

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marta Dujella, Vedran Stipetić

NUMERIČKA METODA ZA PROBLEM TOKA U SUSTAVU
CIJEVI

ZAGREB 2016.

Ovaj rad je napisan na Zavodu za primjenjenu matematiku na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, pod vodstvom prof. dr. sc. Josipa Tambače i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2015./2016.

Oznake

$\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ – graf s vrhovima \mathbb{V} i bridovima \mathbb{E} , zadaje cjevovod

N_e – broj bridova grafa

N_v – broj vrhova grafa

N_u – broj unutarnjih vrhova grafa

l_i – duljina i -tog brida

p_i – tlak u i -tom vrhu ili bridu

ρ – gustoća fluida

μ – dinamička viskoznost fluida

σ_i – poprečni presjek i -te cijevi

ω_i – rješenje stacionarne zadaće na presjeku

f^i – linijska gustoća vanjskih sila na i -toj cijevi

Ψ_j – dodatni protok u j -tom vrhu

$L_2(0, l)$ – prostor izmjerivih kvadratično integrabilnih funkcija

$L_2(\mathbb{G})$ – odgovarajući prostor na grafu

$H^1(0, l)$ – prostor $L_2(0, l)$ funkcija kojima je derivacija takva

$H^1(\mathbb{G})$ – odgovarajući prostor na grafu koji sadrži samo globalno neprekidne funkcije

Sadržaj

Uvod	1
1 Tok kroz sustav cijevi. Stacionarni slučaj	2
1.1 Model s tlakovima	2
1.2 Model s protocima	3
1.3 Veza modela (1.1) i (1.2)	4
1.4 Numerička metoda	4
1.5 Primjeri	6
2 Tok kroz sustav cijevi. Nestacionarni slučaj	10
2.1 Model	10
2.2 Numerička metoda za zadaću na presjeku	11
2.3 Numerička metoda za zadaću na grafu	15
2.4 Primjeri	19
3 Zaključak	23
Literatura	24

Uvod

U ovom radu baviti ćemo se modeliranjem toka nestlačivog Newtonovog fluida kroz sustav dugih tankih cijevi. To je često proučavana struktura sa mnogo već postavljenih modela poput onih u [2], [7], [12], [13] i [15]. Ovakvi modeli mogu se koristiti za modeliranje primjerice vodovoda ili krvožilnog sustava. Duga tanka cijev znači da je omjer presjeka i duljine cijevi malen. To će nam omogućiti da problem toka aproksimiramo jednodimenzionalnim modelom. ρ će biti oznaka za gustoću fluida u sustavu cijevi, a μ za viskoznost.

Sustav cijevi interpretirati ćemo kao graf $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, cijevi će u grafu biti bridovi iz \mathbb{E} , a spojevi više cijevi su vrhovi iz \mathbb{V} . Modeli za zadaću na grafu dokazani su u [8], [9], [10], [11] i [14] Broj cijevi, to jest bridova grafa, označiti ćemo sa N_e , a broj vrhova, to jest sjecišta cijevi, sa N_v . Za sve cijevi pretpostavljamo da imaju kružni poprečni presjek, a taj presjek na i -toj cijevi označiti ćemo sa σ_i . Duljinu i -te cijevi označavati ćemo sa l_i . i -tu cijev označavati ćemo sa e_i , a k -ti vrh sa O_k .

Vrhove grafa podjeliti ćemo na dvije vrste, *unutarnje*, to jest one koji su krajevi više od jedne cijevi, i *rubne*, to jest one koji su krajevi samo po jednoj cijevi. Jezikom teorije grafova, unutarnji vrh je onaj stupnja većeg od 1, a rubni onaj stupnja 1. Broj unutarnjih vrhova označiti ćemo sa N_u .

Primjetimo da možemo pretpostaviti da je graf povezan. Kada nebi bio tada bi se radilo o više međusobno odvojenih sustava cijevi, pa bi smo mogli na svakom od njih odvojeno rješavati problem, to jest odvojeno rješavati problem na svakoj komponenti povezanosti.

Na spojevima cijevi ćemo u svim modelima pretpostavljati da vrijedi Kirchhoffov zakon, to jest da je zbroj svih protoka u spoju jednak 0. Drugim riječima koliko fluida ulazi u spoj, toliko ga mora izlaziti iz njega. U zbroj protoka uključujemo i vanjske protoke kojima fluid ulazi ili izlazi iz sustava u promatranom vrhu. Kirchhoffov zakon je posljedica nestlačivosti fluida kojeg promatramo u sustavu.

1 Tok kroz sustav cijevi. Stacionarni slučaj

1.1 Model s tlakovima

Neka je zadan sustav n cijevi duljina l_i $i = 1, \dots, n$, koje sve spajaju u jednom čvoru. <slika, možda ona iz panasenka/ede>.

Neka je p_i tlak na kraju i -te cijevi koja izlazi iz tog čvora. U članku [5] postavljena je jednadžba za tlak na čvoru u kojem se sječe više cijevi.

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \frac{\langle \omega_i \rangle}{l_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{\langle \omega_i \rangle}{l_i}}, \quad (1.1)$$

gdje je ω_i zadan na presjeku i -te cijevi, σ_i , kao rješenje rubne zadaće

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \omega_i &= 1 & \text{na } \sigma_i, \\ \omega_i &= 0 & \text{na } \partial \sigma_i, \end{aligned}$$

a $\langle \omega_i \rangle$ označava

$$\langle \omega_i \rangle = \int_{\sigma_i} \omega_i$$

Ova jednadžba je aproksimacija koja vrijedi asimptotski kada omjer presjeka cijevi i duljine teži u 0.

Kao prirodni rubni uvjeti u ovom modelu zadani su tlakovi u rubnim čvorovima. Ukoliko zapišemo formulu (1.1) za svaki unutarnji vrh grafa, dobivamo sustav linearnih jednadžbi. Rješenje tog sustava određuje vrijednost tlaka u unutarnjim vrhovima.

Osim tlakova, ovaj model nam dozvoljava i računanje brzine toka. Nazovimo U_i brzinu toka u i -toj cijevi, uz oznaku da su tlakovi na rubovima cijevi p i q .

$$U_i = \frac{\omega_i(p - q)}{l_i}.$$

Protok u i -toj cijevi je dan sa

$$u_i = \int_{\sigma_i} U_i = \frac{\langle \omega_i \rangle (p - q)}{l_i}.$$

1.2 Model s protocima

Promotrimo sada problem na čitavom grafu. U članku [10] model na grafu je dan na sljedeći način. U ovom modelu p_i je oznaka za restrikciju funkcije tlaka na bridu e_i .

$$\begin{aligned} -(\kappa_i p_i'(x))' &= f_i(x), \quad x \in (0, l_i), \\ -\sum_{i: e_i \in O_l} \kappa_i p_i' &= \Psi_l, \quad l = 1, \dots, N_v \end{aligned} \quad (1.2)$$

κ_i je oznaka za $\langle \omega_i \rangle$ iz (1.1). $f_i(x)$ predstavlja linijsku gustoću sile na bridu e_i , a Ψ_l je dodatni volumni protok u vrhu O_l , to jest količina fluida koja ulazi u sustav u vrhu O_l izvana. Druga jednadžba ovog modela je zapis Kirchhoffovog zakona na spojevima.

Teorem 1 ([10, Teorem 3.1]). *Neka je $f \in L_2(\mathbb{G})$. Zadaća (1.2) ima do na konstantu jedinstveno rješenje $p \in H^1(\mathbb{G})$ ako i samo ako vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_0^{l_i} f^i(x) dx + \sum_{j=0}^{N_v} \Psi_j = 0. \quad (1.3)$$

Ako u problemu (1.2) fiksiramo tlak u barem jednoj točki, odrediti ćemo neodređenu konstantu i dobiti jedinstveno rješenje. Prostor $L_2(\mathbb{G})$ iz ovog teorema definiran je sa

$$L_2(\mathbb{G}) = L_2(0, l_1) \times L_2(0, l_2) \times \dots \times L_2(0, l_{N_e}).$$

Prostori $L_2(0, l)$ su prostori izmjerivih kvadratično integrabilnih funkcija, vidi [16]. $H^1(\mathbb{G})$ je zadan sa

$$H^1(\mathbb{G}) = \{(q_1, \dots, q_{N_e}) : q_i \in H^1(0, l_i), i = 1, \dots, N_e, q_i(O) = q_j(O), O \in e_i \cap e_j\}.$$

Prostor $H^1(0, l)$ je prostor $L_2(0, l)$ funkcija, čije su derivacije također $L_2(0, l)$. Uvjet $q_i(O) = q_j(O)$, $O \in e_i \cap e_j$. Znači, $H^1(\mathbb{G})$ su globalno neprekidne funkcije.

1.3 Veza modela (1.1) i (1.2)

Jedna od pretpostavki modela (1.1) je da je tlak afina funkcija pozicije u cijevi, što odgovara slučaju $f \equiv 0$ u modelu (1.2). Druga pretpostavka je da su protoci $\Psi_l = 0$ na svim čvorovima koji nisu na rubu grafa.

Promotrimo u modelu (1.2) kako je određen tlak u vrhu O_l , ako su bridovi iz tog vrha e_1, \dots, e_k , duljina i -tog brida je l_i , presjek je σ_i i tlak na drugom kraju brida je p_i , a tlak u vrhu O_l je q . Restrikciju funkcije tlaka na brid e_i u ovom odjeljku označit ćemo sa p'_{e_i} . Također pretpostaviti ćemo sve gore navedene pretpostavke iz modela (1.1). To jest $\Psi_l = 0$ i $f_i \equiv 0$ za sve i .

$$\sum_{i=1}^k \kappa_i p'_{e_i} = 0$$

Kako je p_{e_i} afina funkcija, $p'_{e_i} = \frac{q-p_i}{l_i}$. Stoga je

$$\sum_{i=1}^k \kappa_i \frac{q-p_i}{l_i} = 0$$

Kada izrazimo q dobivamo

$$q = \frac{\sum_{i=1}^k p_i \kappa_i / l_i}{\sum_{i=1}^k \kappa_i / l_i}$$

Dakle, uz odgovarajuće pretpostavke, model (1.2) je ekvivalentan modelu (1.1).

1.4 Numerička metoda

Promatrajmo sada problem na grafu. U svakom čvoru tlak se računa iz tlakova u susjednim čvorovima formulom (1.1), osim u rubnim čvorovima gdje je tlak zadan. Ukoliko za svaki od N_u unutarnjih vrhova zapišemo danu jednadžbu dobivamo N_u linearnih jednadžbi sa N_u nepoznanica, gdje su nepoznanice tlakovi u unutrašnjim vrhovima.

Matricu sustava, A , konstruiramo tako što promatramo cijev po cijev, to jest brid po brid, kojim jednadžbama pridonosi. Brid e_i , sa vrhovima O_k i O_l pridonosi

k -toj i l -toj jednadžbi i to s $\frac{\langle \omega_i \rangle}{l_i}$ na mjesta A_{kk} i A_{ll} , a s $-\frac{\langle \omega_i \rangle}{l_i}$ na mjesta A_{kl} i A_{lk} .

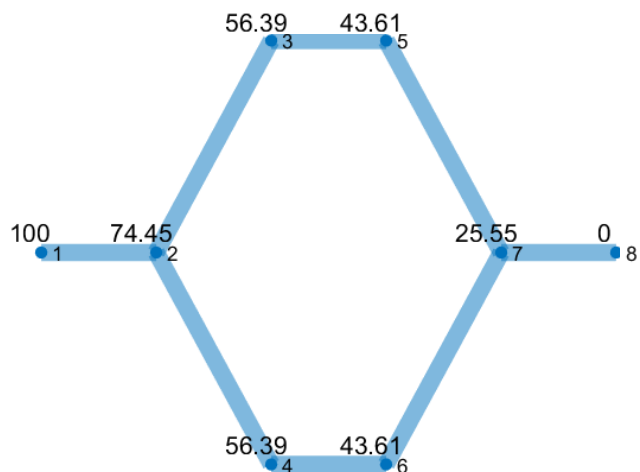
Poseban slučaj je cijev kojoj je jedan od vrhova rubni. Ako je jedan od vrhova rubni, recimo vrh k , tada vrijednost $-\frac{\langle \omega_i \rangle}{l_i}$ prelazi u l -ti redak vektora desne strane b sa koeficijentom p_k . To jest b_l povećavamo za $p_k \frac{\langle \omega_i \rangle}{l_i}$. Dakle, vektor desne strane b na svim svojim komponentama ima 0, osim na onima koje odgovaraju vrhovima koji su susjedni rubnim vrhovima, a tamo ima sumu gore opisanih doprinosa oblika $p_k \frac{\langle \omega_i \rangle}{l_i}$.

Promotrimo sada strukturu matrice A . U konstrukciji matrice, isti član dodajemo na mjesta A_{kl} i A_{lk} , je matrica, nakon uvažavanja svake cijevi simetrična, pa je i krajnja matrica A simetrična. Također, sve vrijednosti koje dodajemo u nedijagonalne elemente su negativne, a istovremeno dodajemo suprotne, to jest pozitivne vrijednosti u pripadni dijagonalni element. Zato je svaki redak očito slabo dijagonalno dominantan. Ukoliko iz vrha k izlazi barem jedan brid kojem je drugi kraj rub, element A_{kk} povećali smo barem jednom kada nismo povećali nedijagonalne elemente, pa je matrica A u k -tom retku strogo dijagonalno dominantna. Primjetimo i da je A ireducibilna jer je promatrani graf povezan. Sada imamo da je A slabo dijagonalno dominantna, dijagonalno dominantna u barem jednom retku i ireducibilna, pa je matrica A regularna, to jest rješenje sustava $Ap = b$ postoji i jedinstveno je.

Ukoliko za uvjete sustava koristimo protoke kao u (1.2) vektor desne strane b računamo postavljajući

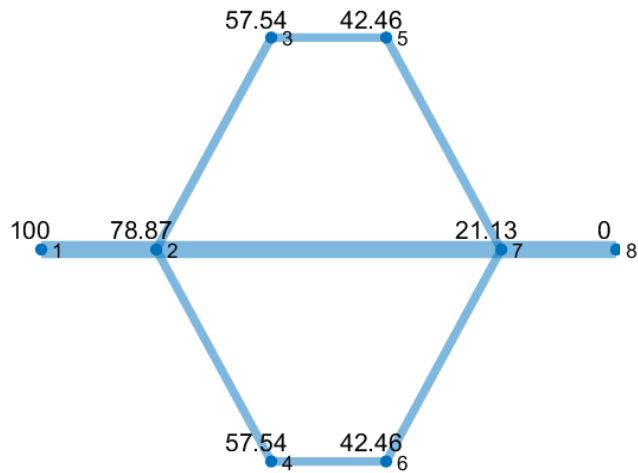
$$b_k = \Psi_k, \quad k = 1, \dots, N_v.$$

1.5 Primjeri



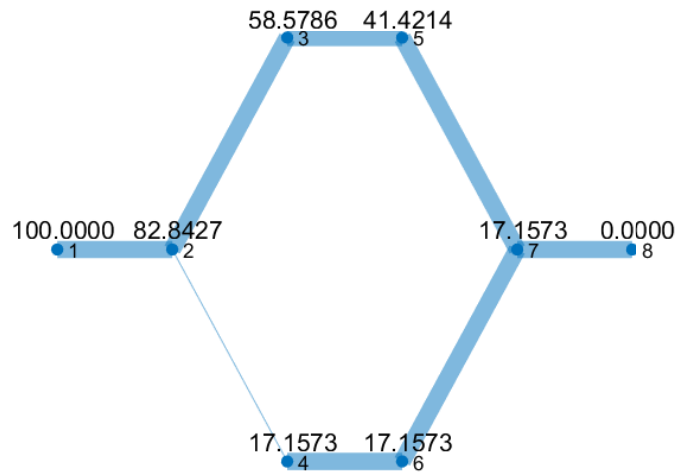
Slika 1: primjer s jednostavnim grafom

Na slici 1 vidimo jedan jednostavan graf na kojem smo tlakove odredili metodom iz modela (1.1). Sve cijevi imaju jednak polumjer $R = 0.5$. Tlakovi su fiksirani u vrhovima 1 i 8, na veličine 100 i 0. Primjetimo i da je simetrija grafa sačuvana i u tlakovima, pa tako vrhovi 3 i 4, i vrhovi 5 i 6 imaju jednake tlakove.



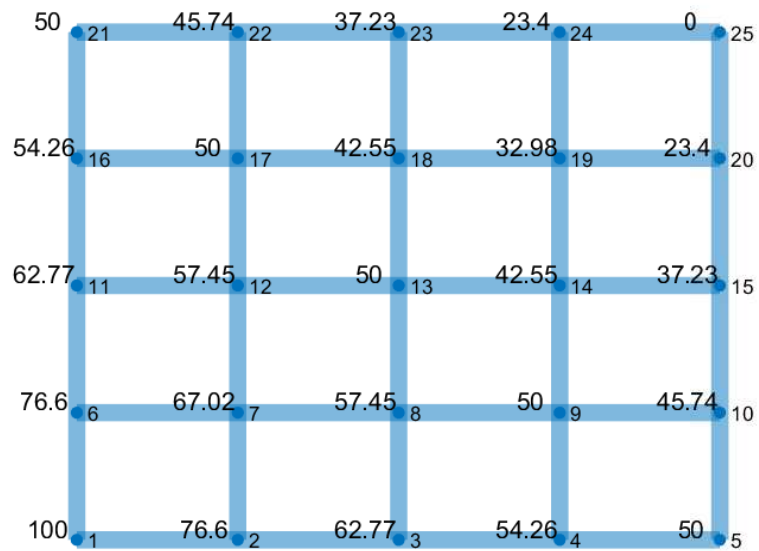
Slika 2: Primjer sa malo kompliciranijim grafom

Ovaj primjer smo također rješavali metodom (1.1). Ovoga puta nisu svi polumjeri jednaki. Cijevi 1 – 2, 2 – 7 i 7 – 8 imaju polumjer $R_1 = 1$, a ostale cijevi imaju polumjer $R_2 = 0.5$. Primjetimo da je dodavanje cijevi 2 – 7 i promjena radijusa cijevi 1 – 2 i 7 – 8 utjecalo na sve tlakove, iako vrhovi 5 i 6 nemaju direktan kontakt niti sa jednom od promjena. Primjetimo također da je razlika tlakova između slika 1 i 2 veća u vrhovima 2 i 7, nego u vrhovima 3, 4, 5 i 6.



Slika 3: Povratni tok

Na slici 3 vidimo što se događa sa tokom ako radijus brida 2 – 4 bitno manji od otalih bridova.



Slika 4: Veći graf

I ovaj smo primjer rješavali metodom (1.1). Radijus svih cijevi je $R = 1$, a duljina je $l = 1$. Tlakovi su fiksirani u vrhovima 1 i 25.

2 Tok kroz sustav cijevi. Nestacionarni slučaj

Do sada u svim modelima jedna od pretpostavki je bila da zadani uvjeti i rješenja ne ovise o vremenu. U ovom odjeljku promatrati ćemo modele u kojima dozvoljavamo da i uvjeti i rješenja ovise o vremenu.

2.1 Model

Koristiti ćemo sljedeći model dobiven iz članka [10]. U čitavom odjeljku smatrati ćemo da oznaka p'_i označava derivaciju u smjeru cijevi.

$$\begin{aligned} -(L^i p'_i(x,t))' &= f_i(x,t), \quad x \in (0, l_i), \quad i = 1, \dots, N_e, \\ - \sum_{e_i: O_l \in e_i} (L^i p'_i)(O_l, t) &= \Psi_l(t), \quad l = 1, \dots, N_v. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Primjetimo da u drugoj jednadžbi sustava (2.1), ukoliko je O_l rubni vrh, od sume ostaje samo jedan sumand, pa jednadžba postaje

$$-L^i p'_i(O_l, t) = \Psi_l(t).$$

Dane jednadžbe vrijede za sve bridove e_i grafa, gdje p_i označava restrikciju funkcije tlaka p na brid e_i , $f_i : (0, l_i) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ predstavlja linijsku gustoću vanjske sile na bridu e_i , $\Psi_l : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ predstavlja dodatni volumni protok tekućine u vrhu O_l , a operator L^i je zadan sa

$$L^i(S(t)) = \int_{\sigma_i} V(y,t) dy,$$

gdje je V rješenje rubne zadaće

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial V}{\partial t}(y,t) - \mu \Delta' V(y,t) &= S(t) \quad \text{u } \sigma_i, \quad t \in (0, +\infty) \\ V(y,t)|_{\partial \sigma_i} &= 0 \quad t \in (0, +\infty) \\ V(y,0) &= 0 \quad y \in \sigma_i \end{aligned} \quad (2.2)$$

U ovoj rubnoj zadaći Δ' označava Laplaceov operator po koordinatama poprečnog presjeka cijevi.

Pomnožimo prvu jednadžbu sustava (2.1) sa proizvoljnom funkcijom q_i iz prostora $H^1(\mathbb{G})$, gdje je

q_i je restrikcija od $q \in H^1(\mathbb{G})$ na brid e_i . Integrirajmo zatim jednadžbu po bridu e_i .

$$\int_0^{l_i} -(L^i p_i'(x,t))' q_i(x) dx = \int_0^{l_i} f_i(x,t) q_i(x) dx.$$

Sada primjenimo formulu parcijalne integracije na lijevu stranu i dobivamo

$$\int_0^{l_i} -(L^i p_i'(x,t))' q_i(x) dx = -L^i p_i'(x,t) q(x)|_{O_k^l} + \int_0^{l_i} (L^i p_i'(x,t)) q_i'(x),$$

gdje su O_l i O_k rubovi brida e_i . Kada zbrojimo tako dobivene jednadžbe za sve bridove, i uvrstimo drugu jednadžbu iz modela (2.1), to jest uvjete u spojevima, dobivamo

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_0^{l_i} (L^i(p_i'))(x,t) q_i'(x,t) dx = \sum_{i=1}^{N_e} \int_0^{l_i} f_i(x,t) q_i(x,t) dx + \sum_{j=1}^{N_v} \Psi_j(t) q(x,t)|_{O_j}.$$

Dakle, sustav (2.1) zapisan u slaboj formulaciji glasi

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_0^{e_i} (L^i(p_i'))(x,t) q_i'(x,t) dx = \sum_{i=1}^{N_e} \int_0^{e_i} f_i(x,t) q_i(x,t) dx + \sum_{j=1}^{N_v} \Psi_j(t) q(x,t)|_{O_j} \quad \forall q \in H^1(\mathbb{G}) \quad (2.3)$$

Za rješavanje ovog problema potrebno je odrediti $L^i(p_i')$, dakle trebamo riješiti problem (2.2) za $S = p_i'$.

Teorem 2 ([10, Theorem 6.1]). *Neka su $\Psi_l \in H_0^1(0, +\infty)$, $l = 1, \dots, N_v$ i $f^i \in H_0^1(0, +\infty; H_0^1(\mathbb{G}))$, $i = 1, \dots, N_e$. Tada sustav (2.1) ima jedinstveno rješenje p koje isčezava u vrhu O_k ako i samo ako uvjet (1.3) vrijedi za gotovo sve vremenske trenutke t .*

2.2 Numerička metoda za zadaću na presjeku

U ovom odjeljku formuliramo numeričku metodu za model (2.2).

Uvedimo diskretizaciju po vremenu jednadžbe (2.2) uz vremenski korak Δt , $V^n \approx V(n\Delta t)$, $p^n \approx p(n\Delta t)$.

Iz početnog uvjeta u (2.2) slijedi $V^0 = 0$

Za V^n dobivamo rubnu zadaću:

$$\begin{aligned} \rho \frac{V^n - V^{n-1}}{\Delta t} - \mu \Delta' V^n &= p^{n'}, \\ V^n|_{\partial\sigma} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dakle, jednačba kojom je definiran V^n je rješenje

$$\begin{aligned} \rho V^n - \mu \Delta' V^n \Delta t &= \rho V^{n-1} + \Delta t p^{n'}, \\ V^n|_{\partial\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

za zadane V^{n-1} i $p^{n'}$.

Definirajmo K kao operator koji funkciji f pridružuje rješenje V rubne zadaće

$$\begin{aligned} \rho V - \mu \Delta' V \Delta t &= f, \quad u \quad \sigma, \\ V|_{\partial\sigma} &= 0. \end{aligned}$$

Sada imamo $V^n = K(\rho V^{n-1} + \Delta t p^{n'})$. Onda je

$$\begin{aligned} L(p^{n'}) &= \int_{\sigma} V^n \\ &= \int_{\sigma} K(\rho V^{n-1} + \Delta t p^{n'}). \end{aligned}$$

Sada iskoristimo linearnost operatora K i činjenicu da Δt i $p^{n'}$ ne ovise o presjeku

$$\begin{aligned} L(p^{n'}) &= \int_{\sigma} K(\rho V^{n-1}) + \Delta t p^{n'} \int_{\sigma} K(1) \\ &= \int_{\sigma} \rho K(K(\rho V^{n-2} + \Delta t p^{n-1}')) + \Delta t p^{n'} \int_{\sigma} K(1) \\ &= \int_{\sigma} \rho^2 K(K(V^{n-2})) + \rho \Delta t p^{n-1'} \int_{\sigma} K(K(1)) + \Delta t p^{n'} \int_{\sigma} K(1) \\ &= \int_{\sigma} \rho^n K^n(V^0) + \Delta t \sum_{i=1}^n p^{i'} \rho^{n-i} \int_{\sigma} K^{n-i+1}(1) \\ &= \Delta t \sum_{i=1}^n p^{i'} \rho^{n-i} \int_{\sigma} K^{n-i+1}(1). \end{aligned}$$

Dakle, za N vremenskih koraka, potrebno je izračunati $K^n(1)$, za $n = 1, \dots, N$, da bi smo mogli odrediti djelovanje operatora L u vremenu $t = 0$ do $t = N\Delta t$.

Kako smo pretpostavili da je poprečni presjek krug, kada pređemo u polarne koordinate u jednadžbi (2.5) za $K(f)$ dobivamo, vidi [1],x

$$\rho V + \mu \Delta t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) = f.$$

Kako za $f = 1$ je problem očito centralno simetričan, rješenje $K(1)$ ne ovisi o ϕ . Sada analogno možemo zaključiti za $K(K(1))$, i tako dalje za $K^n(1)$, pa u svim jednadžbama možemo pretpostaviti $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$. Uvrštavanjem ovog svojstva u jednadžbu dobivamo

$$\rho V + \mu \Delta t \frac{1}{r} (rV')' = f,$$

to jest

$$\rho rV + \mu \Delta t (rV')' = rf.$$

U slaboj formulaciji zadaća je pronaći $V \in V_0$, gdje je

$$V_0 = \{v \in H^1(0, R) : v(R) = 0\},$$

takav da vrijedi

$$\rho \int_0^R rVqdr + \mu \Delta t \int_0^R rV'q'dr = \int_0^R rfqdr \quad q \in V_0. \quad (2.6)$$

Rješenje ćemo tražiti metodom konačnih elemenata, detaljnije objašnjenje metode može se nać u [3] ili u [4]. To jest, umjesto da V tražimo u prostoru funkcija, tražiti ćemo aproksimaciju na konačno dimenzionalnom potprostoru. Za taj potprostor odabrat ćemo prostor neprekidnih, po dijelovima afinih funkcija. Oznaćimo ga sa V_0^k . Podijelimo interval $(0, R)$ na k jednakih djelova, tj $\Delta x = \frac{R}{k}$. Neka je $x_j = j\Delta x$ $j = 1, \dots, k$. Oćito je da je jedna baza tog prostora $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k\}$ gdje su funkcije ϕ_i neprekidne i po dijelovima affine funkcije takve da $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$. To jest, neka vrijedi

$$\rho \int_0^R rV\phi_i dr + \mu \Delta t \int_0^R rV'\phi_i' dr = \int_0^R rf\phi_i dr \quad i = 1, \dots, k.$$

Kako je $V \in V_0^k$ postoje v_0, \dots, v_k takvi da je

$$V = \sum_{i=0}^k v_i \phi_i$$

Kako je $V|_{\partial\sigma} = 0$, to jest $V \in V_0^k \subset V_0$, imamo $v_k = 0$ i

$$\sum_{j=0}^{k-1} \rho v_j \int_0^R r \phi_j \phi_m dr + \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t \mu v_j \int_0^R r \phi_j' \phi_m' = \sum_{j=0}^{k-1} f_j \int_0^R r \phi_j \phi_m, \quad m = 1, \dots, k-1. \quad (2.7)$$

To jest, u matričnom zapisu

$$(\rho M + \Delta t \mu K)x = F,$$

$$M = \left(\int_0^R r \phi_i \phi_j \right)_{ij},$$

$$K = \left(\int_0^R r \phi_i' \phi_j' \right)_{ij},$$

$$\bar{f} = (f_j)_j,$$

$$F = M \bar{f},$$

$$x = (v_j)_j.$$

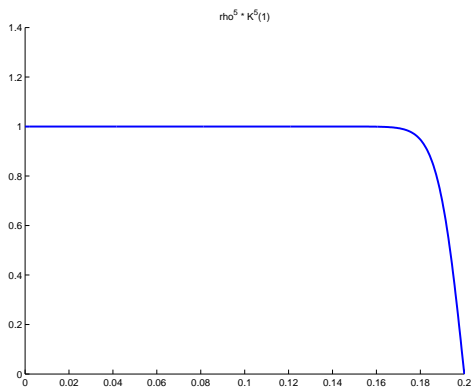
Sada da bi smo dobili funkciju V , dovoljno je riješiti ovaj sustav linearnih jednadžbi. Sada je aproksimacija

$$\int_{\sigma} K(f) = \int_{\sigma} \sum_{i=0}^{k-1} v_i \phi_i = \sum_{i=0}^{k-1} v_i \int_{\sigma} \phi_i = \sum_{i=0}^{k-1} v_i 2\pi \int_0^R r \phi_i(r) dr,$$

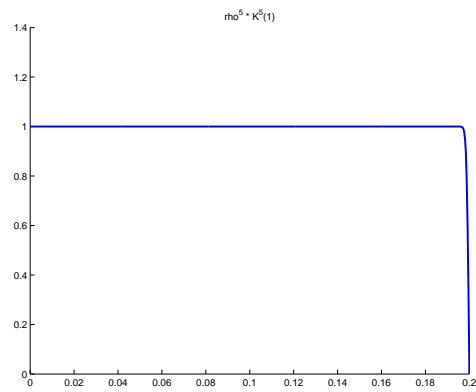
a iz definicija funkcija ϕ to je

$$2\pi \left(v_0 \frac{1}{6} (\Delta x)^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (\Delta x)^2 i v_i \right).$$

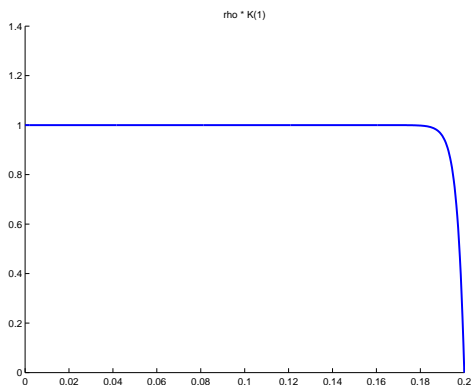
Promotrimo nekoliko primjera grafova funkcija $\rho^m K^m(1)$, za različite vrijednosti ρ , m i R .



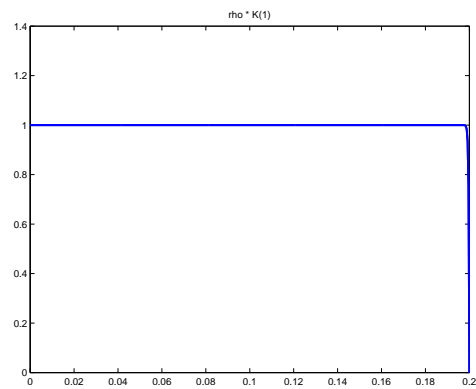
(a) $\rho = 10$ $R = 0.2$ $m = 5$



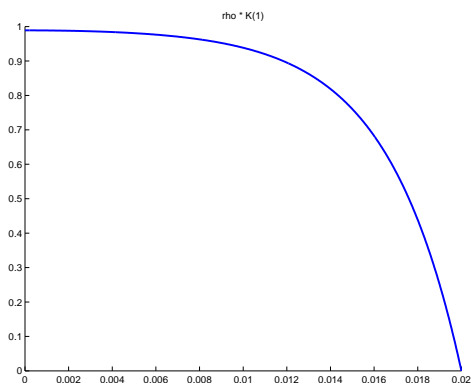
(b) $\rho = 1000$ $R = 0.2$ $m = 5$



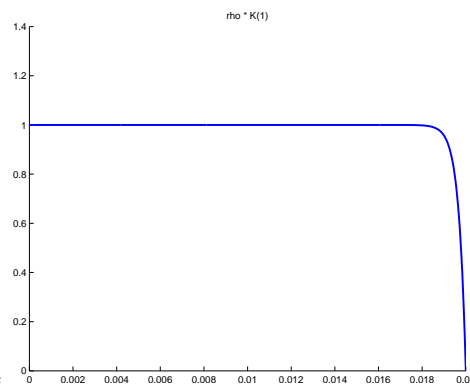
(c) $\rho = 10$ $R = 0.2$ $m = 1$



(d) $\rho = 1000$ $R = 0.2$ $m = 1$



(e) $\rho = 10$ $R = 0.02$ $m = 1$



(f) $\rho = 1000$ $R = 0.02$ $m = 1$

Slika 5: Grafovi funkcija oblika $\rho^m K^m(1)$

2.3 Numerička metoda za zadaću na grafu

Prvo dokažimo da je, u slučaju kada je $f^e(x, t) \equiv 0$ za sve bridove e , aproksimacija tlaka p^n na svakoj cijevi afina funkcija. Dokaz ćemo provesti indukcijom.

Uvrstimo definiciju $L(p^{n'})$ u prvu jednadžbu modela (2.1)

Baza

$$\begin{aligned}(Lp^{1'})' &= 0, \\ (\Delta t p^{1'} \int_{\sigma} K(1))' &= 0, \\ \Delta t p^{1'} \int_{\sigma} K(1) &= \text{const}, \\ p^{1'} &= \text{const}.\end{aligned}$$

Sada je p^1 afina funkcija.

Pretpostavka

Funkcije p^1, \dots, p^{n-1} su afine.

Korak

$$\begin{aligned}(Lp^{n'})' &= 0, \\ (\Delta t \sum_{i=1}^n p^{i'} \rho^{n-i} \int_{\sigma} K^{n-i+1}(1))' &= 0, \\ \Delta t \sum_{i=1}^n p^{i'} \rho^{n-i} \int_{\sigma} K^{n-i+1}(1) &= \text{const}, \\ \Delta t p^{n'} \int_{\sigma} K(1) + \Delta t \sum_{i=1}^{n-1} p^{i'} \rho^{n-i} \int_{\sigma} K^{n-i+1}(1) &= \text{const}.\end{aligned}$$

Kako je

$$\Delta t \sum_{i=1}^{n-1} p^{i'} \rho^{n-i} \int_{\sigma} K^{n-i+1}(1)$$

linearna kombinacija konstanti, i cijela suma je konstantna pa

$$\Delta t p^{n'} \int_{\sigma} K(1) = \text{const},$$

pa je $p^{n'} = \text{const}$ pa je p^n afina funkcija.

Uvrštavanjem $L(p^{n'})$ i pretpostavke da je $f \equiv 0$ u (2.3) dobivamo

$$\sum_{i=1}^{N_e} (\Delta t \int_{\sigma_i} K_i(1)) \int_0^{l_i} p_i^{n'} q_i' = \sum_{j=1}^{N_v} \Psi_j^n q_j |_{O_j} - \sum_{i=1}^{N_e} \Delta t \sum_{m=1}^{n-1} \int_{\sigma_i} K^{n-m+1}(1) \rho^{n-m} \int_0^{l_i} p_i^{m'} q_i'. \quad (2.8)$$

Kako je p^n afina funkcija na svakom bridu, to jest na svakom bridu je linearna kombinacija funkcija ϕ_{i1} i ϕ_{i2} , afinih funkcija takvih da je ϕ_{i1} 0 u jednom rubu i -tog brida, a 1 u drugom, a ϕ_{i2} obratno. Koeficijenti u takvom zapisu su upravo tlakovi u krajevima bridova, to jest u vrhovima grafa. Uvrštavanjem funkcija ϕ umjesto q u (2.8) i zbog pretpostavke da je p^n linearna kombinacija funkcija ϕ dobivamo sustav s N_v jednadžbi i N_v nepoznanica $A\overline{p}^n = b^n$, gdje je \overline{p}^n vektor tlakova u vrhovima u trenutku n . Matrica A je dobivena ulaganjem elementarnih matrica. Ako brid e_j ima vrhove O_k i O_l matrica je oblika

$$ELM(e_j) = \Delta t \int_{\sigma_j} K_j(1) \begin{bmatrix} \int_0^{l_j} \phi_k' \phi_k' & \int_0^{l_j} \phi_k' \phi_l' \\ \int_0^{l_j} \phi_l' \phi_k' & \int_0^{l_j} \phi_l' \phi_l' \end{bmatrix}.$$

Kada uvrstimo što su funkcije ϕ , dobivamo

$$ELM(e_j) = \frac{\Delta t}{l_j} \int_{\sigma_j} K_j(1) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ulaganje izvršavamo na sljedeći način:

$$A_{kk} \rightarrow A_{kk} + ELM(e_j)_{11},$$

$$A_{kl} \rightarrow A_{kl} + ELM(e_j)_{12},$$

$$A_{lk} \rightarrow A_{lk} + ELM(e_j)_{21},$$

$$A_{ll} \rightarrow A_{ll} + ELM(e_j)_{22}.$$

Za vektor desne strane b^n također promatramo doprinose brid po brid. Ponovno, neka brid e_j ima rubove O_k i O_l . Brid e_j tada ima doprinose samo u k -toj i l -toj, a doprinos je točno

$$\Delta t \sum_{m=1}^n \rho^{n-m} \int_{\sigma_j} K^{n-m+1}(1) (\overline{p}_k^m \int_0^{l_j} \phi_k' \phi_k' + \overline{p}_l^m \int_0^{l_j} \phi_l' \phi_l')$$

u k -toj, i

$$\Delta t \sum_{m=1}^n \rho^{n-m} \int_{\sigma_j} K^{n-m+1}(1) (\overline{p}_k^m \int_0^{l_j} \phi_l' \phi_k' + \overline{p}_l^m \int_0^{l_j} \phi_l' \phi_l')$$

u l -toj jednadžbi. Kada uvrstimo definicije funkcija ϕ dobivamo

$$\Delta t \sum_{m=i}^n \rho^{n-m} \int_{\sigma_j} K^{n-m+1}(1) (\overline{p}_k^m \frac{1}{l_j} + \overline{p}_l^m \frac{-1}{l_j})$$

to jest

$$\Delta t \sum_{m=i}^n \rho^{n-m} \int_{\sigma_j} K^{n-m+1}(1) (\overline{p}_k^m \frac{-1}{l_j} + \overline{p}_l^m \frac{1}{l_j}).$$

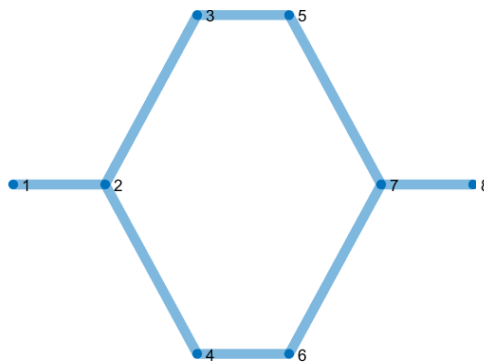
U vektor desne strane b^n potrebno je još dodati i $\Psi_l^n q|_{O_l}$. To jest, kada uvrstimo $q = \phi_k$ dobivamo Ψ_l^n ako je $k = l$, a 0 inače. Dakle b^n trebamo povećati u l -tom retku još za Ψ_l^n .

Primjetimo da je sustavom (2.1) tlak definiran do na konstantu, to jest ako je funkcija p rješenje sustava, rješenje je i funkcija $q = p + C$ za proizvoljni $C \in \mathbb{R}$. Ukoliko fiksiramo tlak u k -tom čvoru na 0, dobivamo jedinstveno rješenje. Dakle u k -tom retku \overline{p}^n je 0 za svaki n , a k -ti redak i k -ti stupac matrice A postavimo na 0, osim dijagonale na kojoj je 1. Kako je početna matrica bila slabo dijagonalno dominantna, što je jasno iz toga kako je konstruirana, transformirana matrica A je dijagonalno dominantna u barem jednom retku, a u svima je slabo dijagonalno dominantna, i uz to je ireducibilna, što se lagano vidi iz činjenice da je graf povezan, pa je matrica i regularna.

Drugi način zadavanja, analogan onom iz modela (1.1), bi bio da fiksiramo tlakove u rubnim čvorovima u svakom vremenskom trenutku. Matricu sustava generiramo sasvim analogno, isto kao i vektor desne strane, osim što ne dodajemo Ψ_l . Zatim, za svaki rubni vrh O_k , sa zadanim tlakom \overline{p}_k^n , od vektora b^n oduzimamo k -ti stupac matrice A pomnožen sa \overline{p}_k^n , a zatim k -ti redak i k -ti stupac matrice A postavimo na 0, a na mjesto A_{kk} postavimo 1. Nakon što na ovaj način prođemo sve vrhove u kojima je zadan tlak, u b^n u k -ti redak stavljamo \overline{p}_k^n . Ukoliko postoji barem jedan vrh u kojem je zadan tlak, ovako dobivena matrica A je regularna, sasvim analogno slučaju kada sustav zadajemo s protocima.

2.4 Primjeri

U ovoj cjelini prikazati ćemo rezultate nekih numeričkih simulacija metoda dobivenih u radu. Za imuliranje i prikazivanje podataka koristiti ćemo MATLAB, detalje možete naći u [6]. Sljedeće primjere promatrati ćemo na grafu G koji je pri-

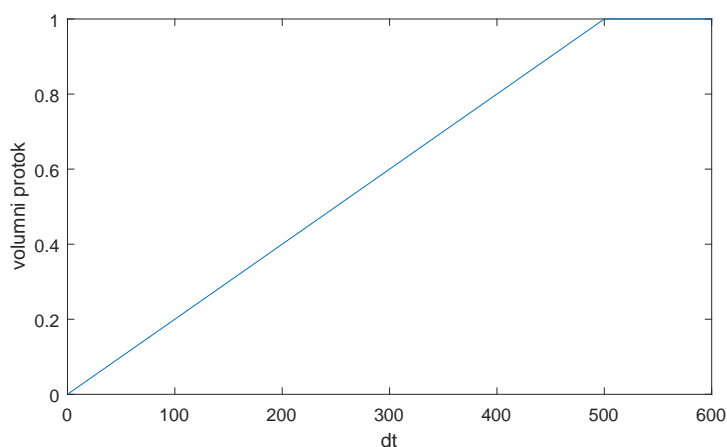


Slika 6: graf G

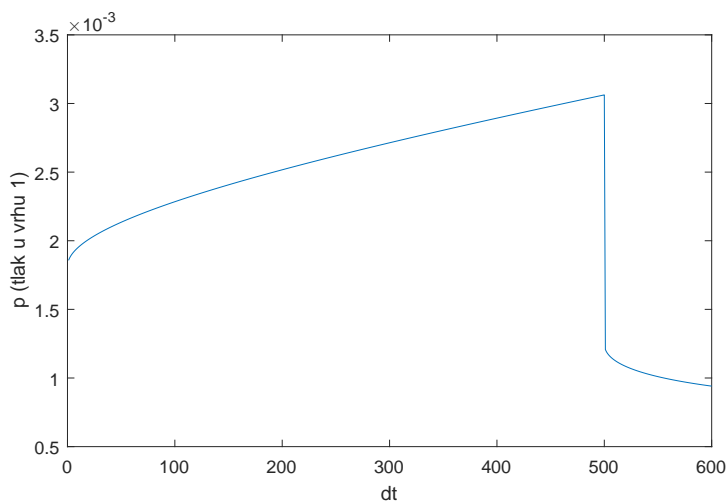
kazan na slici 6. Problem ćemo zadati sa protocima, dakle koristiti ćemo model (2.1). U svim primjerima će vrijediti $\Psi_l(t) = 0$ za $l = 2, \dots, 7$. Iz ovoga direktno slijedi $\Psi_8 = -\Psi_1$. Za vremenski korak Δt uzeti ćemo $\Delta t = 100$. Za vrh u kojem fiksiramo tlak odabrati ćemo vrh 7. Razvoj sutava promatrati ćemo u vremenskom intervalu $t \in (0, 60000)$, to jest sa 600 vremenskih koraka. Kao i u izvodu numeričkih metoda, pretpostaviti ćemo da je $f^i(x, t) \equiv 0$, $i = 1, \dots, N_e$.

Prvi primjer na grafu G : U ovom primjer funkciju $\Psi_1(t)$ definirati ćemo kao po neprekidnu funkciju koja je na intervalu $t \in (0, 50000)$ afina i zadovoljava $\Psi_1(0) = 0$ i $\Psi_1(50000) = 1$, a na intervalu $t \in (50000, 60000)$ je konstantna. Graf funkcije Ψ_1 možemo vidjeti na slici 7. Razvoj tlaka u vrhu 1 prikazan je na slici 8. Možemo primjetiti da, gotovo čim se funkcija Ψ_1 prestala mijenjati da je tlak u vrhu 1 značajno pao. Iz oblika grafa 8, to jest iz činjenice da je pad tlaka gotovo trenutno, možemo pretpostaviti da tlak ovisi o derivaciji funkcije Ψ_1 , a

kako je ta derivacija ima prekid u točki $t = 50000$ to jest t^{500} , aproksimacija tlaka gotovo da ima prekid u istoj točki. Na slici 9 vidimo tlakove na cijelom grafu u trenucima $dt = 1, 100, 501$ i 600 . Boja označava srednji tlak na cijevi. Možemo primjetiti značajan pad tlakova u čitavom sustavu između t^{500} i t^{501} , to jest čitav sustav gotovo trenutno osjeća promjenu u ponašanju funkcija Ψ_1 i Ψ_8 .

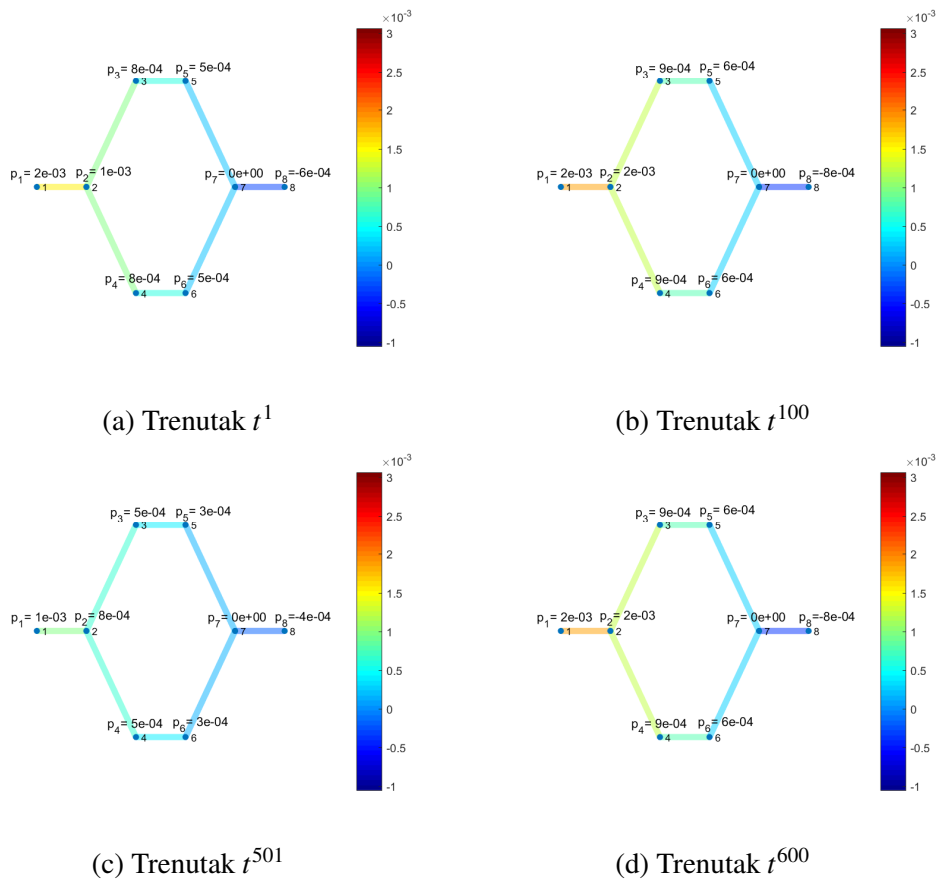


Slika 7: Graf funkcije Ψ_1



Slika 8: graf tlaka u vrhu 1

Drugi primjer na grafu G: U ovom primjer funkciju $\Psi_1(t)$ definirati ćemo

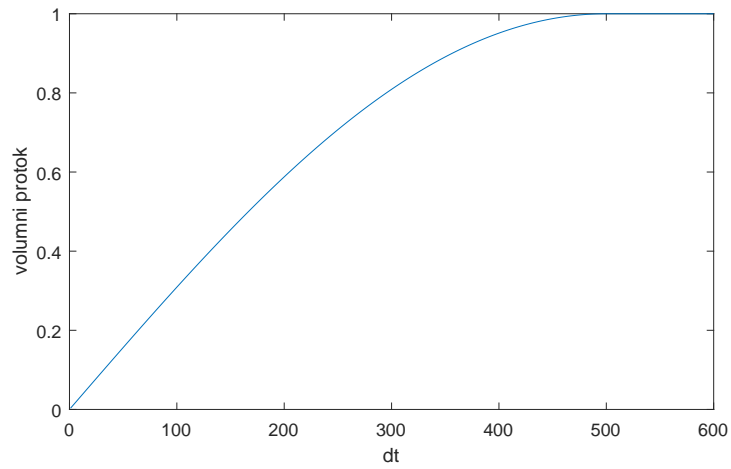


Slika 9: Raspored tlakova u nekim trenucima

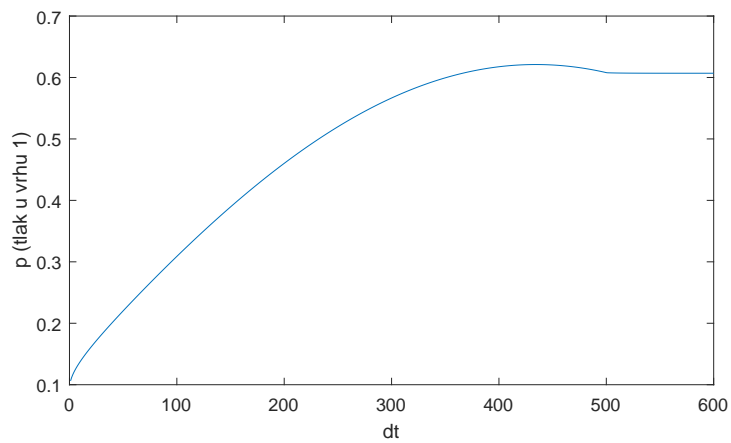
kao po neprekidnu funkciju koja je na intervalu $t \in (0, 50000)$ zadana sa

$$\Psi_1(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{500}\right),$$

a na $(50000, 60000)$ je konstanta 1. Graf funkcije Ψ_1 možemo vidjeti na slici 10. Promotrimo i tlak u vrhu 1, čiji graf možemo vidjeti na slici 11.

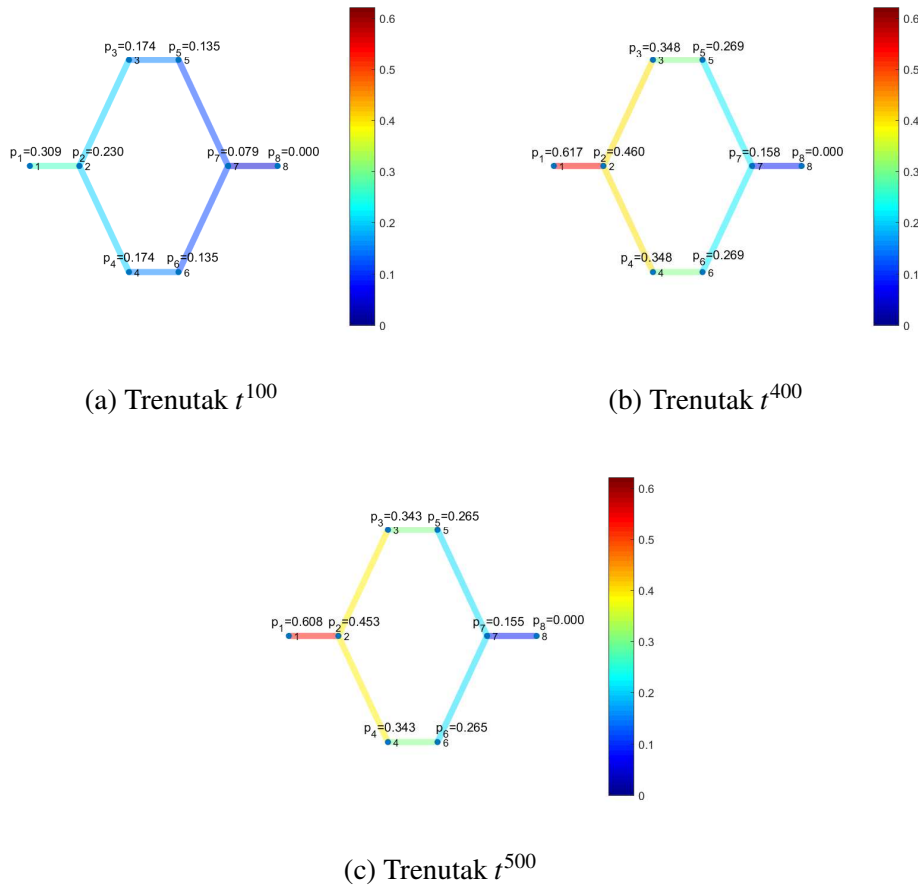


Slika 10: Graf funkcije Ψ_1



Slika 11: graf tlaka u vrhu 1

Svi primjeri ukazuju na vezu između tlaka i derivacije funkcije Ψ , što nije vidljivo direktno iz modela. Što je veća glatkoća Ψ to je veća glatkoća funkcije tlaka.



Slika 12: Raspored tlakova u nekim trenutcima

3 Zaključak

Čak i uz pretpostavke koje uvelike pojednostavljuju problem, kao što je pretpostavka da je $f \equiv 0$, ili pretpostavke da je dovoljno riješiti jednodimenzionalni problem, dobiveni modeli imaju kompleksno ponašanje, čak i na relativno jednostavnim grafovima. Za očekivati je da će uz oslabljene pretpostavke, primjerice uz dozvoljavanje linijskoj gustoći sile da bude konstantna, a ne samo 0, ponašanje sustava biti još kompleksnije. Kako je u članku [10] model (2.1) izveden u mnogo većoj općenitosti nego je korišteno u ovom radu, on je vrlo pogodan za daljnje istraživanje numeričkih metoda za problem toka u sustavu dugih tankih cijevi.

Literatura

- [1] I. Aganović, K. Veselić, Linearne diferencijalne jednačbe, Element, Zagreb, 1997.
- [2] Blanc, F.; Gipouloux, O.; Panasenko, G.; Zine, A. M., Asymptotic analysis and partial asymptotic decomposition of domain for Stokes equation in tube structure. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 9 (1999), no. 9, 1351–1378.
- [3] V. Hari i dr: Numerička analiza: osnovni udžbenik, skripta PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2004.
- [4] Jurak, M., Praktikum primijenjene matematike II, skripta, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2006.
- [5] Marušić-Paloka, Eduard, Rigorous justification of the Kirchhoff law for junction of thin pipes filled with viscous fluid. *Asymptot. Anal.* 33 (2003), no. 1, 51–66.
- [6] Matlab Help Files. Mathworks, Cambridge MA. 2002.
- [7] Maz'ya, V. G.; Sluski, A. S., Asymptotic analysis of the Navier-Stokes system in a plane domain with thin channels. *Asymptot. Anal.* 23 (2000), no. 1, 59–89.
- [8] Panasenko, Grigori, Asymptotic expansion of the solution of Navier-Stokes equation in a tube structure, *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie II b* 326 (1998), p. 867-872.
- [9] Panasenko, Grigori, Asymptotic expansion of the solution of Navier-Stokes equation in tube structure and partial asymptotic decomposition of the domain. *Appl. Anal.* 76 (2000), no. 3-4, 363–381.
- [10] Panasenko, Grigory; Pileckas, Konstantin, Asymptotic analysis of the non-steady Navier-Stokes equations in a tube structure. I. The case without boundary-layer-in-time. *Nonlinear Anal.* 122 (2015), 125–168.

- [11] Panasenko, Grigory; Pileckas, Konstantin, Asymptotic analysis of the non-steady Navier-Stokes equations in a tube structure. II. General case. *Nonlinear Anal.* 125 (2015), 582–607.
- [12] Panasenko, Grigory; Pileckas, Konstantin, Asymptotic analysis of the non-steady viscous flow with a given flow rate in a thin pipe. *Appl. Anal.* 91 (2012), no. 3, 559–574.
- [13] Panasenko, Grigory; Pileckas, Konstantin, Divergence equation in thin-tube structures. *Appl. Anal.* 94 (2015), no. 7, 1450–1459.
- [14] Panasenko, Grigory; Pileckas, Konstantin, Flows in a tube structure: equation on the graph. *J. Math. Phys.* 55 (2014), no. 8, 081505, 11 pp.
- [15] Tambača, Josip; Velčić, Igor, Derivation of the nonlinear bending-torsion model for a junction of elastic rods. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 142 (2012), no. 3, 633–664.
- [16] N. Antičić, M. Vrdoljak, *Mjera i integral*, PMF-Matematički odjel, 2001.

SAŽETAK

Ključne riječi: cjevovod, tok nestlačivog Newtonovog fluida, jednodimenzionalni model, graf, numerička aproksimacija, metoda konačnih elemenata.

U ovom radu donosimo numeričku aproksimaciju toka nestlačivog Newtonovog fluida kroz sustav cijevi. Problem je modeliran jednodimenzionalnim modelom koji je zadan na grafu koji je matematička idealizacija sustava cijevi (cjevovoda), a modeliran je i stacionarni nestacionarni slučaj.

U stacionarnom slučaju problem se svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi u unutrašnjim vrhovima grafa, s matricom sustava koja je regularna, što daje jedinstvenost rješenja sustava. U nestacionarnom slučaju problem je dan sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi za tlakove na bridovima kao nepoznanice, pri čemu je vremenska komponenta u problem ulazi kroz pomoćni problem na presjeku cijevi koji definira operator u jednadžbi za tlakove. Spojevi su modelirani Kirchhoffovim uvjetima kontakta, dakle tlakovi su neprekidni, te je zadovoljen uvjet nestlačivosti, koliko fluida uđe u spoj, toliko i izađe. Pomoćna parabolička zadaća na presjeku riješena je za krug metodom konačnih elemenata. Uz pretpostavku da je vanjska sila u problemu jednaka nula, tlakovi na bridovima su linearni. Stoga metoda konačnih elemenata daje točno rješenje problema na grafu s matricom sustava koja je povoljne strukture za rješavanje. Numeričke simulacije sugeriraju složenost interakcije koja se javlja u cjevovodima.

SUMMARY

Keywords: pipe network, flow of incompressible Newtonian fluid, one-dimensional model, graph, numeric approximation, finite element method.

In this paper we create a numeric approximation of flow of an incompressible Newtonian fluid in a network of long thin pipes. The problem is modelled with a one dimensional model on a graph which is a mathematical idealisation of the pipe network. We have models for both stationary and non-stationary cases.

In the stationary case the problem can be reduced to solving linear equations on the inner vertices of the graph. The matrix given by the system is regular which guarantees uniqueness of the solution. In the non-stationary case, the problem is given as a system of ordinary differential equations, with the time component entering the problem through an auxiliary problem given on the cross section, which defines the operator in the equation for pressures. The connections of pipes are modelled with Kirchhoffs's contact law, so pressures are continuous, and the fluid is incompressible, so as much fluid enters the junction must exit it. The auxiliary parabolic problem on the cross section is solved for a circle with the finite element method. Given the assumption that there are no outside forces, pressures are linear within each pipe. Because of this the finite element method gives an exact solution to the problem on the graph, with a matrix whose structure is favourable for solving the system. Numeric simulations suggest the complexity of interactions that happen in pipe networks.