18. Zakrivljenost nosača je izračunata mjerenjem uzdužnih pomaka točaka na vrhovima pojasnica poprečnog presjeka. Mjerenjem zakrivljenosti nosača nad osloncima, možemo izračunati krutost nosača na savijanje oko slabije osi, odnosno moment tromosti  $I_z$ .



Slika 5.18. Prikaz numeričkog modela za proračun  $I_z$

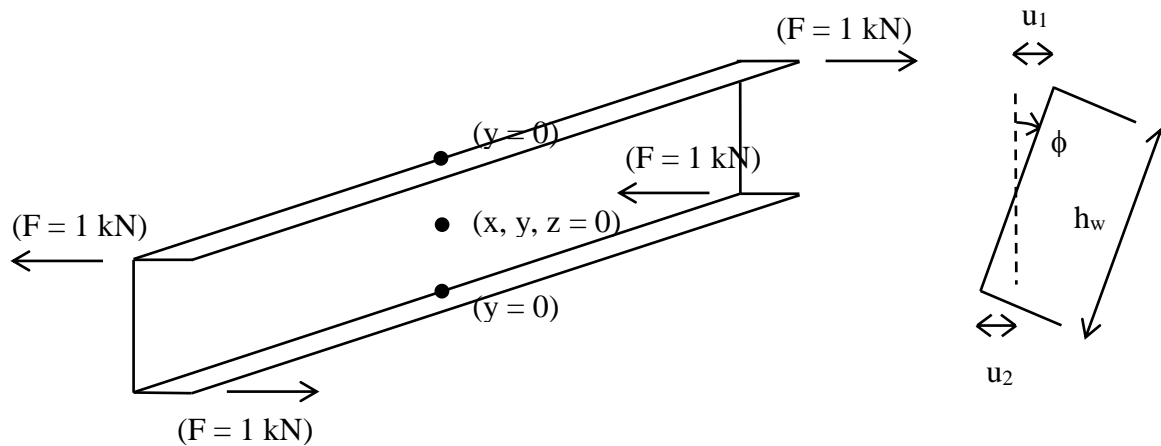
Numerički dobivene vrijednosti uzdužnih pomaka na vrhovima nosača u točkama 1 i 2 iznose  $u_1 = 0 \text{ mm}$  i  $u_2 = 0,3648 \text{ mm}$ . Razlog zašto u točki 1 nije izmjeren pomak je taj što su u toj točki definirani nepomični rubni uvjeti. Sada možemo izračunati kut zaokreta nosača oko horizontalne osi te moment tromosti  $I_z$ :

$$\alpha = \frac{u_1 + u_2}{b} = \frac{0,3648 \text{ mm}}{76,25 \text{ mm}} = 0,004784 \quad (5.17)$$

$$I_z = \frac{M_y \cdot L}{2 \cdot E \cdot \alpha} = \frac{100 \text{ kNcm} \cdot 400 \text{ cm}}{2 \cdot 21000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 0,004784} = 199,1 \text{ cm}^4 \quad (5.18)$$

### Proračun $I_t$

S ciljem proračuna torzijske konstante poprečnog presjeka, element je izložen djelovanju čiste torzije te se mjeri kut tordiranja. Numerički model za izračun torzijske krutosti nosača je prikazan na slici 5.19. Modelirana je nosač s jednostavnim rubnim uvjetima na sredini. Krajevi nosača su slobodni. Na krajevima nosača nanesen je moment torzije pomoću sprega dviju sila koje djeluju na gornju, odnosno donju pojasnicu. Sile su jednakog iznosa od 1 kN ali suprotnog smjera da bi uzrokovale torziju nosača.



Slika 5.19. Prikaz numeričkog modela za proračun  $I_t$

Numeričkim postupkom dobivene su veličine bočnih pomaka na vrhovima nosača koje iznose  $u_1 = u_2 = 5,084 \text{ mm}$ . Sada slijedi kut tordiranja na krajevima nosača:

$$\phi = \frac{u_1}{h/2} = \frac{u_2}{h/2} = \frac{5,084 \text{ mm}}{94,5 \text{ mm}} = 0,05380 \quad (5.19)$$

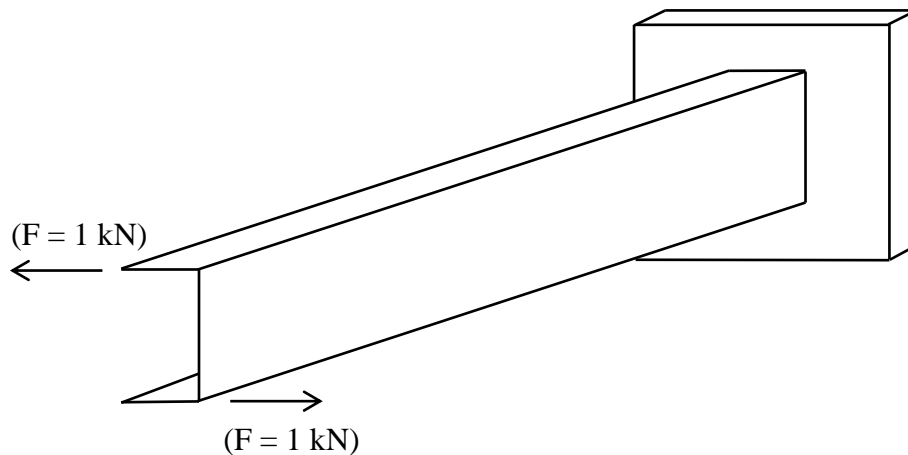
Torzijsku konstantu možemo izračunati pomoću poznatog izraza:

$$I_t = \frac{M_t}{G} \cdot \frac{L/2}{\phi} = \frac{1000 \text{ N} \cdot 189,0 \text{ mm}}{80770 \text{ N/mm}^2} \cdot \frac{4000 \text{ mm}/2}{0,05380} = 8,70 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = 8,70 \text{ cm}^4 \quad (5.20)$$

Kod nosača izvedenog iz U profila također možemo primijetiti veliko odstupanje torzijske konstante od egzaktnosti vrijednosti koja uzima u obzir radijuse zaobljenja na spoju hrpta i pojasnica. Takav je slučaj bio i kod nosača izvedenih iz I profila. Zaključujemo već sada da će i kod ovakvih nosača trebati izvoditi prilagođeni model koji će uzeti u obzir nedostatak radijusa zaobljenja.

### Proračun $I_w$

Za proračun konstante krivljenja korišten je iterativan postupak prethodno proveden na nosaču izvedenom iz I profila. Nosač je modeliran kao konzola opterećena momentom torzije na vrhu nosača (slika 5.20). Mjeri se kut tordiranja na vrhu nosača.



**Slika 5.20.** Prikaz numeričkog modela za proračun  $I_w$

Numerički dobivena vrijednost kuta tordiranja na kraju nosača:  $\phi = 0,0903$

Ponovo je korišten izraz koji uvodi korelaciju između kuta tordiranja i konstante krivljenja nosača statičkog sustava konzole [6]:

$$\phi(x, \lambda) = \frac{M_t}{\lambda \cdot G \cdot I_t} \cdot \left[ (sh(\lambda \cdot L) - th(\lambda \cdot L) \cdot ch(\lambda \cdot L) + th(\lambda \cdot L)) \cdot (ch(x \cdot \lambda) - 1) - sh(x \cdot \lambda) + x \cdot \lambda \right] \quad (5.21)$$

Promatramo kut tordiranja na vrhu nosača, odnosno vrijedi  $x = L$  te slijedi  $\phi(x, \lambda) = \phi(\lambda)$ . Koeficijent  $\lambda$  predstavlja omjer između torzijske krutosti i krutosti na krivljenje poprečnog presjeka, a definiran je izrazom:

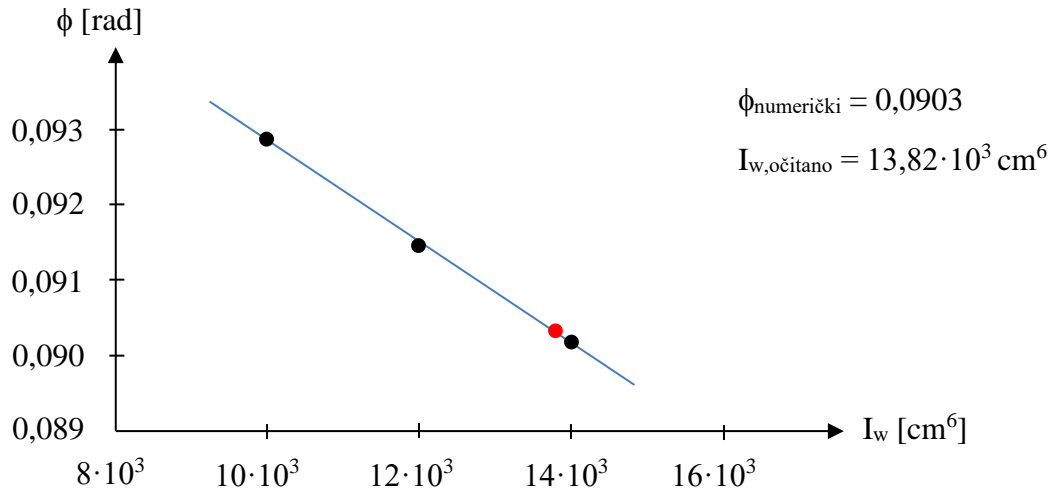
$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w}} \quad (5.22)$$

Kako je već zaključeno, konstantu krivljenja ne možemo dobit eksplicitno iz izraza 5.21 već je zadana implicitno preko koeficijenta  $\lambda$ , te se proračun mora provesti iterativno. U izraz su uvrštene tri proizvoljne vrijednosti konstante krivljenja, a preko izraza 5.21 dobivena su tri odgovarajuća kuta tordiranja na vrhu nosača  $\phi$ . Vrijedi napomena da je u izraz 5.21 uvrštavana numerički dobivena vrijednost torzijske krutosti  $I_t = 8,70 \text{ cm}^4$ . Dobiveni rezultati su prikazani u tablici 5.8:

**Tablica 5.8.** Tablični prikaz  $\phi/I_w$  ovisnosti

$I_w \text{ [cm}^6\text{]}$	$\phi \text{ [rad]}$
$10 \cdot 10^3$	0,092881
$12 \cdot 10^3$	0,091463
$14 \cdot 10^3$	0,090188

Dobivene vrijednosti prikazane su na  $\phi/I_w$  grafu (slika 5.21.). Crne točke prikazuju vrijednosti dobivene proračunom pomoću izraza 5.21, a crvena točka prikazuje vrijednost očitano sa grafa za numerički dobiven kut torzije  $\phi_{\text{numerički}} = 0,1076$ . Korištenjem  $\phi/I_w$  grafa očitana je vrijednost konstante krivljenja  $I_{w,\text{očitano}} = 13,82 \cdot 10^3 \text{ cm}^6$ .



**Slika 5.21.** Grafički prikaz  $\phi/I_w$  ovisnosti

U tablici 5.9 dana je usporedba geometrijskih karakteristika poprečnog presjeka. Razmatrane su egzaktne karakteristike poprečnog presjeka koji uzimaju u obzir radijuse zaobljenja, ručno izračunate karakteristike poprečnog presjeka koje ne uzimaju u obzir radijuse zaobljenja i numerički dobivene karakteristike poprečnog presjeka koje također ne uzimaju u obzir radijuse zaobljenja.

**Tablica 5.9.** Usporedba numerički proračunatih karakteristika poprečnog presjeka s ručno proračunatim i egzaktnim vrijednostima

UPE200	Egzaktne vrijednosti (s radijusima zaobljenja)	Ručni proračun (bez radijusa zaobljenja)	Numerički proračun	$\Delta_1$	$\Delta_2$
$I_y$	1970 cm <sup>4</sup>	1922 cm <sup>4</sup>	1900 cm <sup>4</sup>	-3,7 %	-1,2 %
$I_z$	196,0 cm <sup>4</sup>	193,6 cm <sup>4</sup>	199,1 cm <sup>4</sup>	+1,6 %	+2,8 %
$I_t$	10,30 cm <sup>4</sup>	9,42 cm <sup>4</sup>	8,70 cm <sup>4</sup>	-18 %	-8,3 %
$I_w$	11 500 cm <sup>6</sup>	11 290 cm <sup>6</sup>	12 880 cm <sup>6</sup>	+10,7 %	+12,3 %

Potrebno je napomenuti da su se odstupanja  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  računala prema sljedećim izrazima:

$$\Delta_1 = \frac{\text{numerički proračun} - \text{egzaktne vrijednosti}}{\text{numerički proračun}}$$

$$\Delta_2 = \frac{\text{numerički proračun} - \text{ručni proračun}}{\text{numerički proračun}}$$

Iz rezultata prikazanih u tablici 5.9 vidljivo je da se karakteristike poprečnog presjeka približno podudaraju, ali ponovo uz iznimku torzijske konstante  $I_t$ . Naime, vrijednosti torzijske konstante dobivene ručnim proračunom, odnosno numeričkim modelom, pokazuju značajno podcjenjivanje egzaktnih vrijednosti. Kod slučaja U profila to odstupanje je manje izraženo nego kod slučaja I profila zbog toga što U profil ima samo dva radijusa zaobljenja, a I profil četiri, pa je pogreška pri zanemarenju radijusa zaobljenja također manja.

Nadalje, može se uočiti i značajnije odstupanje vrijednosti konstante krivljenja  $I_w$ . Numerički proračuni pokazuju precjenjivanje vrijednosti konstante krivljenja. Iako je za mjerenje konstante krivljenja primijenjen jednak postupak kao i u slučaju I profila, numerički proračun je dao određeno odstupanje te konstante od egzaktnih vrijednosti, ali i onih dobivenih ručnim proračunom. Smatra se da je uzrok tome nesavršenost proračunskog modela. Naime, samo male preinake u modelu dovodile su do značajnih osciliranja proračunate vrijednosti. Ta greška odlučila prihvatiti, a kasniji modeli za proračun  $M_{cr}$ , koji su dali dobre rezultate, su opravdali tu odluku.

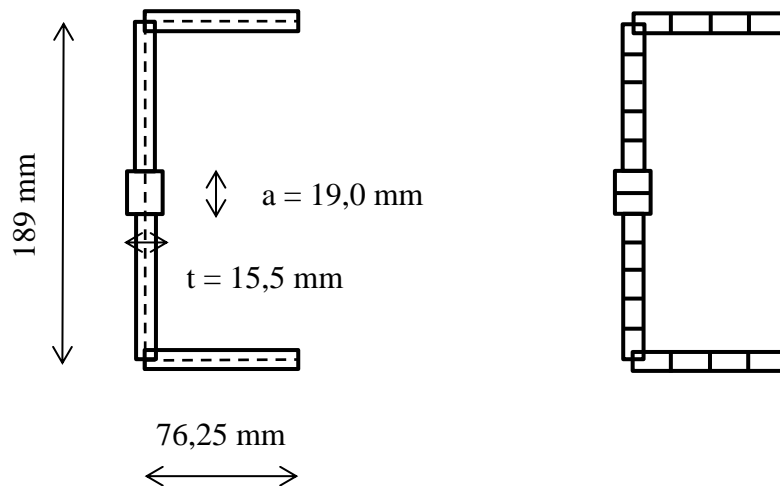
#### 5.2.4 Prilagođeni model nosača izvedenog iz U profila

Prilagodba modela nosača izvedenog iz U profila će se provesti na isti način kao i kod I profila. Naime, izvest će se zadebljanje dijela hrpta poprečnog presjeka, a cilj je povećati torzijsku konstantu poprečnog presjeka do te mjere da nadomjesti nedostatak radijusa zaobljenja. Postavljenjem tog zadebljanja u središte visine hrpta, ostale karakteristike poprečnog presjeka će ostati približno nepromijenjene, odnosno njihova promjena je zanemariva.

Na slici 5.22 je prikazan poprečni presjek prilagođenog modela. Vidljivo je da sada u svakom poprečnom presjeku postoje dva konačna elementa više nego u početnom modelu. To povlači za sobom činjenicu da se ukupni broj elemenata u modelu povećao s 3600 na 4000, uzevši u obzir da je model podijeljen na 200 elemenata po duljini kako je već prethodno rečeno.

Na slici 5.22 također su prikazane i dimenzije zadebljanja hrpta, visina zadebljanja  $a = 18,9$  mm i širina  $t = 15,6$  mm. Dimenzije zadebljanja hrpta dobivene su na sljedeći način. Prva aproksimacija zadebljanja hrpta dobivena je koristeći zakone otpornosti materijala. Odstupanje

torzijske konstante izračunate numerički i egzaktno vrijednosti iznosi  $\Delta I_t = 10,3 \text{ cm}^4 - 8,70 \text{ cm}^4 = 1,6 \text{ cm}^4$ . Ručnim proračunom je dobiveno da uvođenjem zadebljanja hrpta dimenzija  $a/t = 1,89/1,89 \text{ cm}$  će se nadomjestiti manjak torzijske krutosti. Ipak, ispitivanjem numeričkog modela je dobiveno da takve dimenzije previše povećavaju torzijsku konstantu. Smanjenjem zadebljanja na veličinu  $a/t = 18,9/15,6 \text{ mm}$  numerički je izmjerena torzijska konstanta  $I_t = 10,3 \text{ cm}^4$ .



**Slika 5.22.** Prikaz poprečnog presjeka prilagođenog modela

Potrebno je napomenuti da povećanjem broja konačnih elemenata u modelu dolazi do smanjenja torzijske konstante. Nakon povećanja broja elemenata na vrijednost od približno 30 000 konačnih elemenata, numerički je izmjerena vrijednost torzijske konstante  $I_t = 10,0 \text{ cm}^4$ . To može biti objašnjenje činjenice da se povećanjem broja konačnih elemenata modela, vrijednost  $M_{cr}$  smanjuje kako je prikazano u točki 5.1.3. Ipak, zadržana je dimenzija zadebljanja  $a/t = 18,9/15,6 \text{ mm}$  jer ona odgovara diskretizaciji elementa koja se koristi u parametarskoj analizi. Na slici 5.23 je prikazan prilagođeni model nosača izvedenog iz U profila. Na sredini visine hrpta može se uočiti zadebljanje kojim se uzima u obzir nedostatak radijusa zaobljenja.

Nakon prilagodbe numeričkog modela, proračunat je novi  $M_{cr}$  na prilagođenom modelu, a ta je vrijednost uspoređena s egzaktnom vrijednošću proračunatom pomoću izraza (4.8) Dobivene vrijednosti su sljedeće:

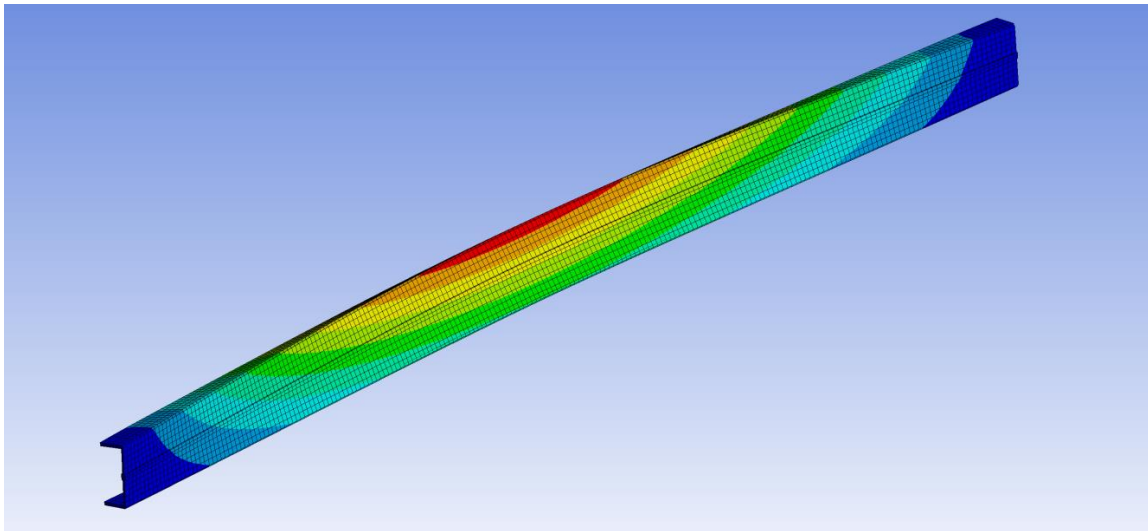
$$M_{cr}^{MKE} = 51,24 \text{ kNm}$$



$$M_{cr}^{EGZAKTNO} = 49,93 \text{ kNm}$$

$$\Delta = \frac{M_{cr}^{MKE} - M_{cr}^{EGZAKTNO}}{M_{cr}^{MKE}} = +2,56\%$$

Vidljivo je da postoji odstupanje numerički dobivene vrijednosti od egzaktna za +2,56%, ali ipak se smatra da je ta greška prihvatljiva. Također je potrebno napomenuti da se povećanjem broja konačnih elemenata, vrijednost  $M_{cr}$  polako smanjuje kako je ilustrirano u točki 5.1.3. Odnosno uvođenjem finije diskretizacije modela, odstupanje bi se smanjilo. Takav se model ipak nije izveo jer bi provođenje parametarske analize s takvim modelom bilo vremenski prezahtijevno.



**Slika 5.23.** Prikaz prilagođenog modela U profila (prvi mod izvijanja)

### 5.3 Zaključne napomene

U ovom poglavlju je opisan način kalibracije numeričkih modela za proračun elastičnog kritičnog momenta  $M_{cr}$ . Taj korak se pokazao nužnim za provođenje parametarskih analiza koje su iznesene u nastavku. Na temelju provedene kalibracije doneseni su sljedeći zaključci.

Za provođenje analize izvijanja najprikladnijim su se pokazali plošni konačni elementi. Modeliranje s prostornim elementima zahtjeva izradu modela s izrazito velikim brojem konačnih elemenata. Takve analize su vremenski zahtjevne i neprikladne za provođenje

parametarskih analiza. Nadalje, vrijednosti  $M_{cr}$  dobivene takvim numeričkim modelima također su pokazale određeno odstupanje od egzaktnih vrijednosti.

Modeliranjem plošnim elementima ne može se egzaktno uzeti u obzir utjecaj radijusa zaobljenja na geometrijske karakteristike poprečnog presjeka nosača. Usporedbom egzaktnih karakteristika poprečnih presjeka koji uzimaju u obzir utjecaj područja zaobljenja i karakteristika poprečnih presjeka numeričkih modela koji ih ne uzimaju u obzir, zaključeno je da nedostatak područja zaobljenja znatnije utječe samo na torzijsku krutost nosača. Na ostale karakteristike poprečnog presjeka nosača imaju neznatan utjecaj.

Numerički dobivena vrijednost  $M_{cr}$  za centrično opterećen nosač izveden iz U profila približno se podudara sa vrijednošću  $M_{cr}$  dobivenom korištenjem analitičkog izraza (4.8). Time je potvrđena pretpostavka da se analitički izraz (4.8) smije koristiti za proračun  $M_{cr}$  jednoosno simetričnih poprečnih presjeka uz uvjet da rezultanta vanjskih sila prolazi kroz središte posmika.

Konačno, vrijednost  $M_{cr}$  dobivena analizom izvijanja na prilagođenom numeričkom modelu pokazuje zanemarivo odstupanje od egzaktne vrijednosti  $M_{cr}$  dobivene pomoću izraza (4.8). Time je potvrđeno da je prilagođeni model prikladan za provođenje parametarskih analiza.

## 6 REZULTATI I RASPRAVA

### 6.1 Područje analize

Nakon završene kalibracije numeričkog modela, moglo se započeti s parametarskim analizama. Prije samog početka parametarskih analiza bilo je potrebno definirati područje, odnosno opseg analiza. U ovome slučaju trebalo je definirati koji statički sustavi će se ispitivati, koji tipovi opterećenja i mjesta unosa sile u poprečnom presjeku. Opseg samih analiza mora biti dovoljno opširan da vjerodostojno opiše razmatranu problematiku te da se na kraju analize mogu donijeti valjani zaključci.

Na temelju opsežnog pregleda postupaka proračuna dvoosno simetričnih i jednoosno simetričnih profila izloženih savijanju u poglavlju 5, odabrana su tri tipa statičkih sustava:

- jednostavno oslonjen nosač
- konzola
- obostrano upeti nosač

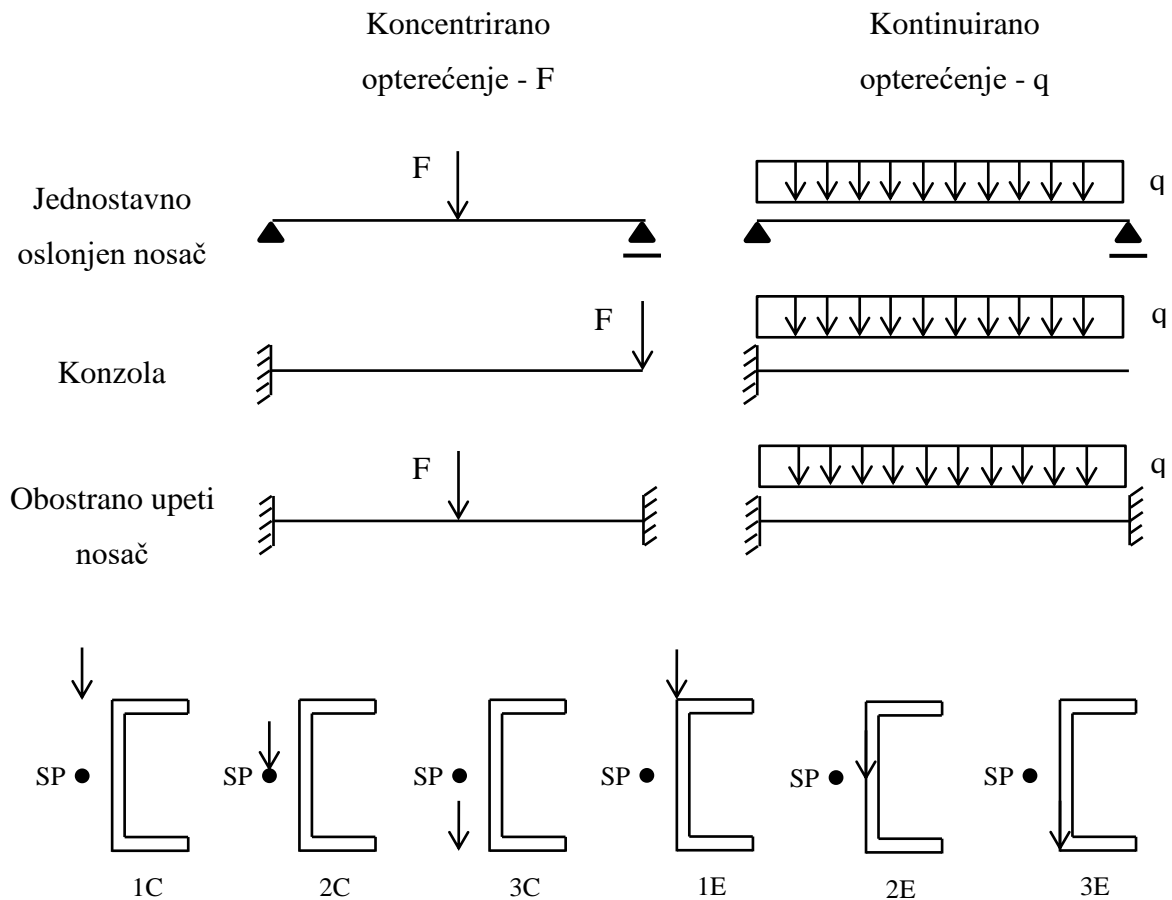
Za poprečni presjek nosača je odabran profil UPE 200 dok je raspon razmatran kao promjeniva veličina u analizama te je variran između  $L = 2,0$  m do  $L = 16,0$  m. Time je pokriveno područje od jako zdepastih elemenata koji otazuju lokalnim izbočavanjem pa sve do jako vitkih elemenata kod kojih se elastična otpornost približava stvarnoj otpornosti. Od mogućih opterećenja u obzir su uzeta dva slučaja:

- koncentrirana sila na sredini raspona,
- jednoliko distribuirano opterećenje po čitavoj duljini nosača.

U slučaju konzole, koncentrirana sila se postavljala na kraju nosača. Mjesto unosa opterećenja se variralo u odnosu na tri točke poprečnog presjeka:

- gornja pojasnica (1),
- sredina visine hrpta (2),
- donja pojasnica (3).

Centrično opterećenje nosača označeno je oznakom C, dok ekscentrično opterećenje označeno s oznakom E. Na slici 6.1. prikazani su svi razmatrani slučajevi nosača i njihove oznake.



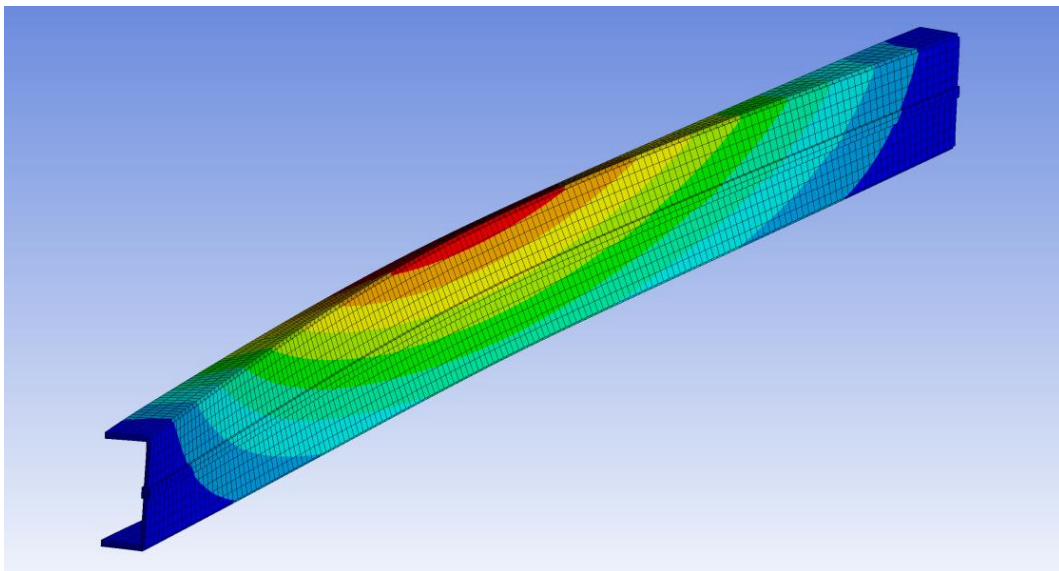
**Slika 6.1.** Slučajevi modeliranih opterećenja i njihove oznake

Numerički dobivene vrijednosti za  $M_{cr}$  uspoređivane su s vrijednostima dobivenim računalnim programom LTBeam [23]. To je edukativni program razvijen od strane CTCIM-a koji pomoću metode konačnih elemenata računa elastično kritično opterećenje nosača izloženih savijanju [8]. Program je ograničen na dvosno simetrične poprečne presjke opterećene kroz centar posmika. Ipak, postoji mogućnost ručnog unošenja karakteristika poprečnog presjeka nosača za koji računamo  $M_{cr}$ . Unošenjem karakteristika profila UPE200, program će davati vrijednosti  $M_{cr}$  u slučaju da je taj nosač opterećen kroz središte posmika (SP). Razlog korištenja programa LTBeam umjesto analitičkog izraza leži u njegovoj jednostavnosti primjene i mogućnosti da pokrije različite rubne uvjete i slučajeve opterećenja nosača. Nadalje, kod slučaja konzole,  $M_{cr}$  se mora računati uz pomoću interakcijskih faktora dobivenih numeričkim simulacijama kako je objašnjeno u točki 4.5.3. Drugim riječima, ručni proračun u tom slučaju ne bi davao točnije

vrijednosti  $M_{cr}$  od onih dobivenih programom LTBeam. Vrijednosti dobivene ovim programom neznatno se razlikuju od onih dobivenih analitičkim izrazom kako je prikazano u [8].

## 6.2 Jednostavno oslonjen nosač

Kao što je već rečeno, računao se elastični kritični moment za statički sustav jednostavno oslonjene grede opterećene koncentriranom silom u sredini raspona te slučaj jednoliko raspodjeljenog opterećenja. Numerički model je prikazan na slici 6.2. U slučaju koncentriranog i jednoliko raspodjeljenog opterećenja analizirani su slučajevi centričnog i ekscentričnog opterećenja. Vrijednosti elastičnog kritičnog momenta za centrično opterećen nosač dobivene su pomoću programa LTBeam. Kao što je već objašnjeno, centrično opterećenje u programu Ansys zadavalo se pomoću funkcije „remote force“.



**Slika 6.2.** Prikaz numeričkog modela jednostavno oslonjene grede (prvi mod izvijanja)

Kao rezultat parametarskih analiza uspoređivale su se razlike između elastičnog kritičnog momenta za centrično opterećen nosač dobivenog numerički i onog dobivenog programom LTBeam. Također, uspoređivale su se razlike između elastičnog kritičnog momenta za centrično i ekscentrično opterećen nosač. Odstupanja  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  prikazana u tablicama rezultata računala su se prema sljedećim izrazima:

$$\Delta_1 = \frac{M_{cr}(C) - M_{cr}(LTBeam)}{M_{cr}(C)}$$

$$\Delta_2 = \frac{M_{cr}(E) - M_{cr}(C)}{M_{cr}(E)}$$

Rezultati parametarske analize  $M_{cr}$  za slučaj koncentriranog opterećenja su prikazani u tablici 6.1. Razmatrajući razlike između vrijednosti  $M_{cr}$  dobivene programom LTBeam i one dobivene numeričkom analizom programom Ansys, vidljivo je da bez obzira na područje vitkosti, odnosno veličinu raspona, postoje male razlike između tih dviju vrijednosti, ali one su i očekivane te se većim dijelom kreću unutar vrijednosti od 3% što je prihvatljivo.

Nadalje, ako promatramo odstupanja  $M_{cr}$  dobivena za slučaj centrično i ekscentrično opterećenog nosača, možemo primjetiti da gotovo i ne postoje razlike između tih dviju vrijednosti. One su vidljive u području manjih vitkosti i iznose maksimalno 1%, a u područjima većih vitkosti iščezavaju. Već u ovoj fazi se moglo pretpostaviti da će se numeričkom analizom dobivati približno isti rezultati  $M_{cr}$  za centrično i ekscentrično opterećene nosače. Međutim, tu je tvrdnju bilo potrebno dokazati opširnijom parametarskom analizom.

**Tablica 6.1.** *Elastični kritični moment jednostavno oslonjenog nosača opterećenog koncentriranom silom u sredini raspona*

		$M_{cr}$ (LTBeam) [kNm]	$M_{cr}$ (C) [kNm]	$M_{cr}$ (E) [kNm]	$\Delta_1$	$\Delta_2$
L=2,0 m	1	105,89	106,81	106,97	0,86%	0,15%
	2	164,00	162,39	163,07	-0,99%	0,42%
	3	251,74	270,88	272,89	7,07%	0,74%
L=3,0 m	1	68,09	66,80	66,99	-1,93%	0,28%
	2	95,68	92,90	93,12	-2,99%	0,24%
	3	133,40	131,51	131,86	-1,44%	0,27%
L=4,0 m	1	51,51	51,24	51,24	-0,53%	0,00%
	2	67,77	67,16	67,16	-0,91%	0,00%
	3	88,54	88,46	88,39	-0,09%	-0,08%
L=6,0 m	1	35,48	35,77	35,76	0,81%	-0,03%
	2	43,13	43,45	43,44	0,74%	-0,02%
	3	52,16	52,68	52,65	0,99%	-0,06%
L=10,0 m	1	22,29	22,66	22,66	1,63%	0,00%
	2	25,20	25,61	25,61	1,60%	0,00%
	3	28,39	28,87	28,87	1,66%	0,00%
L=16,0 m	1	14,42	14,75	14,75	2,24%	0,00%
	2	15,59	15,95	15,95	2,26%	0,00%
	3	16,83	17,21	17,21	2,21%	0,00%

U tablici 6.2. prikazani su rezultati parametarke analize za slučaj kontinuirano opterećenog nosača. Može se primijetiti da su dobivene vrijednosti  $M_{cr}$  za slučaj kontinuiranog opterećenja slične onima za slučaj koncentrirano opterećenog jednostavno oslonjenog nosača. Vrijednosti  $M_{cr}$  za centrično opterećeni nosač se približno poklapaju s vrijednostima  $M_{cr}$  dobivenim programom LTBeam. Ta odstupanja jesu malo veća u području zdepastih elemenata kao što je to bio slučaj i za gredu opterećenu koncentriranom silom. Razlike  $M_{cr}$  za centrično i ekscentrično opterećene nosače se ponovo su zanemarive, odnosno kreću se unutar odstupanja od 2%, ali treba primijetiti da su ta odstupanja veća u područjima malih vitkosti.

**Tablica 6.2.** *Elastični kritični moment jednostavno oslonjenog nosača opterećenog jednoliko raspodjeljenim opterećenjem*

		$M_{cr}$ (LTBeam) [kNm]	$M_{cr}$ (C) [kNm]	$M_{cr}$ (E) [kNm]	$\Delta_1$	$\Delta_2$
L=2,0 m	1	95,29	98,42	96,71	3,18%	-1,77%
	2	136,22	146,66	145,00	7,12%	-1,14%
	3	194,50	212,23	213,20	8,35%	0,45%
L=3,0 m	1	60,49	60,18	59,32	-0,52%	-1,45%
	2	79,55	78,91	78,66	-0,81%	-0,32%
	3	104,50	104,23	103,58	-0,26%	-0,63%
L=4,0 m	1	45,36	45,49	45,02	0,29%	-1,04%
	2	56,39	56,41	56,30	0,04%	-0,20%
	3	70,06	70,45	70,17	0,55%	-0,40%
L=6,0 m	1	30,87	31,31	31,02	1,41%	-0,93%
	2	35,94	36,25	36,23	0,86%	-0,06%
	3	41,82	42,32	42,24	1,18%	-0,19%
L=10,0 m	1	19,16	19,54	19,44	1,94%	-0,51%
	2	21,03	21,37	21,37	1,59%	0,00%
	3	23,08	23,38	23,47	1,28%	0,38%
L=16,0 m	1	12,28	12,60	12,55	2,54%	-0,40%
	2	13,02	13,32	13,32	2,25%	0,00%
	3	13,81	14,06	14,12	1,78%	0,42%

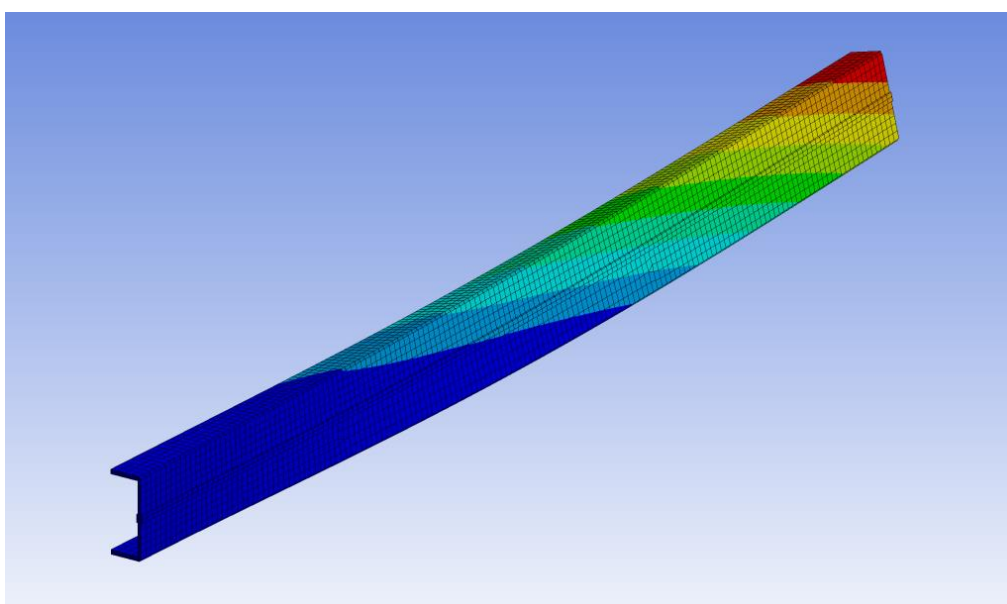
### 6.3 Konzola

U tablici 6.3. prikazani su rezultati parametarskih analiza za statički sustav konzole koja je opterećena koncentriranom silom na samome vrhu konzole. Ponovo su se razmatrala tri slučaja unosa sile u poprečni presjek: gornja pojasnica, sredina visine hrpta i donja pojasnica. Odstupanja  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  su se računala na isti način kao i kod slučaja jednostavno oslonjenog nosača.

Analogno jednostano oslonjenom nosaču, konzola se opterećivala centrično i ekscentrično. Numerički model konzole je prikazan na slici 6.3.

**Tablica 6.3.** *Elastični kritični moment konzole opterećene koncentriranom silom na vrhu*

		$M_{cr}$ (LTBeam) [kNm]	$M_{cr}$ (C) [kNm]	$M_{cr}$ (E) [kNm]	$\Delta_1$	$\Delta_2$
L=2,0 m	1	100,35	99,50	98,96	-0,85%	-0,55%
	2	206,13	189,47	188,58	-8,79%	-0,47%
	3	271,97	272,16	268,74	0,07%	-1,27%
L=3,0 m	1	75,18	76,31	75,87	1,48%	-0,58%
	2	116,02	116,26	115,45	0,21%	-0,70%
	3	140,86	143,56	142,49	1,88%	-0,75%
L=4,0 m	1	59,20	60,61	60,36	2,33%	-0,41%
	2	79,10	80,62	80,28	1,89%	-0,42%
	3	91,86	94,11	93,70	2,39%	-0,44%
L=6,0 m	1	40,49	41,60	41,52	2,67%	-0,19%
	2	47,71	48,95	48,87	2,53%	-0,16%
	3	52,89	54,31	54,22	2,61%	-0,17%
L=10,0 m	1	24,24	24,92	24,91	2,73%	-0,04%
	2	26,38	27,11	27,11	2,69%	0,00%
	3	28,12	28,89	28,89	2,67%	0,00%
L=16,0 m	1	15,01	15,43	15,44	2,72%	0,06%
	2	15,76	16,2	16,2	2,72%	0,00%
	3	16,42	16,87	16,88	2,67%	0,06%



**Slika 6.3.** *Prikaz numeričkog modela konzole (prvi mod izvijanja)*



Vidljivo je da se rezultati ovog dijela istraživanja približno podudaraju s onima dobivenim za jednostavno oslonjen nosač. Kod statičkog sustava konzole također se razmatrao slučaj s jednoliko raspodjeljenim opterećenjem, a rezultati ove parametarske analize su prikazani u tablici 6.4.

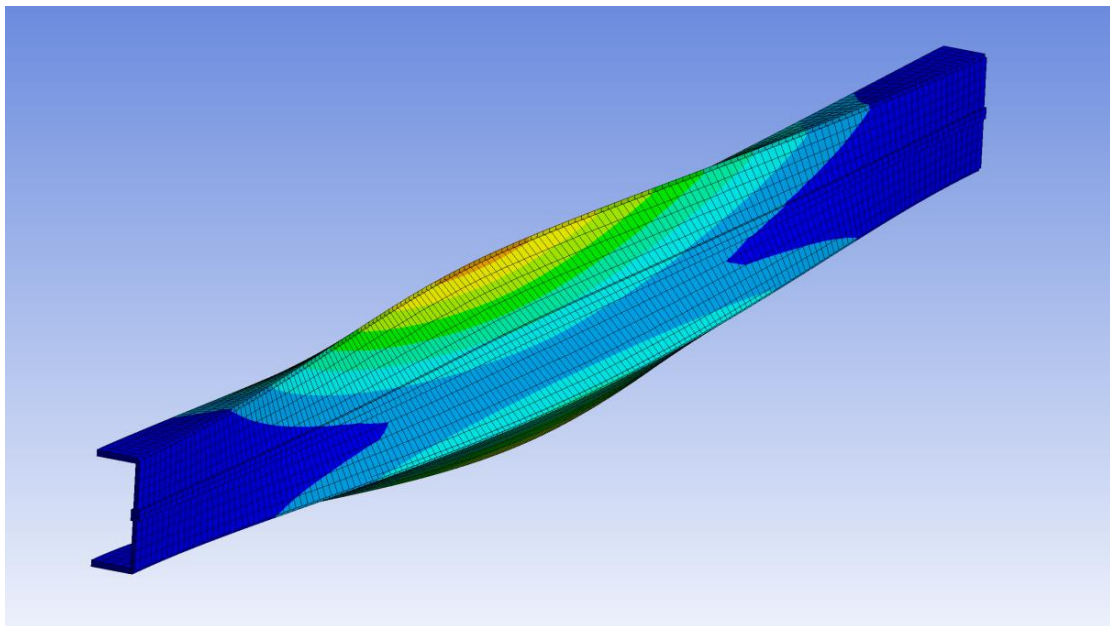
**Tablica 6.4.** *Elastični kritični moment konzole opterećene jednoliko raspodjeljenim opterećenjem*

		$M_{cr}$ (LTBeam) [kNm]	$M_{cr}$ (C) [kNm]	$M_{cr}$ (E) [kNm]	$\Delta_1$	$\Delta_2$
L=2,0 m	1	174,15	174,65	171,85	0,29%	-1,63%
	2	397,52	389,56	375,54	-2,04%	-3,73%
	3	614,20	591,68	580,30	-3,81%	-1,96%
L=3,0 m	1	122,99	125,70	124,45	2,16%	-1,00%
	2	215,41	218,63	215,09	1,47%	-1,65%
	3	300,37	302,91	299,02	0,84%	-1,30%
L=4,0 m	1	94,98	97,54	96,89	2,62%	-0,67%
	2	143,16	146,47	145,17	2,26%	-0,90%
	3	186,78	190,49	188,99	1,95%	-0,79%
L=6,0 m	1	64,63	66,47	66,26	2,77%	-0,32%
	2	83,54	85,79	85,48	2,62%	-0,36%
	3	100,71	103,30	102,95	2,51%	-0,34%
L=10,0 m	1	38,82	39,92	39,89	2,76%	-0,08%
	2	44,71	45,96	45,92	2,72%	-0,09%
	3	50,18	51,57	51,53	2,70%	-0,08%
L=16,0 m	1	24,07	24,57	24,76	2,04%	0,77%
	2	26,16	26,89	26,9	2,71%	0,04%
	3	28,14	28,93	28,93	2,73%	0,00%

Razmatrajući dobivene vrijednosti  $M_{cr}$  za statički slučaj konzole, mogu se donijeti slični zaključci kao i u slučaju jednostavno oslonjenog nosača, bez obzira da li govorimo o opterećenju koncentriranom silom ili jednoliko raspodjeljenom opterećenju. Također, ti rezultati se podudaraju i sa onima dobivenim kod statičkog sustava jednostavno oslonjenog nosača. Razlike između  $M_{cr}$  za centrično opterećen nosač dobivenih programom LTBeam i programom Ansys se kreću unutar 3%, a ta odstupanja se ne mijenjaju promjenom raspona elementa, odnosno vitkosti. Elastični kritični moment za centrično i ekscentrično opterećen nosač je približno isti. U područjima velikih vitkosti te razlike praktički iščezavaju, odnosno odstupanje  $\Delta_2$  težu nuli. Razlike između  $M_{cr}$  za centrično i ekscentrično opterećen profil su jedino vidljive u područjima manjih vitkosti. Očekivano je da će te razlike postati izraženije za slučaj obostrano upete grede kao sustava koji ima najmanju duljinu izvijanja.

## 6.4 Obostrano upeti nosač

Kod statičkog sustava obostrano upetog nosača također su se razmatrali isti slučajevi opterećenja i mjesta unosa sile u poprečni presjek kao i kod statičkog sustava konzole te jednostavno oslonjenog nosača. Numerički model obostrano upetog nosača je prikazan na slici 6.4. Rezultati parametarskih analiza prikazani su u tablicama 6.5. i 6.6. Ponovo možemo uočiti da se i u slučaju obostrano upetog nosača dobiveni rezultati puno ne razlikuju od onih dobivenih za konzolu, odnosno jednostavno oslonjen nosač.



**Slika 6.4.** Prikaz numeričkog modela obostrano upetog nosača (prvi mod izvijanja)

Ipak ovdje je potrebno napomenuti da je u području jako zdepastih elemenata ( $L = 2$  m) dolazilo do značajnijih odstupanja vrijednosti  $M_{cr}$  dobivenih programom LTBeam i onih dobivenih programom Ansys. Naime, za određenu veličinu raspona, kod obostrano upetog nosača, govorimo o puno zdepastijim elementima nego što je to bio slučaj kod konzole ili jednostavno oslonjenog nosača jer je duljina izvijanja elementa manja. Ta odstupanja su vidljiva i u slučaju koncentriranog opterećenja i kod jednoliko raspodijeljenog.

Potrebno je napomenuti i činjenicu da je u područjima tako male vitkosti otpornost elementa diktirana otpornošću samog poprečnog presjeka, odnosno, za nosivost elementa su mjerodavni lokalni načini otkazivanja. Drugim rječima, bočno torzijsko izvijanje neće nastupiti. Čak i

program LTBeam nije davao rezultate za tako zdepaste elemente, što je i označeno u tablicama 6.5 i 6.6.

**Tablica 6.5.** *Elastični kritični moment obostrano upetog nosača opterećenog koncentriranom silom na sredini raspona*

		$M_{cr}$ (LTBeam) [kNm]	$M_{cr}$ (C) [kNm]	$M_{cr}$ (E) [kNm]	$\Delta_1$	$\Delta_2$
L=2,0 m	1	166,81	152,48	158,08	-9,40%	3,54%
	2	*	242,74	249,92	*	2,87%
	3	*	598,43	633,25	*	5,50%
L=3,0 m	1	93,08	91,86	93,27	-1,33%	1,51%
	2	194,17	162,63	166,17	-19,39%	2,13%
	3	*	351,65	363,34	*	3,22%
L=4,0 m	1	65,92	66,62	66,90	1,05%	0,42%
	2	125,98	117,51	118,45	-7,21%	0,79%
	3	233,76	226,50	227,98	-3,21%	0,65%
L=6,0 m	1	43,90	44,90	44,89	2,23%	-0,02%
	2	72,86	72,67	72,57	-0,26%	-0,14%
	3	118,06	119,16	118,58	0,92%	-0,49%
L=10,0 m	1	28,09	28,83	28,79	2,57%	-0,14%
	2	39,43	40,25	40,16	2,04%	-0,22%
	3	54,48	55,74	55,53	2,26%	-0,38%
L=16,0 m	1	18,73	19,28	19,26	2,85%	-0,10%
	2	23,37	24,02	23,98	2,71%	-0,17%
	3	28,89	29,69	29,63	2,69%	-0,20%
*program LTBeam ne daje rezultate						

Kao što je već napomenuto, u slučajevima male vitkosti dolazi do malo većih odstupanja između  $M_{cr}$  dobivenih za slučaj ekscentrično i centrično opterećenih nosača. Takva odstupanja bila su vidljiva i u slučaju jednostavno oslonjenog nosača i konzole, ali ovde su nešto izraženija jer govorimo o zdepastijim elementima. Time možemo zaključiti da ipak postoje neka odstupanja tih dviju vrijednosti  $M_{cr}$  za područja jako malih vitkosti, ali i ta odstupanja možemo proglasiti zanemarivima. Naime, kao što je već kazano, za jako zdepaste elemente mjerodavni su lokalni načini otkazivanja, odnosno, neće doći do bočnog torzijskog izvijanja. Također, te razlike su i dalje vrlo male. U najgorem slučaju ta razlika iznosi 5,69% (tablica 6.6.), što i dalje nije značajna vrijednost.

**Tablica 6.6.** *Elastični kritični moment obostrano upetog nosača opterećenog jednoliko raspodjeljenim opterećenjem*

		$M_{cr}$ (LTBeam) [kNm]	$M_{cr}$ (C) [kNm]	$M_{cr}$ (E) [kNm]	$\Delta_1$	$\Delta_2$
L=2,0 m	1	284,02	260,84	257,48	-8,89%	-1,30%
	2	*	551,70	522,00	*	-5,69%
	3	*	1.064,13	1.015,77	*	-4,76%
L=3,0 m	1	157,52	157,31	155,91	-0,13%	-0,90%
	2	320,46	314,87	307,58	-1,78%	-2,37%
	3	638,44	601,31	586,58	-6,17%	-2,51%
L=4,0 m	1	110,86	112,79	112,03	1,71%	-0,68%
	2	207,74	209,91	206,81	1,03%	-1,50%
	3	381,85	379,71	372,67	-0,56%	-1,89%
L=6,0 m	1	73,08	74,95	74,56	2,49%	-0,52%
	2	119,89	122,68	121,61	2,27%	-0,88%
	3	193,63	197,43	195,18	1,92%	-1,15%
L=10,0 m	1	46,20	47,68	47,36	3,10%	-0,68%
	2	64,59	66,33	66,09	2,62%	-0,36%
	3	89,42	91,26	91,35	2,02%	0,10%
L=16,0 m	1	30,54	31,43	31,83	2,83%	1,26%
	2	38,07	39,15	39,09	2,76%	-0,15%
	3	47,21	48,54	48,45	2,74%	-0,19%
*softver LTBeam ne daje rezultate						

Pretpostavlja se da do te razlike dolazi zbog toga što u područjima male vitkosti, opterećenje torzijom postaje mnogo izraženije. Naime, iznos momenta savijanja značajno se mijenja s rasponom. S druge strane moment torzije ostaje jednak bez obzira na veličinu raspona, odnosno, ovisi samo o ekscentricitetu. Tako ćemo u područjima male vitkosti imati puno veći utjecaj torzije nego u područjima velikih vitkosti. Pretpostavlja se da su zbog tog razloga uočena odstupanja  $M_{cr}$  u područjima malih vitkosti za sve oblike statičkih sustava uz napomenu da su ta odstupanja bila jako mala.

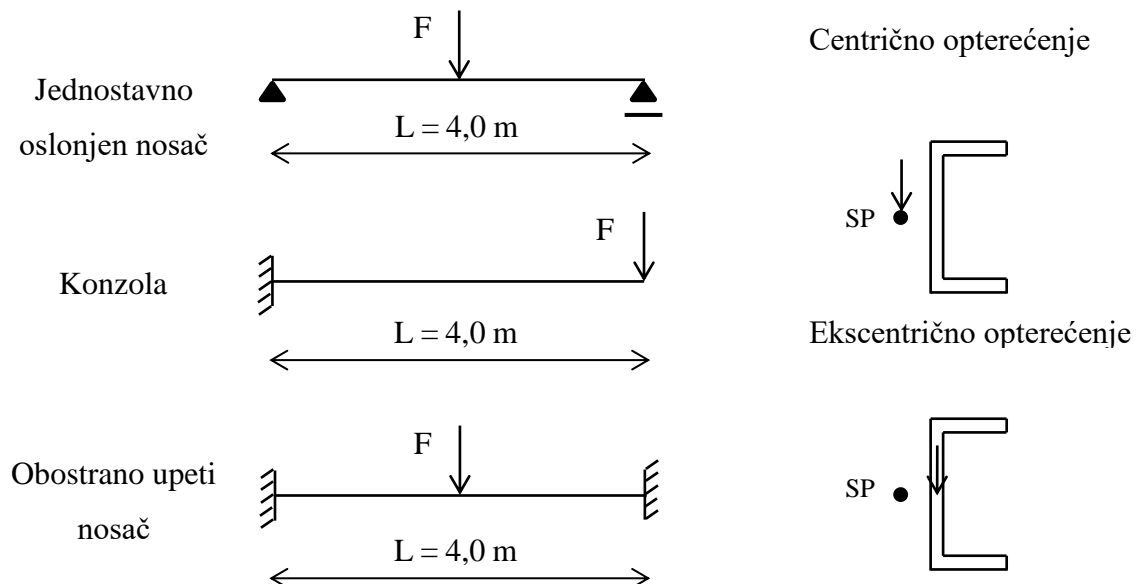
## 6.5 Modeliranje nosača U profila s prostornim elementima

Isto kao što je to bio slučaj kod nosača izvedenih iz I profila, nosači izvedeni iz U profila također su modelirani s prostornim elementima i to na sličan način kako je objašnjeno u slučaju nosača I profila. Razlika je što su ovaj put analize biti provedene s ciljem određivanja razlike između  $M_{cr}$  dobivenog za centrično i ekscentrično opterećene nosače. Odnosno, želimo dobiti još jednu

potvrdu da numerički proračun ne daje značajna odstupanja između vrijednosti  $M_{cr}$  za centrično i ekscentrično opterećene nosače izvedene iz U profila.

Za potrebe istraživanja provedena je analiza na tri različita statička sustava, tj. na ista tri statička sustava korištena kod modeliranja plošnim elementima, a to jesu: slobodno oslonjen nosač, konzola i obostrano upet nosač. Za poprečni presjek nosača je ponovo odabran profil UPE 200, a raspon nosača za sva tri statička sustava će iznositi  $L = 4$  m. Opterećenje koje se modeliralo jest koncentrirano opterećenje po na sredini raspona nosača, odnosno na slobodnom kraju konzole, a označit ćemo ga oznakom  $F$ . Opterećenje se unosi na sredini visine hrpta. Modelirat će se centrično opterećenje kroz središte posmika i ekscentrično opterećenje gdje će sila prolaziti kroz hrbat. Analizirani slučajevi statičkih sustava i načina opterećenja su prikazani na slici 6.5.

Tip konačnog elementa koji je korišten u analizi je element „Solid186“. Kao što je već kazano, to je prostorni element s 20 integracijskih točaka, a u svakoj posjeduje 3 stupnja slobode (translaciju u  $x$ ,  $y$  i  $z$  smjeru) [20]. Broj čvorova u modelu iznosi približno 200 000, a u područjima radijusa zaobljenja je uvedeno progušćenje mreže konačnih elemenata, baš kako je objašnjeno i na primjeru nosača I profila. Prikaz mreže konačnih elemenata je vidljiv na slici 6.6.

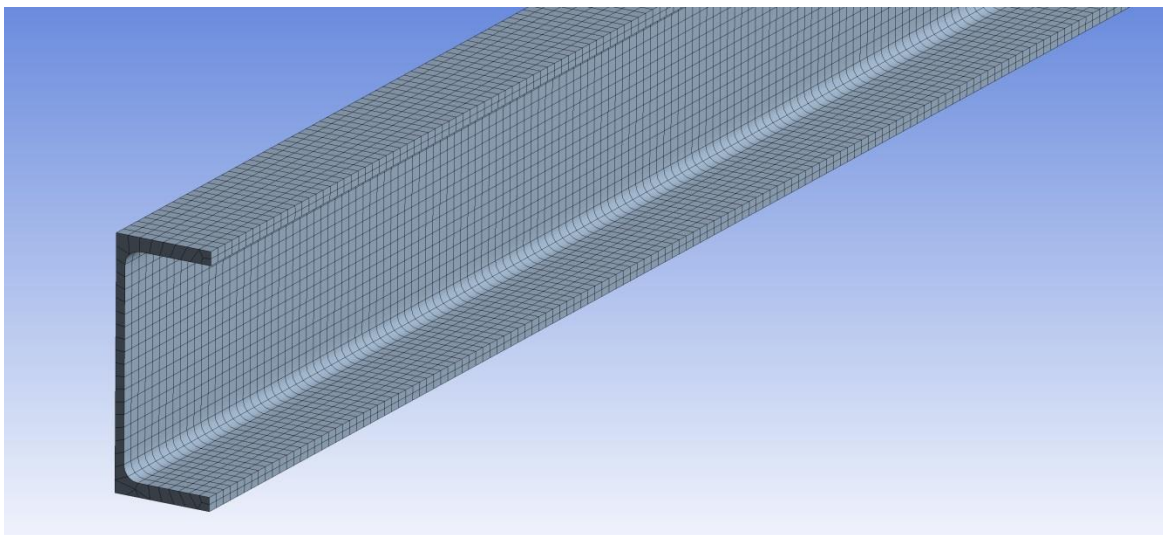


**Slika 6.5.** Slučajevi opterećenja kod modeliranja prostornim elementima

Rezultati ove analize prikazani su u tablici 6.7. Iz rezultata proračuna mogu se donijeti sljedeći zaključci. Provođenjem analize na centrično i ekscentrično opterećenim modelima dobivamo približno jednake vrijednosti  $M_{cr}$ . To znači da je modeliranje prostornim konačnim elementima potvrdilo rezultate dobivene modeliranjem plošnim konačnim elementima. Odnosno, potvrđena je pretpostavka da modeliranjem konačnim elementima, program daje zanemariva odstupanja  $M_{cr}$  dobivenog za centrično i ekscentrično opterećen element. Također je vidljivo da modeliranje prostornim elementima daje vrijednosti  $M_{cr}$  bliske egzaktnim vrijednostima, ali uz malo podcjenjivanje te veličine u odnosu na egzaktnu vrijednost. Takav je bio i slučaj kod nosača I profila modeliranih prostornim elementima.

**Tablica 6.7.** *Elastični kritični moment dobiven analizom prostornim elementima*

	Centrično opterećenje	Ekscentrično opterećenje	Egzaktna vrijednost
Jednostavno oslonjen nosač	65,73 kNm	65,73 kNm	67,77 kNm
Konzola	79,42 kNm	79,22 kNm	79,10 kNm
Obostrano upet nosač	122,1 kNm	121,8 kNm	126,0 kNm



**Slika 6.6.** *Prikaz mreže konačnih elemenata kod modela s prostornim konačnim elementima*

## 6.6 Parametarska analiza utjecaja iznosa ekscentriciteta na vrijednosti elastičnog kritičnog momenta

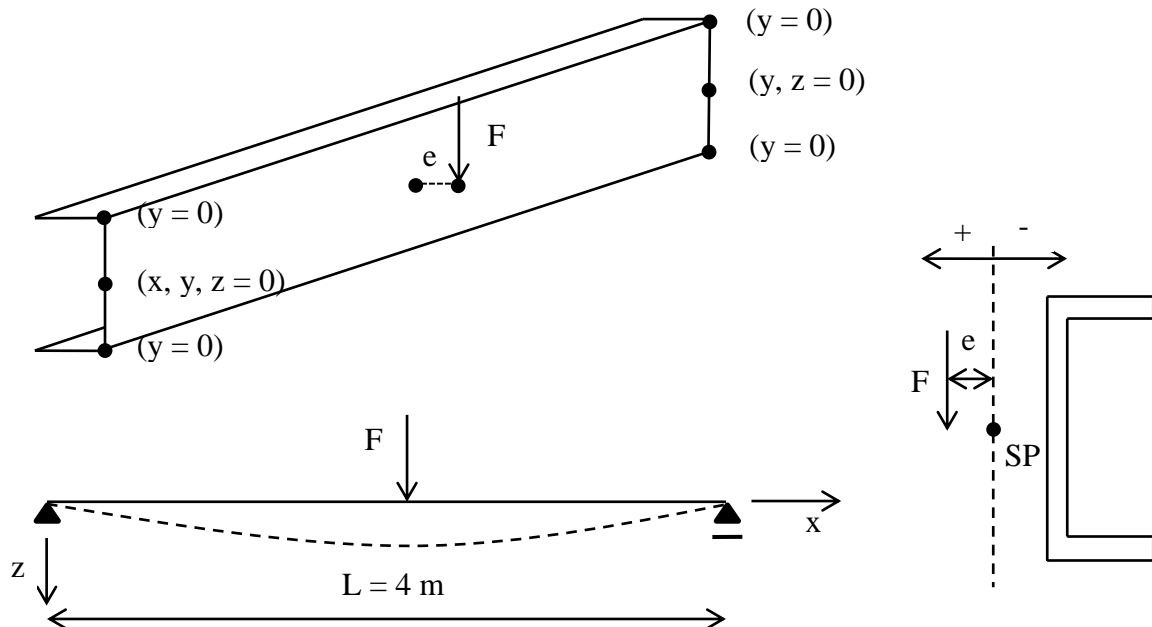
Da bismo mogli u konačnici potvrditi hipotezu rada da se elastično kritično opterećenje ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila može računati na isti način kao i kod slučaja centrično opterećenih nosača, provedena je parametarska analiza u kojoj je računat  $M_{cr}$  za ekscentrično opterećen nosač s vrijednosti ekscentriciteta kao promjenjivom veličinom. Naime, prilikom provođenja parametarskih analiza, uvijek se koristio profil UPE200 za koji je korištena numerički dobivena vrijednost ekscentriciteta 29,46 mm. Različiti poprečni presjeci U profila imaju također i različite udaljenosti središta posmika od osi hrpta na koji djeluje sila. Odnosno, prilikom djelovanja sile kroz os hrpa, ta sila će djelovati s različitim iznosom ekscentriciteta za različite profile poprečnih presjeka.

Kako bi se reducirao broj parametarskih analiza za različite oblike poprečnih presjeka, na nosaču izvedenog iz profila UPE200 modelirano je djelovanje sile s različitim iznosima ekscentriciteta. Na taj način se željelo potvrditi da prethodno provedena istraživanja vrijede i za nosače sa bilo kakvim tipom poprečnog presjeka gdje sila djeluje s ekscentricitetom.

Parametarska analiza je provedena na statičkom sustavu jednostavno oslonjenog nosača raspona  $L = 4$  m, koji je opterećen koncentriranom silom na sredini raspona. Sila djeluju na sredini visine hrpta. Kao što je već spomenuto, koristit će se poprečni presjek UPE200. Statički sustav je prikazan na slici 6.7. Diskretizacija modela odgovara onoj korištenoj u prethodno provedenim parametarskim analizama. Ekscentricitet sile je kao promjenjiva veličina uziman u rasponu od -200 do +200 mm. Predznaci ekscentriciteta su uzeti proizvoljno, a označeni su na slici 6.7. Iako su ti iznosi ekscentriciteta nerealni za bilo koji U profil opterećen kroz os hrpta, ti iznosi su svejedno razmatrati radi potreba istraživanja.

Rezultati parametarske analize prikazani su u tablici 6.8. Iz rezultata možemo primijetiti da za iznimno velike iznose ekscentriciteta dolazi do smanjenja  $M_{cr}$ . Ovakva odstupanja su daleko veća nego ona koja su se mogla vidjeti prilikom provođenja parametarskih analiza u realnom slučaju kada rezultanta opterećenja prolazi kroz hrpat profila, a to proizlazi iz činjenice da su se u ovom slučaju provodile analize s puno većim iznosima ekscentriciteta. Ovime je dokazano da ipak postoji razlika između  $M_{cr}$  dobivenih za centrično i ekscentrično opterećene nosače, te da je ovo cjelokupno istraživanje bilo ne samo smisljeno, već i nužno. Dobivene razlike

najvjerojatnije uzrokuje porast momenta torzije koji linearno raste porastom veličine ekscentriciteta. To potvrđuje i pretpostavku da zbog povećanog momenta torzije dolazi do smanjenja vrijednosti  $M_{cr}$  u područjima malih vitkosti gdje je moment torzije značajan u odnosu na moment savijanja.



**Slika 6.7.** Prikaz statičkog sustava

**Tablica 6.8.** Elastični kritični moment dobiven u ovisnosti o veličini ekscentriciteta

Ekscentricitet [mm]	$M_{cr}$ [kNm]	Odstupanje $\Delta$
-200	56,35	-19,18%
-120	63,08	-6,47%
-80	65,55	-2,46%
-60	66,42	-1,11%
-40	66,99	-0,25%
-20	67,27	0,16%
-10	67,24	0,12%
0	67,16	0,00%
10	67,00	-0,24%
20	66,76	-0,60%
30	66,44	-1,08%
40	66,05	-1,68%
60	65,06	-3,23%
80	63,82	-5,23%
120	60,80	-10,46%
200	53,67	-25,14%



Ovakvi rezultati ipak ne mijenjaju početnu hipotezu da se elastični kritični moment ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila može računati na isti način kao i kod centrično opterećenih nosača. Iz tablice 6.8. može se uočiti da se za područja ekscentriciteta do 80 mm iznos  $M_{cr}$  neznatno razlikuje od vrijednosti dobivene za centrično opterećen nosač. Bilo koji ekscentricitet koji je veći od te vrijednosti ne možemo očekivati u realnoj građevinskoj praksi, ali uz uvjet da rezultantna sila opterećenja prolazi kroz hrbat nosača.

## 7 ZAKLJUČAK

### 7.1 Neposredni zaključci

S obzirom da istraživanjem dostupne literature i objavljenih znanstvenih članaka vezanih za tu problematiku nisu pronađeni nikakvi konkretni podatci, odlučilo se provesti istraživanje koje bi jednoznačno definiralo način određivanja elastičnog kritičnog momenta za ekscentrično opterećene nosače.

Na početku rada postavljena je hipoteza da se elastični kritični moment ekscentrično opterećenih nosača U profila može računati na isti način kao i u slučaju centrično opterećenih nosača, bilo da su oni izvedeni iz U profila ili dvoosno simetričnih profila. Odnosno, elastični kritični moment za ekscentrično opterećene U profile bi se u tom slučaju mogao računati na jednostavniji način, korištenjem analitičkih izraza za određivanje  $M_{cr}$  ili primjenom edukativnih programa kao što je LTBeam. Ova hipoteza je potvrđena provedenim istraživanjem.

Kao što je u uvodnom dijelu već kazano, elastični kritični moment savijanja je veličina koja postoji samo u teoretskim razmatranjima i ne može se određivati konkretnim eksperimentom pa su se analize vršile provođenjem numeričkih simulacija u programu Ansys. Prije samog početka analize, provedena je kalibracija numeričkih modela. Prvo se modelirao nosač I profila te se vrijednost elastičnog kritičnog momenta dobivena softverom Ansys uspoređivala sa egzaktnom vrijednošću dobivenom analitičkim izrazom (4.8). Složenim postupkom kalibracije dobiven je model koji je davao rezultate vrlo bliske egzaktnim. Spoznaje dobivene na kalibraciji nosača dvoosno simetričnog poprečnog presjeka su se onda upotrijebile za kalibraciju modela nosača izvedenog iz U profila.

Prilikom istraživanja provedena je opsežna parametarska analiza određivanja elastičnog kritičnog momenta nosača izvedenih iz U profila. Analize su provedene za tri različita statička sustava opterećenog nosača: jednostavno oslonjen nosač, konzola i obostrano upeti nosač. Nadalje, modelirali su se slučajevi koncentriranog opterećenja i jednoliko raspodjeljenog opterećenja. Također, modeliralo se djelovanje opterećenja na gornju pojasnicu, sredinu visine hrpta i donju pojasnicu. U svim slučajevima nosače se opterećivalo centrično i ekscentrično. U

slučaju ekscentričnog opterećenja, rezultanta sile je uvijek prolazila kroz hrbat nosača. Modeliralo se gotovo isključivo plošnim konačnim elementima, ali su provedene i kontrolne simulacije u kojima su se koristili prostorni konačni elementi s ciljem provjere rezultata dobivenih plošnim konačnim elementima.

Naposlijetku se razmatrao utjecaj veličine ekscentriciteta sile na veličinu elastičnog kritičnog momenta. Odnosno, razmatrali su se slučajevi ekscentriciteta kada rezultanta sile nije prolazila kroz hrbat.

Na temelju provedenog istraživanja mogu su se donijeti sljedeći neposredni zaključci:

- Elastični kritični moment centrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila može se računati na isti način kao i elastični kritični moment centrično opterećenih nosača dvoosno simetričnih profila, odnosno primjenom analitičkih izraza, ali uz uvjet da rezultanta vanjskih sila prolazi kroz hrbat nosača.
- Elastični kritični moment ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila se neznatno razlikuje od elastičnog kritičnog momenta centrično opterećenih nosača U profila.
- U slučajevima jako zdepastih elemenata nastaju razlike između elastičnog kritičnog momenta dobivenog za centrično i ekscentrično opterećene profile. Ove razlike nastaju zbog većeg utjecaja torzije u područjima malih vitkosti. Također je zaključeno da te razlike mogu biti zanemarene zbog činjenice što kod tako zdepastih elemenata neće doći do bočnog torzijskog izvijanja.
- U slučajevima velikih ekscentriciteta dolazi do zamjetnih odstupanja vrijednosti elastičnog kritičnog momenta od vrijednosti dobivene za centrično opterećen nosač. Takva odstupanja nastaju zbog povećanog momenta torzije koji raste s ekscentricitetom sile. Nadalje, zaključeno je da takva odstupanja smiju biti zanemarena s obzirom da značajna odstupanja nastaju tek za veličine ekscentriciteta sile koje ne možemo očekivati u realnoj građevinskoj praksi, odnosno sve dok rezultanta opterećenja prolazi kroz hrbat nosača.

## 7.2 Preporuke za daljnja istraživanja

Na temelju provedenog istraživanja u ovom radu mogu se preporučiti sljedeća daljnja istraživanja:

- Daljnja istraživanja realne otpornosti nosača U profila na bočno-torzijsko izvijanje bi se trebala provoditi na način da se elastični kritični moment računa na isti način kao i za nosače koji imaju dvoosno simetrični poprečni presjek.
- Na temelju rezultata ovog istraživanja planira se provođenje eksperimenata za određivanje realne otpornosti nosača U profila izloženih savijanju, te provođenje parametarskog numeričkih analiza. Tako bi se mogle potvrditi postojeći predloženi postupci za proračun ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila, te na temelju rezultata donijeti i prijedlog, odnosno novi proračunski postupak za proračun takvih nosača. S obzirom da se radi o skupim eksperimentima, u pogledu vremena i novca, oni ne mogu biti uključeni u okvire ovog znanstveno-istraživačkog rada. Međutim, realno je očekivati da će rezultati takvog istraživanja, nakon što se objave u znanstvenim publikacijama, privući pažnju na europskoj odnosno svjetskoj razini.

## ZAHVALE

Zahvaljujem se Zavodu za konstrukcije Građevinskog fakulteta u Zagrebu koji mi je omogućio pisanje ovog rada.

Posebno se želim zahvaliti mentoru dr. sc. Ivanu Lukačeviću na savjetima i predanom vođenju prilikom provođenja istraživanja i pisanja rada. Također se želim zahvaliti na pomoći prof. dr. sc. Darku Dujmoviću.

Također se zahvaljujem svim profesorima i asistentima koji su mi davali savjete i pomoć prilikom pisanja rada.

---

**POPIS LITERATURE**

- [1] L. S. da Silva, R. Simões, H. Gervasio, *Design of Steel Structure*, 2nd Edition, ECCS, 2016.
- [2] Preuzeto s web stranice <https://www.lmsteelfab.com/projects/civil/plates.html> (Pristup: 22. prosinac 2016.).
- [3] B. Androić, D. Dujmović, I. Džeba, *Čelične konstrukcije 1*, Zagreb: IA Projektiranje, 2009.
- [4] Preuzeto s web stranice <https://www.flickr.com/photos/drdrang/6692550565> (Pristup: 22. prosinac 2016.).
- [5] I. Džeba, B. Androić, D. Dujmović, *Metalne konstrukcije 3*, Zagreb: IA Projektiranje, 1998.
- [6] D. B. la Poutré, *Strength and stability of channel sections used as beam*, Eindhoven: University of Technology, 1999.
- [7] ESDEP, The European Steel Design Education Programme, 1994.
- [8] H. Hauksson, J. B. Vilhjalmsón, *Lateral-Torsional Buckling of Steel Beams with Open Cross Section*, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2014.
- [9] Preuzeto s web stranice <http://www.tc.umn.edu/~dominik/sampling-of-research-activi.html> (Pristup 28. prosinca, 2016).
- [10] V. Šimić, *Otpornost materijala 1*, Zagreb: Školska knjiga, 2002.
- [11] V. Šimić. *Otpornost materijala 2*, Zagreb: Školska knjiga, 1995.
- [12] H. H. Snijder, J. C. D. Hoenderkamp, M. C. M. Bakker, H. M. G. M. Steenbergen, C. H. M. De Louw, *Design rules for lateral torsional buckling of channel sections subject to web loading*, Stahlbau 77, Heft 4, 2008.
- [13] D. Brown, *AD 390 : Lateral Torsional Buckling of channels in accordance with EN 1993-1-1*, (SCI) Steel Construction Institute, Ascot, 2013.
- [14] L. Dahmani, S. Drizi, *Lateral Torsional Buckling of an Eccentrically Loaded Channel Section Beam*, Strength of Materials, Vol 47. No 6, 2015.
- [15] HRN EN 1993-1-1: Eurokod 3: Projektiranje čeličnih konstrukcija - Dio 1-1: Opća pravila i pravila za zgrade (EN 1993-1-1:2005+AC:2006)
- [16] Y. Galea, NCCI: *Elastic critical moment of cantilevers*, (CTICM), Centre Technique Industriel de la Construction Métallique Saint Aubin, Francuska, 2006.

- 
- [17] A. Bureau, NCCI: *Elastic critical moment for lateral torsional buckling*, (CTICM), Centre Technique Industriel de la Construction Métallique Saint Aubin, Francuska, 2006.
- [18] HRN EN 1993-1-1/NA: Eurokod 3: Projektiranje čeličnih konstrukcija - Dio 1-1: Opća pravila i pravila za zgrade (EN 1993-1-1:2005+AC:2006)
- [19] R. Kindmann, J. Frickel. *Tragfähigkeit von U-Profilen bei Biegung und Torsion*, RUBSTAHL - Bericht 1, 2002.
- [20] Programski paket Ansys 17.1, 2016.
- [21] A. F. Hughes, D. C. Iles, A. S. Malik, *Design of steel beams in torsion*, (SCI) Steel Construction Institute, Ascot., 2011.
- [22] O.W. Blodgett, *Design of Welded Structures, Cleveland: The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, 1966.*
- [23] CTICM, LTBeam software (user manual), Centre Technique Industriel de la Construction Métallique Saint Aubin, Francuska, 2012.

## POPIS SLIKA

Slika 1.1. Zavareni limeni nosač [2] .....	2
Slika 1.2. Hladnooblikovani čelični profili različitih oblika [4] .....	2
Slika 1.3. Vruće valjani I profil i U profil .....	3
Slika 1.4. Dvodijelni U presjeci spojeni vezicama (lijevo), odnosno varenjem (desno) [6].....	3
Slika 1.5. Ravnotežna stanja .....	5
Slika 1.6. Ponašanje idealnog elastičnog elementa .....	6
Slika 1.7. Prikaz nekih lokalnih modova izbočavanja I nosača [9].....	7
Slika 1.8. Distorzijsko izbočavanje Z profila .....	7
Slika 1.9. Modovi izvijanja tlačnog štapa .....	8
Slika 1.10. Slučaj centričnog i ekscentričnog opterećenja .....	11
Slika 1.11. Prikaz statičkog sustava s dijagramima unutarnjih sila i momenata savijanja .....	12
Slika 1.12. Prikaz normalnih napreznja u poprečnom presjeku U profila u slučaju ekscentričnog opterećenja .....	14
Slika 1.13. Prikaz posmičnih napreznja u poprečnom presjeku U profila u slučaju ekscentričnog opterećenja .....	15
Slika 3.1. Struktura istraživanja .....	19
Slika 4.1. Ravnoteža infinitezimalnog odsječka pod savijanjem .....	21
Slika 4.2. Raspodjela normalnih i posmičnih napreznja pri savijanju centrično opterećenog U profila .....	22
Slika 4.3. Ovisnost koeficijenta $\beta_T$ i dominantnog oblika torzije .....	24
Slika 4.4. Gubitak stabilnosti tlačne pojasnice .....	26
Slika 4.5. Deformacija konzole prilikom bočno torzijskog izvijanja.....	26
Slika 4.6. Položaj unosa opterećenja u odnosu na centar posmika .....	28
Slika 5.1. Prikaz statičkog sustava kalibracijskog modela (I profil) .....	47
Slika 5.2. Prikaz modela I poprečnog presjeka .....	48
Slika 5.3. Prikaz numeričkog modela (prvi mod izvijanja).....	49
Slika 5.4. Prikaz numeričkog modela za proračun $I_y$ .....	51
Slika 5.5. Prikaz numeričkog modela za proračun $I_z$ .....	52
Slika 5.6. Prikaz numeričkog modela za proračun $I_t$ .....	53
Slika 5.7. Prikaz numeričkog modela za proračun $I_w$ .....	54



---

Slika 5.8. Grafički prikaz $\phi/I_w$ ovisnosti .....	56
Slika 5.9. Prikaz numeričkog modela za proračun $I_w$ .....	58
Slika 5.10. Prikaz prilagođenog numeričkog modela (prvi mod izvijanja).....	59
Slika 5.11. Prikaz mreže konačnih elemenata.....	60
Slika 5.12. Prikaz poprečnog presjeka modela .....	62
Slika 5.13. Prikaz kalibracijskog modela .....	63
Slika 5.14. Prikaz modela za određivanje ekscentriciteta poprečnog presjeka .....	64
Slika 5.15. Grafički prikaz $\phi/e$ ovisnosti .....	65
Slika 5.16. Numerički model nosača U profila (prvi mod izvijanja).....	66
Slika 5.17. Prikaz numeričkog modela za proračun $I_y$ .....	68
Slika 5.18. Prikaz numeričkog modela za proračun $I_z$ .....	69
Slika 5.19. Prikaz numeričkog modela za proračun $I_t$ .....	70
Slika 5.20. Prikaz numeričkog modela za proračun $I_w$ .....	71
Slika 5.21. Grafički prikaz $\phi/I_w$ ovisnosti .....	73
Slika 5.22. Prikaz poprečnog presjeka prilagođenog modela .....	75
Slika 5.23. Prikaz prilagođenog modela U profila (prvi mod izvijanja).....	76
Slika 6.1. Slučajevi modeliranih opterećenja i njihove oznake.....	79
Slika 6.2. Prikaz numeričkog modela jednostavno oslonjene grede (prvi mod izvijanja).....	80
Slika 6.3. Prikaz numeričkog modela konzole (prvi mod izvijanja).....	83
Slika 6.4. Prikaz numeričkog modela obostrano upetog nosača (prvi mod izvijanja).....	85
Slika 6.5. Slučajevi opterećenja kod modeliranja prostornim elementima .....	88
Slika 6.6. Prikaz mreže konačnih elemenata kod modela s prostornim konačnim elementima .....	89
Slika 6.7. Prikaz statičkog sustava .....	91

---

## POPIS TABLICA

Tablica 4.1. Vrijednosti faktora C1 i C2 za vertikalno opterećenje (i za k=1,0) [17].....	31
Tablica 4.2. Faktori imperfekcije za krivulje bočnog torzijskog izvijanja (Tablica 6.3 EN 1993-1-1) .....	35
Tablica 4.3. Krivulje izvijanja za bočno torzijsko izvijanje za opći slučaj (Tablica 6.4 EN 1993-1-1) .....	36
Tablica 4.4. Krivulje izvijanja za bočno torzijsko izvijanje za valjane i ekvivalentne zavarene presjeke (Tablica 6.5 EN 1993-1-1).....	37
Tablica 4.5. Korekcijski faktor $k_c$ (Tablica 6.6 EN 1993-1-1).....	38
Tablica 4.6. Korekcijski faktori za modificiranu Merchant – Rankine metodu [12].....	41
Tablica 5.1. Usporedba ručno proračunatih karakteristika poprečnog presjeka korištenog u numeričkom modelu s karakteristikama IPE 300 profila.....	49
Tablica 5.2. Tablični prikaz $\phi/I_w$ ovisnosti.....	56
Tablica 5.3. Usporedba numerički proračunatih karakteristika poprečnog presjeka s ručno proračunatim i egzaktnim vrijednostima.....	57
Tablica 5.4. Usporedba vrijednosti $M_{cr}$ .....	57
Tablica 5.5. Usporedba vrijednosti $M_{cr}$ .....	59
Tablica 5.6. Usporedba vrijednosti $M_{cr}$ .....	61
Tablica 5.7. Tablični prikaz $w/\phi$ ovisnosti .....	64
Tablica 5.8. Tablični prikaz $\phi/I_w$ ovisnosti.....	72
Tablica 5.9. Usporedba numerički proračunatih karakteristika poprečnog presjeka s ručno proračunatim i egzaktnim vrijednostima.....	73
Tablica 6.1. Elastični kritični moment jednostavno oslonjenog nosača opterećenog koncentriranom silom u sredini raspona .....	81
Tablica 6.2. Elastični kritični moment jednostavno oslonjenog nosača opterećenog jednoliko raspodjeljenim opterećenjem.....	82
Tablica 6.3. Elastični kritični moment konzole opterećene koncentriranom silom na vrhu ....	83
Tablica 6.4. Elastični kritični moment konzole opterećene jednoliko raspodjeljenim opterećenjem .....	84
Tablica 6.5. Elastični kritični moment obostrano upetog nosača opterećenog koncentriranom silom na sredini raspona .....	86

Tablica 6.6. Elastični kritični moment obostrano upetog nosača opterećenog jednoliko raspodjeljenim opterećenjem..... 87

Tablica 6.7. Elastični kritični moment dobiven analizom prostornim elementima ..... 89

Tablica 6.8. Elastični kritični moment dobiven u ovisnosti o veličini ekscentriciteta..... 91

## SAŽETAK

Ivan Čudina

### **Određivanje elastičnog kritičnog momenta nosača jednoosno simetričnog poprečnog presjeka primjenom numeričkih simulacija**

Vrućevaljani U profili učestalo su korišteni kao nosači u građevinskoj praksi. Međutim u europskim normama, ali ni u drugim normama u svijetu, ne postoje normirani postupci za proračun nosača izvedenih iz U profila na bočno torzijsko izvijanje. U dostupnoj literaturi mogu se naći rezultati ispitivanja realne otpornosti nosača izvedenih iz U profila napreznih na savijanje zajedno s predloženim proračunskim postupcima. Međutim, nigdje nije razjašnjen postupak proračuna elastičnog kritičnog momenta takvih nosača.

Primjenom numeričkih parametarskih simulacija u računalnom paketu Ansys računao se elastični kritični moment nosača izvedenih iz U profila za različite uvjete oslanjanja i načine opterećivanja. Pokazano je da u određenim slučajevima može doći do određenog odstupanja elastičnog kritičnog momenta za centrično i ekscentrično opterećene nosače zbog utjecaja torzije koja se javlja prilikom ekscentričnog opterećenja. Međutim, zaključeno je da se te razlike mogu zanemariti uz uvjet da rezultanta vanjskih opterećenja prolazi kroz hrbat ekscentrično opterećenog nosača, što je gotovo uvijek i slučaj u praksi. Prema tome, dokazano je da se elastični kritični moment ekscentrično opterećenih nosača izvedenih iz U profila može računati na isti način kao u slučaju centrično opterećenih nosača sa dvoosno simetričnim poprečnim presjecima.

Ovi rezultati su temeljni preduvjet za prilagodbu metode dokaza otpornosti na bočno torzijsko izvijanje za dvoosno simetrične poprečne presjeke dane europskoj normi kako bi se omogućila njena primjena na jednoosno simetrične poprečne presjeke.

Ključne riječi: Elastični kritični moment, bočno torzijsko izvijanje, centrično i ekscentrično opterećenje, U profili, torzija.

## SUMMARY

Ivan Čudina

### **Determination of the elastic critical moment of beams with uniaxially symmetric cross section by using numerical simulations**

Hot rolled channel sections are frequently used as beams in structural engineering practice. However, in the European standard, or in any other standards in the world, there are no verification methods for lateral torsional buckling of channel sections. In available literature results regarding the determination of ultimate loads of channel sections are available, along with the proposed verification methods. However, the solution for calculation of the elastic critical moment of such beams is not provided.

By conducting numerical parametric study using software package Ansys, elastic critical moment of beams made of channel cross section for different support conditions and different types of loading is calculated. It is shown that in certain cases some deviations of elastic critical moment for centrically and eccentrically loaded sections can occur, due to the effect of torsion that occurs during the eccentric loading. However, it was concluded that these deviations can be ignored provided that the channel section is subjected to web loading, which is almost always the case in structural engineering practice. Accordingly, it has been proved that the elastic critical moment of eccentrically loaded beams made of channel sections can be calculated in the same manner as in the case of centrically loaded beams with biaxially symmetrical cross sections.

These results are a fundamental prerequisite for adjustment of the lateral torsional buckling verification method for biaxially symmetrical cross sections given in European standard to make its application possible for uniaxially symmetric cross sections.

Keywords: Elastic critical moment, lateral torsional buckling, centric and eccentric load, channel section, torsion.

## ŽIVOTOPIS AUTORA

Ivan Čudina rođen je 6.4.1993. godine u Splitu. Nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja upisuje Matematičku gimnaziju u Splitu koju i završava 2012. godine. Iste godine upisuje Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu. Dana 15. rujna 2015. godine završava preddiplomski studij građevinarstva, obranom završnog rada na temu „Konstrukcija i primjena jezgre poprečnog presjeka“, pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Joška Krole. Ivan Čudina je trenutno student pete godine Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu na konstruktorskom usmjerenju.