SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Bošnjak, Josip Novak, Veronika Pedić

Racionalne funkcije na krivuljama i primjena nad poljem $\mathbb{C}$

Zagreb, 2017.

Ovaj rad izrađen je na Zavodu za algebru i osnove matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, pod vodstvom prof. dr. sc. Gorana Muića, i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2016./2017.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Algebarska geometrija jedna je od najstarijih, ali i danas najaktivnijih grana matematike. Nastala je kao algebarski odgovor na geometrijske probleme, točnije na problem određivanja nultočaka jednog ili više polinoma. Iako se početkom klasične algebarske geometrije drži sredina sedamnaestog stoljeća, kada su Fermat i Descartes shvatili da za proučavanje geometrije nisu nužni grafički prikazi i slike, nego je dovoljno problem zapisati kao niz algebarskih jednadžbi, korijeni algebarske geometrije sežu sve do antičke Grčke. Stari Grci znali su za jednostavne geometrijske konstrukcije korijena jednadžbe $x^2 = ab$, gdje su a i b duljine segmenata, a varijabla x stranica kvadrata. Primijetili su da se konike mogu dobiti kao presjeci stošca i ravnina, riješili su Delijski problem presijecanjem stošca, cilindra i torusa, a cak su i opisali presjek sfere i cilindra duž putanje dobivene superpozicijom dviju rotacija, što se može smatrati prvim primjerom parametrizacije krivulje [3].

Nakon Riemannovih otkrića o meromorfnim funkcijama i uvođenja pojma biracionalnih transformacija među algebarskim krivuljama u devetnaestom stoljeću, došlo je do izvanrednog bogatstva novih ideja i metoda [4] u algebarskoj geometriji. Kao što je Riemann otkrio vezu algebarskih mnogostrukosti i teorije kompleksnih mnogostrukosti, Kronecker i Dedekind-Weber su uspostavili vezu algebarske geometrije i teorije algebarskih brojeva [4]. Moderna algebarska geometrija nastavlja se na njihov rad i primjenjuje čisto algebarske koncepte (posebno teoriju komutativne algebre [5]) u rješavanju geometrijskih problema vezanih uz skupove nultočaka. Ireducibilni skupovi nultočaka nazivaju se algebarskim mnogostrukostima i one su temeljni objekti proučavanja algebarske geometrije. Opskrbljene su topologijom Zariskog uz koju postaju Noetherini topološki prostori. To je svojstvo s mnogim važnim posljedicama koje i dokazujemo u prvom poglavlju. Inače, tvorac imena *algebarska geometrija* bio je upravo Max Noether ([14]), njemački matematičar, otac matematičarke Emmy Noether po kojoj je pojam *noetherinosti* dobio ime.

Glavni predmet proučavanja u prvom dijelu našeg rada bit će polja racionalnih funkcija na kvazi-projektivnim mnogostrukostima. Započinjemo uvođenjem osnovnih geometrijskih pojmova: afinog i projektivnog prostora, algebarskih skupova i mnogostrukosti. S druge strane, proučavamo algebarske konstrukcije prstena polinoma i njihovih ideala, K-algebri, polja te njihovih proširenja. Geometrijsku i algebarsku sliku povezujemo Hilbertovim *Nullstellensatzom*, temeljnim teoremom algebarske geometrije koji govori o vezi između algebarskih skupova i maksimalnih ideala u pripadnoj algebri regularnih funkcija. Dajemo dva dokaza Nullstellensatza, oba korisna za razvoj daljnje teorije.
U geometriji općenito, uvijek je zanimljivo gledati preslikavanja između geometrijskih objekata jer nam daju mnoge informacije o njima. Kod algebarskih mnogostrukosti gledamo najprije regularne funkcije i regularna preslikavanja, koja su sačinjena od restrikcija polinoma. U afinom slučaju K-algebre regularnih funkcija su zanimljivi objekti. Primjerice, pomoću njih smo dokazali da afina ravnina bez ishodišta nije izomorfna ni jednoj afinoj mnogostrukosti (Teorem 3.43.). Međutim, pokazuje se da su u projektivnom slučaju ti objekti trivijalni - jedine regularne funkcije na projektivnim mnogostrukostima su konstante (Teorem 4.3.). Zato ćemo proučavati općenitije racionalne funkcije. Posebno će nas zanimati slučaj mnogostrukosti dimenzije 1, odnosno krivulja. Pokazujemo da je svaka krivulja biracionalno ekvivalentna nekoj ravninskoj projektivnoj krivulji, što nam uz karakterizaciju biracionalne ekvivalencije (Propozicija 4.5.) omogućuje da promatramo racionalne funkcije samo na ravninskim krivuljama. Najprije eksplicitno računamo topologiju projektivnih krivulja, a zatim promatrajući presjeke s glavnim otvorenim skupovima precizno računamo polja racionalnih funkcija na ravninskim projektivnim krivuljama. Ti rezultati također predstavljaju originalne doprinose ovog rada. U ovom dijelu

koristili smo moderne knjige iz algebarske geometrije kao što su [3], [6], [11] i [16].

U drugom dijelu rada fiksiramo algebarski zatvoreno polje $K = \mathbb{C}$ i definiramo pojmove ekvivalentne navedenima.

Tablica 1.1: Ekvivalentni parovi pojmova nad algebarski zatvorenim poljem K i nad poljem $\mathbb{C}$

nad K	nad $\mathbb{C}$
algebarska krivulja	Riemannova ploha
regularna funkcija na X	holomorfna funkcija na K
racionalna funkcija na X	meromorfna funkcija na X
regularno preslikavanje između X i Y	holomorfno preslikavanje između X i Y
biracionalno preslikavanje između X i Y	izomorfizam između X i Y

No, za razliku od prvog dijela, pristupit ćemo algebarskoj geometriji izvan projektivnog prostora, definirajući geometrijske objekte kao topološke prostore. Proučavamo Riemannove plohe i meromorfne funkcije na njima i, kako biva u matematici, povezivanjem naizgled različitih struktura dobivamo dodatne informacije o obje. Najprije iznosimo osnovne definicije i rezultate vezane uz Riemannove plohe, a onda ih detaljnije proučavamo korištenjem teorije divizora. Divizori su idejno jednostavni objekti definirani na Riemannovim plohama kojima organiziramo meromorfne funkcije na plohama prema njihovim polovima i nultočkama. Iako je definicija divizora naizgled trivijalna, temelj je svih sljedećih rezultata u radu i općenito ima značajne posljedice u algebarskoj geometriji. Još jedan originalni doprinos ovog rada je surjektivno ulaganje kompleksnog torusa u projektivnu ravninu zasnovano na teoriji divizora (Teorem 5.61.). Jedna od važnih posljedica ovog ulaganja je da tada krivulji $\{Y^2Z = X^3 + AXZ^2 + BZ^3\}$ na koju se torus ulaže možemo prenijeti grupovnu strukturu koja je od fundamentalne važnosti za teoriju brojeva. U ovome dijelu koristili smo [8] i [16], ali posebno [12].

U dodatku A izložene su neke definicije i rezultati iz algebre koji su potrebni za opis pojmova algebarske geometrije, ali sami nisu pojmovi iz algebarske geometrije te su zato odvojeni od glavnog teksta. Ti rezultati mogu se pronaći u standardnim knjigama iz algebre kao što su [7] i [9].

Općenito, proučavanje algebarske geometrije je ključno u povezivanju (naizgled) različitih matematičkih grana i disciplina: od geometrije i topologije, do kompleksne analize i teorije brojeva. No, budući da je u pozadini svakog matematičkog objekta zapravo neka specifična algebra, proučavanje geometrije te algebre je samo po sebi zanimljiv i koristan pothvat.

Poglavlje 2

Opća algebarska geometrija

2.1 Afini prostori i algebarski skupovi

U ovoj cjelini dat ćemo kratak uvod u osnove algebarske geometrije. Posebno ćemo proučavati algebarske skupove te izložiti neke rezultate o njima. Glavni će nam rezultat biti Hilbertov teorem o nulama, takozvani *Nullstellensatz,* kojim ćemo uspostaviti vezu između algebarskih skupova i radikala ideala u prstenu polinoma. Polje nad kojim radimo bit će algebarski zatvoreno.
Definirajmo prvo algebarski skup i afinu hiperplohu u afinom prostoru.

Definicija 2.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je K polje. Definiramo* n-dimenzionalni afini prostor

$$\mathbb{A}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in K\}$$

Definicija 2.2. *Neka je f nekonstantan polinom.* Afina hiperploha *je skup*

$$\mathcal{Z}(f) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0\}.$$

Definicija 2.3. *Neka je $S \subseteq K[T_1, \dots, T_n]$.* Algebarski skup određen sa S *je skup*

$$\mathcal{Z}(S) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0, \forall f \in S\}.$$

Uočimo, ako je $S = \emptyset$, onda je $\mathcal{Z}(S) = \mathbb{A}^n$, a ako je $1 \in S$, onda je $\mathcal{Z}(S) = \emptyset$. Također vrijedi: $\mathcal{Z}(S) = \bigcap_{f \in S} \mathcal{Z}(f)$.
Definirali smo algebarski skup pomoću skupova u prstenu polinoma, no zanimljivija klasa objekata bili bi nam ideali u prstenu polinoma. Srećom, pokazuje se da skupovi

i ideali njima generirani tvore iste algebarske skupove. Tako ćemo dobiti mnoge zanimljive rezultate o algebarskim skupovima, uključujući i *Nullstellensatz*.

Definicija 2.4. *Neka je $S \subseteq K[T_1, \dots, T_n]$. Ideal I generiran sa S je najmanji ideal koji sadrži S.*

$$I = \{\sum_{i=1}^{m} f_i g_i \mid f_i \in S, g_i \in K[T_1, \dots, T_n], m \in \mathbb{N}_0\}.$$

Napomena 2.5. *Ako je $S = \emptyset$, onda je $I = \{0\}$.*

Lema 2.6. *Za svaki $S \subseteq K[T_1, \dots, T_n]$ je $\mathcal{Z}(S) = \mathcal{Z}(I)$, gdje je I ideal generiran sa S.*

Dokaz. $\boxed{\subseteq}$ $x \in \mathcal{Z}(S) \Longrightarrow f(x) = 0, \forall x \in S$

Neka je $\sum_{i=1}^{m} f_i g_i \in S$, $f_i \in S, g_i \in K[T_1, \dots, T_n]$.

$$(\sum_{i=1}^{m} f_i g_i)(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) g_i(x) = 0 \Longrightarrow x \in \mathcal{Z}(I)$$

$\boxed{\supseteq}$ $S = \emptyset \Longrightarrow I = \{0\}$ očigledno.

$x \in \mathcal{Z}(I) \Longrightarrow F(x) = 0, \forall F \in I \Longrightarrow f(x) = 0, \forall f \in S \Longrightarrow x \in \mathcal{Z}(S).$ □

Sada ćemo iskazati jedan vrlo važan pomoćni rezultat, Hilbertov teorem o bazi, koji će nam omogućiti lakšu manipulaciju idealima koje ćemo koristiti te ćemo posljedično dobiti mnoge zanimljive rezultate, uključujući i *Nullstellensatz*.

Teorem 2.7. *(Hilbertov teorem o bazi)*

Svaki ideal $I \subseteq K[T_1, \dots, T_n]$ je konačno generiran, tj.

$$\exists f_1, \dots, f_m \in I \text{ takav da } I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \overset{\text{def}}{=} \{\sum_{i=1}^{m} f_i g_i \mid g_i \in K[T_1, \dots, T_n]\}.$$

Dokaz teorema je dostupan primjerice u [6] i [11]. Uočimo da je broj m iz Hilbertova teorema o bazi fiksan. Iz *Leme* i Hilbertova teorema o bazi zapravo dobivamo:

Ako uzmemo neki skup S koji generira ideal I, onda je $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(S) = \mathcal{Z}(\{f_1, \dots, f_m\})$, gdje je $\{f_1, \dots, f_m\}$ konačan skup generatora za I iz Hilbertova teorema o bazi.

Sada dajemo jednostavnu vezu između algebarskih skupova i hiperploha.

Teorem 2.8. *Neka je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ algebarski skup, $\neq \mathbb{A}^n, \emptyset$. Tada je X presjek konačnog broja hiperploha.*

Dokaz. $X = \mathcal{Z}(S)$, za neki $S \subseteq K[T_1, \dots, T_n]$.

Dakle, $X = \mathcal{Z}(\{f_1, \dots, f_m\})$, gdje su $f_1, \dots, f_m$ generatori ideala I od S.

Slijedi da je $X = \cap_{i=1}^{m} \mathcal{Z}(f_i)$. $\square$

Napomena 2.9. (a) *f_i nije konstanta (osim eventualno 0), jer je inače $\mathcal{Z}(f_i) = \emptyset$, tj. $X = \emptyset$, što je nemoguće.*

(b) *Ako je neki f_i jednak nuli, onda je $\mathcal{Z}(f_i) = \mathbb{A}^n$, pa ih možemo zanemariti u $X = \cap_{i=1}^{m} \mathcal{Z}(f_i)$, a ono što ostane su hiperplohe.*

(c) *Ako su $I, J \subseteq K[T_1, \dots, T_n]$ ideali, $IJ \overset{def}{=}$ ideal koji se sastoji od svih mogućih suma $\sum_{i=1}^{m} f_i g_i, f_i \in I, g_i \in J$.*

(d) *Ako je $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ familija ideala iz $K[T_1, \dots, T_n]$, onda je $\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ ideal koji se sastoji od konačnih suma $\sum_{i=1}^{m} f_{\lambda_i}$, gdje je $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subseteq \Lambda$ konačan skup.*

Pokažimo sada da su konačna unija i proizvoljni presjek algebarskih skupova opet algebarski skupovi, pa ćemo na prirodan način moći definirati topologiju na afinom prostoru $\mathbb{A}$.

Propozicija 2.10. (1) *Neka su $I, J \subseteq K[T_1, \dots, T_n]$ ideali. Tada vrijedi*

$$\mathcal{Z}(IJ) = \mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J).$$

Dakle, unija dva algebarska skupa je algebarski skup. Induktivno se može pokazati da je onda i proizvoljna konačna unija algebarskih skupova opet algebarski skup.

(2) *Neka je $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ familija ideala iz $K[T_1, \dots, T_n]$. Tada je*

$$\cap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{Z}(I_\lambda) = \mathcal{Z}(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda).$$

Dakle, proizvoljan presjek algebarskih skupova je opet algebarski skup.

Dokaz. (1) $\boxed{\supseteq}$ $x \in \mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) \Longrightarrow x \in \mathcal{Z}(I)$ ili $x \in \mathcal{Z}(J) \Longrightarrow f(x) = 0, \forall f \in I$ ili $g(x) = 0, \forall g \in J \Longrightarrow F(x) = 0, \forall F \in IJ \Longrightarrow x \in \mathcal{Z}(IJ)$.

$\boxed{\subseteq}$ $x \in \mathcal{Z}(IJ) \Longrightarrow x \in \mathcal{Z}(I)$ ili $x \notin \mathcal{Z}(I)$.

Ako $x \in \mathcal{Z}(I)$, onda očito $x \in \mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J)$. Pretpostavimo zato da $x \notin \mathcal{Z}(I)$. Onda $\exists f \in I$ takav da $f(x) \neq 0$. No, znamo da je $(\forall g \in J) fg \in IJ$. Dakle, $0 = (fg)(x) = f(x)g(x), \forall g \in J$, tj. $g(x) = 0, \forall g \in J$ jer je $f(x) \neq 0$.

Slijedi: $x \in \mathcal{Z}(J)$, tj. $x \in \mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J)$.

(2) $\boxed{\subseteq}$ Neka je $x \in \cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{Z}(I_\lambda)$. Tada je $x \in \mathcal{Z}(I_\lambda)$, $\forall\lambda \in \Lambda$.

Dakle,

$$(\forall\lambda \in \Lambda)(\forall f \in I_\lambda)\ f(x) = 0.$$

Neka je $F \in \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ proizvoljan. Tada je $F = \sum_{i=1}^m f_{\lambda_i}$, pri čemu je $\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\} \subseteq \Lambda$.

Slijedi da je $F(x) = \sum_{i=1}^m f_{\lambda_i}(x) = 0$, pa je $x \in \mathcal{Z}(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$.

$\boxed{\supseteq}$ Neka je $x \in \mathcal{Z}(\sum_{\lambda\in\Lambda})I_\lambda$. Tada

$$(\forall F \in \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)\ F(x) = 0.$$

Neka je $\lambda \in \Lambda$. Posebno, za svaki $f \in I_\lambda$ vrijedi $f(x) = 0$. Zato je $x \in \mathcal{Z}(I_\lambda)$.

Iz proizvoljnosti od λ, sada slijedi da je $x \in \mathcal{Z}(I_\lambda)$, $\forall\lambda \in \Lambda$, tj. $x \in \cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{Z}(I_\lambda)$.

□

Sada konačno možemo definirati jednu topologiju na $\mathbb{A}^n$.

Definicija 2.11. *Familiju svih algebarskih skupova na* $\mathbb{A}^n$ *zovemo* topologija Zariskog. *To je doista topologija jer zadovoljava:*

(1) $\emptyset, \mathbb{A}^n$ *su algebarski skupovi*

(2) *presjek proizvoljne familije algebarskih skupova je algebarski skup*

(3) *unija konačnog broja algebarskih skupova je algebarski skup*

Primjer 2.12. $(n = 1)$ *Neka je* $\mathbb{A}^1$ *afini pravac. Jedini algebarski skupovi u* $\mathbb{A}^1$ *su* $\mathbb{A}^1$ *i konačni skupovi (uključujući* $\emptyset$*).*

Naime, neka je $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{A}^1$ *algebarski skup. Tada je* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(I)$*, gdje je* $I \subseteq K[T]$ *ideal.*

Budući da je $K[T]$ *domena glavnih ideala, slijedi da je* $I = \langle f\rangle$*, tj.* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(f)$.

(1) $f = const \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{Z} = \mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(f) = \emptyset$

(2) $f = 0 \Longrightarrow \mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\{0\}) = \mathbb{A}^1$

(3) $C \neq 0$, $f = C \cdot \prod_{i=1}^m (T - \lambda_i), \lambda_i \in K \Longrightarrow \mathcal{Z}(f) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$

Sada vidimo i da se u $\mathbb{A}^1$ *svaka dva neprazna skupa sijeku, tj. topologija nije Hausdorffova.*

Slijedi jedan vrlo važan objekt, takozvani *ideal od X* te definiramo radikalan ideal i radikal ideala.

Definicija 2.13. *Neka je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ bilo koji skup. Definiramo* ideal od X*:*

$$I(X) = \{f \in K[T_1, \dots, T_n] : f(x) = 0, \forall x \in X\}.$$

Primjer 2.14. (1) $X = \mathbb{A}^n \Longrightarrow I(X) = \{0\}$

(2) $X = \emptyset \Longrightarrow I(X) = K[T_1, \dots, T_n]$.

(3) $X =$ *hiperploha* $\Longrightarrow I(X) =$*(reducirana jednadžba od X).*

Definicija 2.15. *Neka je I ideal u prstenu R. I je* radikalan ideal *ako vrijedi:*

$$\exists\, k \geq 1\ t.d.\ f^k \in I(X) \Longrightarrow f \in I(X).$$

Propozicija 2.16. *Neka su $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ bilo koji skupovi. Tada vrijedi:*

(1) $X \subseteq Y \Longrightarrow I(Y) \subseteq I(X)$

(2) $I(\emptyset) = K[T_1, \dots, T_n]$.

(3) $\forall S \subseteq K[T_1, \dots, T_n] \Longrightarrow S \subseteq I(\mathcal{Z}(S))$

(4) $\forall X \subseteq \mathbb{A}^n \Longrightarrow X \subseteq \mathcal{Z}(I(X))$

(5) $I(X)$ *je radikalan ideal*

Dokaz. (1) $f \in I(Y) \Longrightarrow f(y) = 0,\ \forall y \in Y \Longrightarrow f(x) = 0, \forall x \in X \Longrightarrow f \in I(X)$.

(2) $f \in I(\emptyset) \iff f(x) = 0, \forall x \in \emptyset \iff f \in K[T_1, \dots, T_n]$.

(3) $f \in S \Longrightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathcal{Z}(S) \Longrightarrow f \in I(\mathcal{Z}(S))$.

(4) $x \in X \Longrightarrow f(x) = 0, \forall f \in I(X) \Longrightarrow x \in \mathcal{Z}(I(X))$.

(5) $f^k \in I(X)$, za neki $k \geq 1 \Longrightarrow f^k(x) = 0, \forall x \in X \Longrightarrow [f(x)]^k = 0, \forall x \in X \Longrightarrow f(x) = 0, \forall x \in X$.

□

Iduće uspostavljamo zanimljivu vezu između točaka afinog prostora i maksimalnih ideala u prstenu polinoma o kojoj ćemo nakon *Nullstelensatza* reći i više.

Propozicija 2.17. (1) *Neka je $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{A}^n$. Tada je $I(\{\alpha\}) = \langle T_1 - \alpha_1, \dots, T_n - \alpha_n \rangle$ i taj ideal je maksimalan.*

(2) *Neka je $\alpha \neq \beta$. Tada je $I(\{\alpha\}) \neq I(\{\beta\})$, tj. preslikavanje $\mathbb{A}^n \ni \alpha \mapsto I(\{\alpha\})$ je injekcija s $\mathbb{A}^n$ u skup maksimalnih ideala u $K[T_1, \dots, T_n]$.*

Dokaz. (1) Znamo: $\forall f \in K[T_1, \dots, T_n]$, $\exists! F \in K[T_1, \dots, T_n]$ takav da je $f = F(T_1 - \alpha_1, \dots, T_n - \alpha_n)$.

Imamo: $f = a + \sum a_\gamma (T_1 - a_1)^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot (T_n - \alpha_n)^{\gamma_n}, \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, \exists i$ takav da je $\gamma_i \neq 0$, tj., $\mid \gamma \mid = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n \geq 1$.

Vrijedi: $f(\alpha) = 0 \iff a = 0 \iff f \in \langle T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_n \rangle$.

Preslikavanje $K[T_1, \ldots, T_n] \ni f \mapsto f(\alpha) \in K$ je homomorfizam prstena. Lako se vidi da je to i surjektivno preslikavanje.

Imamo: ${}^{K[T_1,\ldots,T_n]}/_{I(\{\alpha\})} \cong K$, pa je ideal $I(\{\alpha\})$ maksimalan jer je K polje.

(2) Ako je $\alpha \neq \beta$, onda $\exists\ i$ takav da je $\alpha_i \neq \beta_i$, tj, $T_i - \alpha_i \neq T_i - \beta_i$.

Pretpostavimo da je $(\{\alpha\}) = I(\{\beta\})$. Tada je $T_i - \beta_i \in I(\{\alpha\})$.

Znamo da je $T_i - \alpha_i \in I(\{\alpha\})$, pa imamo $(T_i - \beta_i) - (T_i - \alpha_i) \in I(\{\alpha\})$, tj. $\alpha_i - \beta_i \in I(\{\alpha\})$.

No, to je kontradikcija jer je $\alpha_i - \beta_i \neq 0$, pa je $1 \in I(\{\alpha\})$ (skaliramo).

Dakle, $I(\{\alpha\}) \neq I(\{\beta\})$. $\square$

Napomena 2.18. *Ako je $n \geq 2$, onda $I(\{\alpha\})$ nije glavni ideal ni za jedan $\alpha \in \mathbb{A}^n$.*
Naime, pretpostavimo suprotno, tj. $I(\{\alpha\}) = \langle T_1 - \alpha_1, \ldots, T_n - \alpha_n \rangle = \langle f \rangle$.
Tada f dijeli $T_i - \alpha_i, \forall i = 1, \ldots, n \geq 2$, no to je kontradikcija jer su $T_i - \alpha_i$ ireducibilni i neasocirani.

Definicija 2.19. *Neka je R prsten i $I \subseteq R$ ideal.* Radikal ideala *I je skup:*

$$Rad(I) = \{f \in R : \exists m = m(f) \geq 1\ t.d.\ je\ f^m \in I\}.$$

Primijetimo da je $I \subseteq Rad(I)$.

Propozicija 2.20. (1) *Neka su $f, g \in Rad(I)$. Tada je $f - g \in Rad(I)$.*
(2) *Neka su $f \in Rad(I), g \in R$. Tada je $fg \in Rad(I)$.*

Dokaz. (1) Neka su $m, n \geq 1$ takvi da je $f^m, g^m \in I$.

$$(f-g)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} f^i (-g)^{m+n-i} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+n}{i} (-1)^{m+n-i} f^i g^{m+n-1} + \sum_{i=n}^{n+m} \binom{m+n}{i} (-1)^{m+n-i} f^i g^{m+n-1} \in I$$

Naime, prvi pribrojnik sadrži $g^m \in I$, pa je cijeli sadržan u J, a drugi pribrojnik sadrži f^n, pa je cijeli sadržan u I.

(2) Neka je $f \in Rad(I)$. Tada $\exists\ m \geq 1$ takav da je $f^m \in I$.

Neka je $g \in R$. Tada je $(fg)^m = f^m g^m \in I$ jer je $f^m \in I$.

Dakle, $fg \in Rad(I)$. $\square$

Napomena 2.21. (1) *Iz prethodne propozicije slijedi da je radikal ideala i sam ideal. Zato odmah imamo: $Rad(I) \subseteq Rad(Rad(I))$.*

(2) *Neka je $f \in Rad(Rad(I))$. Tada $\exists\ m \geq 1$ takav da je $f^m \in Rad(I)$, tj. $\exists n \geq 1$ takav da je $(f^m)^n = f^{mn} \in I$ Dakle, $Rad(Rad(I)) \subseteq Rad(I)$, tj. $Rad(Rad(I)) = Rad(I)$.*

Propozicija 2.22. (a) *Ideal I je radikalan $\iff I = Rad(I)$.*

(b) *$\forall I \subseteq R$, $Rad(I)$ je radikalan ideal.*

Dokaz. (a) $\boxed{\Longrightarrow}$ Znamo da je $I \subseteq Rad(I)$. S druge strane, neka je $f \in Rad(I)$. Tada je $f \in R$ ili $\exists\ m \geq 1\ f^m \in I$. Budući da je I radikalan, slijedi da je $f \in I$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je $k \geq 1$ takav da je $f^k \in I$.

Tada je po definiciji $f \in Rad(I) = I$, pa je $f \in I$.

(b) Neka je $k \geq 1$ takav da je $f^k \in Rad(I)$. Tada postoji $m \geq 1$ takav da je $(f^k)^m \in I$, tj.$f^{km} \in I$, $km \geq 1$. Iz definicije radikala ideala slijedi da je $f \in Rad(I)$.

$\square$

Propozicija 2.23. (1) *Za svaki ideal I u $K[T_1,\ldots,T_n]$, $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(Rad(I))$.*

(2) *Za svaki ideal I u $K[T_1,\ldots,T_n]$, $Rad(I) \subseteq I(\mathcal{Z}(I))$. Drugi smjer ćemo dokazati u* Nullstellensatzu.

Dokaz. (1) $\boxed{\supseteq}$ $I \subseteq Rad(I) \Longrightarrow \mathcal{Z}(Rad(I)) \subseteq \mathcal{Z}(I)$.

$\boxed{\subseteq}$ $x \in \mathcal{Z}(I) \iff F(x) = 0, \forall F \in I$.

$f \in Rad(I) \Longrightarrow \exists m \geq 1$ takav da $f^m \in I \Longrightarrow f^m(x) = 0$

$\Longrightarrow (f(x))^m = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$.

Dakle, $x \in \mathcal{Z}(Rad(I)) \Longrightarrow \mathcal{Z}(I) \subseteq \mathcal{Z}(Rad(I))$

(2) $f \in Rad(I) \Longrightarrow \exists m \geq 1, f^m \in I$

$\Longrightarrow f^m(x) = 0, \forall x \in \mathcal{Z}(I)$.

$\Longrightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathcal{Z}(I)$, tj. $f \in I(\mathcal{Z}(I)$.

$\square$

Iduće ćemo dokazati Hilbertov teorem o nulama, no prije toga dajemo jedan zanimljiv pomoćni teorem.

Teorem 2.24. *Neka je $I \subseteq K[T_1,\dots,T_n]$ pravi ideal (tj. $I \neq K[T_1,\dots,T_n]$).*
Tada je $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$.

Dokaz. Neka je $\mathfrak{a} \subsetneqq K[T_1,\dots,T_n]$ ideal. Po Hilbertovu teoremu o bazi, $\mathfrak{a}$ je konačno generiran, pa vrijedi:

$$\exists F_1,\dots,F_m \; takav \; da \; \mathfrak{a} = \langle F_1,\dots,F_m\rangle, \; tj. \; \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \mathcal{Z}(F_1,\dots,F_m).$$

Ako postoji $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{A}^n$ takav da je $F_i(x) = 0$, $\forall i = 1,\dots,m$, onda je $x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$, pa je tvrdnja dokazana.
Po *Lemi* iz dodatka A, dovoljno je naći proširenje $K \subseteq L$ i $y_1,\dots,y_n \in L$ takve da je

$$F_1(y_1,\dots,y_n) = \dots = F_m(y_,\dots,y_n) = 0.$$

No, budući da je $\mathfrak{a} = \langle F_1,\dots,F_m\rangle \subsetneqq K[T_1,\dots,T_n]$, postoji maksimalan ideal $\mathfrak{m}$ takav da je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$, pa možemo definirati

$$L = {}^{K[T_1,\dots,T_n]}\!/\mathfrak{m}.$$

To je polje koje sadrži K (uz identifikaciju $K = K + \mathfrak{m}$) i konačno je generirano nad K s $T_1 + \mathfrak{m},\dots,T_n + \mathfrak{m}$.
Sada, $F_i \in \mathfrak{m}$ povlači da je $0 + \mathfrak{m} = F_i + \mathfrak{m} = F_i(T_1 + \mathfrak{m},\dots,T_n + \mathfrak{m})$, $\forall i = 1,\dots,m$.
Dakle, možemo uzeti $y_i = T_i + \mathfrak{m}$.
Time je teorem dokazan. □

Sada dajemo dokaz *Nullstellensatza* koristeći *Rabinowitschev trik*. Rabinowitschev članak je dostupan u [15], a alternativni dokazi su dani primjerice u [3] i [18].

Teorem 2.25. *(Hilbertov teorem o nulama, Nullstellensatz)*
Za svaki ideal $I \subseteq K[T_1,\dots,T_n]$ vrijedi $I(\mathcal{Z}(I)) = Rad(I)$.

Dokaz. Lako se vidi da je $I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) \supseteq Rad(\mathfrak{a})$ (dokazano u jednoj od prethodnih propozicija). Preostaje pokazati da je $I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}))) \subseteq Rad(\mathfrak{a})$.
Po Hilbertovu teoremu o bazi, $\mathfrak{a}$ je konačno generiran, tj.

$$\exists l \geq 1, \exists f_1,\dots,f_l \in \mathfrak{a} \; takav \; da \; \mathfrak{a} = \langle f_1,\dots,f_l\rangle.$$

Dakle, treba dokazati: $\forall g \in I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}))$ $\exists m \geq$ t.d. $g^m \in \mathfrak{a}$, tj. raspisano:

$$\exists m \geq 1 \; \exists h_1,\dots,h_l \in K[T_1,\dots,T_n] \; takvi \; da \; g^m = \sum_{i=1}^{l} h_i f_i.$$

Neka je, dakle, $g \in I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}))$ proizovljan. Sada ćemo primijeniti takozvani *Rabinowitschev trik*: neka je $J \subseteq K[T_1,\ldots,T_n,T_{n+1}]$, $J = \langle f_1,\ldots,f_l, 1-T_{n+1}\cdot g\rangle$, gdje je T_{n+1} dodana nova nezavisna varijabla. Računamo $\mathcal{Z}(J) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$.

Pretpostavimo da je $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}) \in \mathcal{Z}(J)$.

Tada je $f_1(\alpha) = \ldots = f_l(\alpha) = (1-T_{n+1}g)(\alpha) = 0$, tj.

$$f_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0,\ldots,f_l(\alpha_1,\ldots\alpha_n) = 0,$$

pa je $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$. Iz toga slijedi da je $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0$, jer je $g \in I(\mathcal{Z}(a)))$.

No, također, $1 = 1-\alpha_{n+1}g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0$, a to je kontradikcija. Dakle, $\mathcal{Z}(J) = \emptyset$.

Iz teorema 3 tada slijedi: $J = K[T_1,\ldots,T_{n+1}]$, pa je $1 \in J$.

Dakle, za neke $G_1,\ldots,G_{l+1} \in K[T_1,\ldots,T_n,T_{n+1}]$ vrijedi:

$$1 = \sum_{i=1}^{l} G_i(T_1,\ldots,T_n,T_{n+1})f_i(T_1,\ldots,T_n) +$$
$$+ (1-T_{n+1}g(T_1,\ldots,T_n))G_{l+1}(T_1,\ldots,T_{n+1}).$$

Promotrimo evaluacijski homomorfizam $K[T_1,\ldots,T_n] \longrightarrow K(T_1,\ldots,T_n)$, K - linearno preslikavanje takvo da $T_i \mapsto T_i$, za $1 \leq i \leq n$. Neka se T_{n+1} preslikava u neki $P \in K[T_1,\ldots,T_n]$. Tada imamo:

$$1 = \sum_{i=1}^{l} G_1(T_1,\ldots,T_n,P)f_i(T_1,\ldots,T_n)+$$
$$+ (1-Pg(T_1,\ldots,T_n))G_{l+1}(T_1,\ldots,T_n,P)$$

Po Rabinowitschevom triku je: $P = \frac{1}{g} \in K(T_1,\ldots,T_n)$. (Ako je $g = 0$, onda je trivijalno.)

Kada uvrstimo $\frac{1}{g}$ u gornju relaciju, dobijemo:

$$1 = \sum_{i=1}^{l} G_i(T_1,\ldots,T_n,\frac{1}{g})f_i.$$

U svakom je sumandu nazivnik g^{m_i}, pa stavimo $m = max(m_1,\ldots,m_l)$ i pomnožimo cijelu jednadžbu s g^m te dobijemo:

$$g^m = \sum_{i=1}^{l} G_i(T_1,\ldots,T_n,\frac{1}{g})g^m f_i,$$

što je sadržano u $\mathfrak{a}$ jer je $G_i(T_1,\ldots,T_n,\frac{1}{g})g^m$ polinom iz $K[T_1,\ldots,T_n]$.

$\square$

Iz gornjih rezultata zapravo smo dobili sljedeće:

(1) Svaki zatvoren skup je oblika $\mathcal{Z}(I)$, gdje je $I \subseteq K[T_1,\dots,T_n]$ ideal.

(2) Za svaki ideal I, $Rad(I)$ je radikalan ideal.

(3) Svaki zatvoren skup u $\mathbb{A}^n$ je zapravo oblika $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$, gdje je $\mathfrak{a}$ radikal nekog ideala.

(4) Taj $\mathfrak{a}$ u (3) je jedinstven. Naime, pretpostavimo da je $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \mathcal{Z}(b)$, gdje su $\mathfrak{a}, b$ radikali. Tada je $I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) = I(\mathcal{Z}(b))$, tj. prema teoremu 2, $Rad(\mathfrak{a}) = Rad(b)$, pa slijedi $\mathfrak{a} = b$.

Korolar 2.26. *Preslikavanje $\mathfrak{a} \mapsto \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ je bijekcija sa skupa radikalnih ideala na skup zatvorenih skupova $\mathbb{A}^n$, a inverz je $\mathcal{Z} \mapsto I(\mathcal{Z})$.*

Korolar 2.27. *$\alpha \in \mathbb{A}^n \mapsto I(\{\alpha\})$ je bijekcija sa $\mathbb{A}^n$ na skup maksimalnih ideala u $K[T_1,\dots,T_n]$.*

Uvedimo oznaku: $\mathfrak{m}_\alpha = I(\{\alpha\})$.

Dokaz. Znamo da je ovo preslikavanje injekcija (Prop.1.). Preostaje dokazati surjektivnost.

Neka je $\mathfrak{m} \subseteq K[T_1,\dots,T_n]$ maksimalan ideal. Tada je $\mathfrak{m}$ pravi ideal, pa je, po Teoremu 3, $\mathcal{Z}(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$.

Neka je $\alpha \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ bilo koja točka.

$$\mathfrak{m}_\alpha \supseteq \mathfrak{m} \Longrightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\alpha.$$

□

Dakle, maksimalni ideali su u prirodnoj bijekciji s točkama afinog prostora.

Korolar 2.28. *$X \subseteq \mathbb{A}^n$ bilo koji skup. Tada je $\overline{X} = I(X)$.*

Dokaz. Po definiciji $\overline{X} =$ najmanji zatvoren skup koji sadrži X.

Imamo sljedeću karakterizaciju: $\forall$ zatvoren $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ takav da $X \subseteq Y \Longrightarrow \overline{X} = Y$.

Definirajmo: $Z = \mathcal{Z}(I(X))$ zatvoren skup. Očito je $X \subseteq Z$.

Neka je Y zatvoren skup takav da je $X \subseteq Y \Longrightarrow \exists$ radikalan ideal $\mathfrak{a}$ takav da je $Y = \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$.

Dakle, $X \subseteq Y = \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$, tj. $I(Y) = I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) = Korolar1 = \mathfrak{a} \subseteq I(X)$. Slijedi da je $\mathfrak{a} \subseteq I(X) \Longrightarrow \mathcal{Z}(I(X)) \subseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = Y$.

Sada karakterizacija zatvorenih skupova povlači da je $\overline{X} = Z$. □

2.2 Konačnogenerirane K-algebre

Definicija 2.29. K-algebra *je komutativan prsten R s jedinicom $1 \neq 0$ zajedno s ulaganjem $K \hookrightarrow R$.*

Ekvivalentno, K-algebra R je vektorski prostor nad K s K-bilinearnim množenjem $R \times R \to R$.

Jednostavan primjer K-algebre je bilo koje proširenje polje K, $F \supset K$. Nama važan primjer K-algebre je $K[T_1, ..., T_n]/\mathfrak{a}$, za $\mathfrak{a} \subset K[T_1, ..., T_n]$ pravi ideal. To je komutativan prsten s jedinicom $1 \neq 0$ zato što je $K[T_1, ..., T_n]$ komutativan prsten s jedinicom $1 \neq 0$, a ulaganje $K \hookrightarrow K[T_1, ..., T_n]/\mathfrak{a}$ dobivamo kao kompoziciju inkluzije $K \subset K[T_1, ..., T_n]$ i kanonskog epimorfizma $K[T_1, ..., T_n] \to K[T_1, ..., T_n]/\mathfrak{a}$ koji je injektivan na K jer je $\mathfrak{a}$ pravi ideal.

Definicija 2.30. *Ako su R i S K-algebre,* homomorfizam K-algebri *je svaki homomorfizam prstena $f : R \to S$ takav da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] \arrow[dr] & R \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

Ovo je ekvivalentno sa zahtjevom da je f K-linearan homomorfizam prstena. Naime, ako su $K \overset{i}{\hookrightarrow} R$ i $K \overset{j}{\hookrightarrow} S$ ulaganja iz definicije K-algebre te ako pretpostavimo da je f honmomorfizam K-algebri, onda je $j = f \circ i$, pa je $f(\lambda r) = f(i(\lambda)r) = f(i(\lambda))f(r) = j(\lambda)f(r) = \lambda f(r)$, pa je f K-linearan.

Obratno, ako je f K-linearan, onda je $j(\lambda) = j(\lambda)f(1) = \lambda f(1) = f(\lambda 1) = f(\lambda) = f(i(\lambda))$.

Definicija 2.31. *K-alegbra R je* konačnogenerirana *ako postoje elementi $r_1, ..., r_n \in R$ takvi da je evaluacijski homomorfizam $K[T_1, ..., T_n] \to R$, $P(T_1, ..., T_n) \mapsto P(r_1, ..., r_n)$ surjektivan.*

Dakle, svaki element $r \in R$ je oblika $P(r_1, ..., r_n)$ za neki polinom $P \in K[T_1, ..., T_n]$.

Definicija 2.32. *K-algebra R je* reducirana *ako nema nilpotentnih elemenata različitih od 0.*

Lema 2.33. *Neka je $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{A}^n$ neprazan i zatvoren skup. Tada je $K[T_1, ..., T_n]/I(\mathcal{Z})$ konačnogenerirana i reducirana K-algebra.*

Dokaz. $\mathcal{Z}$ je neprazan, pa je $I(\mathcal{Z})$ pravi ideal, a već smo komentirali zašto je onda $K[T_1,...,T_n]/I(\mathcal{Z})$ K-algebra.

$K[T_1,...,T_n]/I(\mathcal{Z})$ je konačnogenerirana jer je za svaki $P \in K[T_1,...,T_n]$, po definiciji operacija na kvocijentnom prostoru, $P(T_1,...,T_n)+I(\mathcal{Z}) = P(T_1+I(\mathcal{Z}),...,T_n+I(\mathcal{Z}))$, a $T_i+I(\mathcal{Z})$ su elementi od $K[T_1,...,T_n]/I(\mathcal{Z})$.

Također, $K[T_1,...,T_n]/I(\mathcal{Z})$ je reducirana jer za $r = P+I(\mathcal{Z})$ i $k \geq 1$, $r^k = 0$ povlači $P^k \in I(\mathcal{Z})$. Ali $I(\mathcal{Z})$ je radikal, pa je $P \in I(\mathcal{Z})$, to jest, $r = 0$. □

Definicija 2.34. Regularna funkcija f *na zatvorenom skupu* $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{A}^n$ *je svaka funkcija inducirana nekim polinomom* $P \in K[T_1,...,T_n]$ *sa* $f(z) = P(z)$.

(Dakle, regularna funkcija na $\mathcal{Z}$ *je restrikcija polinoma na* $\mathcal{Z}$*.)*

Skup svih regularnih funkcija na $\mathcal{Z}$ *označavamo s* $K[\mathcal{Z}]$.

Tada je $K[\mathcal{Z}]$ K-algebra. Naime, $K[\mathcal{Z}]$ je prsten s jedinicom $1 \neq 0$ jer je $K[T_1,...,T_n]$ prsten s jedinicom $1 \neq 0$, a elementi od $K[\mathcal{Z}]$ su samo restrikcije tih polinoma. Također, imamo ulaganje $K \hookrightarrow K[\mathcal{Z}]$ dano sa $k \mapsto c_k$, gdje je c_k konstantan polinom na $\mathcal{Z}$.

Nadalje, koordinatne funkcije $T_i : \mathcal{Z} \to K$ definirane s $(a_1,...,a_n) \mapsto a_i$, $i = 1,...,n$ su regularne jer su $T_i \in K[T_1,...,T_n]$. Štoviše, polinomi $T_1,...,T_n$ generiraju $K[T_1,...,T_n]$ kao K-algebru, pa koordinatne funkcije na $\mathcal{Z}$ generiraju $K[\mathcal{Z}]$.

Primijetimo još, ako s ϕ označimo homomorfizam K-algebri $K[T_1,...,T_n] \to K[\mathcal{Z}]$, $P \mapsto P|_{\mathcal{Z}}$, onda je slika $Im(\phi)$ upravo $K[\mathcal{Z}]$, a jezgra $Ker(\phi) = I(\mathcal{Z})$ jer je $P|_{\mathcal{Z}} = Q|_{\mathcal{Z}}$ ako i samo ako je $(P-Q)(z) = 0$, za svaki $z \in \mathcal{Z}$, ako i samo ako je $P-Q \in I(\mathcal{Z})$, to jest $P+I(\mathcal{Z}) = Q+I(\mathcal{Z})$. Po prvom teoremu o izomorfizmu onda slijedi da je $K[T_1,...,T_n]/I(\mathcal{Z}) \cong K[\mathcal{Z}]$.

Posebno, zbog Leme 3.5. je $K[\mathcal{Z}]$ konačnogenerirana i reducirana K-algebra. U sljedećoj lemi pokazujemo obrat ove tvrdnje.

Lema 2.35. *Neka je* R *konačnogenerirana i reducirana* K*-algebra. Tada postoji* $n \geq 1$ *i* $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{A}^n$ *zatvoren i neprazan skup takav da je* $R \cong K[\mathcal{Z}]$.

Dokaz. R je konačnogenerirana, pa postoje $n \geq 1$ i $r_1,...,r_n \in R$ i surjektivni K-linearni homomorfiam $\phi : K[T_1,...,T_n] \to R$ koji preslikava $T_i \mapsto r_i$. Po prvom teoremu o izomorfizmu je $K[T_1,...,T_n]/Ker\phi \cong R$.

Tvrdimo da je $Ker\phi$ radikalni ideal. Naime, ako su $f \in K[T_1,...,T_n]$ i $l \geq 1$ takvi da je

$f^l \in Ker\phi$, onda $\phi(f^l) = \phi(f)^l = 0$ povlači $\phi(f) = 0$ jer je R reducirana, pa je $f \in Ker\phi$. Dakle, $Ker\phi$ je radikalan ideal.

Dokazali smo ranije da je skup radikalnih ideala u $K[T_1,...,T_n]$ u bijekciji s familijom zatvorenih skupova u $\mathbb{A}^n$, pa postoji neprazan $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{A}^n$ takav da je $Ker\phi = I(\mathcal{Z})$.

Dakle, $R \cong K[T_1,...,T_n]/Ker\phi = K[T_1,...,T_n]/I(\mathcal{Z})$. □

Sljedeći cilj nam je dokazati općenitiju verziju Nullstellensatza. Za to najprije moramo dokazati neke pomoćne rezultate.

Definicija 2.36. *Općenitije, za B komutativan prsten s jedinicom $1_B \neq 0$, R je B-*algebra *ako je R prsten s homomorfizmom $B \to R$ (ne nužno ulaganje).*

Ako su R i S B-algebre, morfizam $\phi \in Hom_B(R,S)$ je homomorfizam *B-algebri ako je ϕ homomorfizam prstena i sljedeći dijagram komutira:*
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & R \arrow[d, "\phi"] \\ & S \end{tikzcd}$$

R je konačnogenerirana B-algebra ako postoji $n \geq 1$ i epimorfizam B-algebri $B[T_1,...,T_n] \to R$.

Lema 2.37. *Neka je F polje, $R \subseteq F$ potprsten i $x \in F$, $x \neq 0$. Tada za svako algebarski zatvoreno polje K i homomorfizam $\alpha : R \to K$, postoji $y \in \{x, x^{-1}\}$ i homomorfizam $\tilde{\alpha} : R[y] \to K$ koji proširuje α.*

Napomena: $R[y]$ je slika evaluacijskog homomorfizma $R[T] \to K$, $T \mapsto y$.

Dokaz. Neka je $\mathfrak{p} = \ker\alpha$. Tada je $R/\mathfrak{p} \cong Im\alpha \subset K$. $Im\alpha$ je onda integralna domena, pa je $\mathfrak{p}$ prost ideal. Onda je $S := R \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativan skup (to jest, $1 \in S$ i $\forall s_1, s_2 \in S$ je $s_1 s_2 \in S$).

Sada promatramo lokalizaciju R po S: definiramo $R_\mathfrak{p} = \{\frac{r}{s} : r \in R,\ s \in S\}$. Tada je $R_\mathfrak{p}$ prsten s jedinicom $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$.

Homomorfizam $\alpha : R \to K$ možemo proširiti do $\alpha_\mathfrak{p} : R_\mathfrak{p} \to K$, $\alpha_\mathfrak{p}\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{\alpha(r)}{\alpha(s)}$.

Tada je $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} := \ker\alpha_\mathfrak{p} = \{\frac{r}{s} : r \in \mathfrak{p},\ s \in S\} = S^{-1}\mathfrak{p}$.

Ako je $x \in R_\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$, onda postoji $r \in S$ takav da je $x = \frac{r}{s}$, pa je $\frac{s}{r} \in R_\mathfrak{p}$ i $\frac{s}{r}\frac{r}{s} = 1$, pa je x inveritibilan. Dakle, $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ je jedinstven maksimalan ideal u $R_\mathfrak{p}$, pa je $R_\mathfrak{p}$ lokalan prsten.

Zbog ovoga je dovoljno tvrdnju dokazati za R lokalan prsten s jedinstvenim maksimalnim idealom $\mathfrak{p}$. Naime, R se ulaže u $R_\mathfrak{p}$, pa se onda možemo samo restringirati na R.

$\mathfrak{p}$ je maksimalan ideal, pa je $L := R/\mathfrak{p}$ potpolje od K. Budući da je $L = \alpha(R)$, možemo restringirati kodomenu i gledati $\alpha : R \to L$. Taj homomorfizam se proširuje do kanonskog homomorfizma $R[T] \to L[T]$, $r_0 + r_1T + ... + r_lT^l = g \mapsto \bar{g} = \alpha(r_0) + \alpha(r_1)T + ... + \alpha(r_l)T^l$. To preslikavanje je epimorfizam.

Sada za x iz iskaza Leme definiramo $J := \{g \in R[T] :\ g(x) = 0\}$. Tvrdimo da je J ideal u $R[T]$. Naime, za f i g iz J je $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 0$, pa je $f - g \in J$. Također, za $f \in R[T]$ i $g \in J$ je $(fg)(x) = (gf)(x) = 0$, pa je $fg,\ gf \in J$. Dakle, J je ideal.

Onda je i $I := \{\bar{g}\ :\ g \in J\}$ ideal u $L[T]$ jer je $\bar{\cdot}$ homomorfizam prstena. Budući da je L polje, $L[T]$ je domena glavnih ideala, pa postoji $g_0 \in J$ takav da je $I = \langle\overline{g_0}\rangle$. Sada razlikujemo dva slučaja: ili je $\overline{g_0}$ konstanta ili ima korijen λ u algebarski zatvorenom polju $K \supset L$.

U drugom slučaju, uzmemo jedan takav $\lambda \in K$ i definiramo $\beta : R[T] \to K$, $\beta(g) = \overline{g}(\lambda)$. Ako je $h \in J$, onda je $\overline{h} \in I = (\overline{g_0})$, pa je $\overline{h} = \overline{f}\overline{g_0}$ za neki $f \in R[T]$, pa je $\overline{h}(\lambda) = \overline{f}(\lambda)\overline{g_0}(\lambda) = 0$. Dakle, $J \subseteq \ker\beta$. Onda možemo definirati homomorfizam $\tilde{\alpha} : R[x] \to K$ kao sljedeću kompoziciju homomorfizama:

$R[x] = R[T]/J \twoheadrightarrow R[T]/\ker\beta \xhookrightarrow{\beta} K$.

Uočimo, tada je $\tilde{\alpha}(x) = \tilde{\alpha}(T+J) = \beta(T) = \lambda \in K$ i $\tilde{\alpha}(r) = \alpha(r)$ po definiciji homomorfizma $\bar{\cdot}$.

Pretpostavimo sada da je $\overline{g_0}$ konstanta. Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $\overline{g_0} = 1_L$ jer je $I = \langle c\rangle = \langle 1\rangle$ za svaku konstantu $c \in L$.

Onda je $g_0 = 1_R + a_1T + ... + a_mT^m$, za $a_i \in \mathfrak{p}$, i $g_0(x) = 0$ po definiciji ideala I i J.

Analogno za x^{-1} dobijemo $f_0 = 1_R + b_1T + ... + b_mT^m$ za neke $b_i \in \mathfrak{p}$. Vrijedi $g_0(x) = 0$ i $f_0(x^{-1}) = 0$, pa imamo:

$1 + b_1x^{-1} + ... + b_mx^{-m} = 0,$

$1 + a_1x + ... + a_nx^n = 0.$

Pretpostavimo da su gornje jednakosti takve da su m i n minimalni te da je $m \leq n$.

Množenjem prve jednakosti s a_nx^{n-m} i oduzimanjem od druge dobivamo:

$0 = a_nx^n + ... + a_1x + 1 - a_nx^{n-m}(x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m).$

Ako je $m < n$, onda je gornji izraz jednak $1 + c_1x + ... + c_kx^k$ za neke $c_i \in \mathfrak{p}$ i $k < n$, što je kontradikcija s minimalnošću od n.

Ako je pak $m = n$, onda je gornji izraz jednak $(1 - a_nb_m) + c_1x + ... + c_kx^k$ za $c_i \in \mathfrak{p}$ i $k < n$.

Budući da je R lokalan, $\mathfrak{p}$ je maksimalan ideal, pa iz $a_n b_m \in \mathfrak{p}$ slijedi da je $1 - a_n b_m$ invertibilan u R. Neka mu je $r \in R$ inverz. Tada iz $0 = (1 - a_n b_m) + c_1 x + ... + c_k x^k$ množenjem s r dobivamo $0 = 1 + (rc_1)x + ... + (rc_k)x^k$ i kontradikciju kao i u prvom slučaju. $\square$

Lema 2.38. *Neka je F polje, $R \subseteq F$ potprsten, K algebarski zatvoreno polje i $\alpha : R \to K$ homomorfizam prstena. Tada postoji maksimalan potprsten $R_0 \subseteq F$ na koji se α proširuje i za njega vrijedi: za svaki $x \in F$, $x \neq 0$, je $x \in R_0$ ili $x^{-1} \in R_0$.*

Dokaz. Označimo s $\mathcal{R}$ familiju svih potprstena od F na koje se α proširuje. Tada je $\mathcal{R}$ parcijalno uređen skup skupovnom inkluzijom i neprazan je jer sadrži R.
Uzmimo $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$ lanac u $\mathcal{R}$ i označimo $L = \bigcup_{S \in \mathcal{L}} S$. Tada je očito L gornja međa lanca $\mathcal{L}$ s obzirom na inkluziju. Sada definiramo proširenje $\tilde{\alpha} : L \to K$ od α na sljedeći način: ako je $x \in L$ neki proizvoljan element, onda postoji $S \in \mathcal{L}$ takav da je $x \in S$. Uzmimo maksimalan S iz $\mathcal{L}$ s obzirom na inkluziju koji sadrži x. Po definiciji familije $\mathcal{R}$, α se proširuje do nekog homomorfizma $\beta : S \to K$, pa definiramo $\tilde{\alpha}(x) = \beta(x)$. Budući da ovako definiramo $\tilde{\alpha}$ preko homomorfizama koji su svi proširenja od α, i $\tilde{\alpha}$ će biti proširenje od α. Dakle, postoji proširenje od α na L, pa je i $L \in \mathcal{R}$, to jest, L je maksimum lanca $\mathcal{L}$. Sada po Zornovoj lemi slijedi da i $\mathcal{R}$ sadrži maksimalni element R_0.
Dokažimo sada drugu tvrdnju. Ako je $x \in F$, $x \neq 0$, onda prema Lemi 3.9. postoji $y \in \{x, x^{-1}\}$ takav da se $\tilde{\alpha} : R_0 \to K$ proširuje do homomorfizma $R_0[y] \to K$. No zbog maksimalnosti od R_0 je onda $R_0[y] = R_0$, pa je $x \in R_0$ ili $x^{-1} \in R_0$. $\square$

Definicija 2.39. *Potprsten $R_0 \subseteq F$ iz prethodne Leme nazivamo* valuacijskim prstenom.

Propozicija 2.40. *Ako je F polje i $S \subseteq F$ valuacijski prsten u F, onda je S lokalan prsten s jedinstvenim maksimalnim idealom* $\mathfrak{m} = \{0\} \cup \{x \in F^\times \ : \ x \in S, \ x^{-1} \notin S\}$.

Dokaz. Neka su x, $y \in \mathfrak{m}$. Ako je jedan od njih jednak 0, ili je $x - y = 0$, onda je i razlika $x - y$ očito u S. Inače su $\frac{x}{y}$ i $\frac{y}{x}$ dobro definirani i jedan od njih je po definiciji valuacijskog prstena element od S. Neka je $\frac{x}{y} \in S$.
Kako je $1 \in S$, a S je prsten, slijedi $\frac{x}{y} - 1 = \frac{x-y}{y} \in S$. Iz $x - y \neq 0$ slijedi da je $x - y \in S$ ili $(x-y)^{-1} \in S$.
Kad bi vrijedilo $(x-y)^{-1} \in S$, onda bi vrijedilo i $(x-y)^{-1}\frac{x-y}{y} = \frac{1}{y} = y^{-1} \in S$. No $y \in \mathfrak{m}$, pa je ovo u kontradikciji s definicijom skupa $\mathfrak{m}$. Dakle, $x - y \in S$.

Neka je sada $x \in S$ i $y \in \mathfrak{m}$. Ako je $y = 0$, onda je i $xy = 0 \in \mathfrak{m}$. U suprotnom, pretpostavimo da je $(xy)^{-1} \in S$. Tada je $1 = (xy)(xy)^{-1} = x(y(xy)^{-1})$. Budući da je $y(xy)^{-1}$ po pretpostavci u S, dobili smo da je y invertibilan i $y^{-1} \in S$. No $y \in \mathfrak{m}$, pa je ovo nemoguće. Dakle, $(xy)^{-1} \notin S$, pa mora biti $xy \in S$.

Dakle, $\mathfrak{m}$ je ideal to jedinstveni maksimalni ideal jer $x \in S \setminus \mathfrak{m}$ povlači $x^{-1} \in S$, pa je x invertibilan u S. $\square$

Definicija 2.41. *Neka je R potprsten polja F. Kažemo da je $x \in F$* integralni (cijeli) element *nad R ako postoji normirani polinom $f \in R[x]$ takav da je $f(x) = 0$.*

Definicija 2.42. *Neka je prsten S proširenje prstena R unutar polja F. Kažemo da je S* integralan *nad R ako mu je svaki element integralan nad R.*

Lema 2.43. *Neka je R potprsten polja F i R_0 valuacijski prsten. Tada za svako integralno proširenje $R \subseteq S \subseteq F$ vrijedi $S \subseteq R_0$.*

Nadalje, za svako algebarski zatvoreno polje K i homomorfizam prstena $\alpha : R \to K$, postoji proširenje $\tilde{\alpha} : S \to K$ od α.

Dokaz. Neka je $R \subseteq S \subseteq F$ neko integralno proširenje i $x \in S$.

Ako je $x = 0$, onda je $x \in R_0$. U suprotnom, budući da je x integralan nad R, postoje $k \geq 1$, $r_0, \ldots, r_{k-1} \in R$ takvi da je $x^k + r_{k-1}x^{k-1} + \ldots + r_1 x + r_0 = 0$. Dijeljenjem s x^{k-1} dobivamo $x = -r_{k-1} - r_{k-2}x^{-1} - \ldots - r_0 x^{-(k-1)}$. Dakle, $x \in R[x^{-1}]$.

Budući da je R_0 valuacijski prsten, imamo $x \in R_0$ ili $x^{-1} \in R_0$ Ako je $x^{-1} \in R_0$, onda zbog $R \subseteq R_0$ slijedi $R[x^{-1}] \subseteq R_0$, pa je $x \in R_0$. Dakle, u svakom slučaju je $x \in R_0$, pa je $S \subseteq R_0$.

Sada je očito da postoji proširenje homomorfizma $\alpha : R \to K$ na S. Naime, znamo iz Leme 3.10. da postoji maksimalno proširenje $\tilde{\alpha} : R_0 \to K$ od α, pa je traženo proširenje samo restrikcija $\tilde{\alpha}|_S$. $\square$

Sada nas zanima kakvu strukturu ima skup svih integralnih elemenata nad R. Da bismo to saznali, najprije dajemo jednu karakterizaciju integralnih elemenata.

Definicija 2.44. *Neka je R prsten s jedinicom.* Lijevi R-modul *je Abelova grupa $(M, +)$ zajedno s operacijom $\cdot : R \times M \to M$ tako da za sve $r,\ s \in R$, $x,\ y \in M$ vrijede sljedeće relacije:*

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$

- $(r+s)\cdot x = r\cdot x + s\cdot y$
- $(rs)\cdot x = r\cdot(s\cdot x)$
- $1\cdot x = x.$

M je konačnogenerirani R-modul ako postoje elementi $x_1,...,x_n \in M$ takvi da je evaluacijski homomorfizam $R[T_1,...,T_n] \to M$, $T_i \mapsto x_i$ epimorfizam.

Lema 2.45. *Neka je F polje i $R \subseteq F$ potprsten. Element $x \in F$ je integralan nad R ako i samo ako postoji konačnogeneriran R-modul $(0) \neq M \subseteq F$ takav da je $xM \subseteq M$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \in F$ integralan nad R. Tada postoji normirani polinom $g(T) = T^l + r_{l-1}T^{l-1} + ... + r_1T + r_0 \in R[T]$ takav da je $g(x) = 0$. Definiramo $M := R[x]$ (slika evaluacijskog homomorfizma $R[T] \to F$, $T \mapsto x$). Tada je M R-modul i $M = R + Rx + ... + Rx^{l-1}$. Naime, za $f \in R[T]$ iz Euklidovog algoritma dijeljenja dobivamo $f(T) = q(T)g(T) + r(T)$, za $q,r \in R[T]$ i $\deg r < l$. Onda je $f(x) = q(x)g(x) + r(x) = r(x) \in R + Rx + ... + Rx^{l-1}$. Dakle, $M \subseteq R + Rx + ... + Rx^{l-1}$, a obratna inkluzija vrijedi jer je $R \subseteq M$ i $x \in M$. Sada je očito da je M R-modul.
Nadalje, $xM \subseteq M$ jer za svaki $m \in M$ postoji $f \in R[T]$ takav da je $m = f(x)$, pa je $xm = xf(x)$ što je rezultat evaluacije polinoma $Tf(T) \in R[T]$ u x. Dakle, $xm \in M$.
Obratno, neka je $(0) \neq M \subseteq F$ konačnočenerirani R-modul takav da je $xM \subseteq M$. Onda postoje $v_1,...,v_n \in M$, $v_i \neq 0$, takvi da je $M = Rv_1 + ... + Rv_n$, pa je $xM \subseteq M$ ako i samo ako je $xv_i \in M$, $\forall i = 1,...,n$. Dakle, svaki xv_i možemo zapisati kao $xv_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j$, za neke $a_{ij} \in R$, $\forall i = 1,...,n$.
Ekvivalentno, ovo možemo zapisati kao sljedeći sustav jednadžbi u nepoznanicama $v_1,...,v_n$:

$$\begin{cases} (x-a_{11})v_1 + (-a_{12})v_2 + \cdots + (-a_{1n})v_n = 0 \\ (-a_{21})v_1 + (x-a_{22})v_2 + \cdots + (-a_{2n})v_n = 0 \\ \quad\vdots \\ (-a_{n1})v_1 + (-a_{n2})v_2 + \cdots + (x-a_{nn})v_n = 0 \end{cases}$$

Znamo da ovaj sustav ima netrivijalno rješenje $(v_1,...,v_n)$, pa je pripadna determinanta sustava jednaka 0. Razvojem determinante

$$\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x-a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

dobivamo normirani polinom iz $R[T]$ čiji je x korijen. Dakle, x je integralni element nad R. □

Korolar 2.46. *Skup svih integralnih elemenata $x \in F$ nad prstenom R je potprsten u F.*

Dokaz. U dokazu koristimo karakterizaciju integralnih elemenata iz Leme 3.17.
Ako su x i y integralni nad R, onda postoje konačnogenerirani podmoduli $M, N \subseteq F$ takvi da je $xM \subseteq M$ i $yN \subseteq N$. Budući da su M i N konačnogenerirani, postoje $v_1, ..., v_n \in F$ i $w_1, ..., w_m \in F$ takvi da je $M = Rv_1 + ... + Rv_n$, a $N = Rw_1 + ... + Rw_m$. Onda je $MN = Rv_1w_1 + Rv_1w_2 + ... + Rv_nw_m$ konačnogenerirani podmodul od F generiran elementima v_iw_j, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$, te iz $xM \subseteq M$ i $yN \subseteq N$ slijedi $xMN \subseteq MN$ i $yMN \subseteq MN$. Onda je i $(x \pm y)MN \subseteq MN$ i $xyMN \subseteq MN$, pa po obratu Leme 3.17. slijedi da skup svih integralnih elemenata nad R ima strukturu prstena. □

Definicija 2.47. *Prsten svih integralnih elemenata iz F nad R zove se* integralni zatvarač od R u F.

Sada tvrdnju Leme 3.15. možemo izreći ovako:
Integralni zatvarač od R u F je sadržan u $\bigcap_{R_0 \supseteq R} R_0$, gdje presjek ide po valuacijskim prstenima R_0 of F.
Jednakost vrijedi ako je $R \subseteq F$ već lokalan prsten.
Preostaje nam dokazati još jedan rezultat kako bismo mogli izreći i dokazati Nullstellensatz:

Propozicija 2.48. *Neka su A i B integralne domene, $B \subseteq A$ i neka je A konačnogenerirana B-algebra. Tada za svaki $0 \neq f \in A$ postoji $0 \neq g \in B$ takav da vrijedi: za svako algebarski zatvoreno polje K i homomorfizam prstena $\alpha : B \to K$ takav da je $\alpha(g) \neq 0$, postoji proširenje $\tilde{\alpha} : A \to K$ od α takvo da je $\tilde{\alpha}(f) \neq 0$.*

Dokaz. Ako je F polje razlomaka od A, onda imamo $B \subseteq A \subseteq F$. A je konačnogenerirana B-algebra, pa postoje elementi $x_1,...,x_n \in A$ takvi da je $A = B[x_1,...,x_n]$. Dokaz provodimo indukcijom po broju generatora.

Pretpostavimo da je $A = B[x]$, $x \in A$ i neka je $f \in A$, $f \neq 0$ proizvoljan element. Neka je E polje razlomaka od B. Onda je $E \subseteq F$. Razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj: x je transcendentan nad E

Tada je $A = B[x] \cong B[T]$, pa je $F = E(T)$ polje racionalnih funkcija. Uzeli smo $f \in A$, pa je $f = b_0 + b_1T + ... + b_mT^m$ i $b_m \neq 0$ jer $f \neq 0$. Definiramo $g := b_m \in B$.

Neka je $\alpha : B \to K$ bilo koji homomorfizam. Onda imamo kanonsko proširenje $\bar{\cdot} : B[T] \to K[T]$, $c_0 + c_1T + ... + c_kT^k \mapsto \alpha(c_0) + \alpha(c_1)T + ... + \alpha(c_k)T^k$. Sada traženo proširenje $\tilde{\alpha} : A \to K$ definiramo na sljedeći način: ako je $\alpha(g) = \alpha(g_m) \neq 0$, onda polinom $\alpha(b_0) + \alpha(b_1)T + ... + \alpha(g_m)T^m$ nije nul-polinom, pa postoji $\lambda \in K$ takav da je $\alpha(b_0) + \alpha(b_1)\lambda + ... + \alpha(g_m)\lambda^m \neq 0$. Sada definiramo: $\tilde{\alpha} : A \to K$ sa $\tilde{\alpha}(a_0 + a_1T + ... + a_kT^k) = \alpha(a_0) + \alpha(a_1)\lambda + ... + \alpha(a_k)\lambda^k$. Očito $\tilde{\alpha}$ proširuje α, a iz definicije g i λ slijedi da je $\tilde{\alpha}(f) \neq 0$.

2. slučaj: x je algebarski nad E

Budući da je $A = B[x]$ i x algebarski nad E, slijedi da je A algebarski nad E. Posebno, f je algebarski nad E. To znači da postoje $a_1,...,a_l,b_1,...,b_l \in B$ takvi da su $a_l,b_1,...,b_l \neq 0$ i $\sum_{i=1}^{l} \frac{a_i}{b_i} f^i = 0$. Množenjem s $b_1...b_l$ dobivamo $\sum_{i=1}^{l} b'_i f^i = 0$, za neke $0 \neq b'_i \in B$. Množenjem s $(b'_l)^{l-1}$ konačno dobivamo $(b'_l f)^l + \sum_{i=1}^{l-1} b''_i (b'_l f)^i$, za neke $b''_i \in B$.

Dakle, $b'_l f$ je integralan nad B. Budući da je svaki $b \in B$ integralan nad B, a integralni elementi čine prsten, i $bb'_l f$ je integralan nad B.

Budući da je f algebarski nad E i $f \neq 0$, slijedi da je i f^{-1} algebarski nad E. također, x je po pretpostavci algebarski nad E, pa i za njih možemo provesti isti postupak. Slijedi da možemo naći $g \in B$, $g \neq 0$, takav da su oba gx i gf^{-1} integralni nad B.

Neka je sada $\alpha : B \to K$ homomorfizam prstena i $\alpha(g) \neq 0$. Iz univerzalnog svojstva lokalizacije slijedi da se α proširuje do homomorfizma $\alpha : B[g^{-1}] \to K$ sa $\alpha(\frac{b}{g^k}) = \frac{\alpha(b)}{(\alpha(g))^k}$. gx i gf^{-1} su integralni nad B, pa su integralni i nad $B[g^{-1}]$. Onda je prsten $B[g^{-1}][gx, gf^{-1}]$ integralan nad $B[g^{-1}]$, pa po Lemi 3.15. postoji proširenje $\tilde{\alpha} : B[g^{-1}][gx, gf^{-1}] \to K$ od α. Uočimo, $x \in B[g^{-1}][gx, gf^{-1}]$, pa je i $A \subseteq B[g^{-1}][gx, gf^{-1}]$, pa restrikcijom $\tilde{\alpha}|_A$ dobivamo traženo proširenje. Vidimo također da je $f^{-1} \in$

$B[g^{-1}][gx, gf^{-1}]$, pa je $\tilde{\alpha}(f^{-1})$ dobro definiramo. Zbog $f \in A$ je $\tilde{\alpha}(f)$ također dobro definirano, pa imamo $1 = \tilde{\alpha}(ff^{-1}) = \tilde{\alpha}(f)\tilde{\alpha}(f^{-1})$, pa $\tilde{\alpha}(f) \neq 0$. Time je dokazana baza infukcije.

Pretpostavimo sada da imamo $n > 1$ generatora. Onda definiramo $B' = B[x_1, ..., x_{n-1}] \subseteq A$. Po pretpostavci indukcije, za njega postoji $g_n \in B'$ koji zadovoljava tvrdnju propozicije. Dalje, promatrajući $B[x_1, ..., x_{n-2}]$ i $f = g_n$, po pretpostavci indukcije nalazimo g_{n-1} koji zadovoljava tvrdnju propozicije. U konačno mnogo koraka dolazimo do $g \in B$ koji zadovoljava tvrdnju propozicije.

$\square$

Napomena 2.49. *Za konačnogeneriranu K-algebru A, s* $\max A$ *označavamo skup svih maksimalnih ideala u A, a s* $Hom_{K-alg}(A, K)$ *skup svih K-linearnih homomorfizama* $A \to K$.

Sada možemo dokazati novu verziju Nullstellensatza pomoću teorije K-algebri.

Teorem 2.50. *Neka je K algebarski zatvoreno polje i A konačnogenerirana K-algebra. Tada vrijedi:*

1. $\psi \mapsto \ker \psi$ *je bijekcija između* $Hom_{K-alg}(A, K)$ *i* $\max(A)$
2. *Ako je* $I \supset A$ *pravi ideal, onda postoji* $\psi : A \to K$ *takav da je* $I \subseteq \ker \psi$
3. *za* $A = K[T_1, ..., T_n]$ *i* $I \subset A$ *pravi ideal je* $\mathcal{Z}(I) \neq 0$.

Dokaz. 1. Neka je $\psi \in Hom_{K-alg}(A, K)$. Zbog K-linearnosti (to jest, zato što se K ulaže u A) je ψ epimorfizam, pa iz prvog teorema o izomorfizmu slijedi da je $A/\ker \psi \cong K$. Budući da je K polje, iz karakterizacije maksimalnih ideala slijedi da je $\ker \psi$ maksimalan ideal. Zato je gornje preslikavanje dobro definirano.

Neka su ψ_1, $\psi_2 \in Hom_{K-alg}(A, K)$. A je K-algebra, pa je i vektorski prostor nad K. Zato imamo rastav $A = \ker \psi_1 + K \cdot 1_A$. Primijetimo, zbog K-linearnosti od ψ_1 je $\psi_1(k \cdot 1_A) = k \cdot 1 = k$, pa je $\ker \psi_1 \cap K \cdot 1_A = \{0\}$. Zato je gornja suma direktna, pa za svaki $a \in A$ imamo jedinstveni rastav $a = x + \lambda \cdot 1_A$, gdje je $x \in \ker \psi_1$, $\lambda = \psi_1(a) \in K$. Ako sada pretpostavimo da je $\ker \psi_1 = \ker \psi_2$, onda je $\psi_2(a) = \psi_2(x) + \psi_2(\lambda \cdot 1_A) = \lambda = \psi_1(a)$. Dakle, $\psi_1 = \psi_2$, pa smo dokazali injektivnost.

Za dokaz surjektivnosti, uzmimo $\mathfrak{m} \in \max(A)$. Tada je $L := A/\mathfrak{m}$ polje, a budući da je A K-algebra, i L je K-algebra, pa se K ulaže u L. Također, L je konačnogenerirana jer je A konačnogenerirana K-algebra.

Budući da svaki homomorfizam prstena $L \to K'$ u proizvoljno algebarski zatvoreno polje K' preslikava 1_L u $1_{K'}$, po Prop 3.17. za 1_L postoji $0 \neq g \in K$ takav da se svaki homomorfizam $\alpha : K \to K'$ za koji je $\alpha(g) \neq 0$ proširuje do homomorfizma $\tilde{\alpha} : L \to K'$.

Posebno, za $K' = K$ i $\alpha = id_K$, postoji homomorfizam $\tilde{\alpha} : L \to K$ koji fiksira sve točke iz K. Prop.3.17. nam daje samo da je $\tilde{\alpha}$ homomorfizam prstena, ali zato što $\tilde{\alpha}$ proširuje id_K, on je i K-linearan, pa se zapravo radi o homomorfizmu K-algebri, to jest $\tilde{\alpha} \in Hom_{K-alg}(L,K)$.

Onda je kompozicija $A \xrightarrow{\text{kanonski epi.}} L \xrightarrow{\tilde{\alpha}} K$ u $Hom_{K-alg}(A,K)$ i jezgra mu je $\mathfrak{m}$. Dakle, preslikavanje $\psi \mapsto \ker\psi$ je bijekcija.

2. Svaki netrivijalan ideal je sadržan u nekom maksimalnom idealu (vidi [7]), a dokazali smo u 1. da su svi maksimalni ideali oblika $\ker\psi$, za $\psi \in Hom_{K-alg}(A,K)$.

3. Svaki $\phi \in Hom_{K-alg}(K[T_1,...,T_n],K)$ je potpuno određen djelovanjem na $T1,...,T_n$, pa je $Hom_{K-alg}(K[T_1,...,T_n],K) \equiv K^n$.

Ako je $I \subset K[T_1,...,T_n]$ pravi ideal, onda po 2. postoji $c \in K^n$ i evaluacija $\phi_c : f \mapsto f(c)$ takva da je $I \subseteq \ker\phi_c$. Slijedi da je $f(c) = 0$, za svaki $f \in I$, pa je $c \in \mathcal{Z}(I)$. □

Iz ove verzije Nullstellensatza slijedi da za svaku K-algebru A možemo identificirati $\max(A)$ i $Hom_{K-alg}(A,K)$. Ako označimo $X := \max(A) \equiv Hom_{K-alg}(A,K)$, onda za svaki $f \in A$ možemo definirati $f : X \to K$, $f(x) = x(f)$. Time dobivamo pridruživanje $A \to Funk(X,K)$ i zanima nas kada će to pridruživanje biti injektivno.

Jezgra ovog preslikavanja je $\{f \in A : f(x) = 0,\ \forall x \in X\} = \{f \in A : x(f) = 0,\ \forall x \in X\} = \{f \in A : f \in \ker x,\ \forall x \in X\}$, a to je upravo presjek svih maksimalnih ideala od A, te je gornje preslikavanje injektivno ako i samo ako mu je jezgra trivijalna.

Lema 2.51. *Za konačnogeneriranu K-algebru A i $X = Hom_{K-alg}(A,K)$ vrijedi $f \in \bigcap_{\psi\in X} \ker\psi$ ako i samo ako je f nilpotentan element.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f nilpotentan. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $f^k = 0$. Onda je za svaki $\psi \in X$, budući da je ψ homomorfizam K-algebri, $\psi(f)^k = \psi(f^k) = \psi(0) = 0$, pa je $\psi(f) = 0$. Dakle, $f \in \ker\psi$.

Obratno, pretpostavimo da f nije nilpotentan. Tada skup $S := 1, f, f^2, ...$ ne sadrži 0 i to je multiplikativan skup. Zato možemo promatrati lokalizaciju $S^{-1}A = A_f$. Primijetimo: A_f je K-algebra jer imamo ulaganje $K \hookrightarrow A \hookrightarrow A_f$, $\lambda \mapsto \frac{\lambda}{1}$. Nadalje, A_f je konačnogenerirana jer ako je A konačnogenerirana elementima $x_1, ..., x_n$, onda je A_f generirana s $\frac{x_1}{1}, ..., \frac{x_n}{1}, \frac{1}{f}$. Također, $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$ (jer $\frac{1}{1} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\ f^k(1-0) = 0$ što je suprotno našoj pretpostavci.

Svaki neprazan prsten ima maksimalan ideal ([7]), pa iz Nullstellensatza slijedi da je i $Hom_{K-alg}(A_f, K)$ neprazan skup. Uzmimo neki $\psi \in Hom_{K-alg}(A_f, K)$ i gledamo kompoziciju $A \hookrightarrow A_f \xrightarrow{\psi} K$, $x \mapsto \frac{x}{1} \mapsto \psi(\frac{x}{1})$. To je neki morfizam ϕ iz $Hom_{K-alg}(A, K)$, pa je po pretpostavci $f \in \ker\phi$. slijedi $0 = \phi(f) = \psi(\frac{f}{1})$. Konačno imamo $1 = \psi(1) = \psi(\frac{f}{1}\frac{1}{f}) = \psi(\frac{f}{1})\psi(\frac{1}{f}) = 0$ te smo došli do kontradikcije. Dakle, f mora biti nilpotentan. $\square$

Sjetimo se Definicije 3.4.: K-algebra A je reducirana ako A nema nilpotentnih elemenata različitih od 0. Sada gornja razmatranja možemo rezimirati ovako:

$A \to Funk(X, K)$ je ulaganje ako i samo ako je A reducirana K-algebra.

U tom slučaju možemo smatrati da je A sadržana u $Funk(X, K)$.

Sjetimo se, kao posljedicu prvog Nullstellensatza dobili smo bijekciju $\mathbb{A}^n \cong \max(K[T_1, ..., T_n])$ (jedan od Korolara nakon *Nullstellensatza*). Sada ćemo pokazati da na isti način možemo rekonstruirati bilo koji zatvoreni skup $X \subseteq \mathbb{A}^n$ ako znamo njegov skup regularnih funkcija $K[X] = K[T_1, ..., T_n]/I(X)$.

Teorem 2.52. *Neka je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ zatvoren skup i $K[X]$ skup svih regularnih funkcija na X. Tada je $X \cong Hom_{K-alg}(K[X], K) \equiv \max(K[X])$.*

Dokaz. Definiramo preslikavanje $X \ni x \mapsto ev_x \in Hom_{K-alg}(K[X], K)$, gdje je $ev_x(f) = f(x)$, $\forall f \in K[X]$. Ono je injektivno jer za $x, y \in X$, $x \neq y$, postoji $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $x_i \neq y_i$. Onda uzmemo polinom $T_i \in K[X]$ i imamo $ev_x(T_i) = x_i \neq y_i = ev_y(T_i)$, pa je $ev_x \neq ev_y$. Nadalje, preslikavanje je surjektivno: za $\psi \in Hom_{K-alg}(K[X], K)$ promatramo kompoziciju kanonskog epimorfizma $K[T_1, ..., T_n] \xrightarrow{p} K[X]$, $P \mapsto (y \mapsto P(y)\ :\ y \in X)$ sa $K[X] \xrightarrow{\psi} K$. Sada smo dobili homomorfizam K-algebri $K[T_1, ..., T_n] \to K$, pa po Korolaru *Nullstellensatza* postoji $x \in \mathbb{A}^n$ takav da je $\psi \circ p = ev_x$, to jest $(\psi \circ p)(P) = P(x)$, za svaki $P \in K[T_1, ..., T_n]$. Zbog kompozicije s p imamo $P(x) = ev_x(P) = 0$ za svaki $P \in I(X)$, pa je $x \in \mathcal{Z}(I(X)) = X$ (zadnja jednakost slijedi iz prvog Nullstellensatza). $\square$

Vratimo se na proizvoljnu konačnogeneriranu K-algebru A i $X = \max(A)$. Ranije smo uveli topologiju na $\mathbb{A}^n$,a sada želimo uvesti topologiju i na X.

Definicija 2.53. *Neka je $I \subseteq A$ ideal. Definiramo $\mathcal{Z}_X(I) = \{x \in X \ : \ f(x) = 0, \ \forall f \in I\}$ zatvoreni skup u X.*

Potpuno isto kao u slučaju $A = K[T_1, ..., T_n]$ dokaže se da je $\mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(IJ)$ i $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{Z}(I_\lambda) = \mathcal{Z}(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)$, pa smo stvarno definirali topologiju na X. I u ovom slučaju imamo korespondenciju između zatvorenih skupova u X i ideala u A.
Naime, za svaki ideal $I \subseteq A = K[X]$, praslika $pi^{-1}(I) = J$ po kvocijentnom preslikavanju $\pi : K[T_1, ..., T_n] \to A$ je ideal u $K[T_1, ..., T_n]$. Štoviše, ako je I prost (maksimalan, radikalan), onda je i J prost (maksimalan, radikalan) (vidi [7]). To preslikavanje $I \mapsto \pi^{-1}(I)$ je bijekcija sa skupa ideala u A na skup ideala u $K[T_1, ..., T_n]$ koji sadrže $I(X)$. Sada iz veze $\mathcal{Z}_{\mathbb{A}^n}(J) = \mathcal{Z}_X(I)$ i Nullstellensatza za $\mathbb{A}^n$ dobivamo da je preslikavanje $I \mapsto \mathcal{Z}_X(I)$ bijekcija između skupa radikalnih ideala u A i zatvorenih skupova u X.

Teorem 2.54. *Neka je A konačnogenerirana i reducirana K-algebra i $I \subseteq A$ ideal u A. Ako $g \in A$ zadovoljava $g(x) = 0$ za svaki $x \in \mathcal{Z}_X(I)$, onda postoji $r \geq 1$ takav da je $g^r \in I$.*

Dokaz. Dokazali smo ranije da je svaka konačnogenerirana i reducirana K-algebra zapravo K-algebra regularnih funkcija na nekom zatvorenom skupu $Y \subseteq \mathbb{A}^n$. Zato možemo uzeti $A = K[Y] = K[T_1, ..., T_n]/I(Y)$.
Nadalje, za svaki ideal $I \subseteq A$ je praslika $J \subseteq K[T_1, .., T_n]$ po kanonskom epimorfizmu $K[T_1, ..., T_n] \to K[Y]$ opet ideal koji je po Hilbertovom teoremu o bazi konačnogeneriran. Očito je $\mathcal{Z}_{\mathbb{A}^n}(J) = \mathcal{Z}(I)$, pa pomoću te relacije problem reduciramo na afini slučaj. Sada tvrdnja slijedi iz afinog Nullstellensatza. $\square$

Ovaj Nullstellensatz za proizvoljnu konačnogeneriranu reduciranu K-algebru A i $X = Max(A)$ ima sličnu važnu posljedicu kao onaj za $\mathbb{A}^n$:

Korolar 2.55. *Preslikavanje $I \mapsto \mathcal{Z}_X(I)$ je bijekcija sa skupa radikalnih ideala u A u skup zatvorenih podskupova od $X = Max(A)$. Inverz ovog preslikavanja zatvorenom skupu $Z \subseteq X$ pridružuje $I(Z) = \{f \in A \ : \ f(z) = 0, \ \forall z \in Z\}$.*

Dokaz. Za proizvoljan radikalan ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ je prema Nullstellensatzu $I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) = Rad\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. I obratno, za proizvoljan zatvoren skup Z u X je $\mathcal{Z}(I(Z)) = Z$. Naime, svaki zatvoren skup je oblika $Z = \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ za neki radikalni ideal $\mathfrak{a}$, pa je $\mathcal{Z}(I(Z)) = \mathcal{Z}(I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}))) = \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = Z$. □

Posebno slijedi da je za zatvoren podskup $Z \subseteq X$, $Z = \mathcal{Z}(I(Z))$.
Vidjeli smo da je svaka konačnogenerirana K-algebra oblika $K[T_1,...,T_n]/J$, za neki ideal $J \subseteq K[T_1,...,T_n]$. Onda su svi ideali $I \subseteq A$ oblika H/J, za neki ideal $H \subseteq K[T_1,...,T_n]$. Po Hilbertovom teoremu o bazi je H konačnogeneriran, pa je i I konačnogenriran. Dakle, svaki ideal od A je konačnogeneriran, što znači da je A Noetherin prsten. Sjetimo se:

Definicija 2.56. *Prsten A je Noetherin ako se svaki rastući niz ideala $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ stabilizira, to jest, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $I_n = I_m$, za svaki $m \geq n$.*

Definicija 2.57. *Topološki prostor X je Noetherin ako se svaki padajući niz zatvorenih skupova stabilizira, to jest, za svaki padajući niz zatvorenih skupova $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $Y_k = Y_n$ za svaki $k \geq n$.*

Primjer 2.58. *Neka je A konačnogenerirana reducirana K-algebra. Tada je $X = Max(A)$ Noetherin topološki prostor.*
Naime, ako je $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$ padajući niz zatvorenih skupova u X, onda je $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \ldots$ rastući niz ideala u Noetherinom prstenu A, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $I(Y_n) = I(Y_{n+1}) = \ldots$. Iz Korolara 3.27. slijedi da je $Y_i = \mathcal{Z}(I(Y_i))$ pa je $Y_n = Y_{n+1} = \ldots$.

Definicija 2.59. *Neka je X bilo koji topološki prostor. Za neprazan zatvoren skup $Y \subseteq X$ kažemo da je reducibilan ako postoje zatvoreni skupovi Y_1, $Y_2 \subseteq X$ takvi da su Y_1, $Y_2 \subsetneq Y$ i $Y = Y_1 \cup Y_2$.*
U suprotnom kažemo da je Y ireducibilan.

Sada navodnimo neka osnovna svojstva Noetherinih topoloških prostora koja će nam kasnije biti korisna za dokaz Noetherinosti nekih novih topoloških prostora.

Propozicija 2.60. *Neka je X topološki prostor. Ako je $X = \bigcup_{i=1}^{l} U_i$, za U_i neprazne otvorene podskupove od X koji su Noetherini topološki prostori u relativnoj topologiji naslijeđenoj od X, onda je i X Noetherin.*

Dokaz. Neka je $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq ...$ beskonačan padajući niz zatvorenih skupova u X. Tada je za svaki $i \in \{1,...,l\}$, $U_i \cap Y1 \supseteq U_i \cap Y_2 \supseteq ...$ beskonačan padajući niz zatvorenih skupova u U_i, pa se on stabilizira. Dakle, postoji $r_i \geq 1$ takav da je za sve $r \geq r_i$, $U_i \cap Y_r = U_i \cap Y_{r_i}$. Onda je za $r_0 = \max\{r_1,...,r_l\}$ i $r \geq r_0$, $Y_r = Y_r \cap (\bigcup_{i=1}^{l} U_i) = Y_{r_0} \cap (\bigcup_{i=1}^{l} U_i) = Y_{r_0}$. Dakle, početni niz se stabilizira, pa je X Noetherin. □

Propozicija 2.61. *Neka su X, X' topološki prostori. Tada vrijedi:*

1. *Ako je $U \subseteq X$ otvoren i neprazan i $Y \subseteq X$ ireducibilan te je $Y \cap U \neq \emptyset$, onda je i $Y \cap U$ ireducibilan u relativnoj topologiji na U.*

2. *Ako je $f : X \to X'$ neprekidno preslikavanje i $Y \subseteq X$ ireducibilan, onda je $\overline{f(Y)}$ ireducibilan u X'.*

Dokaz. 1. Pretpostavimo da je $Y \cap U = F_1 \cup F_2$, za F_1, $F_2 \subseteq U$ zatvorene podskupove u relativnoj topologiji na U. To znači da postoje Y_1, $Y_2 \subseteq X$ zatvoreni u X takvio da je $F_i = U \cap Y_i$.

Onda je $Y = Y \cap (X \setminus U) \cup (Y \cap U) = (Y \cap (X \setminus U)) \cup (Y_1 \cap U) \cup (Y_2 \cap U)$, a oni su svi zatvoreni. Budući da je Y ireducibilan, on mora biti jednak nekom od njih.

Ako je $Y \cap (X \setminus U) = Y$, onda je $Y \subseteq X \setminus U$, što je nemoguće jer je $Y \cap U = \emptyset$. Ako je pak $Y = Y_i \cap U$, onda je $Y \cap U = Y_i \cap U = F_i$, iz čega slijedi da je $Y \cap U$ ireducibilan.

2. Neka je $\overline{f(Y)} = Y_1' \cup Y_2'$, za Y_1', $Y_2' \subseteq X'$ zatvorene. Onda je $Y \subseteq f^{-1}(\overline{f(Y)}) = f^{-1}(Y_1') \cup f^{-1}(Y_2')$, pa imamo $Y = (Y \cap f^{-1}(Y_1')) \cup (Y \cap f^{-1}(Y_2'))$. Y je ireducibilan pa je $Y = Y \cap f^{-1}(Y_i')$ za $i = 1$ ili 2. Slijedi $Y \subseteq f^{-1}(Y_i')$, to jest, $f(Y) \subseteq Y_i'$, a Y_i' je zatvoren, pa je $\overline{f(Y)} = Y_i'$. □

Propozicija 2.62. *(Kvazikompaktnosti)*
Neka je X Noetherin topološki prostor, $U \subseteq X$ otvoren i neprazan te $\{U_i : i \in I\}$ otvoreni pokrivač od U. Tada postoji konačan $J \subseteq I$ takav da je $U = \bigcup_J U_j$.

Dokaz. Za svaki konačan podskup $J \subseteq I$ gledamo $F_J = U \setminus (\bigcup_J U_j)$. Ako pretpostavimo da tvrdnja propozicije nije točna, onda je svaki $F_J \neq \emptyset$. Označimo $Z_J = \overline{F_J}$ zatvarač u X. Tada je $Z_J \cap U = F_J$. Naime, F_J je zatvoren u U, pa postoji $T \subseteq X$ zatvoren u X takav da je $F_J = T \cap U \subseteq T$ što povlači $Z_J \subseteq T$. Slijedi $Z_J \cap U \subseteq T \cap U = F_J$.

Sada gledamo $\mathcal{F} = \{Z_J : \emptyset \neq J \subseteq I \text{ konačan}\}$ i tvrdimo da postoji minimalni element u

$\mathcal{F}$. Kada takav ne bi postojao, mogli bismo konstruirati strogo padajući beskonačan lanac $Z_{J_1} \supsetneqq Z_{J_2} \supsetneqq \ldots$ počevši od bilo kojeg Z_{J_1} iz $\mathcal{F}$, no u tom slučaju dobivamo kontradikciju s pretpostavkom da je X Noetherin. Dakle, postoji $Z_{J'}$ minimalni element u $\mathcal{F}$.

Tvrdimo da je $U = \bigcup_{j \in J'} U_j$. U suprotnom, postoji $x \in U \setminus \bigcup_{j \in J'} U_j$. Budući da je $\{U_i : i \in I\}$ otvoreni pokrivač od U, postoji $j_0 \in I$ takav da je $x \in U_{j_0}$ i $j_0 \notin J'$. No onda je $J' \subsetneqq J'' = J' \cup \{j_0\}$, pa je $Z_{J''} \subsetneqq Z_{J'}$ što je u kontradikciji s minimalnošću od $Z_{J'}$. $\square$

Propozicija 2.63. *Neka je X Noetherin topološki prostor i $U \subseteq X$ otvoren i neprazan. Tada je U Noetherin topološki prostor u relativnoj topologiji.*

Dokaz. Neka je $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \ldots$ niz zatvorenih skupova u U. Iz dokaza prethodne propozicije znamo da je $Z_i = \overline{Z_i} \cap U$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ (ovdje je $\overline{Z_i}$ zatvarač u X). Onda iz početne relacije dobivamo da je $\overline{Z_1} \supseteq \overline{Z_2} \supseteq \ldots$ padajući niz zatvorenih skupova u X, pa se on stabilizira. Dakle, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\overline{Z_n} = \overline{Z_{n_0}}$ za svaki $n \geq n_0$. Slijedi da je i $\overline{Z_n} \cap U = \overline{Z_{n_0}} \cap U$, to jest $Z_n = Z_{n_0}$ za svaki $n \geq n_0$ $\square$

Teorem 2.64. *Neka je X Noetherin topološki prostor. Tada za svaki neprazan $Y \subseteq X$ postoje ireducibilni skupovi $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq X$ takvi da je $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$ i $Y_i \subsetneqq Y_j$ za sve $i \neq j$.*

$Y_1, \ldots, Y_n$ zovemo ireducibilnim komponentama od Y i ovaj prikaz je jedinstven do na poredak komponenti.

Dokaz. Definiramo familiju $\mathcal{F} = \{Y \subseteq X \ : \ Y$ zatvoren i neprazan skup koji nije unija konačnog broja ireducibilnih skupova$\}$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{F} \neq \emptyset$ i uzmimo $Y_1 \in \mathcal{F}$. Onda Y_1 nije ireducibilan, ali neprazan je, pa postoje zatvoreni skupovi $Z_1,\ Z_2 \subsetneqq Y_1$ takvi da je $Y_1 = Z_1 \cup Z_2$. Barem jedan Z_i mora biti u $\mathcal{F}$ (u suprotnom Y_1 ne bi bio u $\mathcal{F}$), bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to Z_1, pa stavimo $Y_2 = Z_1$. Ponovimo isti postupak za Y_2 i nalazimo $Y_3 \subsetneqq Y_2$ takav da je $Y_3 \in \mathcal{F}$. Induktivno dobivamo strogo padajući niz $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $\mathcal{F}$, pa se on ne stabilizira. No to je nemoguće jer je X Noetherin topološki prostor. Dakle, $\mathcal{F} = \emptyset$, pa svaki neprazan zatvoren skup $Y \subseteq X$ ima rastav na ireducibilne komponente.

Dokažimo još da je taj rastav jedinstven. Pretpostavimo da imamo dva rastava na ireducibilne komponente, $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k = Y_1' \cup \ldots \cup Y_l'$. Vrijedi $Y_1 = Y_1 \cap Y = Y_1 \cap (Y_1' \cup \ldots \cup Y_l') = (Y_1 \cap Y_1') \cup \ldots \cup (Y_1 \cap Y_l')$. Budući da je Y_1 ireducibilan, postoji $i \in \{1, \ldots, l\}$ takav da je $Y_1 = Y_1 \cap Y_i'$, pa je $Y_1 \subseteq Y_i'$. Na isti način dobijemo da je $Y_i' \subseteq Y_j$ za neki $j \in \{1,...,k\}$, pa je $Y_1 \subseteq Y_j$. Pretpostavili smo da niti jedna ireducibilna komponenta nije sadržana u drugoj, pa je $j = 1$ i $Y_1 = Y_i'$. Onda vrijedi $Y_2 \cup ... \cup Y_k = Y_1' \cup ... Y_{i-1}' \cup Y_{i+1} \cup ... \cup Y_l'$, pa možemo ponoviti isti postupak. U konačno mnogo koraka iscrpljujemo sve skupove. $\square$

Posebno, za svaku konačnogeneriranu i reduciranu K-algebru A, svaki neprazan zatvoren podskup od $X = Max(A)$ možemo na jedinstven način prikazati kao konačnu uniju ireducibilnih zatvorenih podskupova od X.

Ireducibilnost algebarskog skupa možemo definirati i ovako: neprazan zatvoren skup $Y \subseteq X = Max(A)$ je ireducibilan ako je $I(Y)$ prost ideal u A.

Zaista, definicije su ekvivalentne. Ako pretpostavimo da je Y ireducibilan u smislu Definicije 3.31. te pretpostavimo da $I(Y)$ nije prost ideal, onda postoje $f,\ g \in A$ takvi da je $fg \in I(Y)$, ali $f \notin I(Y)$ i $g \notin I(Y)$. $fg \in I(Y)$ znači da je $f(y)g(y) = 0$ za svaki $y \in Y$, pa je $Y = (Y \cap \mathcal{Z}(f)) \cup (Y \cap \mathcal{Z}(g))$. Kako je Y ireducibilan, vrijedi $Y = Y \cap \mathcal{Z}(f)$ ili $Y = Y \cap \mathcal{Z}(g)$, to jest, $Y \subseteq \mathcal{Z}(f)$ ili $Y \subseteq \mathcal{Z}(g)$, iz čega slijedi da je $f \in I(Y)$ ili $g \in I(Y)$. No to je u kontradikciji s našom pretpostavkom.

Obratno, pretpostavimo da Y nije ireducibilan u smislu definicije 3.31. Tada je $Y = Y_1 \cup Y_2$ za neke zatvorene prave podskupove od Y. Zbog $Y_i \subsetneq Y$ i Nullstellensatza (to jest, bijekcije $Z \mapsto I(Z)$) je onda $I(Y) \subsetneq I(Y_i)$ za $i = 1,2$. No onda postoje $f_i \in I(Y_i) \setminus I(Y)$ pa je $f_1 f_2 = 0$ na cijelom Y što znači da je $f_1 f_2 \in I(Y)$. Dakle, dobili smo kontradikciju s početnom pretpostavkom.

Iz ove karakterizacije odmah slijedi: za konačnogeneriranu i reduciranu K-algebru A, $X = Max(A)$ je ireducibilan ako i samo ako je A integralna domena. Naime, $X = \mathcal{Z}(\{0\})$, pa je X ireducibilan ako i samo ako je $I(X) = \{0\}$ prost ideal, a ovo vrijedi ako i samo ako je A integralna domena.

Dolazimo do definicije jednog od centralnih pojmova algebarske geometrije:

Definicija 2.65. *Neka je A konačnogenerirana reducirana K-algebra. Ako je $X = Max(A)$ ireducibilan, onda za X kažemo da je afina mnogostrukost.*

Definicija 2.66. *Neka je X afina mnogostrukost. Neprazan otvoren skup $U \subseteq X$ naziva se kvazi-afina mnogostrukost.*

Primijetimo, kvazi-afina mnogostrukost je ireducibilan Noetherin topološki prostor u relativnoj topologiji naslijeđenoj od X. Naime, X je ireducibilan, a $U = X \cap U$, pa je prema Prop 3.33. 1.) i U ireducibilan. Nadalje, prema Prop 3.35. je U Noetherin topološki prostor.

Sljedeće pitanje koje se nameće je kako definirati preslikavanje između afinih mnogostrukosti koje poštuje njihovu strukturu. Sjetimo se da smo u ranije vidjeli da se svaka konačnogenerirana i reducirana K-algebra B ulaže u prostor funkcija $Funk(Max(B), K)$. Onda uz identifikaciju K-algebre B i njezine slike po tom ulaganju možemo definirati:

Definicija 2.67. *Neka su $X = Max(A)$ i $Y = Max(B)$ afine mnogostrukosti. Preslikavanje $\alpha : X \to Y$ nazivamo regularnim ako je inducirano preslikavanje $\alpha^* : B \to A$, definirano sa $\alpha^*(f) = f \circ \alpha$ za svaki $f \in B$, homomorfizam K-algebri.*

Vratimo se sada opet na topologiju. Općenito vrijedi:

Propozicija 2.68. *U ireducibilnom topološkom prostoru X, svaka dva neprazna otvorena skupa se sijeku.*

Dokaz. Neka su U, $V \subseteq X$ neprazni i otvoreni. Kada bi vrijedilo $U \cap V = \emptyset$, onda bi bilo $X = U^c \cup V^c$, a U^c i V^c su zatvoreni pravi podskupovi od X, pa smo dobili kontradikciju s ireducibilnošću od X. □

Sjetimo se, za svaki $f \in A$, skup $\mathcal{D}(f) = \{x \in X \,:\, f(x) \neq 0\}$ nazivamo glavnim otvorenim skupom u X. (Zaista, njegov komplement je hiperploha, pa je po definiciji topologije na X zatvoren skup.) Znamo također da otvoreni skupovi tvore bazu topologije na X.

Neka je sada $\alpha : X \to Y$ regularno preslikavanje afinih mnogostrukosti. Ako je $g \in K[Y] = B$ regularna funkcija, onda imamo:

$x \in \alpha^{-1}(\mathcal{D}(g)) \Leftrightarrow \alpha(x) \in \mathcal{D}(g) \Leftrightarrow g(\alpha(x)) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^*(g)(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(\alpha^*(g))$.

Dakle, $\alpha^{-1}(\mathcal{D}(g)) = \mathcal{D}(\alpha^*(g))$, pa slijedi da je α neprekidno preslikavanje.

Dalje nas zanima kako opisati produkt dviju afinih mnogostrukosti. Preciznije, ako su X i Y afine mnogostrukosti te su $A = K[X]$ i $B = K[Y]$ pripadne algebre regularnih funkcija, kako možemo opisati regularne funkcije na produktu $X \times Y$. Odgovor nam daje sljedeći teorem:

Teorem 2.69. *Neka su X i Y afine mnogostrukosti te $A = K[X]$ i $B = K[Y]$ pripadne K-algebre regularnih funkcija. Tada vrijedi:*

1. *$A \otimes_K B$ je konačnogenerirana i reducirana K-algebra*
2. *$X \times Y$ je u bijekciji s $Max(A \otimes_K B)$*
3. *$X \times Y$ je afina mnogostrukost.*

Dokaz. 1. Tenzorski produkt A i B kao vektorskih prostora nad K je vektorski prostor $A \otimes_K B$ čiji je proizvoljni element oblika $\sum_{i=1}^{k} a_i \otimes b_i$ za $k \geq 1$ i $a_i \in A$, $b_i \in B$. (Za detalje konstrukcije tenzorskog produkta vektorskih prostora, čitatelj može pogledati [7])

Na $A \times B$ možemo definirati množenje sa $(a,b) \cdot (a',b') := (aa',bb')$. Ta je operacija bilinearna zbog K-linearnosti množenja u algebrama A i B te zbog definicija zbrajanja i množenja skalarom na kartezijevom produktu $A \times B$. Iz univerzalnog svojstva tenzorskog produkta onda slijedi da postoji operacija množenja na $A \otimes_K B$ definirana na elementarnim tenzorima s $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ i to množenje je K-linearno. Dakle, $A \otimes_K B$ ima strukturu K-algebre.

A i B su konačnogenerirane K-algebre, pa postoje elementi $a_1,...,a_k \in A$ i $b_1,...,b_l \in B$ te epimorfizmi $K[T_1,...,T_k] \to A$, $T_i \mapsto a_i$ i $K[R_1,...,R_l] \to B$, $R_i \mapsto b_i$. Onda gledamo homomorfizam $K[T_1R_1,...,T_iR_j,...,T_kR_l] \to A \otimes_K B$ definiran sa $T_iR_j \mapsto a_i \otimes b_j$. Svaki element od $A \otimes_K B$ može se prikazati kao konačna suma elementarnih tenzora, to jest, elemenata oblika $a \otimes b$, te se a i b mogu prikazati kao konačna linearna kombinacija generatora algebri A i B, koristeći bilinearnost tenzorskog produkta zaključujemo da je $K[T_1R_1,...,T_iR_j,...,T_kR_l] \to A \otimes_K B$ epimorfizam. Dakle, $A \otimes_K B$ je konačnogenerirana.

Dokažimo još da je reducirana. Neka je $c = \sum_{i=1}^{k} \in A \otimes_K B$ nilpotentan element. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $b_1,...,b_k$ linearno nezavisni. (Inače zbog bilinearnosti tenzorskog produkta možemo dobiti novi prikaz od c pomoću linearno nezavisnog podskupa od $\{b_1,...,b_k\}$). Uzmimo proizvoljan maksimalan ideal $\mathfrak{m}$ u A. Promatramo homomorfizam $A \otimes_K B \to A/\mathfrak{m} \otimes_K B \cong K \otimes_K B \cong K$ koji preslikava $a \otimes b \mapsto \overline{a} \otimes b \mapsto \overline{a}b$. Budući da se radi o homomorfizmu algebri, on preslikava nilpotentan element c u nilpotentan element $\sum_{i=1}^{k} \overline{a_i}b$ u B. Budući da je B reducirana K-algebra, jedini nilpotentni element je 0, pa su zbog linearne nezavisnosti generatora od B svi koefijenti $\overline{a_i} = 0$. To znači da su svi $a_i \in \mathfrak{m}$, pa su zbog proizvoljnosti ideala $\mathfrak{m}$ zapravo

$a_i \in J(A) = \bigcap_{\mathfrak{m}\in Max(A)} \mathfrak{m}$, a $J(A) = (0)$ jer je A reducirana. Dakle, $c = 0$, pa je $A \otimes_K B$ reducirana.

2. Prema prvoj tvrdnji teorema i Nullstellensatzu, $Max(A \otimes_K B)$ i $Hom_{K-alg}(A \otimes_K B, K)$ su u bijekciji. Sjetimo se kako smo svaku konačnogeneriranu reduciranu K-algebru $C = K[Z]$ ulagali u prostor $Funk(Z, K)$. Ako to napravimo za A i B te ih identificiramo s njihovim slikama po ovom ulaganju, možemo definirati preslikavanje $X \times Y \ni (x, y) \mapsto ev_{(x,y)} \in Hom_{K-alg}(A \otimes_K B, K)$ sa $ev_{(x,y)}(\sum_{i=1}^k a_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^k a_i(x)b_i(y)$. Ovo preslikavanje je injekcija. Naime, ako je $ev_{(x,y)} = ev_{(x',y')}$, onda posebno imamo (za $b_i = 1$, $\forall i$) $a(x) = a(x')$ za svaki $a \in A$, pa je $x = x'$. Analogno, $b(y) = b(y')$ za svaki $b \in B$, pa je $y = y'$.

Ako uzmemo proizvoljan homomorfizam $\phi : A \otimes_K B \to K$ i promatramo $A \cong A \otimes_K K$ kao podalgebru od $A \otimes_K B$, onda restrikcijom $\phi|_A$ dobivamo homomorfizam iz $Hom_{K-alg}(A, K)$, pa iz Teorema 2.51. slijedi da postoji $x \in X$ takav da je $\phi|_A(a) = a(x)$, za svaki $a \in A$. Slično, postoji $y \in Y$ takav da je $\phi|_B(b) = b(y)$, za svaki $b \in B$. Onda je $\phi(\sum_{i=1}^k a_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^k \phi(a_i)\phi(b_i) = \sum_{i=1}^k a_i(x)b_i(y) = (\sum_{i=1}^k a_i \otimes b_i)(x, y)$. Dakle, $\phi = ev_{(x,y)}$.

3. X i Y su afine mnogostrukosti, pa su ireducibilne, a vidjeli smo ranije da to znači da su A i B integralne domene.

Vidjeli smo u 2. da je $X \times Y \equiv Max(A \otimes_K B)$, pa znamo opisati topologiju na $X \times Y$. $Z \subseteq X \times Y$ je zatvoren ako i samo ako je oblika $\mathcal{Z}(I)$ za neki ideal $I \subseteq A \otimes_K B$. Ireducibilnost od $X \times Y$ dokazujemo u nekoliko koraka:

Pokažimo najprije da je za svaki $x \in X$, $\{x\} \times Y$ ireducibilan. Najprije, $\{x\} \times Y$ je zatvoren jer je zadan kao skup korijena familije $\{a \otimes 1 \ : \ a \in I(\{x\})\}$.

Uzmimo sada proizvoljan $c \in I(\{x\} \times Y)$. To je preslikavanje zadano s $c(x, y) = \sum_{i=1}^k a_i(x)b_i(y)$ za neke $a_i \in A$ i $b_i \in B$. Kao i u prvom dijelu dokaza, možemo uzeti da su b_i međusobno linearno nezavisni. Onda imamo $c(x, \cdot) = \sum_{i=1}^k a_i(x)b_i(\cdot)$ je nulmorfizam iz B jer je $c \in I(\{x\} \times Y)$. Zbog nezavisnosti je onda $a_1(x) = ... = a_k(x) = 0$, pa su $a_i \in \mathfrak{m}_x = I(\{x\})$. Zaključujemo da je $I(\{x\} \times Y) = \mathfrak{m}_x \otimes_K B$. Primijetimo, preslikavanje $c \mapsto c(x, \cdot)$ je epimorfizam iz $A \otimes_K B$ u B s jezgrom $\mathfrak{m}_x \otimes_K B$, pa je $C/\mathfrak{m}_x \otimes_K B \cong B$, a B je integralna domena, pa je $\mathfrak{m}_x \otimes_K B = I(\{x\} \times Y)$ prost ideal. Iz karakterizacije ireducibilnosti slijedi da je $\{x\} \times Y$ ireducibilan skup.

Pretpostavimo sada da je $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$ unija dva zatvorena skupa. Za svaki $x \in X$ je $\{x\} \times Y = ((\{x\} \times Y) \cap Z_1) \cup ((\{x\} \times Y) \cap Z_2)$ unija dva zatvorena skupa, pa je zbog ireducibilnosti, $Y = (\{x\} \times Y) \cap Z_i$ za $i = 1$ ili 2, to jest, $\{x\} \times Y \subseteq Z_i$. Ovo nam omogućava da definiramo skupove $X_i = \{x \in X \ : \ \{x\} \times Y \subseteq Z_i\}$. Vrijedi $X_i = \bigcap_{iy \in Y} \{x \in X \ : \ (x,y) \in Z_i\} = \bigcap_{y \in Y} \{x \in X \ : \ f(x,y) = 0, \ \forall f \in I(Z_i)\}$, pa su X_i zatvoreni kao presjeci zatvorenih skupova. Dakle, $X = X_1 \cup X_2$ je unija dva zatvorena skupa, pa je zbog ireducibilnosti $X = X_i$ za $i = 1$ ili 2, a onda je $X \times Y = Z_i$, pa je i on ireducibilan. $\square$

Ovako definiran produkt afinih mnogostrukosti je zapravo kategorijski produkt u kategoriji afinih mnogostrukosti. Naime, možemo mu pridružiti projekcije: $p_X : X \times Y \to X$ i $p_Y : X \times Y \to Y$. To su regularna preslikavanja jer primjerica za $a \in A = K[X]$ imamo $p_X^*(a)(x,y) = a(p_X(x,y)) = a(x)$, pa je $p_X^*(a)$ očito element iz $K[X \times Y]$ (jer je $a \in K[X]$). Isto tako, za $b \in B$ je $p_X^*(b) \in K[X \times Y]$. Također je iz relacije $p_X^*(a)(x,y) = a(x)$ jasno da su p_X^* i p_Y^* homomorfizmi K-algebri.

Ako je Z također afina mnogostrukost i $\alpha : Z \to X$ i $\beta : Z \to Y$ regularna preslikavanja, onda je s $\gamma : Z \to X \times Y$, $\gamma(z) = (\alpha(z), \beta(z))$ dano jedinstveno regularno preslikavanje takvo da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\exists!\gamma"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_X"] \arrow[r, "p_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Poglavlje 3

Kvaziprojektivne mnogostrukosti

U ovom poglavlju definirat ćemo projektivni prostor, projektivne i kvazi-projektivne mnogostrukosti te regularna preslikavanja na njima. Iznijet ćemo neke značajne teoreme te njihovom primjenom dokazati zanimljiv rezultat: kada iz afine ravnine $\mathbb{A}^2$ izbacimo točku $(0,0)$, dobivena struktura više nije afina mnogostrukost. Štoviše, nije ni izomorfna nijednoj afinoj mnogostrukosti.

Definirajmo prvo relaciju po kojoj ćemo *cijepati* afinu ravninu (bez točke $(0,0)$) kako bismo dobili projektivnu ravninu. Neka su $P = (x_1, \dots, x_n)$, $Q = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^n$ dvije različite točke. *Pravac* kroz točke $P \neq Q$ je skup:

$$PQ \stackrel{def}{=} \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{A}^n \mid t_i = x_i + u(y_i - x_i), 1 \leq i \leq n, \ u \in K\}.$$

Definicija 3.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $\mathbb{A}^{n+1}$ $(n+1)$-dimenzionalni afini prostor. Označimo $O \stackrel{def}{=} (0,0)$. Na skupu $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{O\}$ definiramo relaciju:*

$$P \sim Q \iff O, \ P \text{ i } Q \text{ su na istom pravcu.}$$

Uočimo da je gornja relacija zapravo relacija ekvivalencije, pa imamo sljedeću definiciju:

Definicija 3.2. *Neka je $P = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{O\}$. Definiramo klasu ekvivalencije:*

$$(x_0 : \dots : x_n) = \{(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) | \ \lambda \in K \setminus \{0\}\}.$$

Sada možemo definirati projektivni prostor.

Definicija 3.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Definiramo n-dimenzionalni projektivni prostor:*

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim = \{(x_0 : \dots : x_n) | \ (x_0, \dots, x_n) \ \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{O\}\}.$$

Ovime je jasno definirano i *kanonsko preslikavanje* afinog u projektivni prostor, $(x_0,\dots,x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$. Koordinate $(x_0 : \dots : x_n)(= (tx_0 : \dots : tx_n), \forall t \in K \setminus \{0\})$, nazivamo *homogenim koordinatama*. Uvijek uzimamo da je barem jedan $x_i \neq 0$.

Neka je $f \in K[T_1,\dots,T_n]$ proizvoljan. Lako se pokaže da je tada f oblika

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\alpha T^\alpha, \alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n,\ a_\alpha \in K.$$

(Za sve osim konačno mnogo $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ je $a_\alpha = 0$.)

Preslagivanjem dobijemo:

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha| = m}} a_\alpha T^\alpha \right)}_{=f_m} = f_0 + f_1 + f_2 + \dots,$$

gdje je f_m m-ta homogena komponenta polinoma f.

Definicija 3.4. *f je homogen polinom stupnja homogenosti $m \geq 0$ ako je $f = f_m$. Nulpolinom je homogen svakog stupnja.*

Definicija 3.5. *Ideal $I \subseteq K[T_0,\dots,T_n]$ je homogen, ako za svaki polinom $f \in I$ vrijedi da je $f_m \in I, \forall m \geq 0$.*

Uočimo da, iako u projektivnom prostoru ne znamo evaluirati polinom u nekoj konkretnoj točki, ipak možemo reći poništava li se homogen polinom u nekoj točki projektivnog prostora. Definirajmo prvo što nam znači da se polinom poništava u točki projektivnog prostora.

Definicija 3.6. *Kažemo da se polinom $f \in K[T_1,\dots,T_n]$ poništava u točki $(x_0 : \dots : x_n)$ projektivnog prostora ako vrijedi $f(x_0,\dots,x_n) \neq 0$.*

Uočimo, ako je f homogen stupnja homogenosti ≥ 1, odnosno, ako je f nekonstantan polinom, onda je $f(0,\dots,0) = 0$. Dakle, sada možemo ovako definirati:

Definicija 3.7. *Homogen polinom $f \in K[T_1,\dots,T_n]$ poništava se u točki $(x_0 : \dots : x_n)$ ako i samo ako se poništava na cijelom afinom pravcu koji prolazi kroz O i $((x_0,\dots,x_n)$.*

Uočimo, polinom f se ne poništava u $(x_0 : \dots : x_n)$ ako i samo ako je $f(P) \neq 0$, za svaku točku tog pravca, osim za $P = O$.

Definicija 3.8. *Algebarski skup u* $\mathbb{P}^n$ *je skup* $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *oblika* $X = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_t)$, *gdje su* $f_!, \ldots, f_t$ *homogeni polinomi (ne nužno istog stupnja), pri čemu je*

$$\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_t) = \{(x_0 : \ldots . : x_n) \bigm| f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0, \forall i = 1, \ldots, t\}.$$

Definicija 3.9. *Za homogen, nekonstantan polinom* f, $\mathcal{Z}(f)$ *nazivamo* (projektivnom) hiperplohom.
Skup $D(f) = \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(f)$ *nazivamo* glavnim otvorenim skupom *u* $\mathbb{P}^n$.

Definicija 3.10. *Neka je* $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *bilo koji skup. Definiramo* $I(X)$ *kao ideal generiran svim homogenim polinomima koji se poništavaju na* $X \subseteq \mathbb{P}^n$.

Definicija 3.11. *Za algebarski skup* $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *kažemo da je* ireducibilan *ako je* X *neprazan i* $I(X)$ *prost ideal. Za algebarski skup* $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *kažemo da je reducibilan ako je* X *neprazan i* $I(X)$ *nije prost ideal.*

Navedimo neka svojstva ideala $I(X)$.

Propozicija 3.12. *Neka je* $X \subseteq \mathbb{P}^n$. *Tada vrijedi:*
(1) $I(X)$ *je homogen radikal.*
(2) $I(X)$ *je pravi ideal* $\iff X \neq 0$.
(3) $f \in I(X)$ *je homogen* $\iff f$ *se poništava u svakoj točki od* X.

Definicija 3.13. *Ireducibilan algebarski skup se naziva* projektivna mnogostrukost.

Sada navodimo jedan kriterij ireducibilnosti algebarskog skupa.

Propozicija 3.14. *(Kriterij ireducibilnosti algebarskog skupa)*
Neka je $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *neprazan. Tada je* X *ireducibilan ako i samo ako za sve homogene* $f, g \in K[T_0, \ldots, T_n]$ *vrijedi:*

$$f \cdot g = 0 \text{ na } X \implies f = 0 \text{ na } X \text{ ili } g = 0 \text{ na } X$$

Primjer 3.15. *Neka je* $X = \mathcal{Z}(f)$, f *homogen, nekonstantan, ireducibilan. Tada je* $I(\mathcal{Z}(f))$ *prost ideal, pa je* $f = g^r$, *za neki homogen ireducibilan polinom* g *te* $r \geq 1$.
Zato imamo: $I(\mathcal{Z}(f)) = \langle g \rangle$.

Propozicija 3.16. *Neka je* $\mathfrak{a} \subseteq K[T_0, \ldots, T_n]$ *homogen. Neka je*

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid f(x_0, \ldots, x_n) = 0, \forall f \in \mathfrak{a}, \text{ homogen}\}.$$

Tada vrijedi:

(a) $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_t \rangle$*, gdje su* f_i *homogeni.*

(b) $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_t)$

(c) *Svi algebarski skupovi su oblika* $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$*, gdje je* $\mathfrak{a}$ *homogen ideal.*

Dokaz. (a) Po *Hilbertovu teoremu o bazi* iz poglavlja *Afini prostori i algebarski skupovi* znamo da je $\mathfrak{a} = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$, gdje su g_i neki polinomi iz $K[T_0, \ldots, T_n]$. Jasno je da je $\mathfrak{a} \subseteq \langle h_1, \ldots, h_l \rangle$, gdje su h_i sve homogene komponente svih polinoma g_i. No, ideal $\mathfrak{a}$ je homogen, pa po definiciji sadrži sve h_i, tj. $\mathfrak{a} \supseteq \langle h_1, \ldots, h_l \rangle$, pa tvrdnja slijedi.
(b) Jasno je da je $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_t)$. No, budući da je $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle = \{\sum_{i=1}^m f_i g_i \mid g_i \in K[T_0, \ldots, T_n]\}$, slijedi da je $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \supseteq \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_t)$, pa tvrdnja slijedi.
(c) Ako je $\mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_t)$ algebarski skup, a F_i homogeni polinomi, onda je $\mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_t) = \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$, gdje je $\mathfrak{a} = \langle F_1, \ldots, F_t \rangle$.

□

Pokažimo sada da je radikal homogenog ideala također homogen.

Propozicija 3.17. *Neka je* $\mathfrak{a} \subseteq K[T_0, \ldots, T_n]$ *homogen ideal. Tada je i* $Rad(\mathfrak{a})$ *homogen ideal.*

Dokaz. Po definiciji je $\mathfrak{a}$ homogen ako

$$\forall f \in \mathfrak{a}\ f = f_0 + f_1 + \ldots \Longrightarrow f_i \in \mathfrak{a},\ \forall i,$$

gdje su f_i homogene komponente polinoma f.
Neka je $f \in Rad(\mathfrak{a})$. Tada je $f^t \in \mathfrak{a}$, za neki $t \geq 1$. Neka je $f = f_0 + f_1 + \ldots$ rastav od f na homogene komponenete. Želimo pokazati da je $f_i \in Rad(\mathfrak{a})$.
Ako je $f = 0$, onda je jasno. Pretpostavimo da je $f \neq 0$. Tada možemo zapisati: $f = f_0 + \ldots + f_m,\ f_m \neq 0$. Sada imamo da je: $f^t = (f_0 + \ldots + f_m)^t = f_m^t + \ldots \in \mathfrak{a}$, pa je, zbog homogenosti od $\mathfrak{a}$, $f_m^t \in \mathfrak{a}$, tj. $f_m \in Rad(\mathfrak{a})$.
Dalje nastavljamo indukcijom, $f - f_m \in Rad(\mathfrak{a})$. □

Slično kao u afinom slučaju, može se pokazati: $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \mathcal{Z}(Rad(\mathfrak{a}))$.
Uočimo, ako je $\mathfrak{a} = \langle T_0^{a_0}, T_1^{a_1}, \ldots, T_n^{a_n} \rangle$ homogen za neke $a_i \geq 0$, onda je $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \emptyset$ ili $\{(0, \ldots, 0)\}$.
Sada dajemo projektivnu verziju teorema o nulama, tj, *Nullstellensatza*.

Teorem 3.18. *Preslikavanje $X \mapsto I(X)$ je bijekcija između skupa svih nepraznih algebarskih skupova u $\mathbb{P}^n$ i skupa svih pravih ($\neq \langle T_0, T_1, \ldots, T_n \rangle$) homogenih radikalnih ideala. Inverzno preslikavanje je $\mathfrak{a} \mapsto \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$.*

Dokaz. Neka je $\varphi : \mathbb{A}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$

$$\varphi(x_0, \ldots, x_n) = (x_0 : \ldots : x_n).$$

Uočimo da je $\{(0, \ldots, 0)\}$ zatvoren skup, pa je $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0\}$ otvoren skup u $\mathbb{A}^{n+1}$. Iz rezultata za afini slučaj, znamo da je $I_{af}(\{0, \ldots, 0\}) = \langle T_0, \ldots, T_n \rangle$.
Neka je $X \in \mathbb{P}^n$, $X \neq 0$ algebarski skup. Tada je $X_{af} = \varphi^{-1}(X) \cup \{(0, \ldots, 0)\}$ algebarski skup omeđen s nekim svojim $I_{af}(X_{af})$. Želimo pokazati da je $I_{af}(X_{af}) = I(X)$, tj. da je $I_{af}(X_{af}) \subseteq I(X)$, jer drugi smjer vrijedi po definiciji. Neka je $f \in I_{af}(X_{af})$, $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_m$, $f_m \neq 0$ (slučaj kad je f nulpolinom je trivijalan). Za svaki $(x_0, \ldots, x_n) \in X_{af} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ i za svaki $t \in K \setminus \{0\}$ je

$$(tx_0, tx_1, \ldots, tx_n) \in X_{af} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}.$$

Naime, vrijedi $(x_0 : \ldots : x_n) = (tx_0, \ldots, tx_n)$, pa je $(x_0, \ldots, x_n), (tx_0, \ldots, tx_n) \in \varphi^{-1}(X)$.
Ako je $f = 0$ na X_{af}, za svaki $(x_0, \ldots, x_n) \in X_{af} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, $\forall t \in K \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ vrijedi

$$0 = f(tx_0, \ldots, tx_n) = f_0(x_0, \ldots, x_n) + t f_1(x_0, \ldots, x_n) + \ldots + t^m f_m(x_0, \ldots, x_n),\ \forall t \in K \setminus \{0\}.$$

Budući da je K beskonačan, slijedi

$$f_0(x_0, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Dakle, $f_0, \ldots, f_m = 0$ na $\varphi^{-1}(X)$, tj. $f_0, \ldots, f_m = 0$ na X (po definiciji od φ^{-1}
Zato su $f_0, \ldots, f_m \in I(X)$, pa je i $f = f_0 + \ldots + f_m \in I(X)$.
Neka je $\mathfrak{a}$ homogen radikal. $\mathcal{Z}_{af}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Znamo otprije da vrijedi: $\mathcal{Z}_{af}(\mathfrak{a}) = \emptyset \iff \mathfrak{a} = K[T_0, \ldots, T_n]$. Dakle, $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \{(0, \ldots, 0)\} \iff \mathfrak{a} = \langle T_0, \ldots, T_n \rangle$.
Budući da je $\mathfrak{a} \neq K[T_0, \ldots, T_n], \langle T_0, \ldots, T_n \rangle$, slijede tvrdnje:
(a) $(0, \ldots, 0) \in \mathcal{Z}_{af}(\mathfrak{a})$
(b) $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \cap (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}) \neq 0$
(c) $\varphi(\mathcal{Z}_{af}(\mathfrak{a}) \cap (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$ *(zbog (b))*
(d) $I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) = I_{af}(\varphi^1(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) \cup \{(0, \ldots, 0)\} = I_{af}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$

(e) $X \subseteq \mathbb{P}^n, X \neq 0$ algebarski skup $\Longrightarrow X_{af} = \varphi^{-1}(X) \cup \{(0,\ldots,0)\}$ algebarski skup $I(X) = I_{af}(X_{af}) = X_{af}$.

Dakle,

$$\mathcal{Z}(I(X)) = \varphi(\mathcal{Z}_{af}(I_{af}(X_{af}))) \setminus \{(0,\ldots,0)\} = \varphi(X_{af} \setminus \{(0,\ldots,0)\}) = X,$$

pa smo dokazali tvrdnju.

□

Teorem 3.19. *Na $\mathbb{P}^n$ postoji jedinstvena toplogija čija se familija zatvorenih skupova podudara s familijom algebarskih skupova. Nadalje,*

$$\forall U^{otv} \subseteq \mathbb{P}^n, \forall x \in U, \exists f \text{ homogen takav da } x \in D(f) \subseteq U.$$

Također,

$$\varphi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0,\ldots,0)\} \mapsto P^n$$

je neprekidan.

Gornja topologija je najmanja u kojoj je φ neprekidan.

Uočimo, zatvoren skup $X \subseteq \mathbb{P}^n$ je hiperploha ako je $I(X)$ glavni ideal $\neq K[T_0,\ldots,T_n]$. Također, ako je X proizvoljan skup u $\mathbb{P}^n$ takav da je $I(X) = \langle g \rangle$, gdje je g neki homogen nekonstantan polinom, onda je $I(X)$ je homogen radikal. Iz *projektivnog Nullstellensatza* slijedi da je $\mathcal{Z}(g) = \mathcal{Z}((g)) = X$. Glavni otvoreni skupovi $D(x_i) = \mathbb{P}^n_{x_i \neq 0}$, $0 \leq i \leq n$ su u bijekciji sa $\mathbb{A}^n$. Imamo preslikavanje:

$$(x_0 : \ldots : x_n) \mapsto (\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) \in \mathbb{A}^n.$$

Dakle, ako na $\mathbb{P}^n$, tj. $\mathbb{A}$ imamo topologiju, onda na $D(x_i)$ imamo relativnu topologiju.

Definicija 3.20. *Neka je $f \in K[R_1,...,R_n]$, $f \neq 0$.* Homogenizacija $\widetilde{f} \in K[T_0,...,T_n]$ *je polinom $\widetilde{f} = T_0^{degf} f(\frac{T_1}{T_0},...,\frac{T_n}{T_0})$, evaluacija u polju $K(T_0,...,T_n)$. Vrijedi da je $\widetilde{f} \neq 0$ homogen stupnja $degf$, $T_0 \nmid \widetilde{f}$, $f = \widetilde{f}(1,R_1,...,R_n)$.*

Definicija 3.21. *Neka je $F \in K[T_0,...,T_n]$, homogen, $F \neq 0$.* Dehomogenizacija $\widehat{F} \in K[R_1,...,R_n]$, *je polinom $\widehat{F} = F(1,R_1,...,R_n)$, takav da je $deg\widehat{F} = degF - e$, gdje je e najveći eksponent od T_0 takav da $T_0^e \mid F$ u $K[T_0,...,T_n]$.*

Uočimo, ako je f ireducibilan, onda je $\widetilde{f}$ ireducibilan i nije asociran s T_0. Ako je F ireducibilan i neasociran s T_0, onda je $\widehat{F}$ ireducibilan. Dokaz je dostupan u [13].

Sada ćemo pokazati korespondendciju između glavnih otvorenih skupova $D(x_i)$ i afinog prostora $\mathbb{A}^n$.

Propozicija 3.22. *Bijekcija* $D(x_i) \longrightarrow \mathbb{A}^n$ *je homeomorfizam, za svaki* $0 \leq i \leq n$.

Dokaz. Radi jednostavnosti možemo uzeti da je $i = 0$ (analogno u drugim slučajevima). Neka je $F \in K[R_1, \ldots, R_n]$ polinom. Tada je

$$\tilde{F} = \begin{cases} 0, \ F = 0 \\ T_0^{degF} F(\frac{T_1}{T_0}, \ldots, \frac{T_n}{T_0}), \ F \neq 0 \end{cases}$$

i vrijedi $\widetilde{FG} = \widetilde{F}\widetilde{G}$.

Neka je $f \in K[T_0, \ldots, T_n]$ homogen. Tada je $\widehat{f} = f(1, R_1, \ldots, R_n) \in K[R_1, \ldots, R_n]$ i vrijedi $\widehat{fg} = \widehat{f}\,\widehat{g}$. Veza između ovih dvaju operatora je sljedeća:

(1) $T_0^e(\widetilde{\widehat{f}}) = f$, za neki $e \geq 0$.

(2) $\widehat{\widetilde{F}} = F$.

(3) Neka je $\mathfrak{a} \subseteq K[T_0, \ldots, T_n]$ homogen ideal. Tada je $\widehat{\mathfrak{a}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widehat{f} \mid f \in \mathfrak{a}\}$ ideal u $K[R_1, \ldots, R_n]$. Naime, po definiciji je $\widehat{\mathfrak{a}} \subseteq K[R_1, \ldots, R_n]$ i očito je neprazan jer je $\mathfrak{a}$ po definiciji neprazan. Ako su $\widehat{f}$, $\widehat{g} \in \mathfrak{a}$, onda je $\widehat{f} - \widehat{g} = \widehat{f - g} \in \widehat{\mathfrak{a}}$. Ako je $\widehat{f} \in \mathfrak{a}$ i $g \in K[R_1, \ldots, R_n]$, onda je $\widehat{f}g = \widehat{f}\,\widehat{\widetilde{g}} = \widehat{f\widetilde{g}} \in \widehat{\mathfrak{a}}$. (Ako je $g = 0$, onda trivijalno vrijedi.)

(4) Uz identifikaciju $\mathbb{A}^n \equiv D(x_0)$, za svaki zatvoren $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ takav da $Z \nsubseteq (x_0 = 0)$, vrijedi da je $\underbrace{Z \cap \mathbb{A}^n}_{\text{zatv. u rel.top. na } D(x_0)} = \underbrace{\mathcal{Z}_{af}(\widehat{I(Z)})}_{\text{zatv. u } \mathbb{A}^n}$. Naime, jasno je da je $\mathcal{Z}_{af}(\widehat{I(Z)})$ zatvoren u $\mathbb{A}^n$ jer je po (3) $\widehat{I(Z)}$ ideal u $K[R_1, \ldots, R_n]$.

(5) Neka je $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ zatvoren. Neka je $\mathfrak{a}$ homogen ideal generiran sa $\widetilde{F}$, gdje je $F \in I_{af}(Y)$. Tada je $X \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ zatvoren u $\mathbb{P}^n$, $X \cap \mathbb{A}^n = Y$. Nadalje, $\overline{Y}$ je zatvoren u $\mathbb{P}^n$ te vrijedi $\overline{Y} = X$.

Dokažimo još tvrdnju (5), pa će iz (4) i (5) slijediti tvrdnja propozicije.

Dokaz. Vrijedi da je $X = \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ određen sa $\widetilde{F}(x_0, \ldots, x_n) = 0$, $F \in I_{af}(Y)$, pa slijedi:

$$X \cap \mathbb{A}^n = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0, \ \widetilde{F}(x_0, \ldots, x_n) = 0, \forall F \in I_{af}(X)\} =$$

$$= (BSO\, x_0 = 1,\ svojstvo(2)) =$$

$$= \{(1 : x_1 : \ldots : x_n) \mid F(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ F \in I_{af}(Y)\}$$

$$= \mathcal{Z}_{af}(I_{af}(Y)) = Y.$$

Dakle, $Y = X \cap \mathbb{A}^n \subseteq X$, pa budući da je X zatvoren u $\mathbb{P}^n$, slijedi da je $\overline{Y} \subseteq \overline{X} = X$.
Preostaje nam pokazati drugu nejednakost.
Iz svojstva (4) slijedi da je $\overline{Y} \cap \mathbb{A}^n$ određen sa $\widehat{f} = 0,\ \forall f \in I(\overline{Y})$. Posebno, budući da je $Y \subseteq \overline{Y} \cap \mathbb{A}^n$, slijedi da je $\widehat{f} = 0$ na Y, za svaki $f \in I(\overline{Y})$, tj. $\widehat{f} \in I_{af}(Y), \forall f \in I(\overline{Y})$.
No tada po definiciji ideala $\mathfrak{a}$ slijedi da je $\widetilde{\widehat{f}} \in \mathfrak{a}$, pa postoji $e \geq 0$ (koji ovisi o f), takav da je $f = \widetilde{\widehat{f}} \in \mathfrak{a}$.
Dakle, dokazali smo

$$I(\overline{Y}) \subseteq \mathfrak{a} \Longrightarrow X = \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathcal{Z}(I(\overline{Y})) = (projektivni\ Nullstellensatz) = \overline{Y},$$

tj. $X \subseteq \overline{Y}$, iz čega slijedi $\overline{Y} = X$. □

□

Uočimo da je svaki n-dimenzionalni projektivni prostor također i Noetherin topološki prostor te je stoga rastav u ireducibilne komponente dobro definiran. Naime, iz prethodnog poglavlja znamo da je $\mathbb{A}^n$ Noetherin topološki prostor. Sada, budući da je po dokazu prethodne propozicije $\mathbb{A}^n$ homeomorfan s glavnim otvorenim skupovima $D(x_i)$ te s obzirom da je $\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n D(x_i)$, tvrdnja slijedi.
Iduće definiramo kvaziprojektivnu mnogostrukost te dajemo neke primjere.

Definicija 3.23. Kvazi-projektivna mnogostrukost $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *je otvoren (u relativnoj topologiji), neprazan skup projektivne mnogostrukosti* $\subseteq \mathbb{P}^n$.

Neka je X otvoren skup u Y, gdje je Y ireducibilan algebarski skup u $\mathbb{P}^n$. Očito slijedi i da je Y Noetherin topološki prostor jer je po definiciji zatvoren u $\mathbb{P}^n$. $X = U \cap Y$, gdje je $U \subseteq \mathbb{P}^n$ otvoren, pa je X ireducibilan Noetherin topološki prostor u relativnoj topologiji. Uočimo, budući da je Y zatvoren u $\mathbb{P}^n$, ekvivalentno je biti zatvoren (ireducibilan) u Y i u $\mathbb{P}^n$. Tvrdimo da je $\overline{X}$ također ireducibilan u Y. Naime, ulaganje $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, $x \mapsto x$ je neprekidno. Zato je, po jednoj od prethodnih lema, $\overline{X}$ ireducibilan. Sada je $\overline{X}$ projektivna mnogostrukost jer je zatvoren, neprazan i ireducibilan. Iz $X = U \cap Y$, $U \subseteq \mathbb{P}^n$ otvoren,

slijedi da je $\overline{X} \cap U = \overline{X} \cap Y \cap U = \overline{X} \cap X = X$, pa je X je otvoren u svome zatvaraču kao projektivnom prostoru.
Svaka kvazi-projektivna mnogostrukost je Noetherin topološki prostor, pa je i ireducibilan skup.

Primjer 3.24. (1) *Iz jedne od prethodnih propozicija slijedi da je $\mathbb{A}^n \equiv D(x_0)$ je kvazi-projektivna mnogostrukost.*
(2) *Svaki otvoren neprazan skup u $\mathbb{A}^n$ je otvoren u $\mathbb{P}^n$ i to je kvazi-projektivna mnogostrukost.*
(3) *Afina mnogostrukost Y u $\mathbb{A}^n$ je kvazi-projektivna mnogostrukost. Naime, neka je Y afina mnogostrukost. Tada je $\overline{Y}$ zatvoren u $\mathbb{P}^n$ takav da je $\overline{Y} \cap \mathbb{A}^n = Y$, pa je Y otvoren u $\overline{Y}$. Budući da je Y ireducibilan, a ulaganje $Y \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ neprekidno, slijedi da je $\overline{Y}$ ireducibilan, pa s obzirom da je $\overline{Y}$ projektivan, slijedi da je Y kvazi-projektivna mnogostrukost.*

Definicija 3.25. *Neka je $X \subseteq \mathbb{P}^n$ projektivna mnogostrukost. Skup $S \subseteq X$ je gust ako za svaki homogen $f \in K[T_0, ..., T_n]$ $f = 0$ na S povlači $f = 0$ na X.*

Napomena 3.26. (1) *U ireducibilnom topološkom prostoru, svaka se dva neprazna otvorena skupa sijeku. Naime, neka je Y ireducibilan i neka su $U, V \neq \emptyset$ otvoreni podskupovi od Y. Ako bi bilo $U \cap V = \emptyset$, onda bi bilo $U^c \cup V^c \neq Y$, $U^c, V^c \neq Y$, što je kontradikcija s ireducibilnošću od Y.*
(2) *Neka je X projektivna (ili kvazi-projektivna) mnogostrukost te neka su $f, g \in K[T_1, \ldots, T_n]$ homogeni takvi da je $X \cap D(f), X \cap D(g) \neq \emptyset$. Tada je $X \cap D(f) \cap D(g) = X \cap D(fg) \neq \emptyset$.*
(3) *Neka je Y ireducibilan topološki prostor. Tada je svaki neprazan otvoren skup $U \subseteq Y$ gust u Y, tj. $\overline{U} = Y$. Naime, ako $\overline{U} \neq Y$, onda je $Y = \overline{U} \cup (U \setminus Y)$ zatvoren skup, $\neq Y$.*
(4) *Neka je X projektivna mnogostrukost i neka je $f \in K[T_0, \ldots, T_n]$ homogen. Ako je $X \cap D(f) \neq \emptyset$, onda je D(f) gust u X. Ako je $g \in K[T_0, \ldots, T_n]$ homogen takav da je $g = 0$ na $X \cap D(f)$, onda je $g = 0$ na X, tj. $g \in I(X)$.*

Definicija 3.27. *Neka je $X \subseteq \mathbb{P}^n$ projektivna mnogostrukost. Skup $S \subseteq X$ je gust ako za svaki homogen $f \in K[T_0, ..., T_n]$ $f = 0$ na S povlači $f = 0$ na X.*

Imamo sljedeći test za gustoću:

Propozicija 3.28. *Neka je X kvazi-projektivna mnogostrukost i neka je $\emptyset \neq S \subseteq X$. Tada je S gust u X ako i samo ako za svaki $g \in K[T_0, \dots, T_n]$ homogen*

$$g = 0 \text{ na } S \Longrightarrow g = 0 \text{ na } X.$$

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji homogen polinom g takav da je $g = 0$ na S i $g \neq 0$ na X.
Tada je $S \subseteq \mathcal{Z}(g)$, pa je i $\overline{S} \subseteq \mathcal{Z}(g)$ jer je to zatvoren skup. Budući da je S gust u X, vrijedi da je $\overline{S} = X$, pa je $X \subseteq \mathcal{Z}(g)$, tj. $X = \mathcal{Z}(g)$. Iz toga slijedi da je $X \cap D(g) = \emptyset$. No, po pretpostavci vrijedi da je $X \cap D(g) \neq \emptyset$, pa smo dobili kontradikciju.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Pretpostavimo suprotno, tj, da S nije gust u X. Tada vrijedi $\overline{S} \neq X$, pa postoji zatvoren skup $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ takav da je $Z \cap X = \overline{S}$.
Slijedi da je $\overline{S} = X \cap \mathcal{Z}(I)$, $Z = \mathcal{Z}(I)$, gdje je $I \subseteq K[T_0, \dots, T_n]$ ideal.
No, budući da je $\overline{S} \neq X$, slijedi da postoji homogen polinom $g \in I$ takav da je $g \neq 0$ na X, ali $g = 0$ na S, pa smo dobili kontradikciju. $\square$

3.1 Polje racionalnih funkcija na X

Definicija 3.29. *Neka je $X \subseteq \mathbb{P}^n$ projektivna mnogostrukost. Definiramo skup*

$$\mathcal{O}_X = \Big\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in K[T_0, \dots, T_n] \text{ homogeni istog stupnja}, g \notin I(X) \Big\}.$$

Prisjetimo se pojmova transcedentna baza i stupanj transcedentnosti koji su nam ključni za definiciju dimenzije projektivne mnogostrukosti.

Definicija 3.30. *Neka je $E \subseteq F$ neko proširenje polja. Baza transcedentnosti za F nad E je algebarski nezavisan skup S takav da je F algebarski nad $E(S)$.*

Definicija 3.31. *Neka je $E \subseteq F$ neko proširenje polja. Stupanj transcedentnosti od F nad E je broj elemenata bilo koje baze transcedentnosti za F nad E.*

Prisjetimo se da je $I(X)$ (dobro definiran) ideal generiran homogenim polinomima koji se poništavaju na X. Iz testa za gustoću slijedi da je $I(\overline{X}) = I(X)$ jer za homogen polinom g koji se poništava na X, vrijedi da se poništava i na $\overline{X}$ jer je X gust u $\overline{X}$. Dakle, $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\overline{X}}$.

Označimo

$$\mathfrak{M}_X = \left\{ \frac{f}{g} \mid f,g \text{ } homogeni\ istog\ stupnja,\ f \in I(X),\ g \notin I(X) \right\}.$$

To je jedinstveni maksimalni ideal od $\mathcal{O}_X$. Naime, $\alpha \in \mathcal{O}_X \setminus \mathfrak{M}_X \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{f}{g},\ f,g \notin I(X) \;\Rightarrow\; \alpha^{-1} = \frac{g}{f} \in \mathcal{O}_X$, tj. α je invertibilan.
Iz prethodnih razmatranja vidimo da je i $\mathfrak{M}_X = \mathfrak{M}_{\overline{X}}$.
Zato je

$$K(X) = {}^{\mathcal{O}_X}/_{\mathfrak{M}_X} = {}^{\mathcal{O}_{\overline{X}}}/_{\mathfrak{M}_{\overline{X}}} = K(\overline{X}).$$

Vrijedi da je $K(X)$ konačno generirano proširenje od K kao polje. Ako $X \subsetneqq \mathcal{Z}(T_0) = \langle x_0 = 0 \rangle$, onda je $K(X)$ generiran nad K s $\frac{x_j}{x_0} + \mathfrak{M}_X$, za $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dakle, $K(X)$ ima najviše n generatora nad K.
Važno je uočiti da smo dobili da je $K(X)$ stupnja transcedentnosti najviše n nad K.

Definicija 3.32. *Definiramo dimenziju projektivne mnogostrukosti X kao stupanj transcedentnosti od $K(X)$ nad K.*

Sada kada smo definirali dimenziju projektivne mnogostrukosti možemo na prirodan način razmišljati o projektivnim mnogostrukostima različitih *veličina*. U tom smislu je najjednostavnije prvo definirati projektivne krivulje i plohe.

Definicija 3.33. *Projektivna krivulja u $\mathbb{P}^n$ je 1-dimenzionalna projektivna mnogostrukost u $\mathbb{P}^n$. Projektivna ploha u $\mathbb{P}^n$ je 2-dimenzionalna projektivna mnogostrukost u $\mathbb{P}^n$.*

Definicija 3.34. *Funkcija $\varphi \in K(X)$ je regularna u točki $(a_0 : a_1 : \ldots : a_n) \in X$ ako postoje f,g homogeni polinomi istog stupnja u $K[T_0, \ldots, T_n]$ takvi da je*

1. $\varphi = \frac{f}{g} + \mathfrak{M}_X$

2. $g(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$.

Tada definiramo $\varphi(a_0 : a_1 : \ldots : a_n) = \frac{f(a_0,\ldots,a_n)}{g(a_0,\ldots,a_n)}$.

Lako se vidi da za svaku točku $(b_0 : \ldots : b_n) \in D(g) \cap X$, gdje je $(a_0 : \ldots : a_n) \in X$ vrijedi da je φ regularna u $(b_0 : \ldots : b_n)$ i $(b_0 : \ldots : b_n) = \frac{f(b_0,\ldots,b_n)}{g(b_0,\ldots,b_n)}$, tj skup

$$\{a = (a_0 : \ldots : a_n) \in X \mid \varphi \text{ } regularna\ u\ a\}$$

je otvoren jer sadrži okolinu svake točke, a neprazan je iz definicije od φ.

Može se pokazati da za funkciju $\varphi \in K(X)$ koja je regularna i jednaka nuli na otvorenom skupu U vrijedi da je $\varphi = 0$ na cijelom $K(X)$.

Također, ako je $X \subseteq \mathbb{P}^n$ projektivna mnogostrukost takva da je $X \subsetneqq \langle x_0 = 0 \rangle = \mathcal{Z}(T_0)$, onda je $X_{af} = X \cap D(T_0) \equiv \mathbb{A}^n$ afina mnogostrukost. Također vrijedi da je $K(X)$ izomorfno polju razlomaka algebre regularnih funkcija $K[X_{af}]$. Pritom se misli na definiciju algebre regularnih funkcija kakvu smo definirali u poglavlju $K-algebre$.

Sada dajemo novu definiciju algebre regularnih funkcija.

Definicija 3.35. *Neka je X kvazi-projektivna mnogostrukost, $X \subseteq \mathbb{P}^n$ i neka je $U \subseteq X$ otvoren i neprazan skup. (Dakle, $\overline{U} = \overline{X}$, U je kvazi-projektivna mnogostrukost.)* Algebra regularnih funkcija $K[U]$ *na U je K-algebra*

$$K[U] = \{\varphi \in K(X) \mid \varphi \text{ } regularna \text{ } na \text{ } U\}.$$

Važno je uočiti da ako je U afina mnogostrukost, primjerice $U = X_{af}$, onda se stara i nova definicija od $K[U]$ podudaraju, pa je naša nova definicija dobra.

Propozicija 3.36. *Neka je $X \subseteq \mathbb{P}^n$ projektivna mnogostrukost takva da $X \subsetneqq \langle x_0 = 0 \rangle = \mathcal{Z}(T_0)$. Tada se stara i nova definicija od $K[X_{af}]$ podudaraju.*

Dokaz. Znamo da je $D(T_0) \equiv \mathbb{A}^n$, pa uvodimo koordinate:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_0}, y_2 = \frac{x_2}{x_0}, \ldots, y_n = \frac{x_n}{x_0}.$$

Stara definicija je glasila

$$K[X_{af}] = {}^{K[R_1,\ldots,R_n]}/_{I_{\mathbb{A}^n}(X_{af})}.$$

Znamo da je tada polje $K(X_{af})$ bilo polje razlomaka od ${}^{K[R_1,\ldots,R_n]}/_{I_{\mathbb{A}^n}(X_{af})}$.

Nova definicija glasi

$$K[X_{af}] = \{\varphi \in K(X_{af}) \mid \varphi \text{ } regularno \text{ } na \text{ } X_{af}\}.$$

Neka je $f + I_{\mathbb{A}^n}(X_{af})$, $f \in K[R_1, \ldots, R_n]$ element stare definicije od $K[X_{af}]$.

Tada je

$$f + I_{\mathbb{A}^n}(X_{af}) = \frac{f + I_{\mathbb{A}^n}(X_{af})}{1 + I_{\mathbb{A}^n}(X_{af})} \in K[X_{af}],$$

pa je stara definicija podskup nove definicije.

Obratno, neka je φ regularno na X_{af}. Tada vrijedi $\forall a = (a_1, \ldots, a_n) \in X_{af}$ $\exists$ $f_a, g_a \in K[R_1, \ldots, R_n]$ takvi da

1. $g_a(a) \neq 0$
2. $\varphi = \frac{f_a + I_{\mathbb{A}^n}(X_{af})}{g_a + I_{\mathbb{A}^n}(X_{af})} \in K[X_{af}]$.

Imamo da je $I \subseteq$ (stara definicija od $K[X_{af}]$) ideal generiran sa g_a, $a \in X_{af}$.

Sada je

$$\mathcal{Z}(U) = \{x \in X_{af} \mid f(x) = 0, \forall f \in I\} = \emptyset,$$

jer je

$$\forall a \in X_{af},\ g_a(a) \neq 0,\ g_a \in I.$$

Po *Nullstellensatzu* sada slijedi da je $I(\mathcal{Z}(I)) = K[X_{af}]$.

Imamo

$$1 + I_{af(X_{af})} = 1 = \sum_{i=1}^{m} h_i g_{a_i}, h_i \in \ stara\ definicija\ K[X_{af}], a_1, \ldots, a_n \in X_{af}.$$

Dakle, dobili smo jednakost u odgovarajućem polju razlomaka $K(X_{af})$, pa slijedi

$$\varphi = \varphi \cdot 1 = \sum_{i=1}^{m} \varphi(h_i + I_{\mathbb{A}^n}(X_{af}))(g_i + I_{\mathbb{A}^n(X_{af})}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (h_i + I_{\mathbb{A}^n}(X_{af}))(f_{a_i} + I_{\mathbb{A}^n}(X_{af})),$$

a to je element stare definicije od $K[X_{af}]$, pa je propozicija dokazana. $\square$

Prisjetimo se iz prethodnih poglavlja oznake,

$$K[X_{af}]_f \overset{def}{=} \{\frac{u}{f^k} \mid u \in K[X_{af}],\ k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0\} \subseteq K(X_{af}) = \{\frac{f_1}{g_1} \mid f_1,\ g_1 \in K[X_{af}],\ g_1 \neq 0\}.$$

Korolar 3.37. *Neka je $X \subseteq \mathbb{P}^n$ projektivna mnogostrukost takva da $X \subsetneq \langle x_0 = 0 \rangle = \mathcal{Z}(T_0)$ i neka je $f \in K[X_{af}]$, ne-nul polinom. Tada je $K[D(f)] = K[X_{af}]_f$, pri čemu je $D(f) = \{x \in X_{af} \mid f(x) \neq 0\}$.*

Dokaz. Jasno je da je $K[X_{af}]_f \subseteq K[D(f)]$ jer je preslikavanje $x \mapsto \frac{u(x)}{f(x)^k}$ definirano na cijelom $D(f)$.

Pokažimo da vrijedi i obrat. Neka je $\varphi \in K[D(f)]$. Tada je φ regularan u a, za svaki $a \in D(f)$, pa postoje $f_a, g_a \in K[X_{af}]$ takvi da vrijedi:

1. $\varphi = \frac{f_a}{g_a}$

2. $g_a(a) \neq 0 (\Longrightarrow g_a \neq 0 \text{ u } K[X_{af}])$

Neka je J ideal generiran svim g_a, $a \in D(f)$. Tada za svaki $x \in \mathcal{Z}(J)$ vrijedi $g_a(x) = 0$, $\forall a \in D(f)$. Posebno je $x \neq a$, $\forall a \in D(f)$, pa smo dobili da je $\mathcal{Z}(J) \subseteq X_{af} \setminus D(f) = \mathcal{Z}(f)$. Zato je $f = 0$ na $\mathcal{Z}(J)$, pa iz *Nullstellensatza* dobivamo da postoji $r \geq 1$ takav da je $f^r \in J$. Dakle,

$$(\exists\, h_1, \ldots, h_l \in K[X_{af}])(\exists\, a_1, \ldots, a_l \in D(f))\ f^r = \sum_{i=1}^{l} h_i \cdot g_{a_i}.$$

Slijedi da je

$$f^r \varphi = \sum_{i=1}^{l} h_i \underbrace{\varphi g_{a_i}}_{f_{a_i}}.$$

Dakle,

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{l} h_i f_{a_i}}{f^r} \in K[X_{af}]_f,$$

pa smo dokazali korolar. □

Definirajmo sada regularna preslikavanja kvazi-projektivnih mnogostrukosti.

Definicija 3.38. *Neka su X i Y kvazi-projektivne mnogostrukosti.* Regularno preslikavanje $\varphi : X \longrightarrow Y$ *je svako neprekidno preslikavanje koje zadovoljava:*

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^*(f)"'] & V \arrow[d, "f"] \\
 & K
\end{tikzcd}$$

pri čemu je $\varphi^*(f) \in K[U]$, $\forall V \subseteq Y$ otvoren, neprazan takav da je $U \overset{def}{=} \varphi^{\leftarrow}(V)$ otvoren neprazan.

Globalno, $\varphi : X \longrightarrow Y$ je regularno ako je $\varphi^* : K[Y] \longrightarrow K[X]$ dobro definirano. Gleda se samo slučaj $V = Y$.

Uočimo, ako su X i Y afine mnogostrukosti, onda su i kvazi-projektivne, pa zapravo imamo dvije definicije regularnih preslikavanja. No, one su zapravo jednake.

Sada nas zanima što su to općenito afine mnogostrukosti. Definicija koju smo prije dali dolazi iz smještanja u ambijentalni prostor $\mathbb{A}^n$, ali sada je želimo malo proširiti. Definirajmo prvo izomorfnost kvazi-projektivnih mnogostrukosti.

Definicija 3.39. *Kvazi-projektivne mnogostrukosti X i Y su* izomorfne *ako postoje regularna preslikavanja $\varphi : X \longrightarrow Y$ i $\psi : Y \longrightarrow X$ takva da je $\varphi \circ \psi = \mathbb{1}_Y$ i $\psi \circ \varphi = \mathbb{1}_X$. (Uočimo, karakteristične funkcije $\mathbb{1}$ su regularna preslikavanja.)*

Definicija 3.40. *(proširena definicija afine mnogostrukosti)* Afina mnogostrukost *je svaka kvazi-projektivna mnogostrukost izomorfna nekoj afinoj mnogostrukosti u užem smislu.*

Vrlo je važno uočiti sljedeće: ako je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ afina mnogostrukost, onda je $K(X)$ jednako polju razlomaka od $K[X]$. Ista stvar tada vrijedi i za poopćeni slučaj.
Pokažimo sada koja je veza između homomorfizama K-algebri i regularnih preslikavanja kvazi-projektivne i afine mnogostrukosti.

Teorem 3.41. *Neka je X kvazi-projektivna mnogostrukost, a Y afina mnogostrukost. Tada svaki homomorfizam K-algebri $\alpha : K[X] \longrightarrow K[Y]$ definira jedno i samo jedno regularno preslikavanje $\varphi : X \longrightarrow Y$.*

Dokaz. Neka je dan neki homomorfizam K-algebri $\alpha : K[X] \longrightarrow K[Y]$. Konstruirat ćemo traženi $\varphi : X \longrightarrow Y$. Da bi φ bilo regularno preslikavanje, mora biti neprekidno te za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$, skup $U = \varphi^{\leftarrow}(V) \neq \emptyset$ i za svaki $f \in K[V]$, preslikavanje $\varphi^* : K[V] \longrightarrow K[U]$, $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ mora biti homomorfizam K-algebri. Prvo ćemo gledati za $V = X$, tj. $U = \varphi^{\leftarrow}(V) = Y$. U tom slučaju želimo pokazati da je $\alpha = \varphi^* : K[V] \longrightarrow K[U]$. Možemo uzeti da je $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ zatvoren. Imamo

$$I(Y) = \{f \in K[R_1, \dots, R_,] \mid f(y) = 0,\ \forall y \in Y\},\ K[Y] = {}^{K[R_1,\dots,R_m]}/_{I(Y)}.$$

$K(Y)$ je kao i obično polje razlomaka od $K[Y]$.
Zadano nam je $\alpha : {}^{K[R_1,\dots,R_m]}/_{I(Y)} \longrightarrow K[X]$, pa imamo kanonsko preslikavanje $\beta : K[R_1, \dots, R_m] \longrightarrow K[X]$, $\beta(R_i) = \alpha(R_i + I(Y))$. Označimo $z_i = \beta(R_i)$, $\forall i = 1, \dots, m$.
Sada nam je jedini kandidat za $\varphi : X \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{A}^m$, $\varphi(x) = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x))$. Naime, $\varphi^*(R_i + I(Y)) = z_i$, jer $z_i(x)$ mora biti i-ta koordinata od $\varphi(x)$, $\forall x \in X$,

$$z_i(x) = \varphi^*(R_i + I(Y))(x) = (R_i + I(Y))(\varphi(x)).$$

Dakle, ako traženo regularno preslikavanje postoji, onda je jedinstveno.

No, pitamo se zašto za ovako definirano preslikavanje φ vrijedi $\varphi(X) \subseteq Y$. Znamo da je $\varphi(X) \subseteq Y \iff (\forall f \in I(Y))\ f(\varphi(x)) = 0,\ \forall x \in X$. Neka je $f \in I(Y)$ proizvoljan polinom,

$$f = \sum_{i=(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}} a_i R_1^{i_1} R_2^{i_2} \cdots R_m^{i_m},\ a_i \in K$$

te neka je $x \in X$ proizvoljan element.

Sada računamo

$$\begin{aligned} f(\varphi(x)) &= \sum_i a_i z_1(x)^{i_1} z_2(x)^{i_2} \dots z_m(x)^{i_m} = \\ &= \big(\sum_i a_i \alpha(R_1 + I(Y))^{i_1} \alpha(R_2 + I(Y))^{i_2} \cdots \alpha(R_m + I(Y))^{i_m}\big)(x) = \\ &= \alpha(\sum_i a_i (R_1 + I(Y))^{i_1} \cdots (R_m + I(Y))^{i_m})(x) = \alpha(f + I(Y))(x) = \\ &= (kanonska\ proj.\ homo.\ K-algebri) = \alpha(0 + I(Y))(x) = 0. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da $(\forall f \in I(Y)) f(\varphi(x)) = 0, \forall x \in X$, pa po spomenutoj karakterizaciji slijedi da je $\varphi(X) \subseteq Y$, tj. φ je dobro definiran.

Iduće trebamo pokazati da je φ neprekidno. Znamo da je Y afina mnogostrukost i da je $\{D(f) \mid f \in K[Y]\}$ baza topologije na Y, pa je dovoljno pokazati da je $\varphi^{\leftarrow}(D(f))$ otvoren. No, već smo u prethodnim rezultatima računali $\varphi^{\leftarrow}(D(f)) = D(\alpha(f))$, pa je to doista otvoren skup. Naime, $x \in \varphi^{\leftarrow}(D(f)) \iff \varphi(x) \in D(f) \iff f(\varphi()) \neq 0 \iff \alpha(f)(x) \neq 0$. Dakle, po karakterizaciji neprekidne funkcije, φ je doista neprekidno.

Preostaje nam pokazati da za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$ takav da je $U = \varphi^{\leftarrow}(V)$ i za svaki $f \in K[V]$ vrijedi $\varphi^*(f) = f \circ \varphi \in K[U]$. Budući da je $f \in K[V]$, f je regularna funkcija na otvorenom skupu V u afinoj mnogostrukosti Y. Dakle, za svaki $y \in V$ postoje $f_y, g_y \in K[Y]$ takvi da vrijedi $f = {}^{f_y}/_{g_y}$ te $g_y(y) \neq 0$. Zato po prethodnim rezultatima postoji konačan otvoren pokrivač $V = V_1 \cup \ldots \cup V_l$ (glavni otvoreni skupovi određeni s g_y) i funkcije $f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_l \in K[Y]$ takve da je $f = {}^{f_i}/_{g_i}, \forall i = 1, \dots, l$ te $f(y) = {}^{f_i(y)}/_{g_i(y)}$, $\forall y \in U_i$. Budući da je φ neprekidno, znamo da su $U_i = \varphi^{\leftarrow}(V_i)$ otvoreni te znamo da je $U = U_1 \cup \ldots \cup U_l$. Neka je $x \in U_i$. Tada računamo

$$\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x)) = (\varphi(x) \in U_i) = \frac{f_i(\varphi(x))}{g_i(\varphi(x))} = (konstrukcija\ od\ \varphi) = \frac{\alpha(f_i)(x)}{\alpha(g_i)(x)}.$$

Sada, budući da je ${}^{\alpha(f_i)}/_{\alpha(g_i)} \in K(X)$ (jer $K[X] \subseteq K(X)$, slijedi da je $\varphi^*(f) \in K[U]$, što smo i trebali pokazati.

Lako se vidi da je ${}^{\alpha(f_i)}/_{\alpha(g_i)} = {}^{\alpha(f_j)}/_{\alpha(g_j)}$, u $K[X]$ na $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, pa je φ^* dobro definirano.

□

Uočimo da iz gornjeg teorema zapravo dobivamo da su dvije afine mnogostrukosti izomorfne ako i samo ako su im algebre regularnih funkcija $K[X]$ i $K[Y]$ izomorfne. Također, može se pokazati da iz teorema slijedi da su bijekcije regularna preslikavanja.

Prisjetimo se, ako je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ projektivna mnogostrukost (, a onda i kvazi-projektivna) i ako je $f \in K[X]$ proizvoljan ne-nul polinom, tada smo izračunali $K[D(f)] = K[X]_f$. No, možemo se pitati, zašto su nam zapravo važni glavni otvoreni skupovi $D(f)$. To je stoga što su oni baza topologije na X. Naime, za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ i svaki element $x \in U$, postoji polinom $f \in K[X] \setminus \{0\}$ takav da je $x \in D(f) \in U$.

Promatrajmo afini pravac $\mathbb{A}^1$. Po prethodnim rezultatima je tada i $X \times \mathbb{A}^1$ afina mnogostrukost, a projekcije $X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow X$ i $X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ su regularna preslikavanja. Pitamo se kako izgledaju regularne funkcije. Imamo $K[X \times \mathbb{A}^1] = K[X] \otimes_K K[\mathbb{A}^1]$, a to je zapravo skup konačnih suma oblika $\sum_{i=1}^m a_i(x) \otimes b_i(t)$, $a_i \in K[X]$, $b_i \in K[T]$, što je jednako polinomima u varijabli T s koeficijentima u $K[X]$. Skup $Y \overset{def}{=} \{(x,\ t) \mid t \cdot f(x) = 1\}$ je zatvoren u $X \times \mathbb{A}^1$. Uočimo, slika od Y pri projekciji $X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow X$ je upravo skup $D(f)$ te inducira bijekciju: $x \in D(f) \mapsto (x, \frac{1}{f(x)}) \in Y$ s inverzom $(x,t) \mapsto x$. Za inverznu funkciju znamo da je neprekidna jer je restrikcija regularne funkcije (projekcije).Pokažimo da je i početna funkcija neprekidna.

Neka je $g \in K[X \times \mathbb{A}^1]$. Tada je $g = \sum_{i=1}^m a_i b_i$, $a_i \in K[X]$, $b_i \in K[T]$. Tada vrijedi

$$D(g) \cap Y \ni (x, \frac{1}{f(x)}) \iff 0 \neq g(x, \frac{a}{f(x)}) = \sum_{i=1}^m a_i(x) b_i(\frac{1}{f(x}),$$

a to je neka funkcija iz $K[X]_f$ evaluirana u x, pa je naša funkcija doista neprekidna, tj. to je homeomorfizam. Dakle, Y je homeomorfan s $D(f)$, pa je Y također ireducibilan. Slijedi da je Y također afina mnogostrukost, a gornja bijekcija je zapravo regularno preslikavanje.

Iduće ćemo pokazati jednu važnu posljedicu naših razmatranja, no prvo nam treba jedan pomoćni teorem koji ćemo samo iskazati.

Teorem 3.42. *Neka je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ afina mnogostrukost i $f \in K[X]$, $f \neq 0$. Tada je kvazi-projektivna mnogostrukost $D(f)$ izomorfna afinoj mnogostrukosti $Y \subseteq X \times \mathbb{A}^1$, $Y = \{(x,t) \in X \times \mathbb{A}^n \mid t \cdot f(x) = 1\}$. Posebno, $K[Y] = K[D(f)] = K[X]_f$.*

Sada, koristeći rezultate ovog i prethodnih poglavlja možemo pokazati zanimljiv rezultat: postoje kvazi-afine mnogostrukosti koje nisu afine. Štoviše, postoje kvazi-afine mnogostrukosti koje nisu afine ni u širem smislu, tj. nisu izomorfne afinoj mnogostrukosti.

Teorem 3.43. $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *nije izomorfno afinoj mnogostrukosti.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka je $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ izomorfno nekoj afinoj mnogostrukosti, tj. neka je $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ afina mnogostrukost u širem smislu. Označimo je sa X. Tada je $K[X] \cong \mathcal{O}_X$. No, pokazat ćemo da je $\mathcal{O}_X \cong K[\mathbb{A}^2]$, iz čega slijedi da je $K[X] \cong K[\mathbb{A}^2]$, a to je kontradikcija, jer X nije izomorfno s $\mathbb{A}^2$. Neka je f regularna funkcija na X. Znamo od prije da X možemo prekriti glavnim otvorenim skupovima $D_1 = \{x \neq 0\}$ i $D_2 = \{y \neq 0\}$ te je restrikcija od f na U_1 jednaka $\frac{g_1}{x^n}$, a restrikcija od f na U_2 jednaka $\frac{g_2}{y^m}$, gdje su g_1 i g_2 polinomi te $m,n \in \mathbb{Z}$, $m,n \geq 0$, pri čemu x ne dijeli g_1, a y ne dijeli g_2. Budući da se na $U_1 \cap U_2$ te restrikcije poklapaju, slijedi da je $x^n g_2 = y^m g_1$. Budući da u prstenu polinoma $K[x,y]$ imamo jedinstven rastav na proste faktore, slijedi da je $n = m = 0$ i $g_1 = g_2 = f$. Dakle, f se proširuje nad ishodište, pa su prsteni regularnih funkcija od X i $\mathbb{A}^2$ izomorfni, tj. X i $\mathbb{A}^2$ su izomorfni. Dobili smo kontradikciju, pa naš skup nije afina mnogostrukost (u širem smislu). □

Zapravo gornji teorem možemo i generalizirati: na posve sličan način može se pokazati da $\mathbb{A}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$ nije izomorfan afinoj mnogostrukosti.

Neka je $X \subseteq \mathbb{P}^n$ kvazi-projektivna mnogostrukost i neka je $x \in X$, $x = (x_0 : \dots : x_n)$. Po definiciji tada postoji neki indeks $i \in \{0,1,\dots,n\}$ takav da je $x_i \neq 0$, tj. $x \in X \cap D(T_i)$. Prisjetimo se da je $D(T_i)$ homeomorfno sa $\mathbb{A}^n$. Sada je $\overline{X}$ projektivna mnogostrukost čiji je X otvoren skup te je $\overline{X} \cap D(T_i)$ afina mnogostrukost čiji otvoren skup $X \cap D(T_i)$ sadrži x. Izaberimo neki glavni otvoren skup $U_x \subseteq \overline{X} \cap D(T_i)$ takav da je $x \in U_x \subseteq X \cap D(T_i)$ i U_x otvoren u X. To smo sve mogli napraviti jer glavni otvoreni skupovi čine bazu promatrane topologije. Po jednom od prethodnih teorema, U_x je afina mnogostrukost i okolina točke $x \in X$. Od prije znamo da je $K(\overline{X}) = K(X) = K(U_x)$, ali sada znamo i više. Budući da je U_x afina mnogostrukost, znamo da je $K(U_x)$ polje razlomaka od $K[U_x]$.

Neka su X i Y kvaziprojektivne mnogostrukosti te neka je $\varphi : X \longrightarrow Y$ regularno preslikavanje. Za $x \in X$ definiramo $y = \varphi(x) \in Y$. Tada postoji afina okolina V točke y. Dakle, $x \in U \overset{def}{=} \varphi \leftarrow^V$. Uočimo da U nije nužno afina okolina od x (to ovisi o samoj funkciji

φ), ali sigurno postoji neka afina okolina $U_1 \subseteq U$ od x. Iz definicije regularnog preslikavanja postoji homomorfizam K-algebri $\varphi^* : K[V] \leftarrow K[U]$, odnosno njegova restrikcija na $K[U_1]$. To je homomorfizam K-algebri $K[V]$ i $K[U]$ čije odgovarajuće regularno preslikavanje afinih mnogostrukosti U i V je restrikcija $\varphi : U \to V$.

Dakle, regularno preslikavanje $\varphi : X \to Y$ nastaje spajanjem afinih regularnih preslikavanja, tj. lokalno izgleda kao preslikavanje afinih mnogostrukosti.

Poglavlje 4

Krivulje u projektivnom prostoru

Sjetimo se, u prethodnom poglavlju definirali smo dimenziju (kvazi-projektivne) mnogostrukosti X kao stupanj transcendentnosti polja racionalnih funkcija $K(X)$ nad K. Ekvivalentno, dimenziju možemo definirati kao supremum duljina lanaca $X \underset{\neq}{\supseteq} X_1 \underset{\neq}{\supseteq} \ldots \underset{\neq}{\supseteq} X_n$ različitih ireducibilnih zatvorenih podskupova od X. Dokaz da su ove dvije definicije zaista ekvivalentne može se pronaći u [11], Teorem 2.52. Prednost ove definicije je u tome što je čisto topološka. Uz nju je primjerice vrlo jednostavno argumentirati da je mnogostrukost X dimenzije 0 ako i samo ako se sastoji od jedne točke. Naime, neprazna mnogostrukost sadrži neku točku P, a $\{P\}$ je ireducibilan zatvoreni skup, pa imamo lanac $X \supseteq \{P\}$. Dakle, maksimalna duljina lanca je jednaka 0 ako i samo ako je $X = \{P\}$.

Nas će u ovom poglavlju zanimati mnogostrukosti dimenzije 1, tj. krivulje.

Najprije pogledajmo kako možemo opisati topologiju krivulja.

Teorem 4.1. *Neka je X neka krivulja u projektivnom prostoru $\mathbb{P}^n$. Ako je $\emptyset \neq Y \subsetneq X$ pravi zatvoreni skup u X, onda je Y konačan skup točaka.*

Dokaz. X je projektivna krivulja, pa je $\dim X = 1$. Prema Propoziciji 2.43. je onda za pravi neprazan podskup $Y \subsetneq X$, dimenzija $\dim Y = 0$. Na početku ovog poglavlja smo dokazali da su mnogostrukosti dimenzije 0 upravo točke.

Dakle, dokazali smo da su svi ireducibilni podskupovi krivulje zapravo točke. Budući da se svaki zatvoren skup u X može prikazati kao konačna unija ireducibilnih algebarskih skupova (rastav u ireducibilne komponente), slijedi da je svaki pravi zatvoreni skup u X konačna unija točaka. □

Nadalje, definirali smo regularna preslikavanja između mnogostrukosti koja su zapravo morfizmi uz koje dobivamo kategorije (kvazi-)afinih/projektivnih mnogostrukosti. Kada imamo morfizme, možemo definirati i izomorfizme u toj kategoriji - to će biti invertibilni morfizmi. Dakle, regularno preslikavanje $\phi : X \to Y$ je izomorfizam mnogostrukosti X i Y ako postoji regularno preslikavanje $\psi : Y \to X$ takvo da je $\psi \circ \phi = id_X$ i $\phi \circ \psi = id_Y$.
Međutim, u algebarskoj geometriji imamo još jednu važnu vrstu preslikavanja, racionalna preslikavanja, koja nam također daju mnoge informacije o odgovarajućim mnogostrukostima, a nisu toliko restriktivna kao regularna preslikavanja.
Za racionalno preslikavanje koje ima gustu sliku kažemo da je dominantno i može se pokazati da mnogostrukosti s dominantnim racionalnim preslikavanjima također čine kategoriju. Izomorfizme u ovoj kategoriji zvat ćemo biracionalnim preslikavanjima.

Objasnimo prvo što znači da su regularna preslikavanja na projektivnim mnogostrukostima "previše restriktivna". Dokazat ćemo da općenito (ne samo za krivulje) vrijedi da je polje regularnih funkcija na projektivnoj mnogostrukosti jednako osnovnom polju K.
Najprije dokazujemo teorem iz kojega će direktno slijediti željeni rezultat, a i sam za sebe je zanimljiv i važan.

Teorem 4.2. *Neka je $X \subseteq \mathbb{P}^n$ projektivna mnogostrukost i $\phi : X \to \mathbb{P}^m$ regularno preslikavanje. Tada je $\phi(X)$ zatvoren skup u $\mathbb{P}^m$.*

Dokaz. Promatramo preslikavanje $X \to X \times \mathbb{P}^m$, $x \mapsto (x, \phi(x))$. Iz univerzalnog svojstva produkta slijedi da je ono također regularno. Slika tog preslikavanje je $\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)) \ : x \in X\}$. Prvo ćemo pokazati da je Γ_ϕ zatvoren u $X \times \mathbb{P}^m$.
Znamo iz rezultata o produktu mnogostrukosti da su projekcije $X \times \mathbb{P}^m \to X$ i $X \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^m$ regularne funkcije. Onda je po univerzalnom svojstvu i $\eta : X \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^m$, $(x, y) \mapsto (\phi(x), y)$ regularno. Primijetimo da je $\Gamma_\phi = \eta^{-1}(\{(z, z) \ z \in \mathbb{P}^m\})$ praslika dijagonale u $\mathbb{P}^m$ po η. Budući da je dijagonala zatvoren skup, a regularna preslikavanja su neprekidna, Γ_ϕ je također zatvoren skup.
Sada preostaje iskoristiti činjenicu da projekcija $(X, \mathbb{P}^m) \to \mathbb{P}^m$ prevodi zatvoren skup

u zatvoren skup. Naime, sve projektivne mnogostrukosti su potpune mnogostrukosti, a gornje svojstvo im je upravo definicijsko svojstvo. Ovi rezultati mogu se pronaći u [14], Section I.9. Slijedi da je $\phi(X)$ zatvoren skup u $\mathbb{P}^m$. □

Sjetimo se sada da smo u prethodnom poglavlju dokazali da je slika ireducibilnog skupa po neprekidnom preslikavanju opet ireducibilan skup (svojstva Noetherinih prostora), pa slijedi da je $\phi(X)$ iz iskaza prethodnog teorema projektivna mnogostrukost.
Sada dokazujemo rezultat o regularnim preslikavanjima na projektivnim mnogostrukostima.

Teorem 4.3. *Ako je X projektivna mnogostrukost, onda je $K[X] = K$.*

Dokaz. Neka je $\phi \in K[X]$ neka regularna funkcija na čitavom X. To znači da ϕ možemo evaluirati u svakoj točki iz X, pa je preslikavanje $X \to \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$, $x \mapsto \phi(x)$ dobro definirano. Prema prethodnom teoremu, $\phi(X)$ je projektivna mnogostrukost koja je strogo sadržana u $\mathbb{P}^1$. Dakle, $\phi(X) = \{A\}$ za neku točku $A \in K$, pa je ϕ konstanta. □

Dakle, ubuduće će nas uglavnom zanimati racionalne funkcije na projektivnim mnogostrukostima. Sada uvodimo pojam biracionalne ekvivalencije i iskazujemo teorem o karakterizaciji biracionalne ekvivalencije koji će nam omogućiti da se ograničimo samo na proučavanje ravninskih krivulja.

Definicija 4.4. *Biracionalno preslikavanje $\phi : X \to Y$ je racionalno preslikavanje koje ima inverz koji je također racionalno preslikavanje.*
Ako postoji biracionalno preslikavanje $\phi : X \to Y$, kažemo da su X i Y biracionalno ekvivalentni.

Biracionalnu ekvivalenciju možemo karakterizirati na sljedeći način:

Propozicija 4.5. *Za dvije mnogostrukosti X i Y, ekvivalentno je:*

1. *X i Y su biracionalno ekvivalentne*
2. *postoje otvoreni podskupovi $U \subseteq X$ i $V \subseteq Y$ takvi da je U izomorfan s V*
3. *$K(X) \cong K(Y)$ kao K-algebre*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [6], Korolar 4.5. □

Pojam biracionalne ekvivalencije pokazuje se korisnim u sljedećoj situaciji:

Propozicija 4.6. *Svaka mnogostrukost X dimenzije d je biracionalno ekvivalentna nekoj hiperplohi Y u $\mathbb{P}^{d+1}$.*

Dokaz. Označimo s $L = K(X)$ polje racionalnih funkcija na X. Tada je L konačnogenerirano proširenje polja K, generirano nekim elementima $x_1,...,x_n \in L$. Možemo pronaći transcendentnu bazu među ovim generatorima, bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da je to baš $\{x_1,...,x_d\}$. Tada je $L \supset K(x_1,...,x_d)$ konačno algebarsko proširenje, pa po teoremu o primitivnom elementu postoji $y \in L$ takav da je $L = K(x_1,...,x_d,y)$. Budući da je y algebarski nad $K(x_1,...,x_d)$, postoji ireducibilan polinom s koeficijentima iz $K(x_1,...,x_d)$ u kojem se y poništava. Kada se riješimo nazivnika, dobivamo ireducibilan polinom $f(x_1,...,x_d,y) = 0$ koji definira hiperplohu Y u $\mathbb{A}^{d+1}$. Sada uzmemo projektivni zatvarač $\overline{Y}$ i to je tražena hiperploha.
Naime, znamo da je $K(\overline{Y}) = K(Y)$, a ovo je jednako L. Sada po prethodnom teoremu slijedi da su X i Y biracionalno ekvivalentne. □

Posebno, nama je važan slučaj krivulja, to jest, mnogostrukosti dimenzije 1. Prema prethodnoj propoziciji, svaka krivulja je biracionalno ekvivalentna nekoj ravninskoj krivulji. Onda su prema karakterizaciji biracionalne ekvivalencije polja racionalnih funkcija tih krivulja ekvivalentna, pa je dovoljno promatrati samo polja racionalnih funkcija ravninskih krivulja.
Započnimo jednostavnim primjerom: računanjem polja racionalnih funkcija na projektivnom pravcu $\mathbb{P}^1$.

Primjer 4.7. *$K(\mathbb{P}^1) = K(\mathbb{A}^1) = K(T)$ je polje racionalnih funkcija nad K u jednoj varijabli.*

Dokaz. Prema Propoziciji 2.96., glavni otvoreni skup $\mathcal{D}(T_0)$ možemo poistovjetiti s $\mathbb{A}^1$, pa je $\mathbb{A}^1$ otvoren podskup od $\mathbb{P}^1$. Iz konstrukcije polja racionalnih funkcija znamo da je onda $K(\mathbb{P}^1) = K(\mathbb{A}^1)$, a iz definicije polja racionalnih funkcija na afinim mnogostrukostima, znamo da je $K(\mathbb{A}^1)$ polje razlomaka K-algebre regularnih funkcija $K[\mathbb{A}^1]$. Konačno, $K[\mathbb{A}^1] = K[T]/I(\mathbb{A}^1) \cong K[T]$, a polje razlomaka K-algebre polinoma $K[T]$ je upravo $K(T)$. □

U algebarskoj geometriji, ponekad je zanimljivo gledati kakve objekte dobivamo ako iz neke mnogostrukosti izbacimo neke podmnogostrukosti te koja je veza polaznog i novodobivenog objekta. Primjerice, što se dogodi ako iz krivulje izbacimo konačno mnogo točaka?

Mi ćemo gledati prvo poseban slučaj ovog problema kada iz krivulje izbacujemo baš koordinatnu hiperravninu zadanu jednadžbom $x_i = 0$, to jest, kada izbacujemo hiperravninu $\mathcal{Z}(T_i)$, $i = 0, ..., n$. Radi određenosti, gledat ćemo slučaj $i = 0$. (Naravno, ostali slučajevi idu potpuno analogno.)

Problem možemo formulirati i ovako: ako je X neka krivulja u projektivnoj ravnini koja nije cijela sadržana u $\mathcal{Z}(T_0)$, što možemo reći o presjeku $X \cap \mathcal{D}(T_0)$?

Primijetimo, pretpostavku da X nije cijela sadržana u $\mathcal{Z}(T_0)$ opet uzimamo bez smanjenja općenitosti jer mora postojati neki $i \in \{0, 1, ..., n\}$ takav da X nije sadržan u $\mathcal{Z}(T_i)$. Naime, $\bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{Z}(T_i) = \{(0, ..., 0)\}$. Onda radi određenosti uzimamo baš $i = 0$.

Sada ćemo pokazati kako nam izbacivanje koordinatne hiperravnine pomaže u računanju polja racionalnih funkcija na originalnoj krivulji X. Dakle, ako promatramo $X \cap \mathcal{D}(T_0)$ imamo sljedeći rezultat:

Teorem 4.8. *Neka je $X \subseteq \mathbb{P}^2$ ravninska projektivna krivulja koja nije cijela sadržana u $\mathcal{Z}(T_0)$. Tada je polje racionalnih funkcija $K(X)$ polje razlomaka K-algebre regularnih funkcija na $X \cap \mathcal{D}(T_0)$.*

Preciznije, ako je $X = \mathcal{Z}(f)$ za neki homogen ireducibilan polinom $f \in K[T_0, T_1, T_2]$, onda je $K(X) = \left\{ \frac{\phi + \hat{f}}{\psi + \hat{f}} \ : \ \phi,\ \psi \in K[T_1, T_2],\ \psi \notin \hat{f} \right\}$

Dokaz. Sjetimo se, u prethodnom poglavlju smo dokazali da je glavni otvoreni skup $\mathcal{D}(T_0)$ u $\mathbb{P}^2$ homeomorfan je s $\mathbb{A}^2$, pa možemo identificirati $\mathcal{D}(T_0) \equiv \mathbb{A}^2$.

Ako je naša krivulja zadana sa $X = \mathcal{Z}(f)$ za neki homogen i ireducibilan polinom $f \in K[T_0, T_1, T_2]$, onda je $\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{D}(T_0) = \mathcal{Z}(f) \cap \mathbb{A}^2$ afina mnogostrukost koju označavamo sa X_{af}. Štoviše, imamo puno egzaktiniji opis ove mnogostrukosti. Ona je upravo jednaka $X_{af} = \mathcal{Z}_{af}(\hat{f})$, gdje $\hat{f} = f(1, T_1, T_2)$ označava dehomogenizaciju polinoma f. Znamo također da je X_{af} otvoren skup u X.

Iz konstrukcije polja racionalnih funkcija znamo da je za svaki otvoren skup $U \subset X$ u mnogostrukosti X, $K(U) = K(X)$. Posebno, $K(X) = K(X_{af})$.

Sada smo početni problem sveli na problem računanja racionalnih funkcija u afinom slučaju. Po definiciji, $K(X_{af})$ je polje razlomaka K-algebre $K[X_{af}]$ regularnih funkcija na X_{af}. Preciznije, $K[X_{af}] = K[T_1, T_2]/I(X_{af})$, a $I(X_{af})$ je prema Nullstellensatzu jednak $Rad((\hat{f})) = (\hat{f})$, jer je f ireducibilan polinom, pa je i $\hat{f}$ ireducibilan te je ideal $(\hat{f})$ koji on generira radikalan.

Dakle, $K(X) = \left\{ \frac{\phi+(\hat{f})}{\psi+(\hat{f})} \ : \ \phi,\ \psi \in K[T_1, T_2],\ \psi \notin (\hat{f}) \right\}$. $\square$

Općenitije, možemo promatrati što se dogodi kada izbacimo bilo koji (ne nužno koordinatni) pravac iz ravnine. Odnosno, ako je zadan proizvoljan projektivni pravac kao mnogostrukost $\mathcal{Z}(l)$, $l = a_0T_0 + a_1T_1 + a_2T_2$, onda nas zanima presjek krivulje s glavnim otvorenim skupom $X \cap \mathcal{D}(l)$. Zapravo, pokazat ćemo da se ova situacija lako svodi na prethodnu, pa se i polje racionalnih funkcija na X može izračunati slično kao u prošlom teoremu.

Teorem 4.9. *Neka je $l = a_0T_0 + a_1T_1 + a_2T_2 \in K[T_0, T_1, T_2] \setminus \{0\}$ polinom i $X \subseteq \mathbb{P}^2$ projektivna ravninska krivulja koja nije cijela sadržana u pravcu $\mathcal{Z}(l)$. Tada je polje racionalnih funkcija $K(X)$ polje razlomaka K-algebre regularnih funkcija na $X \cap \mathcal{D}(l)$.*

Dokaz. U početnim koordinatama (x_0, x_1, x_2) je pravac l zadan jednadžbom $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Želimo zamjenom koordinata reducirati problem na situaciju iz prethodnog teorema.

Pretpostavimo prvo da je $a_0 \neq 0$. Tada definiramo:

$y_0 = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$,

$y_1 = x_1$,

$y_2 = x_2$.

Ove jednakosti možemo zapisati i ovako:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determinanta ove matrice prijelaza je $a_0 \neq 0$, pa je gornjim jednadžbama dobro definirana zamjena koordinata. Sada originalne koordinate možemo zapisati u terminima novih:

$x_1 = y_1$,

$x_2 = y_2$,

$x_0 = \frac{1}{a_0}(y_0 - a_1 y_1 - a_2 y_2)$.

Ako je $a_0 = 0$, onda pretpostavimo da je $a_1 \neq 0$. U ovom slučaju definiramo:

$y_0 = x_0$,

$y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2$,

$y_2 = x_2$.

Opet imamo

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determinanta ove matrice je $a_1 \neq 0$, pa je gornjim jednadžbama zadana zamjena koordinata.

Ako je i $a_1 = 0$, onda mora biti $a_2 \neq 0$, pa je jednadžbama

$y_0 = x_0$,

$y_1 = x_1$,

$y_2 = a_2 x_2$

dobro zadana zamjena koordinata.

Dakle, u svakom slučaju je nakon zamjene u novim koordinatama pravac l koordinatni pravac, pa je $\mathcal{D}(l) \equiv \mathbb{A}^2$ i $X \cap \mathcal{D}(l) = X \cap \mathbb{A}^2 = X_{af}$.

Sada zaključujemo kao i u prethodnom teoremu: X_{af} je otvoren skup u X, pa je $K(X) = K(X_{af})$. Budući da je $X_{af} \subseteq \mathbb{A}^2$ afina ravninska krivulja, $K(X_{af})$ je po definiciji polje razlomaka K-algebre $K[X_{af}]$. Ako je na početku $X = \mathcal{Z}(f)$, a nakon zamjene koordinata $X = \mathcal{Z}(g)$ za $f,\ g \in K[T_0, T_1, T_2]$ homogene polinome, to jest, $f(x_0, x_1, x_2) = g(y_0, y_1, y_2)$, te je g također ireducibilan, onda je $K[X_{af}] = K[T_1, T_2]/(\hat{g})$. Tada zaključujemo: traženo polje racionalnih funkcija je

$K(X) = \left\{ \frac{\phi + (\hat{g})}{\psi + (\hat{g})}\ :\ \phi,\ \psi \in K[T_1, T_2],\ \psi \notin (\hat{g}) \right\}$.

□

Primjer 4.10. *Sada možemo izračunati polje racionalnih funkcija na nekom konkretnom primjeru.*

Vidjeli smo da je svaka krivulja biracionalno ekvivalentna nekoj projektivnoj ravninvskoj krivulji. U sljedećem poglavlju vidjet ćemo precizno koju krivulju dobivamo ulaganjem kompleksnog torusa u ravninu. Taj je rezultat dan kao teorem u sljedećem poglavlju i to je jedan od originalnih doprinosa u ovom radu.
Dakle, uzmimo krivulju $X = \mathcal{Z}(T_1^2T_2 - T_0^3 - AT_0T_2^2 - BT_2^3)$. *To je ravninska krivulja na koju se neki kompleksni torus surjektivno ulaže.*
Tada je $X_{af} = X \cap \mathcal{D}(T_0) = \mathcal{Z}_{af}(T_1^2T_2 - AT_2^2 - BT_2^3 - 1)$. *Prema prethodnom teoremu je onda*
$K(X) = \left\{ \frac{\phi + (T_1^2T_2 - AT_2^2 - BT_2^3 - 1)}{\psi + (T_1^2T_2 - AT_2^2 - BT_2^3 - 1)} \,:\, \phi,\ \psi \in K[T_1, T_2],\ \psi \notin (T_1^2T_2 - AT_2^2 - BT_2^3 - 1) \right\}.$

Poglavlje 5

Riemannove plohe u algebarskoj geometriji

5.1 Riemannove plohe

O algebarskim skupovima, koje smo definirali kao skup zajedničkih nultočaka familije polinoma u $\mathbb{A}^n$ ili $\mathbb{P}^n$, dobivamo brojne topološke informacije nakon što ih povežemo s Riemannovim plohama. Na primjer, možemo do na izomorfizam vizualizirati algebarski skup, što je netrivijalno pitanje za imalo "kompliciraniju" familiju polinoma ili ako je skup u projektivnom prostoru. U tu svrhu, definirat ćemo Riemannove plohe, funkcije na njima i preslikavanja među njima. Dat ćemo osnovne primjere Riemannovih ploha, a nakon što razvijemo teoriju divizora, pokazat ćemo kako uložiti osnovne primjere ploha u projektivni prostor.

Neka je X topološki prostor. Nizom sljedećih definicija definiramo Riemannovu plohu:

Definicija 5.1. *Kompleksna karta, ili kraće karta, na X je homeomorfizam $\phi : U \to V$, gdje je $U \subset X$ otvoren skup u X, a $V \subset \mathbb{C}$ otvoren skup u kompleksnoj ravnini. Za kartu ϕ kažemo da je centrirana u $p \in X$ ako $\phi(p) = 0$.*

Definicija 5.2. *Neka su $\phi_1 : U_1 \to V_1$ i $\phi_2 : U_2 \to V_2$ dvije kompleksne karte na X. Kažemo da su ϕ_1 i ϕ_2 kompatibilne ako je $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ili $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$ holomorfna. Funkciju $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ zovemo funkcija prijelaza između dvije karte.*

Definicija 5.3. *Kompleksni atlas, ili kraće atlas, $\mathcal{A}$ na X je familija $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$*

međusobno kompatibilnih karata tako da vrijedi $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Definicija 5.4. *Dva kompleksna atlasa su u relaciji ako je svaka karta iz jednog kompatibilna sa svakom kartom iz drugog. Radi se o relaciji ekvivalencije. Kompleksna struktura na* X *je klasa ekvivalencije kompleksnih atlasa na* X.

Primijetimo da je kompleksnu strukturu dovoljno zadati jednim atlasom, reprezentantom klase ekvivalencije.

Definicija 5.5. *Riemannova ploha je povezan Hausdorffov topološki prostor* X *koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti te je na njemu zadana kompleksna struktura. Ako je* X *i kompaktan, govorimo o kompaktnoj Riemannovoj plohi.*

Sada definirajmo funkcije na Riemannovoj plohi X:

Definicija 5.6. *Funkcija* $f : W \subset X \to \mathbb{C}$ *je holomorfna / meromorfna u točki* $p \in X$ *ako postoji karta* $\phi : U \to V,\ p \in U$ *tako da je* $f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \to \mathbb{C}$ *holomorfna / meromorfna u* $\phi(p)$. *Funkcija* f *je holomorfna / meromorfna na* W *ako je holomorfna / meromorfna u svakoj točki od* W.

Bitan pojam vezan uz funkciju na Riemannovoj plohi jest red funkcije f u točki $p \in X$. Kao i za meromorfne funkcije na $\mathbb{C}$, definira se kao najmanji indeks ne-nul koeficijenata u Laurentovom razvoju funkcije oko točke. Za funkcije na Riemannovoj plohi, Laurentov red funkcije naravno ovisi o izabranoj karti, ali se može pokazati da red funkcije u točki p je neovisan o izboru karte pa ima smisla pojam $ord_p(f)$.

Definicija 5.7. *Ako je* $W \subset X$ *otvoren podskup Riemannove plohe* X, *skup svih holomorfnih funkcija na* W *označavamo:*

$$\mathcal{O}_X(W) = \mathcal{O}(W) = \{f : W \to \mathbb{C} : f \text{ holomorfna}\}$$

Definicija 5.8. *Ako je* $W \subset X$ *otvoren podskup Riemannove plohe* X, *skup svih meromorfnih funkcija na* W *označavamo:*

$$\mathcal{M}_X(W) = \mathcal{M}(W) = \{f : W \to \mathbb{C} : f \text{ meromorfna}\}$$

Sada je prirodan nastavak definirati preslikavanja među Riemannovim plohama:

Definicija 5.9. *Preslikavanje $F : X \to Y$ je holomorfno u $p \in X$ ako i samo ako postoje karte $\phi_1 : U_1 \to V_1$ na X s $p \in U_1$ i $\phi_2 : U_2 \to V_2$ na Y s $F(p) \in U_2$ tako da je $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ holomorfna u $\phi_1(p)$. F je holomorfno preslikavanje ako i samo ako je holomorfno na cijelom X. Dodatno, ako je bijekcija, F je izomorfizam od X i Y.*

Red poništavanja preslikavanja F (uz centrirane koordinate) u točki $p \in X$ zovemo multiplicitet od F u p i označavamo $mult_p(F)$. Za nultočke, multiplicitet je jednak redu nultočke.
Postoji teorem koji kaže da je holomorfnom preslikavanju među kompaktnim Riemannovim plohama pridružen jedinstveni broj, kojeg nazivamo stupanj preslikavanja F, a jednak je sumi multipliciteta preslikavanja u točkama iz $F^{-1}(q)$, za proizvoljan $q \in Y$. Dokaz teorema može se pronaći u [12].
Jednostavna, ali korisna posljedica spomenutog teorema jest: Holomorfno preslikavanje među kompaktnim Riemannovim plohama je izomorfizam ako i samo ako je stupnja 1.
Okrenimo se sada primjerima. Glavni način zadavanja Riemannovih ploha je na skupu X definirati bijekcije čije domene pokrivaju X, preko njih definirati topologiju na X tako da je $A \subset X$ otvoren $\Leftrightarrow$ za svaku bijekciju $\phi : U \to V \subset \mathbb{C}$, $\phi(U \cap A)$ otvoren u $\mathbb{C}$. Zatim se provjeri da bijekcije zadovoljavaju uvjet kompatibilnosti. Sve navedno bit će opis skupova s familijom karata za koje se dokaz da su Riemannove plohe može pronaći u knjizi [[12].
Najosnovniji primjer Riemannove plohe je Riemannova sfera $\mathbb{C} \cup \infty$ ili projektivni pravac $\mathbb{P}^1$. Kažemo "ili" jer se može pokazati da su izomorfne.

- $X = \mathbb{C} \cup \infty = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
  $\phi_1 : X \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$, $\phi_1(x,y,z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$,
  $\phi_2 : X \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{C}$, $\phi_2(x,y,z) = \frac{x}{1+z} - i\frac{y}{1+z}$,
  gdje je ϕ_1 stereografska projekcija na $\{z = 0\} \cong \mathbb{C}$ iz točke $(0,0,1)$, a ϕ_2 konjugirana stereografska projekcija iz $(0,0,-1)$ na $\{z = 0\} \cong \mathbb{C}$. Konjugirali smo u svrhu holomorfnosti funkcije prijelaza koja je jednaka $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$. Tada je $(\mathbb{C} \cup \infty, \{\phi_1, \phi_2\})$ Riemannova ploha. Ako koristimo, na primjer, kartu ϕ_1, onda točku $(0,0,1)$ označavamo ∞ i zovemo točka u beskonačnosti. Ostale točke poistovjećujemo s kompleksnim brojem u kojeg se preslikaju.

- $X = \mathbb{P}^1 =$ skup jednodimenzionalnih podskupova od $\mathbb{R}^2 = \{[z : w] : z, w \text{ ne oba nula}\}$
  gdje je $[z : w]$ oznaka za klasu svih točaka (x, y) u $\mathbb{R}^2$ takvih da postoji $\lambda \neq 0$ tako da je $(x, y) = \lambda(z, w)$.
  $\phi_1 : X \setminus \{[1 : 0]\} \to \mathbb{C}$, $\phi_1([z : w]) = \frac{z}{w}$
  $\phi_2 : X \setminus \{[0 : 1]\} \to \mathbb{C}$, $\phi_1([z : w]) = \frac{w}{z}$.
  Tada je $(\mathbb{P}^1, \{\phi_1, \phi_2\})$ Riemannova ploha.

Nakon što smo definirali Riemannovu sferu, spomenimo vezu između meromorfne funkcije f na X i njoj pridruženog holomorfnog preslikavanja F sa X u $\mathbb{C} \cup \infty$:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, ako x koji nije pol od f} \\ \infty & \text{, ako je x pol od f} \end{cases}$$

Lako se provjeri da se radi o holomorfnom preslikavanju.
Sljedeći primjer Riemannove plohe je kompleksni torus. Torus je centralna Riemannova ploha kojom se bavimo u ovom radu. Kako smo već spomenuli, uložit ćemo ga u projektivnu ravninu.
Fiksirajmo $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linearno nezavisne. Definiramo $L := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Kompleksni torus je $\mathbb{C}/L$. Označimo kanonski epimorfizam $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$, $\pi(z) = z + L$. Jer je L diskretan podskup od $\mathbb{C}$, oko svake točke u $\mathbb{C}$ možemo pronaći krug u kojem se nalazi samo jedna točka iz L. Radijus kruga može biti fiksan $= 2r$, točnije jednak najmanjoj udaljenosti točaka iz L do ishodišta. Tada je jasno $\pi_{K(z_0,r)} : K(z_0, r) \to \pi(K(z_0, r))$ bijekcija pa definiramo kartu $\pi^{-1}_{K(z_0,r)}$ na okolini svake točke $z_0 \in \mathbb{C}$. Tada je $(\mathbb{C}/L, \{\pi^{-1}_{K(z_0,r)}\}_{z_0 \in \mathbb{C}})$ Riemannova ploha.
Zbog jednostavnosti u računu, pokazat ćemo da je svaki torus izomorfan torusu oblika $X = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot \tau)$, za $\tau \in \mathbb{C}$, $Im(\tau) > 0$.

Propozicija 5.10. *i) Neka su L i L' dvije cjelobrojne mreže u $\mathbb{C}$ takve da je $L \subset L'$. Tada je preslikavanje $F : z + L \mapsto z + L'$ dobro definirano i holomorfno. Bijekcija je ako i samo ako je $L = L'$.*
ii) Neka je L cjelobrojna mreža u $\mathbb{C}$ i $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tada je preslikavanje $F : z + L \mapsto (\alpha z) + (\alpha L)$ dobro definiran izomorfizam torusa $\mathbb{C}/L$ i $\mathbb{C}/(\alpha L)$.
iii) Svaki torus $\mathbb{C}/L$ je izomorfan torusu oblika $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot \tau)$, za $\tau \in \mathbb{C}$, $Im(\tau) > 0$.

Dokaz:

i) Uvjerimo se da je preslikavanje dobro definirano: $z_1 + L = z_2 + L \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in L$, a $z_1 + L' = z_2 + L' \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in L'$ pa jer je $L \subset L'$ vrijedi $z_1 - z_2 \in L'$.

Za provjeru holomorfnosti preslikavanja uzmimo dvije karte, $\phi : U \to V$ i $\psi : U' \to V'$ redom na $\mathbb{C}/L$ i $\mathbb{C}/L'$. Tada imamo:

$$(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(z) = (\psi \circ F)(z+L) = \psi(z+L') = z + \omega(z)$$

gdje je $\omega(z)$ funkcija sa U u L'. Tvrdimo da je ona neprekidna. Za karte znamo da su po definiciji homeomorfizmi pa je potrebno samo provjeriti da je F neprekidno preslikavanje. Prisjetimo se da na torusu imamo kvocijentnu topologiju. Neka je $V \subset \mathbb{C}/L'$ otvoren skup. Tada po definiciji postoji otvoren skup U u $\mathbb{C}$ takav da je $V = U + L'$. $F^{-1}(V) = U + L$ što je otvoren skup u $\mathbb{C}/L$.

Tada je $\omega(z)$ neprekidna funkcija sa U na diskretan skup L' čime dobivamo da je konstatna na komponentama povezanosti od U, a time i da je lokalno holomorfna.

Da bismo dobili uvjet kada je bijekcija moramo utvrditi kada je injekcija jer je za svaki izbor L i L' surjekcija. $z_1 + L' = z_2 + L' \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in L'$. Ako uzmemo $z_2 = 0$, ekvivalentan uvjet je $z_1 \in L'$. Zanima nas je li $z_1 \in L$, no to je $\Leftrightarrow L' = L$ jer $z_1 \in L'$ proizvoljan.

ii) Preslikavanje je dobro definirano jer za $z_1 - z_2 \in L$ vrijedi $\alpha z_1 - \alpha z_2 \in \alpha L$. Radi se o bijekciji jer je inverzno preslikavanje: $z + \alpha L \mapsto \frac{1}{\alpha} z + L$. Da je preslikavanje holomorfno, provjeri se na potpuno analogan način kao u *i)* pa nećemo ponavljati.

iii) Dokaz glavne tvrdnje ove propozicije sada lako slijedi iz prve dvije tvrdnje.

Neka je $X = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$, $\omega_1 = a + ib$ i $\omega_2 = c + id$. Iz *ii)* zaključujemo $X = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2) \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z}\omega_1^{-1}\omega_2)$. Općenito, $\omega_1^{-1}\omega_2$ ne mora imati pozitivan imaginarni dio. Raspišimo:

$$\frac{a-ib}{a^2+b^2} \cdot (c+id) = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot ((ac+bd) + i(ad-bc))$$

gdje je $\omega_1^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$. éelimo da je $ad - bc > 0$. No, primjetimo da je ovo baš determinanta

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Provjeravanje da su dva kompleksna broja linearno nezavisna je ekvivalentno provjeravanju linearne nezavisnosti za dvodimenzinalne realne vektore. Iz definicije cjelobrojne mreže znamo da su ω_1 i ω_2 linearno nezavisni nad $\mathbb{R}$ pa zbog toga imamo $ad-bc \neq 0$. Ako je $ad-bc<0$, onda množenjem ω_1 s -1 dobivamo da je $ad-bc>0$ i po *i)* dobivamo $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\cdot 1+\mathbb{Z}\alpha) \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\cdot 1+\mathbb{Z}(-\alpha))$ jer $\mathbb{Z}\alpha = \mathbb{Z}(-\alpha)$. $\square$

Također će nam biti potrebno znati primjere meromorfnih funkcija na kompleksnom torusu. U poglavlju Primjena teorije divizora ćemo definirati Weierstrassovu funkciju, a sada spomenimo theta funkciju.

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[n^2\tau+2nz]}, \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}\tau > 0$$

Može se pokazati da red definira holomorfnu funkciju na $\mathbb{C}$ i da $\Theta(z)$ ima jednostruku nultočku u svakoj točki skupa $\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}+L$. Definiramo translate theta funkcije: $\Theta^{(x)}(z) = \Theta(z-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}-x)$. Može se pokazati da ako je $\sum_j y_j - \sum_i x_i \in \mathbb{Z}$, onda je omjer translatiranih theta funkcija

$$R(z) = \frac{\prod_i \Theta^{(x_i)}(z)}{\prod_j \Theta^{(y_j)}(z)}$$

meromorfna funkcija na $\mathbb{C}/L$.

Zadnji primjer koji ćemo navesti su glatke afine i projektivne ravninske krivulje. One se zadaju kao nultočke polinoma:

- Glatka afina ravninska krivulja je skup $X = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : f(z,w) = 0\}$, gdje je $f \in \mathbb{C}[z,w]$ nesingularan polinom (u svakoj točki iz X barem jedna derivacija je različita od 0). Nesingularnost polinoma nam je potrebna da X lokalno izgleda kao graf holomorfne funkcije po Teoremu o implicitnoj funkciji. Tada na okolini svake točke kartu definiramo kao projekciju na prvu ili drugu koordinatu, ovisno koja derivacija u točki je različita od nule. Da bi opisani skup i atlas definirali Riemannovu plohu, još je potrebno da polinom bude ireducibilan da X bude povezan skup. To je teorem koji se može pronaći na primjer u [16].

- Glatka projektivna ravninska krivulja se zadaje na sličan način: $X = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 : F(x,y,z) = 0\}$, gdje je F homogen polinom pa evaluacija u $[x:y:z]$ ima smisla. Svaka točka $[x:y:z]$ ima neku ne-nul koordinatu, pretpostavimo da je $x \neq 0$. Tada možemo uzeti da je predstavnik točke $[1:y:z]$ pa dobivamo točku na afinoj krivulji $\{F(1,y,z) = 0\}$. Lako se pokaže da je $F(x,y,z)$ nesingularan ako i samo ako je svaki od polinoma $F(1,y,z), F(x,1,z), F(x,y,1)$ nesingularan. Također, može se pokazati da je nesingularan homogen polinom ireducibilan. Tada se definicija karata, time i atlasa, na projektivnoj krivulji svodi na afini slučaj koju smo gore opisali.

Motivirani primjerom ravninskih projektivnih krivulja, uvodimo definiciju glatke projektivne krivulje X u $\mathbb{P}^n$.

Definicija 5.11. *Neka je X Riemannova ploha, koja je podskup od $\mathbb{P}^n$. Kažemo da je X holomorfno uložen u $\mathbb{P}^n$ ako za svaku točku $p \in X$ postoji homogena koordinata z_j tako da:*
a) $z_j \neq 0$ u p;
b) za svaki k, omjer $\frac{z_k}{z_j}$ je holomorfna funkcija na X blizu p;
c) postoji homogena koordinata z_i tako da je omjer $\frac{z_i}{z_j}$ lokalna koordinata na X oko p.
Riemannovu plohu holomorfno uloženu u $\mathbb{P}^n$ nazivamo glatka projektivna krivulja.

Nakon što smo uveli sve potrebne definicije i primjere, spomenimo neke teoreme.

Teorem 5.12. *Holomorfna funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi je konstantna.*

Dokaz. Jer je f holomorfna funkcija, $|f|$ je neprekidna. X je kompaktan skup pa $|f|$ poprima maksimum u nekoj točki na X. Po principu maksimuma za holomorfne funkcije, f je tada konstantna funkcija jer je X povezan. □

Važan teorem koji daje svojstvo meromorfnih funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi glasi:

Teorem 5.13. *Neka je f nekonstantna meromorfna funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi X. Tada je*

$$\sum_p ord_p(f) = 0.$$

Iz klasifikacije kompaktnih orijentabilnih 2-mnogostrukosti dobivamo da je svaka kompaktna Riemannova ploha difeomorfna torusu sa g rupa za jedinstveni cijeli broj $g \geq 0$. Dokaz ove tvrdnje može se pronaći u [1] ili [10]. Hurwitzova formula povezuje genuse Riemannovih ploha preko svojstva holomorfnog preslikavanja među njima.

Teorem 5.14. *Neka je $F : X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje između kompaktnih Riemannovih ploha. Tada*

$$2g(Y) - 2 = deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1].$$

Time smo opisali sve što će nam trebati za daljnje razvijanje teorije divizora na Riemannovim plohama.

5.2 Divizori

Divizori nam služe za organiziranje polova meromorfnih funkcija na Riemannovim plohama. Naizgled jednostavna definicija će imati važne primjene u analizi Riemannovih ploha.

Definicija 5.15. *Neka je X Riemannova ploha. Nosač funkcije $D : X \to \mathbb{Z}$ je skup točaka $p \in X$ za koje je $D(p) \neq 0$. Divizor na X je funkcija $D : X \to \mathbb{Z}$ čiji nosač je diskretan skup u X. Divizori na X s operacijom zbrajanja po točkama čine grupu koju označavamo $Div(X)$.*

Odmah možemo primijetiti da na kompaktnim Riemannovim plohama divizori imaju konačne nosače. Tada je $Div(X)$ slobodna Abelova grupa. Za divizore ćemo koristiti oznaku:

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p.$$

Divizorima na kompaktnim Riemannovim plohama tada možemo pridružiti cijeli broj koji ćemo zvati *supanj divizora*.

Definicija 5.16. *Divizor D na kompaktnoj Riemannovoj plohi X je stupnja*

$$deg(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

Primijetimo da je funkcija $deg : Div(X) \to \mathbb{Z}$ homomorfizam grupa. Jezgru ovog homomorfizma čine divizori stupnja 0.

Uvedimo sada divizor meromorfne funkcije na X. Neka je X Riemannova ploha i f meromorfna funkcija na X koja nije identički jednaka 0.

Definicija 5.17. *Divizor od f definiramo preko reda funkcije f u točki:*

$$div(f) = \sum_p ord_p(f) \cdot p.$$

Nazivamo ga glavni divizor na X. Skup svih glavnih divizora na X označavamo GDiv(X).

štoviše, $GDiv(X)$ je podgrupa od $Div(X)$. To lako slijedi iz činjenica: $div(f) + div(g) = div(fg)$ i $div(\frac{1}{f}) = -div(f)$. Za točku $p \in X$ izaberemo kartu na X centriranu u p. Razvijemo f, g u Laurantove redove oko 0 i dobijemo na okolini od p:

$$f(z) = a_m \cdot z^m + \sum_{i>m} a_i \cdot z^i, a_m \neq 0$$
$$g(z) = b_n \cdot z^n + \sum_{i>n} b_i \cdot z^i, b_n \neq 0$$

Tada je $f(z) \cdot g(z) = a_m b_n z^{m+n} +$ (potencije višeg reda) pa je jasno $ord_p(fg) = ord_p(f) + ord_p(g)$. Također,

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_m \cdot z^m + \sum_{i>m} a_i \cdot z^i} = \frac{1}{z^m \cdot (a_m + \sum_{i>1} a_{m+i} \cdot z^i)},$$

gdje je $\frac{1}{a_m + \sum_{i>1} a_{m+i} \cdot z^i}$ holomorfna funkcija oko 0 jer $a_m \neq 0$ s vrijednosti $\neq 0$ u 0. Zaključujemo, $ord_p(\frac{1}{f}) = -ord_p(f)$.

Ponekad želimo promatrati samo nultočke ili samo polove meromorfne funkcije pa zato uvodimo sljedeću definiciju:

Definicija 5.18. *Divizor nultočaka od f je* $div_0(f) = \sum_{p, ord_p(f)>0} ord_p(f) \cdot p$.
Divizor polova od f je $div_\infty(f) = \sum_{p, ord_p(f)<0} (-ord_p(f)) \cdot p$.

Primijetimo da su oba divizora nenegativne funkcije s disjunktnim nosačima. Vrijedi:

$$div(f) = div_0(f) - div_\infty(f).$$

Neka su X, Y Riemannove plohe i $F : X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje među njima. Ranije smo definirali multiplicitet holomorfnog preslikavanja u točki i iskazali teorem o stupnju holomorfnog preslikavanja između kompaktnih Riemannovih ploha. Time sljedeće definicije imaju smisla:

Definicija 5.19. *Neka je $q \in Y$. Divizor inverzne slike od q je*

$$F^*(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} mult_p(F) \cdot p.$$

Po gore spomenutom teoremu dobivamo da je stupanj divizora inverzne slike holomorfnog preslikavanja F jednak $deg(F)$ za svaki $q \in Y$.
Definiciju možemo proširiti za proizvoljni divizor na Y:

Definicija 5.20. *Neka je $D = \sum_{q \in Y} n_q \cdot q$ divizor na Y. Povlak od D na X je divizor*

$$F^*(D) = \sum_{q \in Y} n_q F^*(q).$$

Gledajući na divizore kao funkcije, imamo: $F^*(D)(p) = mult_p(F)D(F(p))$.

Lema 5.21. *Neka je $F : X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje između Riemannovih ploha. Tada:*
i) $F^* : Div(Y) \to Div(X)$ je homomorfizam grupa.
ii) Povlak glavnog divizora je glavni divizor.
iii) Ako su X i Y kompaktne Riemannove plohe, onda $deg(F^*(D)) = deg(F)deg(D)$.

Dokaz. *i)* $F^*(D_1 + D_2)(p) = mult_p(F)(D_1 + D_2)(F(p)) = mult_p(F)(D_1)(F(p)) + mult_p(F)(D_2)(F(p)) = F^*(D_1)(p) + F^*(D_2)(p)$.
ii) Za meromorfnu funkciju f na Y računamo:

$$ord_p(f \circ F) = f \circ z^{mult_p(F)} = a_{ord_{F(p)}(f)} \cdot z^{ord_{F(p)}(f) mult_p(F)} + \text{(potencije višeg reda)}$$

koristeći lokalnu normalnu formu preslikavanja F. A po definiciji je $F^*(div(f)) = mult_p(F) ord_{F(p)}(f)$.
iii) Slijedi direktno pregrupiranjem sume $deg(F^*(D))$ izlučivši $D(F(p))$ i zbrojivši multiplicitete od F u točki p. □

Sada uvodimo pojam divizora presjeka na glatkim projektivnim krivuljama. On će nam kasnije poslužiti za definiranje stupnja glatke projektivne krivulje što je, jasno, vrlo važan pojam.
Neka je X glatka projektivna krivulja, dakle, Riemannova ploha holomorfno uložena u $\mathbb{P}^n$. Fiksirajmo homogeni polinom $G(x_0, ..., x_n)$ koji nije identički 0 na X. éelimo

definirati divizor kojim ćemo brojati s multiplicitetima u kojim točkama na X je $G = 0$. U tu svrhu uzmimo za neku točku $p \in X$ polinom H koji se ne poništava u p. Takav postoji: možemo uzeti $H(x_0, ..., x_n) = x_i^{deg(G)}$ ako je $i-$ta koordinata u točki p različita od 0. Vidjeli smo da je to meromorfna funkcija na X pa njezin red u točki p označavamo $div(G)(p)$. Definicija ne ovisi o izboru polinoma H jer je

$$\frac{G}{H} = \frac{G}{H'} \cdot \frac{H'}{H}$$

za holomorfnu funkciju $\frac{H'}{H}$ koja se ne poništava u p pa joj je red u p jednak 0.

Definicija 5.22. *Divizor div(G) zovemo divizor presjeka na X.*

Ako je polinom G stupnja 1, onda $div(G)$ zovemo *hiperravninski divizor*. Upravo će on poslužiti za definiranje stupnja glatke projektivne krivulje.

Primijetimo da divizore možemo parcijalno urediti relacijom $\geq$:

$$D_1, D_2 \in Div(X), D_1 \geq D_2 \Leftrightarrow D_1 - D_2 \geq 0,$$

gdje $D \geq 0$ definiramo po točkama: ako za $\forall p \in X, D(p) \geq 0$.

Također možemo pričati o minimumu konačnog skupa divizora:

$$min\{D_1, ..., D_n\}(p) = min\{D_1(p), ..., D_n(p)\}, \forall p \in X.$$

Na skupu $Div(X)$ ćemo uvesti relaciju:

$$D_1 R D_2 \Leftrightarrow D_1 - D_2 \in GDiv(X)$$

Radi se o relaciji ekvivalencije:

i) DRD jer $D - D = 0$ je divizor konstantne funkcije na X različite od 0.

ii) $D_1 R D_2$ po definiciji implicira da postoji meromorfna funkcija f na X tako da $D_1 - D_2 = div(f)$. Tada je $D_2 - D_1 = -div(f) = div(\frac{1}{f})$.

iii) $D_1 R D_2$ i $D_2 R D_3$ po definiciji implicira da postoje meromorfne funkcije f, g na X takve da je $D_1 - D_2 = div(f)$ i $D_2 - D_3 = div(g)$. Tada je jasno $D_1 - D_3 = D_1 - D_2 + D_2 - D_3 = div(f) + div(g) = div(fg)$.

Za divizore koji su u relaciji R kažemo da su *linearno ekvivalentni*.

Primijetimo da je ova definicija motivirana tom pojavom na brojnim primjerima divizora koje smo upoznali:

Lema 5.23. *Neka je X Riemannova ploha. Tada:*

i) Ako je f meromorfna funkcija na X koja nije identički jednaka 0, onda je divizor nula linearno ekvivalentan divizoru polova funkcije f.

ii) Ako je $F : X \to Y$ *holomorfno preslikavanje i* D_1, D_2 *su linearno ekvivalentni divizori na Y, onda su povlaci* $F^*(D_1), F^*(D_2)$ *linearno ekvivalentni divizori na X.*

iii) Ako je X glatka projektivna krivulja i G_1, G_2 *dva homogena polinoma istog stupnja, onda su njihovi divizori presjeka* $div(G_1)$ *i* $div(G_2)$ *linearno ekvivalentni.*

iv) Na $\mathbb{C} \cup \infty$ *svake dvije točke su linearno ekvivalentne.*

v) Ako je $F : X \to \mathbb{C} \cup \infty$ *holomorfno preslikavanje, onda su svi* $F^*(\lambda)$ *linearno ekvivalentni.*

Dokaz. *i)* Iz definicije slijedi $div(f) = div_0(f) - div_\infty(f)$ što dokazuje tvrdnju.

ii) Jer su D_1 i D_2 linearno ekvivalentni, postoji meromorfna funkcija f na X takva da je $D_1 - D_2 = div(f)$. U ranijoj lemi smo vidjeli da je $F^* : Div(Y) \to Div(X)$ homomorfizam grupa. Zato imamo: $F^*(D_1) - F^*(D_2) = F^*(div(f))$, u istoj lemi smo vidjeli da je $F^*(div(f)) = div(f \circ F)$.

iii) $div(G_1) - div(G_2) = div(\frac{G_1}{G_2})$ jer računajući u nekoj točki $p \in X$ dobivamo: $ord_p(\frac{G_1}{H}) - ord_p(\frac{G_2}{H}) = ord_p(\frac{G_1}{G_2})$, za polinom H istog stupnja kao i G_1, G_2 koji se ne poništava u p.

iv) Ako su obje točke iz $\mathbb{C}$, tada za $f(z) := \frac{z-\lambda_1}{z-\lambda_2}$ imamo $div(f) = 1 \cdot \lambda_1 + (-1) \cdot \lambda_2$. Ako je jedna točka ∞, onda za $f(z) := z - \lambda$ je $div(f) = 1 \cdot \lambda + (-1) \cdot \infty$.

v) Svi $F^*(\lambda)$ su linearno ekvivalentni po tvrdnjama *ii)* i *iv)*. □

Peta tvrdnja gornje leme nam daje na neki način objašenjenje zašto je naziv linearna ekvivalencija. Kada su dva divizora linearno ekvivalentna, postoji meromorfna funkcija na X tako da je $div(f) = D_1 - D_2$. Vidjeli smo $div(f) = div_0(f) - div_\infty(f)$ što se može za holomorfno preslikavanje F pridruženo funkciji f zapisati preko povlaka po F: $div(f) = F^*(0) - F^*(\infty)$. Vidjeli smo u *v)* da su svi $F^*(\lambda)$ linearno ekvivalentni, $\lambda \in \mathbb{C}$, pa ako na Riemannovu sferu gledamo kao projektivni pravac "parametrizacija" po λ daje motivaciju za naziv linearna ekvivalencija - u klasi linearno ekvivalentnih divizora imamo "pravac".

Pogledajmo sada nužne i dovoljne uvjete za linearnu ekvivalenciju divizora na Riemannovoj sferi i kompleksnom torusu. Karakterizacija na sferi je vrlo jednostavna:

Propozicija 5.24. *Divizor D na Riemannovoj sferi je glavni ako i samo ako je deg(D)=0.*

Dokaz. Pretpostavimo da je D glavni divizor na Riemannovoj sferi. Tada je $D = div(f)$, za neku meromorfnu funkciju na $\mathbb{C} \cup \infty$. $deg(D) = deg(div(f)) = 0$ jer je suma redova meromorfne funkcije u točkama kompaktne Riemannove plohe jednaka 0.
Obratno, neka je $D = \sum_i e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Jer je $deg(D) = 0$, onda $e_\infty = -\sum_i e_i$. Zato je $D = div(f)$ za funkciju: $f(z) = \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i}$. Red funkcije f u ∞ provjerimo zamjenom koordinata $z \mapsto \frac{1}{z}$. □

Korolar 5.25. *Neka su D_1, D_2 divizori na Riemannovoj sferi. Tada su D_1 i D_2 linearno ekvivalentni ako i samo ako $deg(D_1) = deg(D_2)$.*

Dokaz. Direktnom primjenom gornje propozicije za $D = D_1 - D_2$. □

Karakterizacija linearno ekvivalentnih divizora na kompleksnom torusu nije puno kompliciranija. No, prvo uvodimo *Abel-Jacobijevo* preslikavanje.

$$A : Div(X) \to X,\ A(\sum_i n_i \cdot p_i) = \sum_i n_i \cdot p_i$$

gdje je suma iz $Div(X)$ formalna, a njegova slika je element grupe X.

Teorem 5.26. *(Abelov teorem za torus)*
Divizor D na kompleksnom torusu $X = \mathbb{C}/L$ je glavni ako i samo ako $deg(D)$=0 i $A(D) = 0$.

Dokaz. Provjerimo prvo da su uvjeti nužni. Jer je kompleksni torus kompaktna Riemannova ploha, vrijedi $deg(D) = deg(div(f)) = 0$. Da bismo provjerili da je $A(D) = 0$, po definiciji treba provjeriti da je $A(D) \in L$. To ćemo napraviti podizanjem funkcije f do meromorfne funkcije h na $\mathbb{C}$. Ako izračunamo sumu nultočaka i polova od h na nekom fundamentalnom paralelogramu, $A(D)$ je ta suma $+L$. Dakle, $h(z) = f \circ \pi(z)$, za $\pi : \mathbb{C} \to X$ kanonski epimorfizam. Suma koju treba izračunati nas može podsjetiti na teorem kompleksne analize:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \cdot \frac{u'(z)}{u(z)} dz = \sum_{z_i \text{ td } u(z_i)=0} g(z_i) \cdot ord_{z_i}(u) + \sum_{z_j \text{ td } z_j \text{ pol od } u} g(z_j) \cdot ord_{z_j}(u)$$

za holomorfnu funkciju g, meromorfnu funkciju u i zatvorenu, po dijelovima glatku krivulju γ na kojoj se ne nalaze ni nultočke ni polovi od u.

Za krivulju γ ćemo uzeti rub fundamentalnog paralelograma. Jer su nultočke i polovi od h diskretni, možemo pronaći točku $p \in \mathbb{C}$ tako da ih rub paralelograma s vrhovima $p, p+1, p+1+\tau, p+\tau$ ne sadrži. Zbog jednostavnosti notacije pretpostavimo da je $p=0$. Rub paralelograma parametriziramo: $\alpha(t)=t$, $\beta(t)=1+\tau t$, $\gamma(t)=\tau+(1-t)$, $\delta(t)=(1-t)\tau, t\in[0,1]$. Primijetimo da vrijedi: $\beta(t)=\delta(1-t)+1$ i $\gamma(t)=\alpha(1-t)+\tau$. Jer je f definirana na X, h je $L-$ periodična. Dakle, $h(z+1)=h(z+\tau)=h(z)$. I također deriviranjem slijedi: $h'(z+1)=h'(z+\tau)=h'(z)$. Koristeći gore navedene činjenice dobijemo:

$$\int_\gamma z\cdot\frac{h'(z)}{h(z)} = -\int_\alpha z\cdot\frac{h'(z)}{h(z)}+\tau\cdot\int_\gamma\frac{h'(z)}{h(z)}$$
$$\int_\beta z\cdot\frac{h'(z)}{h(z)} = -\int_\delta z\cdot\frac{h'(z)}{h(z)}+\int_\beta\frac{h'(z)}{h(z)}$$

Još treba primijetiti da su integrali $\int_\gamma\frac{h'(z)}{h(z)}$ i $\int_\beta\frac{h'(z)}{h(z)}$ cjelobrojni višekratnici od $2\pi i$. γ i β su kompaktni podskupovi od $\mathbb{C}$ pa ih možemo podijeliti na konačno mnogo segmenata tako da na svakom možemo izabrati neku granu kompleksnog logaritma tako da vrijednosti $log(h(z))$ budu definirane. Dakle, standardno uzimamo $log(z)=log(|z|)+i\cdot arg(z)$, za $arg(z)\in(-\pi,\pi]$, ali ako bi segment sadržavao brojeve s agrumentima iz skupa $(-\pi,-\pi+\varepsilon)\cup(\pi-\varepsilon,\pi]$ za neki $\varepsilon>0$ moramo pomaknuti granu logaritma. Primijetimo da je razlika dva logaritma evaluirana u istom kompleksnom broju cjelobrojni višekratnik od $2\pi i$. Sada jer je $\frac{h'(z)}{h(z)}=(log(h(z)))'$ na definiranim segmentima, imamo:

$$\int_{\gamma'}\frac{h'(z)}{h(z)}dz = log(h(\gamma'(b)))-log(h(\gamma'(a)))$$

gdje su $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ početna i završna točka restrikcije γ' puta γ na segment. Sumirajući takve razlike dobivamo da je suma $m\cdot 2\pi i$ za $m\in\mathbb{Z}$. Tu smo još koristili činjenicu da funkcija h ima iste vrijednosti u završnim točkama puteva γ i β. Time je završen dokaz prvog smjera.

Obratno, prepostavimo da vrijedi $deg(D)=0$ i $A(D)=0$. Jer je $deg(D)=0$ moguće je D zapisati kao $D=\sum_i(p_i-q_i)$ organizirajući sumu tako da sumand $n\cdot p$ napišemo kao $p+...+p$, n sumanada. Sada svaki p_i i q_i podignemo do z_i i w_i iz $\mathbb{C}$. Jer je $A(D)=0$ slijedi da je $\sum_i(z_i-w_i)=l\in L$. Ako od, na primjer, z_1 oduzmemo l nećemo promijeniti

p_1, a za sumu dobiavmo da je 0: $\sum_i (z_i - w_i) = 0$. Imali smo ranije teorem koji je rekao da je tada

$$R(z) = \frac{\prod_i \Theta^{(z_i)}(z)}{\prod_j \Theta^{(w_j)}(z)}$$

$L-$ periodična funkcija na $\mathbb{C} \cup \infty$. Jasno, div(R)=D. □

Korolar 5.27. *Neka su D_1 i D_2 dva divizora na kompleksnom torusu. Tada je $D_1 R D_2$ ako i samo ako $deg(D_1) = deg(D_2)$ i $A(D_1) = A(D_2)$.*

Dokaz. Primjenom gornjeg teorema za $D = D_1 - D_2$. □

Korolar 5.28. *Neka je D divizor pozitivnog stupnja na $\mathbb{C} \cup \infty$. Tada je D linearno ekvivalentan pozitivnom divizoru. štoviše, ako je $deg(D) > 1$, onda za svaku točku $x \in X$ možemo pronaći divizor kojem je D linearno ekvivalentan i koji ne sadrži točku x u svom nosaču.*

Dokaz. Označimo $D = \sum_i a_i \cdot p_i$.
Ako je $deg(D) = 1$, primijetimo da je $E = 1 \cdot (\sum_i a_i p_i)$ linearno ekvivalentan sa D jer je $deg(D - E) = deg(D) - deg(E) = 1 - 1 = 0$ i $A(D - E) = \sum_i a_i p_i - \sum_i a_i p_i = 0$.
Ako je $deg(D) > 1$, onda uzmimo točku $q := 0 + L$ i definirajmo: $E = 1 \cdot (D) + (deg(D) - 1) \cdot q$. Opet lako provjerimo da je $deg(D - E) = 0$ i $A(D - E) = 0$. Da bismo izbjegli neku fiksnu točku u nosaču od E dodamo i oduzmemo neki kompleksan broj u (D) i q. □

Vratimo se sada na ravninske divizore. Spomenuli smo da ćemo pomoću njih definirati fundamentalni pojam stupnja glatke projektivne krivulje.

Definicija 5.29. *Neka je X glatka projektivna krivulja. Stupanj od X, u oznaci deg(X), je stupanj bilo kojeg ravninskog divizora na X.*

Da je definicija dobra, treba provjeriti dvije stvari:
⋆ Definicija ne ovisi o izboru ravninskog divizora
U ranijoj lemi smo vidjeli da su za homogene polinome istog stupnja njihovi divizori presjeka linearno ekvivalentni. Kako je X kompaktan, i stupnjevi su im jednaki.
⋆ Definicija stupnja glatke projektivne ravninske krivulje i gornja definicija se podudaraju
Ranije smo definirali da je stupanj glatke projektivne ravninske krivulje stupanj polinoma

$F(x,y,z)$ koji ju definira. Označimo stupanj polinoma F sa d. Uz promjenu koordinata, možemo pretpostaviti da točka $[0:0:1] \notin X$. Jedan primjer zamjene koordinata je: $x \mapsto x+t$, $y \mapsto y+1$, $z \mapsto z$, gdje je $t \in \mathbb{C}$ parametar. Uvrstivši nove koordinate u polinom F i uvrstivši točku $[0:0:1]$ dobivamo polinom po t koji ima konačno mnogo nultočaka. Za traženu zamjenu uzmemo za t neki izvan tog skupa. Ravninski divizor na X ćemo definirati kao divizor nultočaka polinoma $h(x,y,z) = \frac{x}{y}$. Zanima nas je li stupanj tog divizora jednak d. Jer se redovi nultočaka funkcije i multipliciteti istih pridruženog holomorfnog preslikavanja podudaraju, vidimo da je ravninski divizor za preslikavanje $H : X \to \mathbb{C} \cup \infty$ jednak $H^*(0)$. To nam je korisno jer znamo po ranijoj lemi formulu o stupnju povlaka divizora: $deg(H^*(0)) = deg(H) \cdot deg(1 \cdot 0) \Leftrightarrow deg(H^*(0)) = deg(H)$. Dakle, pitanje se svelo na određivanje stupnja preslikavanja H. Vidimo da je $H(x,y,z) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \Leftrightarrow x = \lambda y$. Jer $[0:0:1] \notin X$, ni x ni y nisu $= 0$. Tada točke koje zadovoljavaju $H(x,y,z) = \lambda$ možemo zapisati: $[\lambda : 1 : z]$. Vidimo da se radi o polinomu po z koji, osim za konačno mnogo točaka, ima sve jednostruke nultočke, dakle, njih d. Time smo dokazali dobru definiranost.

Dobro nam je poznat Bezoutov teorem za projektivne ravninske krivulje. Uz gornje definicije divizora i stupnja glatkih projektivnih krivulja vrlo elegantno se dokaže analogon:

Teorem 5.30. *(Bezoutov teorem za glatke projektivne krivulje)*
Neka je X glatka projektivna krivulja stupnja d i neka je G homogeni polinom stupnja e koji nije identički jednak 0 na X. Tada je stupanj presječnog divizora div(G) na X produkt stupnjeva od X i od G:

$$deg(div(G)) = deg(X)deg(G) = de.$$

Dokaz. Dokaz se temelji na činjenici da su stupnjevi presječnih divizora na kompaktnoj Riemannovoj plohi za polinome istog stupnja jednaki. Zbog toga jer je H^e stupnja e, $deg(div(G)) = deg(div(H^e))$. »isto iz definicije reda nultočke, dobivamo $deg(div(H^e)) = e \cdot deg(div(H))$, a $deg(div(H)) = d$ po definiciji stupnja glatke projektivne krivulje. □

Spomenuli smo da će nam divizori služiti za organiziranje meromorfnih funkcija na Riemannovim plohama. Sljedeće definicije konkretnije govore o tome:

Definicija 5.31. *Neka je D divizor na Riemannovoj plohi. Prostor meromorfnih funkcija na X s polovima ograđenim sa D, u oznaci L(D), je skup meromorfnih funkcija*

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : div(f) \geq -D\}.$$

Lako primjećujemo da je $L(D)$ kompleksni vektorski prostor.
U točkama $p \in X$ za koje je $D(p) = n > 0$, funkcija $f \in L(D)$ ne smije imati pol reda većeg od n. U točkama $p \in X$ za koje je $D(p) = n < 0$, funkcija $f \in L(D)$ mora imati nultočku reda barem n. Također primijetimo da

$$\text{ako } D_1 \leq D_2, \text{ onda } L(D_1) \subset L(D_2).$$

Jer je $f \in (M)(X)$ holomorfna ako i samo ako $div(f) \geq 0$, vidimo da za divizor 0 imamo skup

$$L(0) = \mathcal{O}(X) = \{\text{holomorfne funkcije na X}\}.$$

Lema 5.32. *Neka je X kompaktna Riemannova ploha. Ako je D divizor na X s* $deg(D) < 0$*, onda* $L(D) = \{0\}$.

Napomena 5.33. *Za funkciju f koja je identički jednaka 0 na okolini od p smatramo da je* $ord_p(f) = \infty$.

Dokaz. (lame) Kada bi postojala $f \in L(D)$ koja nije identički jednaka 0, onda primjenivši stupanj divizora na relaciju: $div(f) \geq -D \Rightarrow 0 \geq -deg(D)$, što ne može biti jer je $-deg(D) > 0$. □

Jer je $div(c \cdot f) = div(f)$, za $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, vidimo da se javlja određena projektivna struktura na $L(D)$. Htjeli bismo poistovjetiti funkcije $c \cdot f$ i f:

Definicija 5.34. *Potpuni linearni sistem od D, u oznaci |D|, je skup svih nenegativnih divizora koji su linearno ekvivalentni sa D:*

$$|D| = \{E \in Div(X) : ERD \text{ } i \text{ } E \geq 0\}.$$

Prisjetimo se da je projektivizacija vektorskog prostora V jednaka skupu svih jednodimenzionalnih potprostora od V, uz oznaku $\mathbb{P}(V)$.

Definiramo funkciju:

$$S : \mathbb{P}(L(D)) \to |D|$$

$$S(< f >) = div(f) + D$$

Dobra definiranost preslikavanja S je jasna iz gornje primjedbe o projektivnoj strukturi na $L(D)$.

Lema 5.35. *Ako je X kompaktna Riemannova ploha, funkcija S je bijekcija.*

Dokaz:
Neka je $E \in |D|$. Dakle, postoji $f \in \mathcal{M}(X)$ takva da je $E - D = div(f)$. Jasno, $f \in L(D)$ jer $div(f) + D = E \geq 0$ pa imamo $S(< f >) = div(f) + D = E$.
Dokažimo sada injektivnost. Pretpostavimo da je $S(f) = S(g)$. To vrijedi ako i samo ako je $div(f) = div(g)$, što povlači $div(\frac{f}{g}) = 0$. Dakle, $\frac{f}{g}$ je holomorfna funkcija na X koja nema nultočaka. Iz kompaktnosti od X slijedi da postoji $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tako da je $f = c \cdot g$, dakle $< f >=< g >$. □

Definicija 5.36. *Za kompaktnu Riemannovu plohu, generalni linearni sistem je podskup potpunog linearnog sistema koji preko preslikavanja S odgovara linearnom potprostoru od* $\mathbb{P}(L(D))$.

Jedna očekivana posljedica je:

Propozicija 5.37. *Neka su* D_1 *i* D_2 *linearno ekvivalentni divizori na Riemannovoj plohi X. Neka je tada* $D_1 = D_2 + div(h)$*, za meromorfnu funkciju h na X. Množenje sa h daje izomorfizam kompleksnih vektorskih prostora* $L(D_1)$ *i* $L(D_2)$*. Posebno, istih su dimenzija.*

Dokaz. Jasno je da je množenje fiksnom funkcijom linearno preslikavanje. Treba provjeriti da je slika tog preslikavanja podskup od $L(D_2)$. Za $f \in L(D_1)$, $f \cdot h \in L(D_2) \Leftrightarrow div(fh) \geq -D_2 \Leftrightarrow div(f) \geq -(D_2 + div(h)) = -D_1$. Inverzno preslikavanje definiramo množenjem funkcijom $\frac{1}{h}$. □

Izračunajmo sada prostor $L(D)$ na Riemannovoj sferi.
Neka je D divizor na X tako da je $deg(D) \geq 0$. Za slučaj $deg(D) < 0$ smo vidjeli da je $L(D) = \{0\}$ jer je X kompaktna Riemannova ploha. Označimo:

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty,$$

$$f_D(z) = \prod_{i=1}^{n}(z-\lambda_i)^{-e_i}.$$

Propozicija 5.38. *Uz gornju notaciju, prostor $L(D)$ je:*

$$L(D) = \{g(z)f_D(z) : g(z) \text{ je polinom stupnja najviše } deg(D)\}$$

Dokaz. Utvrdimo najprije da su funkcije iz skupa na desnoj strani jednakosti sadržane u $L(D)$.

$div(g \cdot f_D) = div(g) + div(f_D)$. Red funkcije g je nenegativan u svakoj točki iz $\mathbb{C}$. Zbog definicije funkcije f_D jedino treba provjeriti: $ord_\infty(g) + \sum_{i=1}^{n} e_i \geq -e_\infty$. No to vrijedi jer je $deg(D) = \sum_{i=1}^{n} e_i + e_\infty$ i $ord_\infty(g) \geq -deg(D)$.

Pokažimo sada da su to sve funkcije iz $L(D)$. Neka je $f \in L(D)$. Meromorfna funkcija na kompaktnom skupu ima konačno nultočaka i polova pa imamo:

$$div(f) = \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot \lambda_i + f_\infty \cdot \infty$$

Jer je $f \in L(D)$ slijedi: $div(f) + D \geq 0$, to jest $f_i = a_i - e_i$, $a_i \geq 0$ za $i = 1, ..., n$, $f_i \geq 0$, za $i = n+1, ..., m$ i $f_\infty = a_\infty - e_\infty$, za $a_\infty \geq 0$. Vidjeli smo da je svaka meromorfna funkcija na Riemannovoj sferi racionalna funkcija. Sada je jasno da izlučivši f_D nam ostaje polinom. Jedino je pitanje kojeg stupnja je taj polinom, no, to se izračuna:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i + f_\infty = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{m} f_i + a_\infty - \sum_{i=1}^{n} e_i - e_\infty = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{m} f_i + a_\infty = \sum_{i=1}^{n} e_i + e_\infty = deg(D)$$

Jer je stupanj polinoma g jednak $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{m} f_i$ i $a_\infty \geq 0$ dobivamo $deg(g) \leq deg(D)$. $\square$

Direktna posljedica gornjeg računa je:

Korolar 5.39. *Neka je D divizor na Riemannovoj sferi. Tada je*

$$L(D) = \begin{cases} 0 & \text{, ako je } deg(D) < 0 \\ 1 + deg(D) & \text{, ako je } deg(D) \geq 0. \end{cases}$$

Izračunajmo sada dimenziju prostora $L(D)$ za kompleksni torus.

Propozicija 5.40. *Neka je $X = \mathbb{C}/L$ kompleksni torus i neka je D divizor na X. Tada vrijedi:*
a) Ako je $deg(D) < 0$, onda $L(D) = \{0\}$,
b) Ako je $deg(D) = 0$ i D linearno ekvivalentan s 0, onda $\dim L(D) = 1$.
c) Ako je $deg(D) = 0$ i D nije linearno ekvivalentan s 0, onda $L(D) = \{0\}$.
d) Ako je $deg(D) > 0$, onda je $\dim L(D) = deg(D)$.

Dokaz. a) Jer je kompleksni torus kompaktna Riemannova ploha, ova tvrdnja je izravna posljedica ranije leme.
b) Jer je D linearno ekvivalentan s 0, postoji funkcija $f \in \mathcal{M}(X)$ tako da je $D = div(f)$. Za $g \in L(D)$ vrijedi $div(g) \geq -D \Leftrightarrow div(g) + div(f) \geq 0 \Leftrightarrow div(gf) \geq 0$, što nam daje da je gf holomorfna funkcija na X. Međutim, kompleksni torus je kompaktna Riemannova ploha pa je svaka holomorfna funkcija na X konstanta. Dakle, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tako da je $gf = \lambda$. Slijedi, $L(D) \subset \{\lambda \cdot \frac{1}{f} : \lambda \in \mathbb{C}\}$ što je jednodimenzionalan potprostor od $\mathcal{M}(X)$. Za dokaz tvrdnje je još potrebno provjeriti da u $L(D)$ postoji funkcija različita od 0. No, lako se vidi da je $\frac{1}{f} \in L(D)$.
c) Pretpostavimo da postoji ne-nul funkcija u $L(D)$, $g \in L(D)$. Pokazat ćemo da je tada $D = -div(g) = div(\frac{1}{g})$ što će dati kontradikciju s pretpostavkom da D nije linearno ekvivalentan s 0. Uvedimo oznake:

$$div(g) = \sum_{j=1}^{m} ord_{q_j}(g) \cdot q_j, D = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot p_i$$

Nosači divizora su konačni jer je X kompaktna Riemannova ploha. Rastavimo $div(g) + D$ na disjunktne sume:

$$div(g) + D = \sum_{x} ord_{q_j}(g) \cdot q_j + \sum (ord_{q_j}(g) + e_j) \cdot q_j + \sum_{y} e_i \cdot p_i$$

gdje indeksi x i y služe samo za razlikovanje suma u predstojećem računu. Jer je $div(g) + D \geq 0$, imamo $ord_{q_j}(g) \geq 0$ u prvoj sumi, $ord_{q_j}(g) \geq -e_j$ u drugoj sumi i $e_i \geq 0$ u trećoj sumi. Primijetimo da zbog kompaktnosti od X i pretpostavke $deg(D) = 0$ vrijedi:

$$\sum_{j=1}^{m} ord_{q_j}(g) = \sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

Dobivamo:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} e_i \geq \sum_{y} e_i - \sum ord_{q_j}(g)$$

$$-\sum_{x} ord_{q_j}(g) = \sum ord_{q_j}(g) \geq \sum_{y} e_i$$

Kako je svaki od sumanada i na lijevoj i na desnoj strani nejednakosti nenegativan, svaki od njih mora biti $= 0$ da bi nejednakost vrijedila. Time smo pokazali da D i $div(g)$ imaju isti nosač. Sada tvrdnju $D = -div(g)$ dokazujemo indukcijom po broju točaka u nosaču.

Baza) Pretpostavimo da postoje dvije točke u nosaču.

$D = a \cdot p + (-a) \cdot q$ i $div(g) = b \cdot p + (-b) \cdot q$

Kao što smo gore opisali, dobivamo sustav nejednakosti:

$$\begin{cases} a + b \geq 0 \\ -a - b \geq 0 \end{cases}$$

iz kojeg jasno vidimo da je $a = -b$, što smo i trebali.

Pretpostavka) Pretpostavimo da smo tvrdnju dokazali za broj točaka u nosaču manji ili jednak n.

Korak) Pretpostavimo da postoji $n+1$ točka u nosaču.

$D = a_1 \cdot p_1 + ... + a_n \cdot p_n + (-\sum_{i=1}^{n} a_i) \cdot p_{n+1}$ i $div(g) = b_1 \cdot p_1 + ... + b_n \cdot p_n + (-\sum_{i=1}^{n} b_i) \cdot p_{n+1}$. Dobivamo sustav nejednakosti:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 0 \\ \vdots \\ a_n + b_n \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} -a_i - b_i \geq 0 \end{cases}$$

kojeg rješavamo na sljedeći način.

Zbrojivši prvih n nejednakosti, nakon usporedbe sa zadnjom nejedankosti zaključujemo:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i = 0 \Rightarrow a_1 + b_1 = \sum_{i=2}^{n} -a_i - b_i \geq 0$$

Po pretpostavci, znamo riješiti sustav:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 0 \\ \vdots \\ a_n + b_n \geq 0 \\ \sum_{i=2}^{n} -a_i - b_i \geq 0 \end{cases}$$

pa nam se početni sustav reducira na:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 0 \\ -a_1 - b_1 \geq 0 \end{cases}$$

kojeg znamo riješiti.

d) Pretpostavimo prvo da je $deg(D) = 1$. Ranije smo imali korolar u kojem smo vidjeli da postoji točka $p \in X$ tako da je D linearno ekvivalentan sa p. Također smo vidjeli da su tada $L(D)$ i $L(p)$ izomorfni vektorski prostori pa uzmimo $D = p$. Jasno, u $L(p)$ su konstantne funkcije pa je $\dim L(p) \geq 1$. Kada bi postojala nekonstanta funkcija u $L(D)$, onda bi morala imati pol. Međutim, divizor p dozvoljava samo jednostruki pol u točki p. Time dobivamo da je preslikavanje $F : X \to \mathbb{C} \cup \infty$ izomorfizam, što ne može biti po već spomenutoj Hurwitzovoj formuli jer je sfera genusa 0, a torus genusa 1. Zaključujemo, $\dim L(p) = 1$.

Dokaz nastavljamo indukcijom po stupnju divizora D. Neka je $deg(D) = d > 0$. Napišimo $D = D_1 + p$, za neku točku p i divizor D_1 stupnja $d - 1$. Jer je $D_1 \leq D$, onda $L(D_1) \subset L(D)$ pa je dimenzija od $L(D)$ veća ili jednaka $d - 1$. Sljedeća lema nam govori da dimenzija od $L(D)$ može biti samo $d - 1$ ili d.

Lema 5.41. *Neka je X Riemannova ploha, D divizor na X i $p \in X$. Tada je ili $L(D - p) = L(D)$ ili $L(D - p)$ ima kodimenziju 1 u $L(D)$.*

Dokaz. Promatrajmo Laurentove redove funkcija u $L(D)$ oko točke p. Definiramo linearno preslikavanje:

$$\alpha : L(D) \to \mathbb{C}$$

koje funkciji $f \in L(D)$ pridružuje koeficijent u Laurentovom razvoju uz $z^{-D(p)}$. Jasno, $Ker\alpha = L(D - p)$. Ako je α identički 0, onda $L(D) = L(D - p)$. U suprotnom, je preslikavanje surjekcija (očito: množeći funkciju za koju dobijemo ne-nul koeficinjent svakim kompleksnim brojem) pa je $\dim\ (L(D)/L(D - p)) = 1$ jer je $\dim \mathbb{C} = 1$. $\square$

Vratimo se na dokaz propozicije. Ostaje nam utvrditi da postoji funkcija koja je u $L(D)$, a nije u $L(D_1)$. Po već spomenutom korolaru, možemo pronaći pozitivni divizor E koji je linearno ekvivalentan sa D i ne sadrži točku p u svom nosaču. Tada postoji meromorfna funkcija f na X tako da je $E - D = div(f)$. Jer je E pozitivan, dobivamo da je $f \in L(D)$.

Međutim, $f \notin L(D_1)$ jer $div(f) + D_1 = E - D + D_1 = E - p$ što nije nenegativan divizor. Ovime dovršavamo dokaz cijele propozicije. $\square$

Iz ova dva primjera izračuna dimenzija prostora $L(D)$ možemo uočiti da su oba kompaktne Riemannove plohe i oba imaju konačno-dimenzionalan prostor $L(D)$. I zbilja, općenito na kompaktnoj Riemannovoj plohi možemo ograditi dimenziju prostora $L(D)$:

Propozicija 5.42. *Neka je X kompaktna Riemannova ploha i D divizor na X. Tada je prostor funkcija $L(D)$ konačno-dimenzionalan kompleksni vektorski prostor. Preciznije, ako je $D = P - N$ jedinstveni rastav divizora gdje su P i N nenegativni, vrijedi $\dim L(D) \leq 1 + deg(P)$.*

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po stupnju divizora P i koristeći lemu iz dokaza gornje propozicije. Ako je $D = 0$, onda jasno dim $L(D)$=1, jer na kompaktnoj Riemannovoj plohi sve holomorfne funkcije su konstantne.
Neka je $deg(P) = 0$, onda $P = 0$ jer je P nenegativan pa je uz isti argument kao gore dim $L(P) = 1$. Jer $D \leq P$, slijedi $L(D) \subset L(P)$ pa dim $L(D) \leq$ dim $L(P) = 1 + deg(P)$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za stupanj od P manji ili jednak $k - 1$.
Neka je D divizor takav da je $deg(P) = k$. Odaberimo točku p iz nosača od D takvu da je $P(p) \geq 1$. Pogledajmo divizor $D - p$. Njegov pozitivni divizor ima stupanj $k - 1$ pa možemo primijeniti pretpostavku. Dakle, dim $L(D - p) \leq 1 + deg(P - p) = deg(P)$. Po spomenutoj lemi dobivamo: dim $L(D) \leq 1+$ dim $L(D - p) \leq 1 + deg(P)$. $\square$

Okrenimo se sada zadatku holomorfnog ulaganja Riemannovih ploha u projektivni prostor. Time ćemo moći primijeniti alate algebarske geometrije na glatkim projektivnim krivuljama. Za provedbu ulaganja nam trebaju divizori i gore opisana teorija.

Definicija 5.43. *Neka je X Riemannova ploha. Preslikavanje $\Phi : X \to \mathbb{P}^n$ je holomorfno u točki $p \in X$ ako postoje holomorfne funkcije $g_0, \ldots, g_n$ definirane na X oko p, koje nisu sve 0 u p, takve da $\Phi(x) = [g_0(x) : g_1(x) : \ldots : g_n(x)]$ za $x-$eve blizu p. Kažemo da je Φ holomorfno preslikavanje ako je holomorfno u svim točkama iz X.*

U nastavku dajemo karakterizaciju holomorfnih preslikavanja.

Kako na kompaktnim Riemannovim plohama X nemamo holomorfne funkcije na cijelom X, ne možemo očekivati da ćemo korisiti iste holomorfne funkcije za definiciju holomorfnog preslikavanja u svakoj točki od X.
Fiksirajmo $n+1$ meromorfnu funkciju na Riemannovoj plohi X.

$$f := (f_0, ..., f_n),\ \Phi_f : X \to \mathbb{P}^n,\ \Phi_f(p) = [f_0(p) : ... : f_n(p)]$$

Jasno, ovako definirano preslikavanje neće biti dobro definirano u točki koja je pol bilo koje funkcije f_i ili koja je nultočka svih funkcija f_i. Međutim, zahvaljujući svojstvu $[x_0 : ... : x_n] = [\lambda x_0 : ... : \lambda x_n]$, preslikavanje Φ_f se može proširiti do holomorfnog preslikavanja. O tome govori sljedeći rezultat:

Lema 5.44. *Ako meromorfne funkcije $\{f_i\}$ nisu sve identički jednake nuli, onda se preslikavanje $\Phi_f : X \to \mathbb{P}^n$ može proširiti do holomorfnog preslikavanja na cijelom X.*

Dokaz. Fiksirajmo točku $p \in X$. Problem je kada je $min_i ord_p(f_i) \neq 0$. Ako je veći od 0, onda sve funkcije iščezavaju u p, ako je manji od 0, neka funkcija ima pol. Uzmimo okolinu oko p na X tako da je p jedina točka u kojoj sve funkcije imaju nultočku ili pol. Tada množeći $[f_0(z) : ... : f_n(z)]$ sa z^{-n} za neki z iz okoline od 0 na $\mathbb{C}$ barem jedna funkcija ima red u p jednak 0. I sve su holomorfne, označimo ih g_i. Zbog toga, definiramo $\Phi_f(p) = [g_0(0) : ... : g_n(0)]$. $\square$

Vrijedi i obrat gornje leme kojim dobivamo karakterizaciju holomorfnih preslikavanja u projektivni prostor:

Propozicija 5.45. *Neka je $\Phi : X \to \mathbb{P}^n$ holomorfno preslikavanje. Tada postoji $(n+1)-$torka meromorfnih funkcija $f = (f_0, f_1, ..., f_n)$ na X tako da je $\Phi_f = \Phi$. štoviše, ako $f = (f_0, f_1, ..., f_n)$ i $g = (g_0, g_1, ..., g_n)$ induciraju isto holomorfno preslikavanje, to jest $\Phi_f = \Phi_g$, onda postoji meromorfna funkcija λ na X takva da $g_i = \lambda f_i$, za svaki i.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x_0 koordinata u slici od Φ koja nije identički jednaka 0. Definiramo funkcije $f_i = (\frac{x_i}{x_0} \circ \Phi)$. Kako bi provjerili da se radi o meromorfnim funkcijama, fiksirajmo točku $p \in X$ i zapišimo preslikavanje Φ preko funkcija holomorfnih funkcija na okolini točke p: $\Phi(z) = [g_0(z) : ... : g_n(z)]$. Tada su f_i na okolini točke p oblika: $f_i = \frac{g_i}{g_0}$, što je meromorfna funkcija. Jasno, $\Phi = \Phi_f$, množeći $(n+1)-$ torku s $g_0(z)$ oko neke točke.

Pretpostavimo da je $\Phi_f = \Phi_g$, za neke meromorfne $(n+1)-$ torke funkcija f, g na X. Postoji samo konačno mnogo točaka na X u kojima komponentne funkcije od f ili g mogu imati nultočke ili polove. Dakle, na svim ostalim točkama imamo: $[f_0(p) : ... : f_n(p)] = [g_0(p) : ... : g_n(p)]$. Time dobivamo funkciju $\lambda(p) = \frac{f_i(p)}{g_i(p)}$ koja je meromorfna na X jer je omjer meromorfnih funkcija u svim osim konačno mnogo točaka. □

Nedavno smo definirali potpuni linearni sistem. Sada ćemo holomorfnom preslikavanju pridružiti linearni sistem.

Zapišimo: $\Phi = [f_0 : ... : f_n]$, gdje su f_i meromorfne funkcije na X. Definirajmo divizor $D = -min_i\{div(f_i)\}$. Tada je jasno $-D(p) \leq ord_p(f_i)$ u svakoj točki $p \in X$ jer smo vrijednost minus divizora u točki definirali kao minimalni red funkcija. Zbog toga je svaka f_i u $L(D)$. Posebno, $\mathbb{C}-$ linearna ljuska funkcija $\{f_i\}$ je podsistem od $L(D)$. Označimo ju V_f. Definiramo:

$$|\Phi| = \{div(g) + D : g \in V_f\}$$

Da bi pridruživanje linearnog sistema holomorfnom preslikavanju na ovaj način bilo smisleno, trebamo provjeriti da definicija ne ovisi o izboru meromorfnih funkcija f_i:

Lema 5.46. *Linearni sistem $|\Phi|$ je dobro definiran.*

Dokaz. Pretpostavimo da je holomorfno preslikavanje dano dvjema uređenim $(n+1)-$ torkama meromorfnih funkcija: $f = (f_0, ..., f_n)$ i $g = (g_0, ..., g_n)$. Vidjeli smo u gornjoj propoziciji da tada postoji meromorfna funkcija λ tako da je $\lambda = \frac{f_i}{g_i}$, za svaki i. Zbog toga je $div(\lambda) = div(f_i) - div(g_i)$ i primjenivši minimum po i, dobivamo: $div(\lambda) = -D + D'$, gdje su $D = -min_i\{div(f_i)\}$ i $D' = -min_i\{div(g_i)\}$. Uvjerimo se sada da je svaki element iz linearnog sustava definiranim sa f ujedno i element linearnog sustava definiranog sa g. Analogno se pokaže i obratna inkluzija pa dobivamo dobru definiranost.

$$div(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i) + D = div(\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda g_i) + D = div(\sum_{i=0}^{n} a_i g_i) + div(\lambda) + D = div(\sum_{i=0}^{n} a_i g_i) + D'$$

□

Nakon definicije linearnog sistema pridruženog holomorfnom preslikavanju možemo se pitati kada je linearni sistem sistem nekog holomorfnog preslikavanja. Jedan očiti nužan uvjet je da za svaku točku na X postoji divizor iz tog sistema koji ju ne sadrži u svom nosaču. Tome je tako jer za $p \in X$ postoji funkcija f_j među $\{f_i\}$ za koju se postiže minimalni red u toj točki. Tada divizor $div(f_j) + D = div(f_j) - min_i\{div(f_i)\}$ nema točku p u nosaču. Drugim riječima, da bi linearni sistem bio sistem nekog holomorfnog preslikavanja, ne smije postojati točka sadržana u nosaču svakog divizora iz sistema.
Vrlo zanimljivo je da je gore opisani nužan uvjet ujedno i dovoljan. Dakle, linearnim sistemom ćemo moći zadati holomorfno preslikavanje.

Definicija 5.47. *Neka je Q linearni sistem. Kažemo da je točka $p \in X$ bazna točka linearnog sistema Q ako svaki divizor $E \in Q$ zadovoljava: $E \geq p$. Za Q kažemo da je bazno-točkovno slobodan ako nema baznih točaka.*

Propozicija 5.48. *Neka je $Q \subset |D|$ bazno-točkovno slobodan linearni sistem dimenzije n na kompaktnoj Riemannovoj plohi X. Tada postoji holomorfno preslikavanje $\Phi : X \to \mathbb{P}^n$ tako da je $Q = |\Phi|$. štoviše, Φ je jedinstven do na izbor koordinata u $\mathbb{P}^n$.*

Dokaz. Preko preslikavanja

$$S : \mathbb{P}(L(D)) \to |D|$$

$$S(< f >) = div(f) + D$$

smo vidjeli da je linearnom podsistemu Q bijektivno pridružen potprostor $V \leq L(D)$. V ima bazu; nazovimo ju $\{f_0, ..., f_n\}$. Svaki divizor u Q je oblika $div(f) + D$, za $f \in V$. Definirajmo $\Phi = [f_0 : ... : f_n]$. Tada je $|\Phi| = \{div(f) - min_i\{div(f_i)\} : f \in V\}$ Tvrdimo da je $|\Phi| = Q$. Dovoljno je pokazati po točkama da je $D(p) = -min_i\{ord_p(f_i)\}$. No, to vrijedi jer je Q bazno-točkovno slobodan pa za točku p postoji funkcija $\sum_i a_i f_i$ takva da je $ord_p(\sum_i a_i f_i) + D(p) = 0 \Leftrightarrow min_i\{ord_p(f_i)\} + D(p) = 0$.
Neka je sada $\Phi' = [g_0 : ... : g_n]$ preslikavanje za koje je također $Q = |\Phi'|$. Tada imamo $|\Phi| = |\Phi'|$. Svaki $div(f_i) + D$ je jednak nekom $div(\sum_i \alpha_i g_i) + D'$ tako da $\{\sum_i \alpha_i g_i\}$ čine bazu za vektorski potprostor koji odgovara $|\Phi'|$. Tada je matrica koeficijenata regularna jer imamo prijelaz iz baze $\{g_i\}$ u bazu $\{\sum_i \alpha_i g_i\}$ pa tom matricom možemo napraviti zamjenu koordinata u Φ' tako da dobivamo $div(f_i) + D = div(g_i) + D'$. Tada je $div(\frac{f_i}{g_i}) =$

$D' - D$, za svaki $i \in \{0, 1, ..., n\}$. Iz konstantnosti od $D' - D$ zaključujemo da su funkcije $\frac{f_i}{g_i}$ jednake do na konstantu. Jasno, možemo namjestiti da konstanta uvijek bude na primjer 1 množeći funkcije g_i odgovarajućim konstantama. Time dobivamo meromorfnu funkciju h takvu da je $\frac{f_i}{g_i} = h$, za svaki i. Tada je jasno $\Phi = \Phi'$. □

Način na koji smo pridružili linearni sistem holomorfnom preslikavanju je čisto algebarski. Prvo smo opisali algebarski da razvijemo notaciju i jednostavne posljedice. No, motivacija za opisano pridruživanje je čisto geometrijska i to ćemo sada opisati.

Tvrdnja je da je linearni sistem pridružen holomorfnom preslikavanju, geometrijski gledano, skup ravninskih divizora presjeka na $\Phi(X)$ koje ćemo sada definirati idejno isto kao što smo definirali ravninske divizore presjeka na glatkim projektivnim krivuljama.

Neka je $H \subset \mathbb{P}^n$ hiperravnina takva da X nije podskup od H. Neka je L jednadžba homogenog polinoma prvog stupnja koja definira H. Ravninski divizor presjeka pridružen holomorfnom preslikavanju Φ označavamo $\Phi^*(H)$ i definiramo u točki $p \in X$:

$$\Phi^*(H)(p) = ord_p(\frac{L}{M} \circ \Phi)$$

za homogen polinom prvog stupnja M koji ne iščezava u p.

$\frac{L}{M} \circ \Phi$ je meromorfna funkcija jer se oko točke p preslikavanje Φ može napisati kao uređena $(n+1)-$ torka holomorfnih funkcija i omjer dvije holomorfne funkcije je meromorfna funkcija. Definicija divizora ne ovisi o izboru polinoma M:

$$\frac{\frac{L}{M} \circ \Phi}{\frac{L}{M'} \circ \Phi} = \frac{M'}{M} \circ \Phi$$

koja ima red $= 0$ u točki p što daje dobru definiranost. Sada primijetimo glavnu tvrdnju ovih primjedbi:

Lema 5.49. *Neka $L = \sum_i a_i x_i = 0$ definira H. Neka je holomorfno preslikavanje Φ definirano: $\Phi = [f_0 : ... : f_n]$ i stavimo: $D = -min_i\{div(f_i)\}$. Ako $\Phi(X)$ nije sadržan u H, onda vrijedi*

$$\Phi^*(H) = div(\sum_i a_i f_i) + D.$$

Dokaz. Za točku $p \in X$, neka je f_j funkcija iz $\{f_i\}$ u za koju se postiže minimalni red funkcije u toj točki. Zbog toga je f_j ne poništava u p pa za polinom M iz gornje diskusije možemo uzeti $M = x_j$. Tada imamo $\Phi^*(H)(p) = ord_p(\frac{L}{M} \circ \Phi) = ord_p(\frac{\sum_i a_i f_i}{f_j} \circ \Phi) = ord_p(\sum_i a_i f_i) - ord_p(f_j) = ord_p(\sum_i a_i f_i) + D(p)$ □

Vidimo da su $\mathbb{C}-$ linearne kombinacije već i kod algebarske definicije dale naslutiti da se radi o računanju kratnosti presjeka hiperravnina sa $\Phi(X)$ na neki način.
Razradimo malo teoriju o baznim točkama linearnih sistema.
Neka je $V \leq L(D)$ potprostor koji preko ranije definiranog preslikavanja S odgovara linearnom sistemu Q. Dakle, divizori u Q su oblika: $div(g)+D$, $g \in V$. Da bi p bila bazna točka, jer vrijedi $ord_p(g)+D(p) \geq 0$, mora vrijediti $ord_p(g)+D(p) \geq 1, \forall g \in V$. Također, ako je $ord_p(g)+D(p) \geq 1, \forall g \in V$, onda je p bazna točka od Q. Preko prostora meromorfnih funkcija, postojanje baznih točaka tada možemo iskazati:

Propozicija 5.50. *Neka je $V \leq L(D)$ potprostor koji odgovara linearnom sistemu Q i $p \in X$. p je bazna točka sistema Q ako i samo ako $V \subset L(D-p)$.*

Sjetimo se leme koja je rekla da za divizor D i točku p na Riemannovoj plohi X vrijedi:

$$L(D-p) = L(D) \text{ ili } dimL(D) = 1 + dimL(D-p)$$

Time dobivamo još jednu formulaciju tvrdnje kada je sistem bazno-točkovno slobodan:

Propozicija 5.51. *Neka je D divizor na kompaktnoj Riemannovoj plohi X. Potpuni linearni sistem $|D|$ je bazno-točkovno slobodan ako i samo ako za svaku točku $p \in X$ vrijedi $dimL(D-p) = dimL(D) - 1$.*

Kompaktnost plohe nam treba već kod korespodencije potprostora od $L(D)$ i podsistema Q pa je jasno nužna i u svim ekvivalentnim formulacijama.
Kako smo u potpunosti opisali dimenzije prostora $L(D)$ na Riemannovoj sferi i kompleksnom torusu, možemo zaključiti:

Propozicija 5.52. *i) Svaki divizor nenegativnog stupnja na Riemannovoj sferi ima bazno-točkovno slobodan potpuni linearni sistem.*
ii) Svaki divizor stupnja barem 2 na kompleksnom torusu ima bazno-točkovno slobodan potpuni linearni sistem.

Najvažniji slučaj konstrukcije holomorfnog preslikavanja preko linearnog sistema je korištenjem potpunog linearnog sistema. Međutim, potpuni linearni sistemi najčešće imaju bazne točke. No, kako smo vidjeli, za zadavanje holomorfnog preslikavanja, ključni su

nam prostori funkcija koji su u 1-1 korespodenciji s linearnim sistemom. Lako se pokaže da ti prostori ne ovise o tome ima li linearni sistem baznih točaka ili nema.
Za dani linearni sistem jasno je da je divizor $F = min\{E : E \in |D|\}$ najveći divizor koji se pojavljuje u svakom divizoru iz $|D|$. Divizor F zovemo fiksni divizor linearnog sistema $|D|$. Jasno, $F = 0$ ako i samo ako je linearni sistem bazno-točkovno slobodan.

Lema 5.53. *Ako je F fiksni divizor potpunog linearnog sistema |D|, onda je* $L(D-F) = L(D)$.

Dokaz. Jer je $F \geq 0$ kao minimum nenegativnih divizora, $D-F \leq D$ pa je $L(D-F) \subset L(D)$.
Za dokaz druge inkluzije, neka je $f \in L(D)$. Tada je $div(f)+D \geq 0$ i $div(f)+D \in |D|$ $\Rightarrow div(f)+D = D'+F$ za nenegativan divizor D'. Pa imamo: $div(f)+(D-F) = D' \geq 0$. □

Definicija 5.54. *Za dani divizor D s bazno-točkovno slobodnim sistemom $|D|$ označavamo s Φ_D holomorfno preslikavanje pridruženo potpunom linearnom sistemu $|D|$.*

Sjetimo se da nam je glavni cilj holomorfno uložiti Riemannove plohe u $\mathbb{P}^n$. Pogledajmo prvo uvjete pod kojima je holomorfno preslikavanje ulaganje:

Lema 5.55. *Neka je X kompaktna Riemannova ploha i neka je D divizor na X takav da je |D| bazno-točkovno slobodan. Fiksirajmo točku $p \in X$. Tada postoji baza $f_0, ..., f_n$ za $L(D)$ takva da je $ord_p(f_0) = -D(p)$ i $ord_p(f_i) > -D(p)$ za $i \geq 1$.*

Dokaz. Ranije smo vidjeli da ako je $|D|$ bazno-točkovno slobodan, onda za svaku točku $p \in X$ vrijedi $dimL(D) = 1 + dimL(D-p)$. Primijenimo to na danu točku i označimo $n := dimL(D)$. Neka je $f_1, ..., f_n$ baza za $L(D-p)$. Nadopunimo ju do baze za $L(D)$ funkcijom f_0. Zbog uvjeta na dimenzije, mora biti $f_0 \in L(D) \setminus L(D-p)$. Time je $ord_p(f_0) = -D(p)$. A $ord_p(f_i) > -D(p)$ za $i \geq 1$ jer $ord_p(f_i) \geq -D(p)+1$. □

Propozicija 5.56. *Neka je X kompaktna Riemannova ploha, D divizor na X s |D| bazno-točkovno slobodnim. Fiksirajmo različite točke p i q na X. Tada je $\Phi_D(p) = \Phi_D(q)$ ako i samo ako $L(D-p-q) = L(D-p) = L(D-q)$. Zato imamo: Φ_D je $1-1$ ako i samo ako za svaki par različitih točaka p, q na X vrijedi $dimL(D-p-q) = dimL(D)-2$.*

Dokaz. Sjetimo se da za definiciju preslikavanja Φ_D nam je potrebna baza od $L(D)$. Promjenivši bazu dobivamo linearnu regularnu transformaciju koordinata preslikavanja pa je za odgovor kada $\Phi_D(p) = \Phi_D(q)$ svejedno koju bazu uzmemo. Uzmimo zato bazu $\{f_0, f_1, ..., f_n\}$ dobivenu u gornjoj propoziciji za točku p. Množeći $[f_0(z) : f_1(z) : ... : f_n(z)]$ sa $z^{D(p)}$ dobivamo $\Phi_D(p) = [1 : 0 : ... : 0]$ zbog svojstava baze. Nizom ekvivalencija ćemo drugačije iskazati $\Phi_D(q) = [1 : 0 : ... : 0]$.

$$\Phi_D(q) = [1 : 0 : ... : 0] \Leftrightarrow ord_q(f_0) < ord_q(f_i), \forall i = 1, ..., n$$

Jer je $|D|$ bazno-točkovno slobodan i svaki divizor iz $|D|$ je oblika $div(\sum_i a_i f_i) + D$ pa je $ord_q(\sum_i a_i f_i) = min_i\{ord_q(f_i)\}$, $ord_q(f_0)$ mora biti jednak $-D(q)$.

$$-D(q) = ord_q(f_0) < ord_q(f_i), \forall i = 1, ..., n \Leftrightarrow \{f_1, ..., f_n\} \subset L(D - q)$$

Kako je $dimL(D) = 1 + dimL(D - q)$ jer je $|D|$ bazno-točkovno slobodan, dobivamo da je $\{f_1, ..., f_n\}$ baza za $L(D - q)$. Dakle,

$$\Phi_D(p) = \Phi_D(q) \Leftrightarrow L(D - p) = L(D - q)$$

Jasno, $L(D - p - q) \subset L(D - p)$.

$$f \in L(D - p) = L(D - q) \Leftrightarrow ord_p(f) + D - p \geq 0, ord_q(f) + D - q \geq 0$$
$$\Leftrightarrow f \in L(D - p - q)$$

jer su p, q različite točke pa nezavisno računamo redove funkcije u tim točkama. Time smo završili dokaz prve tvrdnje propozicije.

Dokaz druge tvrdnje provest ćemo za proizvoljne različite točke $p, q \in X$. Iz gornjeg dokaza vidimo:

$$\Phi_D(p) \neq \Phi_D(q) \Leftrightarrow L(D-p) \neq L(D-q) \Leftrightarrow L(D-p-q) \neq L(D-p) \text{ ili } L(D-p-q) \neq L(D-q)$$

Jer je $|D|$ bazno-točkovno slobodan, imamo jednakosti $dimL(D) = 1 + dimL(D - p)$ i $dimL(D) = 1 + dimL(D - q)$. Također, imali smo lemu koja kaže da je za $L(D - p - q) \neq L(D - p)$ kodimenzija prvog prostora u drugom jednaka 1. Time, neovisno koji slučaj se dogodi u $L(D - p - q) \neq L(D - p)$ ili $L(D - p - q) \neq L(D - q)$, dobivamo:

$$dimL(D) = 2 + dimL(D - p - q)$$

$\square$

Ovime smo dobili uvjet kada će Φ_D biti ulaganje. Ostaje pitanje kada će $\Phi_D(X)$ biti glatka projektivna krivulja. Prisjetimo se definicije:

Neka je X Riemannova ploha, koja je podskup od $\mathbb{P}^n$. Kažemo da je X holomorfno uložen u $\mathbb{P}^n$ ako za svaku točku $p \in X$ postoji homogena koordinata z_j tako da:

a) $z_j \neq 0$ u p;

b) za svaki k, omjer $\frac{z_k}{z_j}$ je holomorfna funkcija na X blizu p;

c) postoji homogena koordinata z_i tako da je omjer $\frac{z_i}{z_j}$ lokalna koordinata na X oko p.

Riemannovu plohu holomorfno uloženu u $\mathbb{P}^n$ nazivamo glatka projektivna krivulja.

Vidimo da su prva dva uvjeta uvijek zadovoljena po definiciji holomorfnog ulaganja. Preostaje nam jedino osigurati treći uvjet.

U tu svrhu prisjetimo se teorema o implicitnoj funkciji:

Teorem o implicitnoj funkciji

Neka je $f \in \mathbb{C}[z,w]$ polinom i neka je $X = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : f(z,w) = 0\}$.

Neka je $p = (z_0, w_0) \in X$. Pretpostavimo da je $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$. Tada postoji holomorfna funkcija g definirana na okolini od z_0 tako da je X na nekoj okolini od $p = (z_0, w_0)$ jednaka grafu $w = g(z)$. štoviše, $g' = -\frac{\partial f}{\partial z} / \frac{\partial f}{\partial w}$ blizu z_0.

Dakle, preslikavanje Φ_D izgleda ovako za lokalnu koordinatu z oko točke p:

$$\Phi_D(z) = [f_0(z) : f_1(z) : ... : f_n(z)],$$

gdje su f_i holomorfne funkcije oko p koje nisu sve jednake 0 u p, to jest u 0, jer gledamo u koordinati centriranoj u p.

Pretpostavimo da je $f_0(0) \neq 0$. Tada:

$$\Phi_D(z) = [1 : \frac{f_1(z)}{f_0(z)} : ... : \frac{f_n(z)}{f_0(z)}].$$

Pretpostavimo da postoji $\frac{f_i(z)}{f_0(z)}$, $i \geq 1$ koja u 0 ima nultočku prvog reda. Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je $i = 1$. Dakle, $\frac{f_1(z)}{f_0(z)} = z \cdot h(z)$ za neku holomorfnu funkciju h oko p koja zadovoljava $h(0) \neq 0$. Tvrdimo da je $\frac{f_1(z)}{f_0(z)}$ lokalna koordinata, to jest svaka funkcija oko p je oblika $\frac{f_i(z)}{f_0(z)} = \gamma_i(\frac{f_1(z)}{f_0(z)})$ za neku holomorfnu funkciju γ_i.

$$F(y,z) := y - z \cdot h(z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -h(z) - z \cdot h'(z) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(0) = -h(0) \neq 0$$

Po teoremu o implicitnoj funkciji tada postoji holomorfna funkcija g oko 0 takva da je $z = g(y) = g(\frac{f_1(z)}{f_0(z)})$. Tada svaka funkcija

$$\frac{f_i(z)}{f_0(z)} = \frac{f_i(g(\frac{f_1(z)}{f_0(z)}))}{f_0(g(\frac{f_1(z)}{f_0(z)}))}$$

je funkcija s koordinatom $\frac{f_1(z)}{f_0(z)}$ na okolini nule, to jest točke p.
Rečeno preko funkcijskih prostora, želimo da vrijedi $L(D-2p) \neq L(D-p)$ kako bi postojala funkcija koju smo gore označavali f_1.
Zadnja dva značajna rezultata možemo opisati jednom formulom:

Propozicija 5.57. *Neka je X kompaktna Riemannova ploha i D divizor na X takav da je $|D|$ bazno-točkovno slobodan. Tada je Φ_D ulaganje na glatku projektivnu krivulju $\Phi_D(X)$ ako i samo ako za svaki $p, q \in X$, gdje dopuštamo jednakost točaka, vrijedi $dimL(D-p-q) = dimL(D) - 2$.*

U tom slučaju na Φ_D gledamo kao smještavanje Riemannove plohe X u projektivni prostor.

Definicija 5.58. *Divizor D takav da $|D|$ nema baznih točaka i Φ_D je ulaganje zovemo vrlo opsežan divizor.*

Potpunim poznavanjem prostora meromorfnih funkcija pridruženih divizoru na Riemannovoj sferi imamo sljedeću propoziciju:

Propozicija 5.59. *i) Svaki divizor pozitivnog stupnja na Riemannovoj sferi je vrlo opsežan.*
ii) Svaki divizor stupnja barem 3 na kompleksnom torusu je vrlo opsežan.

U sljedećoj propoziciji povezujemo stupanj divizora presjeka holomorfnog preslikavanja i glatke projektvine krivulje. "Povezuje" ih stupanj istog holomorfnog preslikavanja.

Propozicija 5.60. *Neka je $\Phi : X \to \mathbb{P}^n$ holomorfno preslikavanje kojem je $Y = \Phi(X)$ glatka projektivna krivulja. Neka je H hiperravnina u $\mathbb{P}^n$. Tada*

$$deg(\Phi^*(H)) = deg(\Phi) \cdot deg(Y).$$

Posebno, ako je D vrlo opsežan divizor na X, tada

$$deg(\Phi_D(X)) = deg(D).$$

Dokaz. Neka je $L = 0$ jednadžba koja zadaje H. Za linearni polinom M koji se ne poništava u p računamo: $ord_p(\frac{L}{M} \circ \Phi) = mult_p(\Phi) \cdot ord_{\Phi(p)}(\frac{L}{M})$.

$$\begin{aligned}
deg(\Phi^*(H)) &= \sum_{p \in X} \Phi^*(H)(p) \\
&= \sum_{p \in X} mult_p(\Phi) \cdot div(L)(\Phi(p)) \\
&= \sum_{q \in Y} \sum_{p \in \Phi^{-1}(q)} mult_p(\Phi) \cdot div(L)(q) \\
&= \sum_{q \in Y} div(L)(q) \sum_{p \in \Phi^{-1}(q)} mult_p(\Phi) \\
&= \sum_{q \in Y} div(L)(q) deg(\Phi) \\
&= deg(\Phi) deg(div(L))
\end{aligned}$$

Druga jednakost slijedi primjećivanjem da je $deg(\Phi) = 1$ kada je Φ ulaganje, $deg(Y) = deg(\Phi_D(X))$ jer smo tako uveli oznake i $deg(\Phi^*(H)) = deg(D)$ po geometrijskoj argumentaciji linearnog sustava pridruženog holomorfnom preslikavanju. Svaki divizor u $|\Phi|$ je stupnja $deg(-min_i\{div(f_i)\})$, a jer je $|D|$ bazno-točkovno slobodan vrijedi $D = -min_i\{div(f_i)\}$ gdje je $\{f_i\}$ baza za $L(D)$. □

5.3 Primjena teorije divizora

Nakon što smo razvili teoriju, pokažimo kako se može primijeniti na primjeru kompleksnog torusa. U pozadini leži polinomijalna jednadžba koja je od fundamentalne važnosti za teoriju brojeva. Radi se o eliptičkoj krivulji koja se sa svojom grupovnom strukturom uvelike proučava u matematici, duboko je povezana s otvorenim pitanjima i doprinjela je rješavanju velikih matematičkih problema. Pridruživanje grupovne operacije točkama na krivulji postaje motivirano nakon što utvrdimo da postoji bijektivna veza između torusa, koji je po definiciji grupa, i ravninske krivulje koju nazivamo eliptička krivulja.

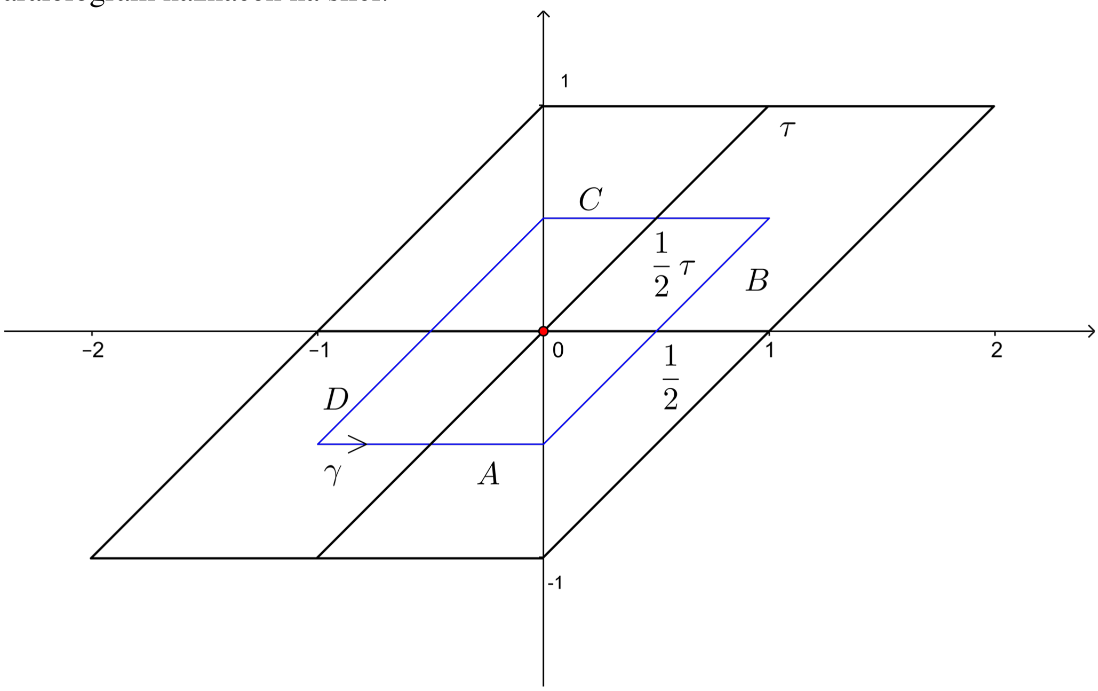
Teorem 5.61. *Svaki kompleksni torus se surjektivno ulaže na glatku projektivnu krivulju* $Y^2Z = X^3 + AXZ^2 + BZ^3$*, za neke* $A, B \in \mathbb{C}$.

Dokaz. U uvodu smo vidjeli da je svaki kompleksi torus izomorfan torusu oblika $X = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\cdot 1 + \mathbb{Z}\cdot\tau)$, za $\tau \in \mathbb{C}$, $Im(\tau) > 0$ pa je opravdano promatrati ulaganje torusa tog oblika.

Dokaz će se uvelike zasnivati na potpunom razumijevanju dimenzija prostora meromorfnih funkcija na torusu s polovima omeđenim divizorom. No, dokažimo prvo jednu pomoćnu tvrdnju koja nam daje informaciju o koeficijentu uz $\frac{1}{z}$ u razvoju u Laurentov red funkcije iz $L(n\cdot p_0)$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $p_0 \in X$, $p_0 = 0 + L$, neutral u grupi na torusu.

Tvrdnja 1: Za $h \in L(n\cdot p_0)$ vrijedi $Res_{p_0}(h) = 0$.

Dokaz: Po definiciji, $Res_{p_0}(h) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)dz$, gdje je γ zatvorena, po dijelovima glatka krivulja sadržana u kružnom vijencu na kojem je h holomorfna. Za tu krivulju uzmimo paralelogram naznačen na slici:



Slika 1: Plavi paralelogram

Kako je h meromorfna funkcija na torusu, radi se o dvostruko periodičnoj kompleksnoj funkciji s periodima 1 i τ. Jedini polovi su joj u točkama skupa $\mathbb{Z}\cdot 1 + \mathbb{Z}\cdot\tau$ jer se nalazi u $L(n\cdot p_0)$. Na paralelogramu označenom plavom bojom tada h nema polova pa je dobar izbor puta u integralu kojim dobivamo reziduum. Ovaj paralelogram nam je koristan iz još jednog razloga, a taj je da na paralelnim stranicama paralelograma funkcija h poprima jednake vrijednosti po parovima točaka takvim da im je spojnica paralelna sa stranicom paralelograma. To se lako vidi ako te kompleksne brojeve oduzmemo kao vektore pa vidimo da im je razlika vektor 1, -1, τ ili $-\tau$. Sada uvedimo parametrizacije stranica tog paralelograma: $A(t) = -\frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}\tau, t \in [0,1], B(t) = \frac{1}{2} + (t - \frac{1}{2})\tau, t \in [0,1], C(t) = \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2}\tau, t \in [0,1], D(t) = -\frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - t)\tau, t \in [0,1]$. Korisno je primijetiti: $A(t) = C(1-t) - \tau$ i $B(t) = D(1-t) + 1$. Izračunajmo integral:

$$\int_\gamma h(z)dz = \int_A h(z)dz + \int_B h(z)dz + \int_C h(z)dz + \int_D h(z)dz.$$

$$\int_A h(z)dz = \int_0^1 h(A(t))dt = \int_0^1 h(C(1-t) - \tau)dt = \int_0^1 h(C(1-t))dt = -\int_C h(z)dz$$

$$\int_B h(z)dz = \int_0^1 h(B(t))dt = \int_0^1 h(D(1-t) + 1)dt = \int_0^1 h(D(1-t))dt = -\int_D h(z)dz$$

pa zaključujemo $\int_\gamma h(z)dz = 0$. ✓

Odredimo bazu za $L(3 \cdot p_0)$. Jasno, konstantna funkcija $1 \in L(3 \cdot p_0)$. Jer je $dimL(2 \cdot p_0) = 2$, postoji nekonstanta funkcija u $L(2 \cdot p_0)$. Pol može imati samo u p_0 pa zbog tvrdnje 1 imamo da joj je Laurentov razvoj oko p_0 s centriranom kartom jednak

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

štoviše, možemo i preciznije opisati koeficijente a_i. Naime, svaki a_i za neparan i je jednak 0.

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

$$f(-z) = \frac{a_{-2}}{z^2} - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + \ldots$$

Ako drugu jednakost pomnožimo s -1 i potom ih zbrojimo dobivamo:

$$f(z) - f(-z) = 2a_1 z + 2a_3 z^3 + \ldots$$

Time dobivamo da je $f(z) - f(-z)$ holomorfna funkcija na torusu. Zbog kompaktnosti torusa mora biti konstantna i jednaka nuli jer joj je u p_0 vrijednost 0. Zaključujemo, $a_i = 0$, za svaki neparan i. Funkciju f pomnožimo s $\frac{1}{a_{-2}}$ i onda dobivamo konačan oblik funkcije f:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots$$

Primijetimo da je to jedinstvena funkcija u $L(2\cdot p_0)$ tog oblika jer je jedina funkcija koja ima pol i "normirana" je.

Nastavljamo na sličan način. Jer je $dimL(3\cdot p_0)=3 \Rightarrow L(2\cdot p_0)\subset L(3\cdot p_0)$ postoji funkcija u $L(3\cdot p_0)$ koja u p_0 ima pol reda 3:

$$g(z)=\frac{b_{-3}}{z^3}+\frac{b_{-2}}{z^2}+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\dots$$

Jasno, ako od g oduzmemo funkciju $b_{-2}\cdot f(z)$, dobivamo funkciju oblika:

$$g(z)=\frac{b_{-3}}{z^3}+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\dots$$

Sada ponovimo argument kao ranije i zaključimo da su b_i za parne i jednaki 0 pa je konačni oblik funkcije g jednak

$$g(z)=\frac{1}{z^3}+b_1z+b_3z^3+b_5z^5+\dots$$

Tvrdnja 2: Funkcije f i g iz gornjeg teksta zadovoljavaju jednakost $g^2=f^3+Af+B$, za neke konstante $A,B\in\mathbb{C}$.

Dokaz: Množenjem prvih par članova Laurentovog razvoja od f i g dobivamo:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+a_2z^2+a_4z^4+\dots$$

$$f^2(z)=\frac{1}{z^4}+2a_2+2a_4z^2+a_2^2z^4+\dots$$

$$f^3(z)=\frac{1}{z^6}+3a_2\frac{1}{z^2}+3a_4+(3a_2^2+a_4)z^2+\dots$$

$$g(z)=\frac{1}{z^3}+b_1z++b_3z^3+b_5z^5+\dots$$

$$g^2(z)=\frac{1}{z^6}+2b_1\frac{1}{z^2}+2b_3+b_1^2z^2+\dots$$

Jednostavnim računom se provjeri da za konstante $A=2b_1-3a_2$ i $B=2b_3-a_4$ funkcija g^2-f^3-Af-B ima Laurentov razvoj oko p_0:

$$c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\dots$$

što nam govori da je to holomorfna funkcija na torusu (u ostalim točkama jest holomorfna po definiciji prostora $L(3\cdot p_0)$) pa je konstantna i jednaka 0.

Zaključujemo, $g^2=f^3+Af+B$. ✓

Gornja relacija među funkcijama f i g nas može podsjetiti na polinom $-y^2+x^3+Ax+B$ koji homogeniziranjem postaje upravo polinom $-Y^2Z+X^3+AXZ^2+BZ^3$. U uvodu smo vidjeli da je skup točaka u $\mathbb{P}^2$ koje zadovoljavaju $Y^2Z = X^3+AXZ^2+BZ^3$ glatka projektivna krivulja ako se radi o nesingularnom polinomu.

Tvrdnja 3: $P(X,Y,Z) = -Y^2Z+X^3+AXZ^2+BZ^3$ je nesingularan polinom.

Dokaz: Prvo primijetimo da točke iz $X = \{P(X,Y,Z) = 0\}$ možemo podijeliti po tome je li Z koordinata jednaka 0 ili nije.

• Ako je $Z = 0$, jedina točka iz X je $[0:1:0]$. No,

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = -Y^2+2AXZ+3BZ^2$$

pa je $\frac{\partial P}{\partial Z}([0:1:0]) = -1 \neq 0$.

• Ako je $Z \neq 0$, onda promatramo nesingularnost polinoma P u točkama oblika $[X:Y:1]$. Provjera se tada svodi na pitanje je li polinom $p(x,y) = -y^2+x^3+Ax+B$ nesingularan. Općenito, polinomi oblika $f(x,y) = y^2-h(x)$ su nesingularni ako i samo ako $h(x)$ nema dvostruku nultočku. To vidimo na sljedeći način:

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ pa su točke na X koje y koordinatu imaju različitu od 0 nesingularne.

Zanima nas da je $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$ u točkama iz X oblika $(\alpha,0)$. No, $(\alpha,0) \in X \Leftrightarrow h(\alpha) = 0$.

Pa imamo $\frac{\partial h}{\partial x}(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow h$ ima različite nultočke.

Pa pretpostavimo da $h(x) = x^3+Ax+B$ ima dvostruku nultočku. Tada imamo faktorizaciju:

$$x^3+Ax+B = (x-\alpha)^2\cdot(x-\beta)$$

Uvrstivši bazne funkcije f i g dobivamo:

$$g^2 = f^3+Af+B = (f-\alpha)^2\cdot(f-\beta) \Leftrightarrow (\frac{g}{f-\alpha})^2 = f-\beta \in L(2\cdot p_0)$$

No, funkcija koja je drugi korijen funkcije s polom reda 2 u p_0 mora u p_0 imati pol reda 1. Međutim, u tvrdnji 1 smo pokazali da takva funkcija ne postoji u $L(2\cdot p_0)$. Zaključujemo, $P(X,Y,Z)$ je nesingularan. ✓

Konačno, sada smo u mogućnosti primijeniti glavni rezultat poglavlja o divizorima koji glasi:

Neka je X kompaktna Riemannova ploha i D divizor na X takav da je $|D|$ bazno-točkovno slobodan. Tada je Φ_D ulaganje na glatku projektivnu krivulju $\Phi_D(X)$ ako i samo ako za *svaki $p,q \in X$, gdje dopuštamo jednakost točaka, vrijedi $dimL(D-p-q) = dimL(D) - 2$.*

Prisjetimo se, $|D|$ na kompleksnom torusu je bazno točkovno slobodan ako je $deg(D) \geq 2$. Označimo $D = 3 \cdot p_0$. Sada je jasno, preslikavanje $\Phi_D : X \to \Phi_D(X)$ definiramo:

$$\Phi_D(x) = [1 : f(x) : g(x)].$$

Zbog $dimL(D) = deg(D)$ za divizor na torusu stupnja većeg ili jednakog 1 uvjet $dimL(3 \cdot p_0 - p - q) = dimL(3 \cdot p_0) - 2$ je zadovoljen jer je divizor $3 \cdot p_0$ stupnja 3.

Vidjeli smo da se projektivna krivulja u koju se torus ulaže preko Φ_D može opisati preko nultočaka polinoma $P(X,Y,Z) = -Y^2Z + X^3 + AXZ^2 + BZ^3$. štoviše, preslikavanje Φ_D je surjekcija, o čemu govori sljedeća općenita tvrdnja čiji dokaz se može pronaći u knjizi [R.Miranda,Algebraic Curves and Riemann Surfaces]:

Tvrdnja 4: Neka je X kompaktna Riemannova ploha i neka je $F : X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje. Tada je Y kompaktan i F je surjektivan.

Dokaz: Jer je X otvoren, po Teoremu 1 dobivamo da je $F(X)$ otvoren u Y.

Jer je X kompaktan, i F posebno neprekidno preslikavanje, $F(X)$ je kompaktan u Y. Jer je Y Hausdorffov, lako se pokaže da je $F(X)$ zatvoren u Y.

No, tada jer je Y povezan, a $F(X)$ i otvoren i zatvoren skup slijedi $F(X) = Y$. ✓

Ovime je dokaz teorema završen. □

Sljedeći cilj nam je dati konkretniji oblik polinoma koji definira glatku projektivnu krivulju u koju ulažemo torus, to jest, reći što su koeficijenti A i B u polinomu. Za to su nam potrebne konkretne funkcije na torusu $\mathbb{C}/L$.

U matematici je dobro poznata Weierstrassova funkcija

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} [\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}]$$

gdje je L cjelobrojna mreža kojom definiramo torus. Vrijedi da je dvostruko periodična s periodima koji su generatori od L, što se daje naslutiti iz same definicje. Također, vidimo da u točki iz L funkcija ima pol reda 2, a u svim drugim točkama je holomorfna. Može se pokazati da na kompaktima koji ne sadrže točke iz L funkcija $\wp(z)$ konvergira uniformno pa je opravdano u točkama koje nisu iz L pogledati derivaciju funkcije $\wp(z)$:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

Jer je L aditivna grupa, $\wp'(z)$ je također dvostruko periodična. U točkama iz L ima pol reda 3, a u drugima je holomorfna. Detaljniju argumentaciju čitatelj može potražiti u [8].

Korolar 5.62. *Jednadžba polinoma čije nultočke su glatka projektivna krivulja na koju smo uložili torus je*

$$Y^2Z = X^3 - 15(\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^4})XZ^2 - 35(\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^6})Z^3.$$

Dokaz. Zbog dvostruke periodičnosti, $\wp(z)$ i $\wp'(z)$ su dobro definirane funkcije na kompleksnom torusu $\mathbb{C}/L$. Iz gornjih komentara o polovima zaključujemo da se obje nalaze u $L(3 \cdot p_0)$.

Uz mali račun lako možemo vidjeti da za funkcije f, g iz dokaza prošlog teorema možemo uzeti redom $\wp, -\frac{1}{2}\wp'$. Naime, jer je L diskretan skup u $\mathbb{C}$ postoji okolina nule U koja ne sadrži niti jedan drugi element iz L. Na toj okolini opravdan je razvoj funkcije

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2}(\frac{1}{1-\frac{z}{\omega}})^2 = \frac{1}{\omega^2}(1 + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{\omega^2} + ...)^2$$

jer je $|z| < |\omega|, \forall z \in U, \forall \omega \in L \setminus \{0\}$.

Uz oznaku

$$s_m = \sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^m}$$

dobivamo

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3s_4z^2 + 5s_6z^4 + ...$$
$$-\frac{1}{2}\wp'(z) = \frac{1}{z^3} - 3s_4z - 10s_6z^3 + ...$$

Vrijedi da su koeficijenti uz neparni eksponent u razvoju funkcije $\wp(z)$ jednaki 0 jer $s_m = 0$, za m neparan, jer je L aditivna grupa pa su i ω i $-\omega$ iz L. Deriviranjem član po član dobivamo da je svaki koeficijent uz z na parni eksponent jednak 0. Zbog toga imamo $f = \wp$ i $g = -\frac{1}{2}\wp'$ pa iz formula iz dokaza teorema imamo:

$$A = 2b_1 - 3a_2, B = 2b_3 - 3a_4$$

$$A = -6s_4 - 9s_4 = -15s_4, B = -20s_6 - 15s_6 = -35s_6$$

Konačno dobivamo jednadžbu polinoma:

$$Y^2Z = X^3 - 15(\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^4})XZ^2 - 35(\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^6})Z^3.$$

□

Primijetimo još da smo po teoremu o ulaganju torusa mogli koristiti divizor na X stupnja većeg ili jednakog od 4. Tada bismo dobili ulaganje torusa u $\mathbb{P}^n$, $n \geq 4$. Označimo sujektivna ulaganja torusa $X = \mathbb{C}/L$ redom u $\mathbb{P}^2$ i $\mathbb{P}^n$:

$$F_1 : X \to \{Y^2Z = X^3 + AXZ^2 + BZ^3\}$$

$$F_2 : X \to \{\text{glatka projektivna krivulja} \subset \mathbb{P}^n\}$$

Tada dobivamo da je

$$F_1 \circ F_2^{-1} : \{\text{glatka projektivna krivulja} \subset \mathbb{P}^n\} \to \{Y^2Z = X^3 + AXZ^2 + BZ^3\}$$

izomorfizam Riemannovih ploha.

Ovo možemo povezati s terminima poglavlja Krivulje u projektivnom prostoru. Izomorfizam među Riemannovim plohama je biracionalno preslikavanje. Tada možemo reći da su $F_1(X)$ i $F_2(X)$ biracionalno ekvivalentne. Tada su po propoziciji iz istog poglavlja polja meromorfnih funkcija na njima izomorfni. Dakle, oba dimenzije 1. Za $F_1(X)$ to lako vidimo jer je polinom koji opisuje krivulju ireducibilan pa je supremum duljina lanaca različitih zatvorenih skupova u X jednak 1. Također smo imali propoziciju koja kaže da je svaka krivulja biracionalna ekvivalentna nekoj ravninskoj. Ovime za glatke projektivne krivulje $F_2(X)$ dobivamo u koju ravninsku krivulju se preslikavaju.

Dodatak A

Neke činjenice iz algebre

U ovome dodatku, polje će nam uvijek biti karakteristike 0, osim ako je drugačije naglašeno.

Definicija A.1. *Neka su E i F polja te neka je $\varphi : E \longrightarrow F$ homomorfizam prstena $(\varphi(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_F)$. Tada je φ ulaganje i zovemo ga* ulaganje polja*. (To je doista ulaganje polja i $E \simeq \varphi(E)$ je potpolje od F.)*

Definicija A.2. *Neka je $E \subseteq F$ proširenje polja takvo da je $\mathbb{1}_E = \mathbb{1}_F$ te neka je $\alpha \in F$. Definiramo* evaluacijski homomorfizam *$\varphi_\alpha : E[T] \longrightarrow F$,*

$$\varphi_\alpha(f) = f(\alpha) \in F$$

${}^{E[T]}/_{Ker\varphi_\alpha} \simeq Im\varphi_\alpha \subseteq F.$

Definicija A.3. *Kažemo da je α* algebarski nad E *(/E) ako je Ker $\varphi_\alpha \neq 0$. Kažemo da je α* transcedentan */E ako je Ker $\varphi_\alpha = 0$.*

Ako je $E[T]$ domena glavnih ideala, onda $\exists! f_\alpha$ (do na množenje elementom $\neq 0$ iz E) takav da Ker $\varphi_\alpha = \langle f_\alpha \rangle$

Neka je α algebarski E. Onda možemo uzeti da je f_α normiran. Znamo da je f_α nužno ireducibilan jer je Ker φ_α maksimalan ideal.

Zato je Im φ_α polje. Označavamo ga sa $E[\alpha]$.

Ako je α transcedentan /E, onda je $E[T] \simeq E[\alpha]$, tj. F sadrži *kopiju* prstena polinoma.

Prelaskom na kvocijent, dobivamo: $E(T) \subseteq F$.

Definicija A.4. *Proširenje $E \subseteq F$ je* konačno *ako je $dim_E F < \infty$ (tj. dimenzija od F kao vektorskog prostora nad poljem E je konačna). U tom slučaju je svaki $\alpha \in F$ algebarski /E.*

Propozicija A.5. *Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in F$ algebarski /E takvi da je $F = E(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, tj. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ generiraju ${}^F/_E$.*
Tada je $E \subseteq F$ konačno proširenje i svaki $\beta \in F$ je algebarski /E.

Dokaz se može naći primjerice u [2], Proposition 3.3.3.

Definicija A.6. *Neka je $\alpha \in F$ algebarski /E. Kažemo da je α* separabilan */E ako f_α (generator od Ker φ_α) nema višestrukih korijena u nekom (,a onda i svakom) algebarskom zatvaraču od E.*

Propozicija A.7. *Neka je $\alpha \in F$ algebarski /E. Tada je ekvivalentno sljedeće:*
(1) *α je separabilan /E*
(2) *f_α i $\frac{df_\alpha}{dT}$ su relativno prosti u $E[T]$.*
(3) $\frac{df_\alpha}{dT} \not\equiv 0$.

Definicija A.8. *$E \subseteq F$ je* algebarsko proširenje *ako je svaki $\alpha \in F$ algebarski /E.*

Definicija A.9. *Algebarsko proširenje $E \subseteq F$ je* separabilno *ako je svaki $\alpha \in F$ separabilan /E.*

Definicija A.10. *Polje F je* generirano nad poljem *E* familijom *$\{\alpha_i\}_{i \in I}$, gdje su $\alpha_i \in F$ ako:*

$$(\forall \beta \in F\ )(\exists \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_l})(\exists P, Q \in E[T_1, \ldots, T_n])\ \beta = \frac{P(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_l})}{Q(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_l})}.$$

Iduće navodimo jednu karakterizaciju separabilnosti.

Propozicija A.11. *Algebarsko proširenje $E \subseteq F$ je separabilno ako i samo ako je generirano nekom (moguće beskonačnom) familijom separabilnih elemenata.*

Propozicija A.12. *Neka su $E \subseteq F$ i $E \subseteq G$ konačna/algebarska/separabilna proširenja. Tada je i $F \subseteq G$ konačno/algebarsko/separabilno proširenje.*

Teorem A.13. *(Teorem o primitivnom elementu)*

Neka je $E \subseteq F$ konačno i separabilno proširenje. Tada postoji $\alpha \in F$ takav da je $F = E(\alpha) = E[\alpha]$.

Dokaz teorema o primitivnom elementu dan je u [2], Theorem 3.5.12.

Neka je $E \subseteq F$ proširenje polja te neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in F$ zadani.

Neka je $\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l} : E[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow F$ evaluacijski homomorfizam, tj. $\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}(f) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in F$.

Imamo:

$$E[T_1,\ldots,T_n]/Ker\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l} \simeq Im\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l} \subseteq F.$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in F$ su *algebarski nezavisni /E.*

Definicija A.14. *Kažemo da su $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in F$* algebarski nezavisni */E ako je Ker $\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \{0\}$, tj.*

$$P \in E[T_1, \ldots, T_l], P(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = 0 \Longrightarrow P = 0.$$

Kažemo da su $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in F$ algebarski zavisni *ako nisu algebarski nezavisni /E.*

Bez obzira jesu li $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ nezavisni $/E$, vrijedi:

$$Im\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l} = E(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \text{ je integralna domena.}$$

No, ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ nezavisni $/E$, onda je $E[\alpha, \ldots, \alpha_l] \simeq E[T_1, \ldots, T_l]$, tj. F sadrži kopiju od $E[T_1, \ldots, T_l]$.

Definicija A.15. *Neka je $E \subseteq F$ algebarsko proširenje. Familija $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ elemenata iz E je algebarski nezavisna /E ako su za svaki konačan podskup $\{i_1, \ldots, ß_l\} \subseteq I$, $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_l}$ algebarski nezavisni /E.*

Zornova lema garantira egzistenciju maksimalne algebarski nezavisne familije $/E$ u F.

Definirajmo sada stupanj trascedentnosti i bazu transcedentnosti proširenja polja.

Definicija A.16. *Neka je $E \subseteq F$ proširenje polja.* Stupanj transcedentnosti *tog proširenja polja je najveći mogući kardinalitet algebarski nezavisnog podskupa od F/E.*

Podskup $S \subseteq F$ je baza transcedentnosti *od F/E ako je to algebarski nezavisan skup /E te je F algebarsko proširenje polja $E(S)$.*

Može se pokazati da svako proširenje polja ima bazu transcedentnosti te da sve takve baze imaju isti kardinalitet (koji je jednak stupnju transcedentnosti tog proširenja).

Propozicija A.17. *Neka je $E \subseteq F$ konačno generirano proširenje, $F = E(\alpha_1, \dots, \alpha_l.)$ Tada vrijedi:*

(a) sve maksimalne algebarski nezavisne $/E$ familije elemenata iz F imaju jednak broj elemenata i taj broj je najviše l.

(b) postoji maksimalna potfamilija od $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ i ako je d stupanj transcedentnosti od F/E, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ su algebarski nezavisni $/E$.

Vrijedi: $E \subseteq E(\alpha_1, \dots, T_d) \subseteq F = F(\alpha_1, \dots, \alpha_d, \alpha_{d+1}, \dots, \alpha_l)$.

Važno je uočiti: $\forall i \in \{d+1, \dots, l\}$ $\alpha_1, \dots, \alpha_d, \alpha_i$ su algebarski nezavisni $/E$.

Postoji $P \in E[T_1, \dots, T_d, T_{d+1}], P \neq 0$ takav da $P(\alpha_1, \dots, \alpha_d, \alpha_i) = 0$.

Ako P ne ovisi o varijabli T_{d+1}, onda je $P(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = 0$, pa je $P = 0$ zbog algebarske nezavisnosti.

Ako P ovisi o T_{d+1}, onda imamo: $P = \sum_{i=1}^{k} P_i(T_1, \dots, T_d) T_{d+1}^i$, gdje je $P_i \in E[T_1, \dots, T_d]$.

Za $k \geq 1$, $P_k \neq 0$ jer P ovisi o T_{d+1}

Nakon evaluacije $\alpha_1, \dots, \alpha_{d+1}$,

$$0 = P(\alpha_1, \dots, \alpha_d, \alpha_{d+1}) = \sum_{i=1}^{k} P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \alpha_{d+1}^i.$$

Ako je $P_k \neq 0$, onda je $P_k(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \neq 0)$ jer su $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ algebarski nezavisni $/E$.

Slijedi da je $\alpha_{d+1} \in F$ nultočka polinoma stupnja $k \geq 1$.

$$\sum_{i=0}^{k} P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_d) T^i \in F'[T]$$

.

Slijedi da je α_{d+1} algebarski $/F'$.

Dakle, $\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_l$ su algebarski $/F'$, pa je $F' \subseteq F$ je konačno proširenje.

Napomena A.18. *Ako je $d = 0$, onda je $E = F'$.*

Ako je $d = 0, onda je E(T_1, \dots, T_d) = E[T_1, \dots, T_n] = E$.

Lema A.19. *Neka je $E \subset F$ proširenje polja. Pretpostavimo da postoje $n \geq 2$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ takvi da:*

(a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *algebarski* $/E$

(b) $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *separabilan* $/E$

(c) $F = E(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Tada postoji $\alpha \in F$ *takav da je* $F = E(\alpha)$.

Dokaz. (kao u [17])

Iz svojstava (a) i (c) te propozicije $A.5$, slijedi da je $E \subset F$ konačno proširenje. Dokaz ćemo provesti indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.

(baza) Neka je $n = 2$ te neka je $\alpha = \alpha_1$ i $\beta = \alpha_2$, pri čemu je α_2 separabilan $/E$.

Neka su f_α i f_β ireducibilni normirani polinomi od α i β respektivno te neka su $\alpha = \eta_1, \ldots, \eta_r$ svi međusobno različiti korijeni od f_α, a $\beta = \mu_1, \ldots, \mu_s$ svi međusobno različiti korijeni od f_β.

Neka se f_α i f_β rastavljaju na proste faktore u nekom algebarskom zatvaraču $\overline{E}$ od E, takvom da $\overline{E} \supseteq F$.

Pretpostavimo sada da je E beskonačno polje. Naime, kad bi bilo konačno, tada bi i $E(\alpha, \beta)$ bilo konačno, pa bi po prethodnim rezultatima znali da tvrdnja vrijedi.

Ako je $s = 1$, tada je $\beta \in E$, pa je $F = (\alpha, \beta) = E(\alpha)$ te smo gotovi.

Pretpostavimo da je $s \geq 2$. Za $1 < k \leq s$ vrijedi $\mu_k \neq \mu_1 = \beta$, tj. $\mu_1 - \mu_k \neq 0$.

Dakle, jednadžba

$$\eta_i + x\mu_k = \eta_1 + x\mu_1$$

ima najviše jedno rješenje u E. To (eventualno) rješenje je

$$x = \frac{\eta_i - \eta_1}{\mu_1 - \mu_k}.$$

Budući da je E po pretpostavci beskonačan, slijedi da postoji $c \in E$ takav da je

$$c \neq {}^{(\eta_i - \eta_1)}\!/\!_{(\mu_1 - \mu_k)}, \; 1 \leq i \leq r, 1 < k \leq s.$$

Definirajmo sada $\theta = \alpha + c\beta = \eta_1 + c\mu_1 \in E(\alpha, \beta) = F$ i pokažimo da je $F = E(\theta)$.

Vidimo da β zadovoljava jednadžbe:

$$f_\beta(\beta) = 0$$

i

$$f_\alpha(\theta - c\beta) = f_\alpha(\alpha)) = 0,$$

s koeficijentima u $E(\theta)$.

Vidimo da polinomi f_β i $f_\alpha(\theta - cx)$ imaju samo jedan zajednički korijen i to je β. Naime, za druge korijene prve jednadžbe, tj, $\mu_k,\ k \neq 1$, vrijedi

$$\theta - c\mu_k \neq \eta_i, \forall i,$$

pa je

$$f_\alpha(\theta - c\mu_k) \neq 0.$$

Budući da je β jednostavan korijen od f_β (tj. kratnosti 1), slijedi da polinomi f_β i $f_\alpha(\theta - cx)$ imaju samo jedan zajednički linearni faktor i to je $x - \beta$.

Koeficijenti te najveće zajedničke mjere tih dvaju polinoma moraju ležati u $E(\theta)$. Dakle, $\beta \in E(\theta)$.

Sada iz $\alpha = \theta - c\beta$, slijedi da je i $\alpha \in E(\theta)$, pa konačno imamo $E(\alpha, \beta) = E(\theta)$.

(korak) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \geq 2$.

$$E(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) = E(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(\alpha_{n+1}) = (ind.pp.) =$$

$$= E(\alpha)(\alpha_{n+1}) = E(\alpha, \alpha_{n+1}) = (baza,\ \alpha_{n+1}\ sep./E) = E(\theta).$$

Dakle, tvrdnja vrijedi po principu matematičke indukcije. $\square$

Primijetimo da smo iz prethodne *leme* dobili da je svako konačno separabilno proširenje jednostavno, tj. generirano jednim elementom.

Propozicija A.20. *Neka je K algebarski zatvoreno polje i $K \subseteq L$ konačno generirano proširenje polja.*

Tada postoje $z_1, \dots, z_{d+1} \in L$ takvi da je:

(a) $L = K(z_1, \dots, z_{d+1})$

(b) $z_1, \dots, z_d$ *algebarski nezavisni* $/K$

(c) z_{d+1} *je separabilan (i algebarski) nad* $K(z_1, \dots, z_d)$.

Dokaz. Budući da je K konačno generirano proširenje, postoje $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in L$ takvi da je

$$L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = \left\{ \frac{P(\alpha_1, \dots, \alpha_l)}{Q(\alpha_1, \dots, \alpha_l)} \mid P, Q \in K[T_1, \dots, T_l], Q(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \neq 0 \right\}$$

Neka je d stupanj transcedentnosti od L/K.

Po prethodnim rezultatima, znamo da bazu transcedentnosti možemo izabrati između $\alpha_1,\dots,\alpha_l$, npr. neka su to $\alpha_1,\dots,\alpha_d$ (inače ih permutiramo) i vrijedi:

$$K \subset K(\alpha_1,\dots,\alpha_d) \subset L = K(\alpha_1,\dots,\alpha_d)(\alpha_{d+1},\dots,\alpha_l).$$

Uočimo da je $K(\alpha_1,\dots,\alpha_d) \subseteq L$ konačno proširenje jer su $\alpha_{d+1},\dots,\alpha_l$ algebarski nad $K(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$.

Sada razlikujemo tri slučaja:

(1) Ako je *char* $K=0$ i $l>d$, onda je po *Lemi 1* $K(\alpha_1,\dots,\alpha_d) \subset K(\alpha_1,\dots,\alpha_d)(\theta)$, za neki $\theta \in L$, gdje je $L = K(\alpha_1,\dots,\alpha_d,\theta)$. U tom slučaju uzmimo da je $z_1=\alpha_1,\dots,z_d=\alpha_d$ te $z_{d+1}=z$, pa je zadovoljeno (a), (b) i (c), čime je dokaz gotov.

(2) Ako je $l=d$, onda je $L=K(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$, pa uzmemo $\alpha_{d+1}=1$ i opet je dokaz gotov.

(3) Neka je sada *char* $K=p>0$ i $d<l$.

Neka je $y \in L$ proizvoljan. $K(\alpha_1,\dots,\alpha_d) \subset K(\alpha_1,\dots,\alpha_d,y) = K(\alpha_1,\dots,\alpha_d)(y)$ je algebarsko proširenje, pa je y algebarski $/K(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$.

Slijedi da postoji ireducibilan polinom $Q \in K(\alpha_1,\dots,\alpha_d)[T]$ takav da je $Q(y)=0$ (dakle, to je minimalan polinom od y, ali moguće je da je nenormiran).

Vrijedi:

$$Q(T) = \sum_{i=0}^{k} q_i(\alpha_1,\dots,\alpha_d)T^i = \frac{r_i(\alpha_1,\dots,\alpha_d)}{t_i(\alpha_1,\dots,\alpha_d)},$$

gdje je $q_i(\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in K(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$, $k \geq 1$, $q_k(\alpha_1,\dots,\alpha_d) \neq 0$, a r_i i t_i su polinomi u $\alpha_1,\dots,\alpha_d$ s koeficijentima iz K. Budući da su $\alpha_1,\dots,\alpha_d$ algebarski nezavisni elementi, ponašaju se kao varijable.

Budući da je $Q(y)=0$, možemo pretpostaviti da polinomi $q_1,\dots,q_k$ nemaju zajednički ireducibilan faktor.

Slijedi:

$$P(\alpha_1,\dots,\alpha_d,T) \overset{\text{def}}{=} Q(T) = \sum_{i=0}^{k} q_i(\alpha_1,\dots,\alpha_d)T^i$$

je ireducibilan u $K[\alpha_1,\dots,\alpha_d,T]$.

Rezimirajmo: zasad smo dokazali da postoji ireducibilan polinom $P \in K[T_1,\dots,T_d,T_{d+1}]$ takav da je $P(x_1,\dots,x_d,y)=0$.

Sada želimo dokazati da postoji $j \in \{1,2,\dots,d+1\}$ takav da je $\frac{dP}{dT_j} \not\equiv 0$.

Imamo:

$$P = \sum_i a_i T_1^{i_1} T_2 i_2 \cdots T_{d+1}^{i_{d+1}},$$

gdje je $a_i \in K$, $i = (i_1, \ldots, i_{d+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\frac{dP}{dT_j} \equiv 0$, $\forall j = 1, \ldots, d+1$.

Tada je:

$$0 = \frac{dP}{dT_j} = \sum_i i_1 a_i \cdot \underbrace{T_1^{i_1 - 1} T_2^{i_2} \cdots T_{d+1}^{i_{d+1}}}_{\text{za različite i, različiti monomi}}$$

Slijedi da je $i_1 a_i = 0$, $\forall i = (i_1, \ldots, i_{d+1})$, pa ako je $a_i \neq 0$, onda dobivamo da $p \mid i_1$.

Analogno dalje dobivamo:

$$\forall j \in \{1, \ldots, d+1\}\ a_j \neq 0 \Longrightarrow p \mid i_1, \ldots, i_{d+1}.$$

Budući da je K algebarski zatvoren, slijedi da

$$(\forall a_i \in K)(\exists b_i \in K)\ b_i^p = a_i.$$

Fiksirajmo neki takav izbor. Imamo:

$$P = \sum_{i\ t.d.\ a_i \neq 0} a_i T_1^{i_1} \cdots T_{d+1}^{i_{d+1}} = \sum_{i\ t.d.\ a_i \neq 0} b_i^p (T_1^{i_1/p} \cdots T_{d+1}^{i_{d+1}/p})^p = \underbrace{(\sum_{i\ t.d.\ a_i \neq 0} b_i T_1^{i_1/p} \cdots T_{d+1}^{i_{d+1}/p})^p}_{R \in K[T_1, \ldots, T_{d+1}]}.$$

Dakle, za neki polinom $R \in K[T_1, \ldots, T_{d+1}]$ vrijedi

$$P = R^p,$$

što je kontradikcija s ireducibilnošću od P.

Dakle, za proizvoljan $y \in L$ našli smo ireducibilan poliom P i onaj $j \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$ takav da je $\frac{dP}{dT_j} \not\equiv 0$ (eventualno se može dogoditi da je baš $\frac{dP}{dT_{d+1}} \equiv 0$, pa y nije separabilan, ali onda postoji neki drugi j takav da je $\frac{dP}{dT_j} \not\equiv 0$).

Fiksirajmo sada $j \in \{1, \ldots, d+1\}$ takav da je $\frac{dP}{dT_j} \not\equiv 0$.

Razlikujemo dva slučaja, $j \leq d$ te $j = d+1$.

Pretpostavimo prvo da je $j \leq d$. Tada je α_j separabilan $/K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_d, y)$ te je $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, T, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_d, y)$ njegov (ne nužno normiran) ireducibilan polinom. Zbog algebarske nezavisnosti slijedi da su

$$K = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_d, y) \subset K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \subset K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d, y)$$

konačna proširenja, pa vidimo da su $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_d, y$ algebarski nezavisni $/K$ jer ih ima d, a ostatak proširenja je konačan.

Dakle, u proširenju $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d, y)$ su elementi $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_d, y$ algebarski nezavisni, a ako im dodamo i α_j, onda je on separabilan $/K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_d, y)$, pa smo dokazali propoziciju u prvom slučaju.

Pretpostavimo sada da je $j = d+1$. Tada je y separabilan $/K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, pa postupamo kao u prvom slučaju.

Dakle, dokazali smo tvrdnju propozicije za bazu indukcije.

(korak) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $l-1 \geq d+1$ generatora i dokažimo da vrijedi i za l.

Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \alpha_{d+1}$ algebarski nezavisni te α_{d+1} separabilan $/K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ (inače ih ispremiješamo da dobijemo tražena svojstva).

Po *lemi 1* imamo:

$$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \subset K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \alpha_{d+1}, \alpha_{d+2}) = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)(\alpha_{d+1}, \alpha_{d+2}) = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)(\theta).$$

Dakle,

$$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \alpha_{d+1}, \alpha_{d+2}, \alpha_{d+3}, \ldots, \alpha_l) = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \theta, \alpha_{d+3}, \ldots, \alpha_l),$$

tj. sada imamo $l-1$ generator, pa možemo primijeniti pretpostavku indukcije.

Po principu matematičke indukcije, propozicija je dokazana.

□

Lema A.21. *(za pomoćni teorem Hilbertova teorema o nulama)*

Pretpostavimo da postoji konačno generirano proširenje $K \subset L$ polja K i $y_1, \ldots, y_n \in L$ takvi da je $F_1(y_1, \ldots, y_n) = \ldots = F_m(y_1, \ldots, y_n) = 0$..

Tada postoje $x_1, \ldots, x_n \in K$ takvi da $F_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = F_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Dakle, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$.

Dokaz. Budući da je $K \subset L$ konačno generirano proširenje, iz *Propozicije 1* slijedi da je $L = K(z_1, \ldots, z_d, z_{d+1})$.

Uočimo da se $z_1, \ldots, z_d$ ponašaju kao varijable.

Budući da je z_{d+1} algebarski $/K(z_1, \ldots, z_d)$, slijedi da je $f(z_1, \ldots, z_d, T) \in K(z_1, \ldots, z_d)(T)$ ireducibilan polinom za koji vrijedi:

(1) $f(z_1,\dots,z_{d+1})=0$

(2) koeficijenti od $f(z_1,\dots,z_d,T)$ polinomi u varijablama $z_1,\dots,z_d$.

Vrijedi da je $y_i \in L \subseteq K(y_1,\dots,y_d)$, pa prema (2) slijedi da je $y_i = f_i(z_1,\dots,z_d,z_{d+1})$.

Za svaki $i\in\{1,\dots,m\}$ je

$$0 = F_i(y_1,\dots,y_n) = F_i(f_1(z_1,\dots,z_d,T),\dots,f_m(z_1,\dots,z_d,T))\big|_{T=z_{d+1}}.$$

Iz ovog zapisa vidimo da se dobiveni polinom f poništava u z_{d+1}, pa

$$f(z_1,\dots,z_d,T) \,\Big|\, F_i(f_1(z_1,\dots,z_d,T),\dots,f_n(z_1,\dots,z_d,T))$$

u $K(z_1,\dots,z_d)(T)$.

Možemo uzeti da je

$$F_i(y_1,\dots,y_n)=F_i(f_1(z_1,\dots,z_d,T),\dots,f_m(z_1,\dots,z_d,T))=f(z_1,\dots,z_d,T)\cdot g_i(z_1,\dots,z_d,T),\quad (\star)$$

za neki $g_i \in K(z_1,\dots,z_d,T)$.

Imamo: $z_1,\dots,z_d,T$ su varijable, pa napravimo parcijalnu supstituciju $z_1,\dots,z_d$ s $\alpha_1,\dots,\alpha_d \in K$, gdje su $\alpha_1,\dots,\alpha_d$ takvi da:

(1) nijedan nazivnik u $(\star)$ nije 0.

(2) vodeći koeficijent od $f(\alpha_1,\dots,\alpha_d,T)$ nije 0.

Sada za $i=1,\dots,m$ vrijedi

$$F_i(y_1,\dots,y_n)=F_i(f_1(z_1,\dots,z_d,T),\dots,f_m(z_1,\dots,z_d,T))=f(\alpha_1,\dots,\alpha_d,T)\cdot g_i(\alpha_1,\dots,\alpha_d,T).$$

Polinom $f(\alpha_1,\dots,\alpha_d,T)$ je pozitivnog stupnja u T (zbog (2)), pa postoji $\alpha_{d+1}\in K$ takav da je $f(\alpha_1,\dots,\alpha_{d+1})=0$.

Supstitucija α_{d+1} umjesto T daje da za $x=(f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_{d+1}),\dots,f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_{d+1}))$ slijedi $F_i(x)=0$, za $i=1,\dots,m$, pa je tvrdnja dokazana. □

Bibliografija

[1] M.A. Armstrong, *Basic topology*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[2] R. B. Ash, *Abstract Algebra: The Basic Graduate Year*, dostupno na http://www.math.uiuc.edu/ r-ash/Algebra/Chapter3.pdf (travanj, 2017.)

[3] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1969.

[4] J. Dieudonne, *The historical development of algebraic geometry*, dostupno na https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Dieudonne.pdf (travanj, 2017.)

[5] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[6] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[7] S. Lang, *Algebra*, Springer, New York, 2002.

[8] S.Lang, *Elliptic Functions*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[9] D.A. Marcus, *Number fields*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[10] W.S. Massey, *Algebraic topology: An introduction*, Springer, New York, 1967.

[11] J.S. Milne, *Algebraic Geometry*, dostupno na http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AG.pdf, (ožujak 2017.)

[12] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[13] G. Muić, *Algebarske krivulje* (bilješke s diplomskog kolegija), dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/ gmuic/Algebarske_krivulje_ispravljeno.pdf, (studeni 2016.)

[14] D. Mumford, *The red book of varieties and Schemes: includes the Michigan Lectures (1974) on Curves and their Jacobians*, Springer, Berlin New York, 1999.

[15] J. L. Rabinowitsch, *Zum Hilbertschen Nullstellensatz*, Math. Ann., 102 (1929) pp. 520

[16] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.

[17] B. L. van der Waerden *Introduction to algebraic geometry*, Dover Publications, New York, 1945.

[18] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra* Springer-Varlag, Berlin Heidelberg, 1960.

Sažetak

Barbara Bošnjak, Josip Novak, Veronika Pedić

Racionalne funkcije na krivuljama i primjena nad poljem $\mathbb{C}$

U radu izlažemo osnove algebarske geometrije s naglaskom na algebarske krivulje te regularne i racionalne funkcije na njima. Započinjemo s osnovnim pojmova i rezultatima algebarske geometrije: (kvazi-)afinim i (kvazi-)projektivnim mnogostrukostima i Hilbertovim *Nullstellensatzom*. Posebno proučavamo krivulje u projektivnom prostoru, eksplicitno opisujemo njihovu topologiju i računamo polja racionalnih funkcija na njima.
Nakon što smo razvili teoriju o krivuljama u projektivnom prostoru nad proizvoljnim algebarski zatvorenim poljem K, prelazimo na teoriju krivulja nad poljem $\mathbb{C}$. Uvodimo pojam Riemannovih ploha i meromorfnih funkcija na njima. Centralni primjer Riemannove plohe nam je kompleksni torus na kojem pokazujemo vezu između algebarske geometrije u projektivnom prostoru $\mathbb{P}^n$ i Riemannovih ploha. Na kraju razvijamo teoriju divizora i pomoću nje pokazujemo kako kompleksni torus možemo uložiti u projektivnu ravninu.

Ključne riječi: Racionalne funkcije, krivulje, kompleksni brojevi, Riemannove plohe, torus.

Summary

Barbara Bošnjak, Josip Novak, Veronika Pedić

Rational functions over curves and application over field of complex numbers

In this paper we give the foundations of algebraic geometry, focusing on the algebraic curves and regular and rational functions on them. We start by defining basic concepts of algebraic geometry: (quasi-)affine and (quasi-)projective varieties and Hilbert's *Nullstellensatz*. We specifically study the curves in projective space, explicitly describe their topology, and calculate fields of rational functions on them. After developing the theory on curves in projective space over an arbitrary algebraically closed field K, we study the theory of curves over the complex numbers. We define Riemann surfaces and meromorphic functions on them. Our central example of Riemann surface is the complex torus which we use to demonstrate the connection between algebraic geometry in a projective space and the Riemann surfaces. In the end, we develop the theory of divisors and use it to demonstrate how the complex torus can be embedded into the projective plane.

Key words: Rational functions, curves, complex numbers, Riemann surfaces, torus.