

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Antoliš, Mario Stipčić

**Primjene slučajnih dijadskih sistema na
dekompozicije funkcija i operatora**

Zagreb, 2015.

Ovaj rad izrađen je na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu - Matematičkom odsjeku pod vodstvom doc. dr. sc. Vjekoslava Kovača (PMF - Matematički odsjek, Zavod za teoriju vjerojatnosti i matematičku statistiku) i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2014./2015.

Pregled oznaka

λ Lebesgueova mjera na \mathbb{R}^d

Γ gama funkcija dana s $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

ω_d volumen d -dimenzionalne kugle u \mathbb{R}^d radijusa 1; vrijedi $\omega_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}$

$K(x_0, r)$ d -dimenzionalna (otvorena) kugla oko točke x_0 radijusa r ;
 $K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| < r\}$

$\bar{K}(x_0, r)$ d -dimenzionalna zatvorena kugla oko točke x_0 radijusa r ;
 $\bar{K}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| \leq r\}$

$S(x_0, r)$ $(d - 1)$ -dimenzionalna sfera oko točke x_0 radijusa r ; $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| = r\}$

p.v. glavna vrijednost integrala; za funkciju f sa singularitetom u točki $y \in \mathbb{R}^d$ vrijedi p.v. $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{K(y, \frac{1}{\epsilon}) \setminus K(y, \epsilon)} f(x) dx$

\bar{f} srednja vrijednost integrala; za funkciju f i za konačan skup $K \subseteq \mathbb{R}^d$ vrijedi $\bar{f} = \frac{1}{\lambda(K)} \int_K f(x) dx$

supp f nosač funkcije f ; najmanji zatvoreni skup u \mathbb{R}^d izvan kojeg je $f \equiv 0$,

$$\text{odnosno } \text{supp } f = \bigcap_{\substack{K \subseteq \mathbb{R}^d \\ K \text{ zatvoren} \\ \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\} \subseteq K}} K$$

- $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ prostor neprekidno diferencijabilnih realnih funkcija na \mathbb{R}^d s kompaktnim nosačem
- θ ishodište $(0, 0, \dots, 0)$ u \mathbb{R}^d
- $L^p(\mathbb{R}^d)$ prostor svih funkcija $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ za koje vrijedi $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < +\infty$
- $L_{c,0}^p(\mathbb{R}^d)$ potprostor funkcija iz $L^p(\mathbb{R}^d)$ s kompaktnim nosačem čiji je integral po \mathbb{R}^d jednak nuli, tj. $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 0$.
- $*$ operacija konvolucije funkcija; za $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ i za $x \in \mathbb{R}^d$ vrijedi $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy$
- $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ norma u prostoru funkcija iz $L^p(\mathbb{R}^d)$ za $p \in [1, +\infty]$; za $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ za $1 \leq p < +\infty$ te $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \inf \{M > 0 : \lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > M\}) = 0\}$ za $p = \infty$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ skalarni produkt u vektorskom prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$; za funkcije $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x) dx$
- $[\cdot]$ najmanji cijeli broj veći ili jednak od danog broja; za $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $[x] = \min \{n \in \mathbb{N} : n \geq x\}$
- $\lfloor \cdot \rfloor$ najveći cijeli broj manji ili jednak od danog broja; za $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$
- $f^{(n)}$ n -ta derivacija funkcije f
- $|\cdot|$ kardinalni broj, tj. broj elemenata konačnog skupa
- $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ euklidska norma u prostoru \mathbb{R}^d ; za $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ vrijedi $\|x\|_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$

Sadržaj

Pregled oznaka

Sadržaj

Uvod	1
1. Calderón-Zygmundovi operatori	7
1.1. Definicija i osnovna svojstva Calderón-Zygmundovih operatora	7
1.2. Primjeri Calderón-Zygmundovih operatora	18
2. Familija slučajnih dijadskih kocki	32
2.1. Definicija slučajnih dijadskih kocki	32
2.2. Vjerojatnosna struktura	42
3. Haarov sistem funkcija nad familijom slučajnih dijadskih kocki	48
3.1. Haarove funkcije	48
3.2. Razvoj funkcija u Haarovoj bazi	68
4. Slučajna dijadska dekompozicija Calderón-Zygmundovih operatora	84
4.1. Rastav operatora po slučajnim dijadskim kockama	84
4.2. Ocjene na faktore u pojedinim sumama	98
4.3. Konačni rezultat i generalna ocjena	114
5. Obrat teorema o dijadskoj dekompoziciji	119

5.1. Iskaz i dokaz teorema	119
6. Ortonormirana valićna baza	131
6.1. Definicija i osnovna svojstva	131
7. Zaključak: Analiza i primjena dobivenih teorijskih rezultata	140
7.1. Usporedba brzine konvergencije	140
7.2. Hilbertova transformacija na Haarovom sistemu funkcija	145
Sažetak	161
Summary	163
Bibliografija	165

Uvod

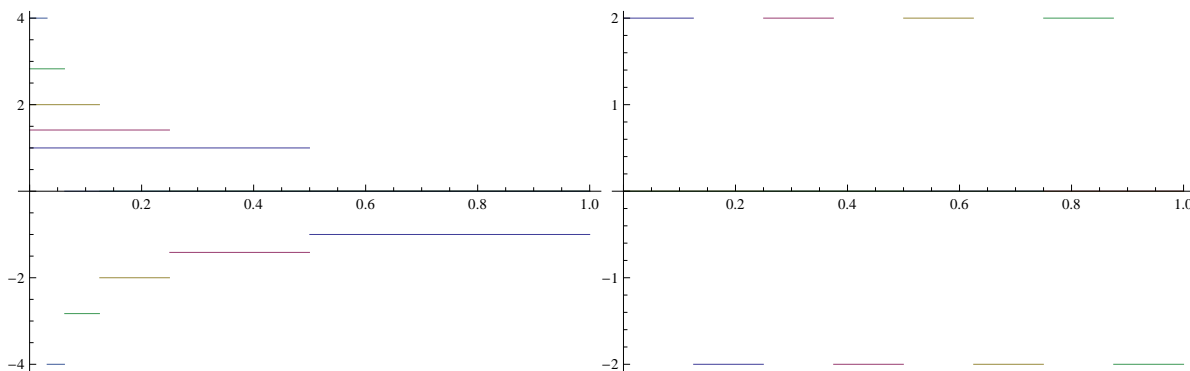
U 20. stoljeću pojavljuje se potreba za obradom različitih vrsta signala, koji mogu biti zvuk, slika, video, itd. Za njihov prijenos ili obradu je ključna njihova efikasna pohrana u računalu. Prirodno se postavlja pitanje koliko se dobro neprekidni signal može aproksimirati konačnim brojem informacija. Pritom je ideja minimizirati broj podataka iz kojih bi se i dalje mogao dovoljno precizno rekonstruirati originalni signal. Osim signala moguće je promatrati i transformacije koje prevode jedan signal u neki drugi, kao što su npr. razni filtri ili modulacije frekvencija. Za njih je problem pohrane još mnogo složeniji i slabo zastupljen u postojećoj literaturi.

Glavni pristup rješavanju spomenutog problema je prikaz signala, odnosno transformacije signala, pomoću linearnih kombinacija odabranih bazičnih funkcija ili operatora. Pritom se koeficijenti u zapisu računaju kao integrali produkta signala s bazičnim funkcijama. Ukoliko taj beskonačni niz koeficijenata dovoljno brzo opada prema nuli, razumno je očekivati da ćemo pohranom konačno mnogo tih koeficijenata moći aproksimirati signal, odnosno transformaciju signala. Ovisno o željenoj preciznosti aproksimacije i o mogućnostima pohrane podataka u računalu, potrebne su nam bazične funkcije s brzo opadajućim koeficijentima. Time je rješavanje problema analize signala svedeno na traženje bazičnih funkcija željenih svojstava.

Prije svega napomenimo da ovaj rad prvenstveno pripada području teorijske matematike pa glavni naglasak stavljamo na izvođenje egzaktnih teorema. Iz tog razloga preferiramo strogi matematički pojam *funkcije* kao apstrakciju raznorodnih signala, dok tran-

sformacije signala egzaktno nazivamo *operatori*. Pohranu funkcija ili operatora naprosto proučavamo u kontekstu njihove apstraktne dekompozicije. Radi toga dajemo pregled isključivo postojeće teorijske literature, s kojom na kraju uspoređujemo rezultate našeg istraživanja. Ipak, zbog vrlo izglednih mogućnosti primjene rezultata u konkretnoj pohrani određenog tipa operatora, svu teoriju potkrepljujemo brojim numeričkim primjerima i simulacijama.

Jedno od ranijih rješenja predložio je Alfred Haar [5] uvodeći bazične funkcije koje se po njemu nazivaju *Haarovim funkcijama*. Primjeri tih funkcija prikazani su na slici 1, a njihova osnovna svojstva dat ćemo u 3. poglavlju.

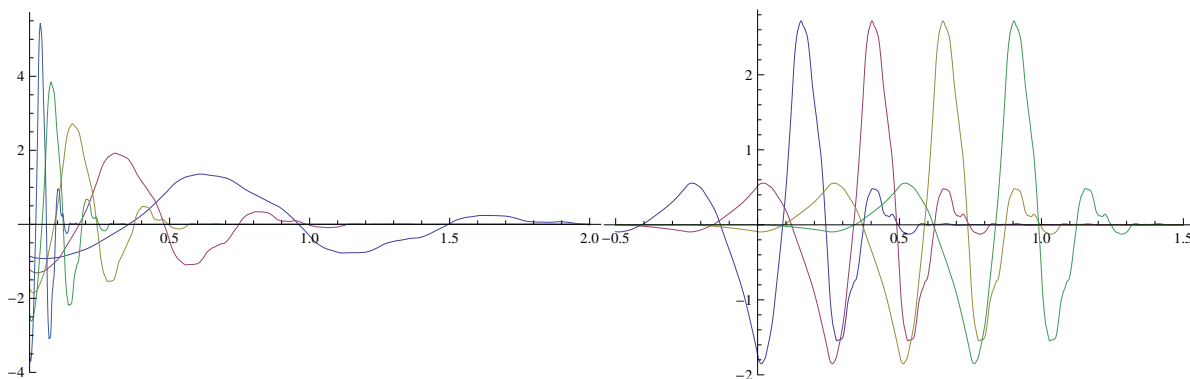


Slika 1: Haarove funkcije.

Riječ je o jednostavnim step funkcijama koje poprimaju najviše po tri različite vrijednosti. Takve funkcije najčešće, pa tako i u ovom radu, promatramo na dijadskim kockama definiranim u 2. poglavlju. S takvim funkcijama jednostavno je računati koeficijente, budući da se oni svode na integrale funkcija po vrlo specijalnim kockama. Međutim, kako su Haarove funkcije prekidne (tj. imaju skokove), u slučaju neprekidnih signala ne možemo uvijek očekivati dovoljno dobru aproksimaciju, što smo ilustrirali u primjerima 3.10 i 3.11.

Spomenuta poteškoća je povijesno dovela do ideje korištenja glatkih bazičnih funkcija umjesto Haarovih funkcija. Pritom je praktično zahtijevati da se te bazične funkcije (kao i Haarove funkcije) također dobivaju translacijama i dilatacijama neke početne

funkcije. Ukoliko je takav sistem ortonormirana baza od $L^2(\mathbb{R})$, nazivamo ga *valićnom bazom*. Egzistenciju takvih glatkih baza s kompaktnim nosačima prva je dokazala Ingrid Daubechies. Iskaz tog rezultata navodimo u ovom radu kao teorem 6.5, a dokaz se može pronaći u [3]. Ovaj rezultat jedan je od ključnih rezultata u teoriji valića, odnosno grani matematike koja se razvila s ciljem rješavanja ovog i sličnih problema. Primjeri Daubechiesinih funkcija prikazani su slikom 2.



Slika 2: Daubechiesine funkcije.

Ovaj pristup se neko vrijeme smatrao rješenjem problema analize signala i transformacija signala, ali su nakon nekog vremena uočene poteškoće koje i dalje nisu riješene. Naime, za ovakve funkcije ne postoje eksplicitne formule, što znatno otežava određivanje koeficijenata, a čak je i za numeričku aproksimaciju potrebna znatno veća vremenska složenost nego što je poželjno. Stoga se stvara potreba za konstrukcijom bazičnih sistema funkcija koji će zadržati prednosti oba navedena pristupa.

Jedna prilično nova ideja je promatranje Haarovih funkcija, ali ovoga puta na slučajno pomaknutim dijadskim kockama. U ovisnosti o slučajnim pomacima, takve prikaze “uprosječujemo” vjerojatnosnim modelom, čime nastojimo izgladiti oštre rubove Haarovih funkcija. Tim pristupom očekujemo da slučajnost može nadomjestiti glatkoću valićne baze, a da je i dalje zadržana jednostavnost računa a Haarovim funkcijama. Ta teza, koju ne nalazimo dovoljno naglašenu u postojećoj literaturi, bila je glavna motivacija za nastanak ovog rada.

Ideju uvođenja slučajnosti, odnosno teorije vjerojatnosti, u valićnoj analizi prvi put su iznijeli Nazarov, Treil i Volberg u [12], s tim da je nisu koristili za rješavanje problema dekompozicija funkcija i operatora. Tek je Hytönen nastojao primijeniti slučajne dijadske kocke u tom problemu. U svom je članku [8] uspio dati potrebnu dekompoziciju i to za klasu operatora koje nazivamo *Calderón-Zygmundovi operatori*, a detaljno ćemo ih proučiti u 1. poglavlju. Ipak, članak [8] i njegova kasnija pojednostavljenja poput [7] se nisu bavili mnogim tehničkim aspektima tog prikaza. S numeričkog aspekta postavlja se pitanje ekonomičnosti reprezentacije u smislu brzine opadanja koeficijenata.

Kao jedan od glavnih doprinosa našeg rada je eksplicitno ocjenjivanje koeficijenata u Hytönenovom prikazu. Osim toga, identificirat ćemo sve članove koji se pojavljuju u spomenutoj dekompoziciji te istaknuti sve parametre o kojima ovise veličine koeficijenata. Naš dokaz Hytönenovog rezultata je kvantitativan, što znači da eksplicitno računamo ocjene na koeficijente i pripadne konstante, za koje se u [7] samo navodi da postoje. Štoviše, u 4. poglavlju detaljno i precizno izvodimo ocjene čak i u posebnim slučajevima koji se u tom članku ne navode, a zahtijevaju nešto drugačiji pristup.

Konačno, u 7. poglavlju izvedene ocjene uspoređujemo s ocjenama koje su Coifman i Meyer [2] izveli za glatku valićnu bazu te zaključujemo da slučajnost doista jest dovoljno dobra alternativa glatkoj valićnoj bazi. Pritom takvom metodom dobivamo samo neznatno sporiju brzinu opadanja koeficijenata, ali znatnu vremensku uštedu prilikom računanja. Na kraju, pomoću programskog paketa Wolfram Mathematica [18] računamo ocjene za Hilbertovu transformaciju, kao poseban slučaj operatora definiranog u 1. poglavlju. Na tom numeričkom primjeru zaključujemo da je primjena slučajnih dijadskih kocki poboljšanje u odnosu na standardne dijadske kocke, budući da dobivamo znatno bolje opadanje koeficijenata.

Navedimo još kratki pregled materijala iznesenog u ovom radu.

- U 1. poglavlju smo u definiciji 1.3 uveli centralni objekt ovog rada, odnosno Calderón-Zygmundove operatore i u napomeni 1.2 dokazali neke dovoljne uvjete

da bi operator bio Calderón-Zygmundov. Također smo na tri primjera argumentirali i ilustrirali uvjete iz definicije, a za Hilbertovu transformaciju, koja je ujedno i najreprezentativniji predstavnik klase Calderón-Zygmundovih operatora, dokazali neka osnovna svojstva u korolaru 1.6 te izveli kako taj operator djeluje na neke posebne funkcije.

- U 2. poglavlju definirali smo standardnu familiju dijadskih kocki te na primjeru 2.1 ilustrirali, a kasnije u lemi 2.3 i formalno dokazali osnovna svojstva te strukture. U nastavku smo definirali familiju slučajnih dijadskih kocki, a u primjeru 2.4 objasnili povezanost i razlike sa standardnim dijadskim kockama. Nadalje smo definirali što znači da je kocka “dobra” i, nakon što smo definirali odgovarajuću vjerojatnosnu strukturu, u lemi 2.8 pokazali da je vjerojatnost da je kocka dobra strogo pozitivna.
- U 3. poglavlju definirali smo Haarove funkcije. U primjeru 3.4 smo intuitivno objasnili zašto je razumno pretpostaviti da oni čine ortonormiranu bazu prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$, što smo kasnije formalno dokazali. Dokaz smo naveli za opći slučaj d -dimenzionalnog prostora u teoremu 3.6, ali i na intuitivno razumljivijem primjeru 3.7 dvodimenzionalnog prostora, odnosno ravnine. Koristeći svojstva ortonormirane baze odredili smo numeričke aproksimacije nekih funkcija koristeći standardnu familiju dijadskih kocki i napravili usporedbu između razvoja u standardnoj i slučajnoj familiji dijadskih kocki. U prva tri poglavlja definirali smo sve potrebne strukture te dokazali i na primjerima ilustrirali sva potrebna svojstva kako bismo se mogli okrenuti pokazivanju centralnog rezultata ovog rada.
- U 4. poglavlju iskazali smo teorem 4.1 o slučajnoj dijadskoj dekompoziciji Calderón-Zygmundovih operatora. Zatim smo pokazali propoziciju 4.4, koja je ključna u dokazivanju tvrdnje teorema i koja pokazuje nužnost vjerojatnosne strukture za dobivanje traženog rezultata. Nakon toga smo dokaz teorema nastavili rastavlja-

njem na nekoliko slučajeva, odnosno suma, ovisno o međusobnom položaju promatranih kocki I i J . U nastavku smo svaku od suma raspisali i egzaktno ocijenili, a koeficijente eksplicitno izračunali. Pokazali smo konvergenciju koeficijenata koja se tvrdi u teoremu i time ga u potpunosti dokazali.

- U 5. poglavlju dokazali smo obrat teorema o dekompoziciji Calderón-Zygmundovih operatora, kojeg je prvi iznio Orponen [13], čime smo zaokružili teorijski aspekt ove teme.
- U 6. poglavlju navode se definicije i svojstva valičnih baza, jer nam one trebaju u svrhu usporedbe u posljednjem poglavlju.
- U 7. (i finalnom) poglavlju napravili smo usporedbu rezultata koje smo dobili uz Haarove funkcije na slučajnoj familiji dijadskih kocki i rezultata iz literature o odgovarajućim tvrdnjama za glatke valice. U nastavku smo na primjeru Hilbertove transformacije prikazali kako se ovaj rezultat može iskoristiti u konkretnoj situaciji. Ovo poglavlje ujedno služi i kao svojevrsni zaključak našeg rada.

Poglavlje 1

Calderón-Zygmundovi operatori

U ovom poglavlju definirat ćemo centralni objekt koji ćemo proučavati u radu te navesti i proučiti neke od glavnih primjera. Riječ je o posebnoj klasi neprekidnih linearnih operatora koji se zovu *Calderón-Zygmundovi operatori*.

1.1. Definicija i osnovna svojstva Calderón-Zygmundovih operatora

Prvo je potrebno definirati poseban tip jezgri, odnosno funkcija pomoću kojih se ovi operatori prikazuju u izvjesnom integralnom obliku.

Definicija 1.1. *Calderón-Zygmundova jezgra* s parametrom $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ je funkcija $K : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^d\} \rightarrow \mathbb{R}$ za koju postoje konstante $C_0, C_1 \in \langle 0, +\infty \rangle$ takve da za sve $x, y, x', y' \in \mathbb{R}^d, x \neq y, x' \neq y, x \neq y'$ vrijedi

1. $|K(x, y)| \leq \frac{C_0}{\|x - y\|^d},$
2. $|K(x, y) - K(x', y)| \leq C_1 \frac{\|x - x'\|^\alpha}{\|x - y\|^{d+\alpha}}$ ako je $\|x - x'\| \leq \frac{\|x - y\|}{2},$
3. $|K(x, y) - K(x, y')| \leq C_1 \frac{\|y - y'\|^\alpha}{\|x - y\|^{d+\alpha}}$ ako je $\|y - y'\| \leq \frac{\|x - y\|}{2}.$

U nastavku ćemo za Calderón-Zygmundovu jezgru K najmanje pripadne konstante C_0 i C_1 označavati redom s $\|K\|_{CZ0}$ i $\|K\|_{CZ1}$.

Primijetimo sljedeće: ako je K Calderón-Zygmundova jezgra s parametrom $\alpha_0 \in \langle 0, 1 \rangle$, tada je K ujedno i Calderón-Zygmundova jezgra s parametrom α , za svaki $0 < \alpha \leq \alpha_0$.

Zapravo, za takav α dovoljno je provjeriti da vrijede 2. i 3. uvjet, uz pretpostavku da isti uvjeti vrijede za dani α_0 . Ako su $x, x', y \in \mathbb{R}^d$ takvi da je $x \neq y, x' \neq y$ i $\|x - x'\| \leq \frac{\|x - y\|}{2}$, tada vrijedi $\frac{\|x - x'\|}{\|x - y\|} \leq \frac{1}{2} < 1$, a onda, kako je $\alpha \leq \alpha_0 \leq 1$, imamo $\left(\frac{\|x - x'\|}{\|x - y\|}\right)^{\alpha_0} \leq \left(\frac{\|x - x'\|}{\|x - y\|}\right)^\alpha$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K(x', y)| &\leq C_1 \frac{\|x - x'\|^{\alpha_0}}{\|x - y\|^{d+\alpha_0}} = \frac{C_1}{\|x - y\|^d} \left(\frac{\|x - x'\|}{\|x - y\|}\right)^{\alpha_0} \\ &\leq \frac{C_1}{\|x - y\|^d} \left(\frac{\|x - x'\|}{\|x - y\|}\right)^\alpha = C_1 \frac{\|x - x'\|^\alpha}{\|x - y\|^{d+\alpha}}. \end{aligned}$$

Treći uvjet slijedi analognim raspisom. Dakle, za svaki $\alpha \in \langle 0, \alpha_0 \rangle$ je K uistinu Calderón-Zygmundova jezgra s parametrom α .

Primjeri koje ćemo kasnije proučavati bit će Calderón-Zygmundove jezgre s parametrom $\alpha_0 = 1$, pa će ujedno biti i Calderón-Zygmundove jezgre s parametrom $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$.

Postoji koristan dovoljan uvjet da K zadovoljava uvjete 2. i 3 uz $\alpha = 1$ i neke dodatne pretpostavke na K .

Napomena 1.2. Ako je $K \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^d\})$ preslikavanje koje za neke konstante $C_0, C'_1 \in \langle 0, +\infty \rangle$ i za sve $x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y$ zadovoljava

$$1.' \quad |K(x, y)| \leq \frac{C_0}{\|x - y\|^d},$$

$$2.' \quad \|\nabla_x K(x, y)\| \leq \frac{C'_1}{\|x - y\|^{d+1}},$$

$$3.' \quad \|\nabla_y K(x, y)\| \leq \frac{C'_1}{\|x - y\|^{d+1}},$$

tada je K Calderón-Zygmundova jezgra s parametrom 1, tj. zadovoljava gore navedene ocjene 1., 2. i 3. Naime, jasno je da 1.' povlači 1. jer su to zapravo isti uvjeti. Pokažimo

da uvjet 2.' povlači uvjet 2., a onda će analogno uvjet 3.' povlačiti uvjet 3. Neka je $x' \in \mathbb{R}^d$, $x' \neq y$ i neka vrijedi $\|x - x'\| \leq \frac{\|x - y\|}{2}$. Budući da je K neprekidno diferencijabilna funkcija, po teoremu srednje vrijednosti (kojeg možemo pronaći u [11]) postoji $t' \in [0, 1]$ takav da vrijedi

$$K(x, y) - K(x', y) = \nabla_x K(t'x + (1 - t')x', y) \cdot (x - x'),$$

pri čemu je s desne strane jednakosti dan skalarni produkt dvaju vektora iz \mathbb{R}^d . Primjenom Cauchyjeve nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K(x', y)| &= |\nabla_x K(t'x + (1 - t')x', y) \cdot (x - x')| \\ &\leq \|\nabla_x K(t'x + (1 - t')x', y)\| \|x - x'\| \\ &\leq \max_{t \in [0, 1]} \|\nabla_x K(tx + (1 - t)x', y)\| \|x - x'\| \\ &\stackrel{2'}{\leq} \frac{C'_1 \|x - x'\|}{\|tx + (1 - t)x' - y\|^{d+1}} \leq 2^{d+1} C'_1 \frac{\|x - x'\|}{\|x - y\|^{d+1}}. \end{aligned}$$

Pritom posljednja nejednakost slijedi koristeći pretpostavku $\|x - x'\| \leq \frac{\|x - y\|}{2}$ te nejednakost trokuta. Naime,

$$\begin{aligned} \|tx + (1 - t)x' - y\| &= \|(1 - t)x + (1 - t)x' + tx - y\| \geq \|x - y\| - (1 - t)\|x - x'\| \\ &\stackrel{t \geq 0}{\geq} \|x - y\| - \|x - x'\| \geq \|x - y\| - \frac{\|x - y\|}{2} = \frac{\|x - y\|}{2}. \end{aligned}$$

Sada uvjet 2. slijedi uz konstantu $C_1 := 2^{d+1} C'_1$.

Dakle, vrijede sva tri uvjeta iz definicije pa je K uistinu Calderón-Zygmundova jezgra s parametrom 1.

Definicija 1.3. Za neprekidni linearni operator $T : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ kažemo da je *Calderón-Zygmundov operator* ako postoji Calderón-Zygmundova jezgra $K : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^d\} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da za svaku $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ s kompaktnim nosačem i za

svaki $x \in \mathbb{R}^d$ vrijedi

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y)f(y)dy.$$

Koristeći Fubinijev teorem ([1, pogl. 5]) jednakost iz ove definicije dobivamo i u sljedećem obliku: ako su $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ funkcije s disjunktним kompaktnim nosačima, tada vrijedi

$$\langle Tf, g \rangle = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K(x, y)f(y)g(x)dx dy.$$

Integral s desne strane jednakosti je dobro zadan jer se izraz $K(x, y)f(x)g(y)$ integrira po skupu $\text{supp}f \times \text{supp}g$, a budući da je $\text{supp}f \cap \text{supp}g = \emptyset$, za $(x, y) \in \text{supp}f \times \text{supp}g$ vrijedi $x \neq y$, a K je definiran u točki (x, y) .

Ako je T Calderón-Zygmundov operator, tada je jezgra K iz definicije jednoznačno određena. Naime, ako su K_1 i K_2 pripadne jezgre od T , tada vrijedi

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} (K_1(x, y) - K_2(x, y)) f(y)dy, \text{ za sve } f \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ i za sve } x \notin \text{supp}f.$$

Iz ove jednakosti slijedi $K_1(x, y) = K_2(x, y)$, za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, x \neq y$, pa prema tome vrijedi $K_1 = K_2$.

Dakle, za Calderón-Zygmundov operator T pripadnu jezgru K iz definicije nazivamo *jezgrom operatora T* i označavamo s K_T .

Obratno, različiti Calderón-Zygmundovi operatori ipak mogu imati istu jezgru. Primjerice, i nul-operator i operator identiteta imaju nul-jezgru. Naime, ako su $T_1, T_2 : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ dani s $T_1(f) \equiv 0$ i $T_2(f) = f$ za svaki $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, te ako je $K : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^d\} \rightarrow \mathbb{R}$ dana s $K(x, y) = 0$ za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, x \neq y$,

tada za sve $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ međusobno disjunktih nosača vrijedi

$$\langle T_1 f, g \rangle = \langle 0, g \rangle = 0 = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K(x, y) f(x) g(y) dx dy,$$

kao i

$$\langle T_2 f, g \rangle = \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx \stackrel{\text{supp} f \cap \text{supp} g = \emptyset}{=} 0 = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K(x, y) f(x) g(y) dx dy.$$

Domena Calderón-Zygmundovog operatora T je prostor funkcija $L^2(\mathbb{R}^d)$. No, u ovom radu trebat će nam i da je T definiran nad konstantnom jediničnom funkcijom, odnosno želimo da je $T\mathbb{1}$ dobro definirano, pri čemu je $\mathbb{1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija dana s $\mathbb{1}(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}^d$ (uočimo, $\mathbb{1} \notin L^2(\mathbb{R}^d)$).

Neka je $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_c^1(\mathbb{R}^d)$ niz funkcija koji zadovoljava $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < +\infty$ te:

$$(\forall r > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \varphi_n \equiv 1 \text{ na } \overline{K}(\theta, r), \quad (1.1)$$

pri čemu je $\overline{K}(\theta, r)$ zatvorena kugla oko $\theta = (0, 0, \dots, 0)$ radijusa r . Po prethodnom, $\varphi_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Da bismo provjerili da takav niz $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaista postoji potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 1.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Tada postoji funkcija $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ takva da je $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$ te da je $\vartheta(x) = 1$ za $x \leq a$ i $\vartheta(x) = 0$ za $x \geq b$.*

Dokaz. Definirajmo prvo funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ u točki $x \in \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$f(x) := e^{-\frac{1}{x}} \mathbb{1}_{(0, +\infty)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Uočimo da je $-\frac{1}{x} < 0$ za $x > 0$ pa je $0 < e^{-\frac{1}{x}} < 1$; stoga je slika od f sadržana u intervalu $[0, 1]$.

Jasno je po definiciji da je na intervalima $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle 0, +\infty \rangle$ funkcija f klase C^∞ . Nadalje, kako je $\lim_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ i $\lim_{x \nearrow 0} 0 = 0$, f je neprekidna u točki 0. Želja nam je pokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\lim_{x \searrow 0} f^{(n)}(x) = 0,$$

iz čega će slijediti da je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (jasno, za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\lim_{x \nearrow 0} f^{(n)}(x) = 0$).

Neka je $x \in \mathbb{R}, x > 0$. Vrijedi

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = x^{-2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Induktivno, pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ postoji polinom $(n-1)$ -vog stupnja $p_{n-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ za koji vrijedi

$$f^{(n)}(x) = p_{n-1}(x) x^{-2n} e^{-\frac{1}{x}} \text{ za sve } x \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

(Uočimo da ova tvrdnja vrijedi za $n = 1$ uz polinom $p_0 \equiv 1$.)

Deriviranjem ove jednakosti u točki x vrijedi

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(f^{(n)}(x) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(p_{n-1}(x) \right) x^{-2n} e^{-\frac{1}{x}} + p_{n-1}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{-2n} \right) e^{-\frac{1}{x}} + p_{n-1}(x) x^{-2n} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{1}{x}} \right) \\ &= p'_{n-1}(x) x^{-2n} e^{-\frac{1}{x}} + p_{n-1}(x) \cdot (-2n) x^{-2n-1} e^{-\frac{1}{x}} + p_{n-1}(x) x^{-2n} \left(-x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} \right) \\ &= \left(x^2 p'_{n-1}(x) - 2nx p_{n-1}(x) - p_{n-1}(x) \right) x^{-2n-2} e^{-\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Definirajmo $p_n(x) := x^2 p'_{n-1}(x) - 2nx p_{n-1}(x) - p_{n-1}(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi $f^{(n+1)}(x) = p_{(n+1)-1}(x) x^{-2(n+1)} e^{-\frac{1}{x}}$. Ono što preostaje provjeriti jest da je p_n uistinu polinom n -tog stupnja. I zaista, ako s $a_{n-1} \neq 0$ označimo vodeći koeficijent polinoma p_{n-1} , a s b_n koeficijent uz x^n polinoma p_n , po definiciji od p_n dobivamo da vrijedi

$b_n = (n - 1)a_{n-1} - 2na_{n-1} = -(n + 1)a_{n-1} \neq 0$. Dakle, p_n je polinom n -tog stupnja.

Po principu matematičke indukcije možemo zaključiti da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeći zapis u $x \in \langle 0, +\infty \rangle$:

$$f^{(n)}(x) = p_{n-1}(x)x^{-2n}e^{-\frac{1}{x}},$$

pri čemu je p_{n-1} polinom $(n - 1)$ -vog stupnja.

Kao što smo i ranije uočili, f je klase C^∞ na $\langle 0, +\infty \rangle$ (što se i iz ovog zapisa može uočiti). Nadalje, vrijedi

$$\lim_{x \searrow 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \searrow 0} p_{n-1}(x)x^{-2n}e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} p_{n-1}(x) \frac{x^{-2n}}{e^{\frac{1}{x}}} = 0,$$

što slijedi iz poznatog limesa $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^m}{e^t} = 0$ za sve $m \in \mathbb{N}$, a ovaj slijedi uzastopnom primjenom l'Hôpitalovog pravila m puta.

Dakle, pokazali smo da je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Definirajmo sada funkciju $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ formulom

$$\vartheta(x) := \frac{f(b-x)}{f(b-x) + f(x-a)} \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo prvo da ne postoji $x \in \mathbb{R}$ za kojeg bi bilo $f(b-x) + f(x-a) = 0$. Naime, kada bi takav x postojao, zbog $f \geq 0$ moralo bi vrijediti $f(b-x) = f(x-a) = 0$, a po definiciji funkcije f i $b-x < 0$ te $x-a < 0$, odnosno $b < x < a$, što nije moguće zbog pretpostavke $a < b$. Prema tome, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(b-x) + f(x-a) > 0$.

Nadalje, zbog nenegativnosti od f za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(b-x) \leq f(b-x) + f(x-a)$, pa prema tome slika funkcije ϑ je sadržana u $[0, 1]$.

Uz to, kao kompozicija funkcija klasi C^∞ i funkcije $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, zaključujemo da je i $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Konačno, ako je $x \leq a$, tada je $\vartheta(x) = \frac{f(b-x)}{f(a+x) + f(b-x)} = \frac{e^{-\frac{1}{b-x}}}{e^{-\frac{1}{b-x}}} = 1$, a za $x \geq b$ je

$\vartheta(x) = \frac{f(b-x)}{f(a+x) + f(b-x)} = \frac{0}{e^{-\frac{1}{a+x}}} = 0$. Time smo pokazali da je ϑ tražena funkcija

iz tvrdnje ove leme.

□.◻.◻.

Nastavljamo dalje s konstrukcijom niza $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ koji zadovoljava (1.1). Primjenom upravo dokazane leme za $a = 1$ i $b = 2$ možemo odabrati proizvoljnu funkciju $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ klase $C^\infty(\mathbb{R})$ takvu da je $\vartheta(x) = 1$ za sve $x \leq 1$ i $\vartheta(x) = 0$ za sve $x \geq 2$.

Sada za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo funkciju $\varphi_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$\varphi_n(x) := \vartheta\left(\frac{\|x\|}{n}\right) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}^d.$$

Budući da je $\vartheta \equiv 1$ na $[0, 1]$, vrijedi $\varphi_n(x) = 1$ za sve $x \in \overline{K}(\theta, n)$ i za sve $n \in \mathbb{N}$. Sada znamo da za ovako definirani niz funkcija vrijedi (1.1); naime, za $r > 0$ dovoljno je uzeti $n_0 := \lceil r \rceil$.

Sada kada smo sigurni u postojanost danog niza $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ možemo definirati $T\mathbb{1}$. Označimo

$$L_{c,0}^2(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \text{supp } f \text{ je kompaktan, } \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 0 \right\}.$$

Za svaki $f \in L_{c,0}^2(\mathbb{R}^d)$ definiramo

$$\langle T\mathbb{1}, f \rangle := \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T\varphi_n, f \rangle, \quad (1.2)$$

što kraće zapisujemo i u obliku

$$T\mathbb{1} := \lim_{n \rightarrow +\infty} T\varphi_n.$$

Dokažimo prvo postojanje limesa $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T\varphi_n, f \rangle$ za proizvoljan $f \in L_{c,0}^2$. Kako f ima kompaktan nosač, postoji $r > 0$ takav da vrijedi $\text{supp } f \subseteq K\left(\theta, \frac{r}{2}\right)$.

Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ vrijedi $\varphi_n = 1$ na skupu $\overline{K}(\theta, r)$. Nadalje, neka su $n, n' \in \mathbb{N}, n, n' \geq n_0$; dakle, vrijedi $\varphi_n = \varphi_{n'} = 1$ na $\overline{K}(\theta, r)$. Tada je funkcija $\varphi_n - \varphi_{n'}$ jednaka nuli na $\overline{K}(\theta, r)$, a taj skup sadrži nosač od f budući da je $\text{supp } f \subseteq K\left(\theta, \frac{r}{2}\right) \subset K(\theta, r)$. Prema tome, f i $\varphi_n - \varphi_{n'}$ imaju disjunktne nosače.

Neka je K_T pripadna jezgra Calderón-Zygmundovog operatora T i α parametar od T , odnosno K_T , dan u definiciji 1.1. Kako je $f \in L^2_{c,0}$, za svaki $y \in \mathbb{R}^d$ vrijedi $0 = K_T(\theta, y) \cdot 0 = K_T(\theta, y) \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \stackrel{\text{supp} f \subseteq K(\theta, \frac{r}{2})}{=} \int_{K(\theta, \frac{r}{2})} K_T(\theta, y) f(x) dx$.

Stoga, uz oznaku $M := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$, vrijedi

$$\begin{aligned}
 |\langle T\varphi_n, f \rangle - \langle T\varphi_{n'}, f \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_n)(x) f(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_{n'})(x) f(x) dx \right| \quad (1.3) \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_T(x, y) \varphi_n(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} K_T(x, y) \varphi_{n'}(y) dy \right) f(x) dx \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_T(x, y) (\varphi_n(y) - \varphi_{n'}(y)) f(x) dy dx \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} (\varphi_n(y) - \varphi_{n'}(y)) \int_{\text{supp} f} K_T(x, y) f(x) dx dy \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} (|\varphi_n(y)| + |\varphi_{n'}(y)|) \left| \int_{K(\theta, \frac{r}{2})} K_T(x, y) f(x) dx \right| dy \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} (M + M) \left| \int_{K(\theta, \frac{r}{2})} K_T(x, y) f(x) dx - \int_{K(\theta, \frac{r}{2})} K_T(\theta, y) f(x) dx \right| dy \\
 &\leq 2M \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} \int_{K(\theta, \frac{r}{2})} |K_T(x, y) - K_T(\theta, y)| |f(x)| dx dy \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} 2M \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} \int_{K(\theta, \frac{r}{2})} \|K\|_{CZ1} \frac{\|x - \theta\|^\alpha}{\|y\|^{d+\alpha}} |f(x)| dx dy \\
 &= 2M \|K\|_{CZ1} \left(\int_{K(\theta, \frac{r}{2})} \|x\|^\alpha |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} \frac{dy}{\|y\|^{d+\alpha}} \right) \\
 &= 2M \|K\|_{CZ1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} \frac{dy}{\|y\|^{d+\alpha}} \right).
 \end{aligned}$$

Pritom nejednakost (*) slijedi iz druge nejednakosti iz definicije 1.1.

Kako je nosač od f sadržan u $K\left(\theta, \frac{r}{2}\right)$, a f je neprekidna, posebno postoji $C > 0$ takva da je $|f(x)| \leq C$ za svaki $x \in K\left(\theta, \frac{r}{2}\right)$. Prema tome, izrazimo li integrale po kugli $K\left(\theta, \frac{r}{2}\right)$ preko integrala po sferama $S(\theta, t)$ radijusa $t \leq \frac{r}{2}$, dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)| dx &= \int_{K\left(\theta, \frac{r}{2}\right)} \|x\|^\alpha |f(x)| dx \leq C \int_{K\left(\theta, \frac{r}{2}\right)} \|x\|^\alpha dx = C \int_0^{\frac{r}{2}} \int_{S(\theta, t)} \|x\|^\alpha d\sigma_x dt \\ &= C \int_0^{\frac{r}{2}} t^\alpha \cdot d\omega_d t^{d-1} dt = C d\omega_d \int_0^{\frac{r}{2}} t^{\alpha+d-1} dt = C d\omega_d \frac{1}{\alpha+d} t^{\alpha+d} \Big|_0^{\frac{r}{2}} \\ &= \frac{C d\omega_d}{2^{\alpha+d} (\alpha+d)} r^{\alpha+d}. \end{aligned}$$

Posebno, $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)| dx < +\infty$.

S druge strane, vrijedi $\int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} \frac{dy}{\|y\|^{d+\alpha}} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)}(y) \frac{dy}{\|y\|^{d+\alpha}}$. Za $r > 1$ vrijedi i $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)}(y) \frac{1}{\|y\|^{d+\alpha}} \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, 1)}(y) \frac{1}{\|y\|^{d+\alpha}}$ za sve $y \in \mathbb{R}^d$ (u smislu da su izrazi s obje strane nejednakosti jednaki nuli za $y = \theta$). Dobivena funkcija $y \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, 1)}(y) \frac{1}{\|y\|^{d+\alpha}}$ je (apsolutno) integrabilna, budući da je

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, 1)}(y) \frac{1}{\|y\|^{d+\alpha}} dy &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, 1)} \frac{1}{\|y\|^{d+\alpha}} dy = \int_1^{+\infty} \int_{S(\theta, t)} \frac{1}{\|y\|^{d+\alpha}} d\sigma_y dt \\ &= \int_1^{+\infty} d\omega_d t^{d-1-d-\alpha} dt = d\omega_d \frac{1}{-\alpha} t^{-\alpha} \Big|_1^{+\infty} = \frac{d\omega_d}{\alpha} < +\infty. \end{aligned}$$

Primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji, puštanjem $r \rightarrow +\infty$ (uočimo, za $0 < r < r'$ vrijedi $\text{supp } f \subseteq K\left(\theta, \frac{r}{2}\right) \subset K\left(\theta, \frac{r'}{2}\right)$, pa raspis 1.3 vrijedi i za veće vrijednosti radijusa r), dobivamo

$$\begin{aligned}
 & \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(2M \|K\|_{CZ1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} \frac{dy}{\|y\|^{d+\alpha}} \right) \right) \\
 &= 2M \|K\|_{CZ1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)| dx \right) \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)}(y) \frac{dy}{\|y\|^{d+\alpha}} \right) \\
 &= 2M \|K\|_{CZ1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)}(y) \frac{dy}{\|y\|^{d+\alpha}} \right) \\
 &= 2M \|K\|_{CZ1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} 0 dy \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Pokazali smo sljedeće: za svaki $\epsilon > 0$ možemo odabrati $r > 0$ takav da je

$$2M \|K\|_{CZ1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} \frac{dy}{\|y\|^{d+\alpha}} \right) < \epsilon,$$

a onda možemo odabrati $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za sve $n, n' \in \mathbb{N}, n, n' \geq n_0$ vrijedi $\varphi_n = \varphi_{n'} = 1$ na $\overline{K}(\theta, r)$, što povlači

$$|\langle T\varphi_n, f \rangle - \langle T\varphi_{n'}, f \rangle| \leq 2M \|K\|_{CZ1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} \frac{dy}{\|y\|^{d+\alpha}} \right) < \epsilon.$$

To zapravo znači da je niz realnih brojeva $(\langle T\varphi_n, f \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjev, a kako je \mathbb{R} potpun prostor, po definiciji svaki Cauchyjev niz konvergira, pa je tako i $(\langle T\varphi_n, f \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentan niz. Posebno, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T\varphi_n, f \rangle$ iz definicije u (1.2) ima smisla.

Potrebno je još provjeriti da je $T\mathbb{1}$ dobro definiran, što bi značilo da ne ovisi o odabiru niza $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Stoga, neka su $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tilde{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_c^1(\mathbb{R}^d)$ i $f \in L_{c,0}^2$. Potrebno je

dokazati da vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T\varphi_n, f \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T\tilde{\varphi}_n, f \rangle.$$

Kako je $\text{supp } f$ kompaktan, postoji $r > 0$ takav da je $\text{supp } f \subseteq K\left(\theta, \frac{r}{2}\right)$. Isto tako, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za sve $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, $\varphi_n = \tilde{\varphi}_n = 1$ na $\overline{K}(\theta, r)$. Potpuno analogno kao i u raspisu od (1.3), dobivamo da vrijedi

$$|\langle T\varphi_n, f \rangle - \langle T\tilde{\varphi}_n, f \rangle| \leq 2M \|K\|_{CZ1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\theta, r)} \frac{dy}{\|y\|^{d+\alpha}} \right).$$

Izraz s desne strane nejednakosti konvergira u nulu, pa za $\epsilon > 0$ možemo odabrati $r > 0$, a zatim i $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ vrijedi

$$|\langle T\varphi_n, f \rangle - \langle T\tilde{\varphi}_n, f \rangle| < \epsilon,$$

pa je, prema tome, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle T\varphi_n, f \rangle - \langle T\tilde{\varphi}_n, f \rangle| = 0$. Posebno, vrijedi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T\varphi_n, f \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T\tilde{\varphi}_n, f \rangle$, što potvrđuje da je vrijednost od $T\mathbb{1}$ u (1.2) dobro definirana, premda ne kao funkcija nego kao svojevrsna "distribucija", što znači da imaju smisla brojevi $\langle T\mathbb{1}, f \rangle$ za $f \in L_{c,0}^2$.

1.2. Primjeri Calderón-Zygmundovih operatora

Jedan od najvažnijih i najprimjenjenijih tipova Calderón-Zygmundovih operatora ujedno je i motivacija za njihovo uvođenje i promatranje.

Primjer 1.5. *Hilbertova jezgra* je preslikavanje $K : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$ dano s

$$K(x, y) := \frac{1}{\pi(x - y)}, \text{ za sve } x, y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

Hilbertova transformacija je preslikavanje $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ dano s

$$(Tf)(x) := \text{p.v.} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy, \text{ za gotovo svaki } f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ i za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Zapravo se u literaturi često Hilbertova transformacija inicijalno definira kao operator na prostoru funkcija klase C^1 s kompaktnim nosačem, a potom se dokazuje njena ograničenost u L^2 normi te da ista formula ostaje vrijediti i za spomenuto proširenje za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}$. Detalji se mogu pronaći u [17, pogl. VI] ili [15, pogl. II]. Mi radije koristimo definiciju kod koje možemo biti fleksibilniji prilikom uvištavanja funkcija.

Pokažimo da je ovaj operator uistinu Calderón-Zygmundov operator. Prije svega, za gore navedeni K vrijedi integralni prikaz iz definicije 1.3, odnosno vrijedi $(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$ za sve $f \in L^2(\mathbb{R})$ i za sve $x \in \mathbb{R} \setminus (\text{supp} f)$. Naime, po definiciji od T vrijedi

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &= \text{p.v.} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy + \int_{x+\epsilon}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^x \frac{f(y)}{x-y} dy + \int_x^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy. \end{aligned}$$

Pritom jednakost (*) slijedi iz činjenice da je $x \notin \text{supp} f$ pa je $f \equiv 0$ na nekoj okolini točke x . Stoga je i integral od $\frac{f(y)}{x-y}$ po y jednak 0 na toj istoj okolini od x , pa je integral po \mathbb{R} dobro zadan, tj. konačan je.

Preostaje provjeriti da K zadovoljava nejednakosti iz definicije 1.1. Dakle, u slučaju $d = 1$ te korištenjem apsolutne vrijednosti kao norme u jednodimenzionalnom slučaju, trebamo pokazati da neki $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ postoje konstante $C_0, C_1 > 0$ takve da vrijedi

1. $\left| \frac{1}{\pi(x-y)} \right| \leq \frac{C_0}{|x-y|},$
2. $\left| \frac{1}{\pi(x-y)} - \frac{1}{\pi(x'-y)} \right| \leq C_1 \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}},$

$$3. \left| \frac{1}{\pi(x-y)} - \frac{1}{\pi(x-y')} \right| \leq C_1 \frac{|y-y'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}},$$

pri čemu su $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $x \neq y'$, $x' \neq y$ te vrijedi $|x-x'| \leq \frac{|x-y|}{2}$ i $|y-y'| \leq \frac{|x-y|}{2}$.

Prva nejednakost trivijalno je zadovoljena za $C_0 := \frac{1}{\pi}$. Da bismo pokazali drugu nejednakost, koristimo nejednakost trokuta

$$|x' - y| \geq |y - x| - |x - x'| \geq \frac{|y - x|}{2},$$

budući da je $|x - x'| \leq \frac{|y - x|}{2}$.

Sada slijedi

$$\left| \frac{1}{\pi(x-y)} - \frac{1}{\pi(x'-y)} \right| = \frac{1}{\pi} \left| \frac{x' - y - x + y}{(x-y)(x'-y)} \right| = \frac{1}{\pi} \frac{|x-x'|}{|x-y||x'-y|} \leq \frac{2}{\pi} \frac{|x-x'|}{|x-y|^2}.$$

Druga nejednakost slijedi odabirom $\alpha = 1$ te uz $C_1 := \frac{2}{\pi}$. Treća nejednakost, uz isti parametar α i konstantu C_1 , slijedi analogno.

Time smo pokazali da je Hilbertova transformacija restringirana na $L^2(\mathbb{R})$ uistinu Calderón-Zygmundov operator.

Po definiciji glavne vrijednosti integrala, Hilbertovu transformaciju na funkciji f možemo izraziti kao

$$(Tf)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\frac{1}{\epsilon} \geq |x-y| \geq \epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{x-\frac{1}{\epsilon}}^{x-\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy + \int_{x+\epsilon}^{x+\frac{1}{\epsilon}} \frac{f(y)}{x-y} dy \right).$$

Naime, promatramo nepravi integral s granicama u $\pm\infty$ te u singularnoj točki x . Za $\epsilon < 1$, budući da je $\frac{1}{\epsilon} > \epsilon$ te je $\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} = +\infty$, integral možemo zapisati kao limes kada $\epsilon \searrow 0$ u granicama od $x - \frac{1}{\epsilon}$ do $x - \epsilon$ te od $x + \epsilon$ do $x + \frac{1}{\epsilon}$, odnosno kao integral po skupu $\left\{ \frac{1}{\epsilon} \geq |x-y| \geq \epsilon \right\}$.

Uočimo da je Hilbertov operator pomnožen realnom konstantom i dalje Calderón-Zygmundov operator. Ipak, razlog zašto u definiciji tog operatora koristimo konstantu $\frac{1}{\pi}$ jest taj da u tom slučaju imamo unitaran operator, odnosno za takav operator T vrijedi $\|T\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Dokaz unitarnosti je klasičan i može se naći npr. u [15]. \square

Hilbertova transformacija zadovoljava sljedeća zanimljiva svojstva.

Korolar 1.6. *Neka je T Hilbertova transformacija s pripadnom Hilbertovom jezgrom K_T .*

- (a) *Označimo s $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ funkciju danu s $h(x) := \frac{1}{\pi x}, \forall x \neq 0$. Tada za sve $f \in L^2(\mathbb{R})$ vrijedi $Tf = \text{p.v. } h * f$, pri čemu je $*$ operacija konvolucije dviju funkcija.*
- (b) *Vrijedi $T^* = -T$, tj. $\langle Tf, g \rangle = \langle f, -Tg \rangle$, za sve $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ takve da je $\text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset$. Pritom je $T^* : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ adjungirani operator od T .*
- (c) *Za sve derivabilne $f \in L^2(\mathbb{R})$ takve da je $f' \in L^2(\mathbb{R})$ vrijedi $Tf' = (Tf)'$ te induktivno, ako $f^{(n)}$ postoji i $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$, tada je $Tf^{(n)} = (Tf)^{(n)}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. (a) Za proizvoljne funkcije $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ operacija konvolucije dana je relacijom

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^d.$$

Neka je sada $f \in L^2(\mathbb{R})$. Po definiciji Hilbertove transformacije vrijedi

$$(Tf)(x) = \text{p.v.} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} h(x-y)f(y)dy = \text{p.v. } h * f.$$

(b) Za $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $\text{supp} f \cap \text{supp} g = \emptyset$ vrijedi

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} K_T(x, y) f(y) g(x) dx dy = \text{p.v.} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi(x-y)} f(y) \right) g(x) dx dy \\ &= \text{p.v.} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(y) \left(-\frac{1}{\pi(y-x)} g(x) \right) dx dy = \langle f, -Tg \rangle. \end{aligned}$$

Prema tome, $T^* = -T$.

(c) Neka je $f \in L^2(\mathbb{R})$. Vrijedi

$$(Tf)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{x-\frac{1}{\epsilon}}^{x-\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy + \int_{x+\epsilon}^{x+\frac{1}{\epsilon}} \frac{f(y)}{x-y} dy \right).$$

Zamjenom varijabli $t = x - y$ dobivamo

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(- \int_{\frac{1}{\epsilon}}^{\epsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt - \int_{-\epsilon}^{-\frac{1}{\epsilon}} \frac{f(x-t)}{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{-\epsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt + \int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{f(x-t)}{t} dt \right). \end{aligned}$$

Deriviranjem ove jednakosti po x , što smijemo po [4, tm. 2.27], dobivamo

$$\begin{aligned} (Tf)'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{-\epsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt + \int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{f(x-t)}{t} dt \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{-\epsilon} \frac{f'(x-t)}{t} dt + \int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{f'(x-t)}{t} dt \right). \end{aligned}$$

Istom zamjenom varijabli $y = x - t$ dobivamo

$$\begin{aligned}
 (Tf)'(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{x+\frac{1}{\epsilon}}^{x+\epsilon} \frac{f'(y)}{x-y} dy + \int_{-\epsilon}^{x-\frac{1}{\epsilon}} \frac{f'(y)}{x-y} dy \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(- \int_{x+\frac{1}{\epsilon}}^{x+\epsilon} \frac{f'(y)}{x-y} dy - \int_{x-\epsilon}^{x-\frac{1}{\epsilon}} \frac{f'(y)}{x-y} dy \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{x-\frac{1}{\epsilon}}^{x-\epsilon} \frac{f'(y)}{x-y} dy + \int_{x+\epsilon}^{x+\frac{1}{\epsilon}} \frac{f'(y)}{x-y} dy \right) = (Tf')(x).
 \end{aligned}$$

Dakle, $(Tf)' = Tf'$ za sve derivabilne $f \in L^2(\mathbb{R})$ za koje je $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

Pretpostavimo li da vrijedi $(Tf)^{(n)} = Tf^{(n)}$ za neki $n \in \mathbb{N}$ i $f \in L^2(\mathbb{R})$ za koji $f^{(n+1)}$ postoji i $f^{(n+1)} \in L^2(\mathbb{R})$, dobivamo

$$(Tf)^{(n+1)} = ((Tf)^{(n)})' = (Tf^{(n)})' = T(f^{(n)})' = Tf^{(n+1)},$$

s tim da smo koristili upravo dokazanu tvrdnju za $n = 1$ te smo umjesto funkcije f uvrstili $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$.

Stoga induktivno zaključujemo da vrijedi $(Tf)^{(n)} = Tf^{(n)}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. $\Omega.\mathcal{E}.\mathcal{D}$.

Odredimo Hilbertovu transformaciju nekih funkcija.

1. Neka je $f(x) := \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ za $x \in \mathbb{R}$, pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Primijetimo da je

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx = \int_a^b dx = b - a < +\infty, \text{ pa prema tome } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
 (Tf)(x) &= \text{p.v.} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(y)}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(y)}{x-y} dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(y)}{x-y} dy + \int_{x+\epsilon}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(y)}{x-y} dy \right).
 \end{aligned}$$

Moguća su dva slučaja. U prvom slučaju, ako vrijedi $x \leq a$ ili $x \geq b$, jedan od ova dva integrala je jednak nuli. Naime, za $x \leq a$ je $\int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(y)}{x-y} dy$ neovisno o $\epsilon > 0$ budući da je tada $y \leq x - \epsilon < x \leq a$, pa posebno $y \notin [a, b]$. Slično, u slučaju $x \geq b$ vrijedi $\int_{x+\epsilon}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(y)}{x-y} dy = 0$. Prema tome, unutar limesa dobivamo jedan integral koji možemo izraziti u granicama od a i b , pa vrijedi

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b \frac{1}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} (-\ln|x-y|) \Big|_a^b = \frac{1}{\pi} (-\ln|x-b| + \ln|x-a|) \\ &= \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|. \end{aligned}$$

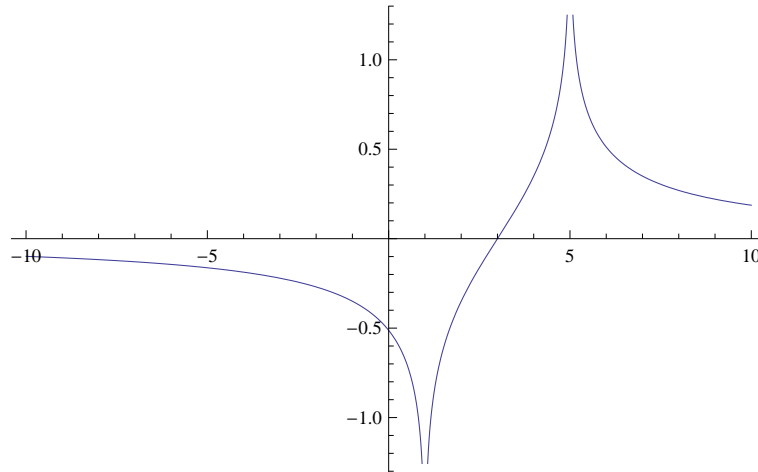
U drugom slučaju, ako vrijedi $a < x < b$, za dovoljno malene $\epsilon > 0$ vrijedi $a < x - \epsilon$ i $x + \epsilon < b$. Prema tome, vrijedi

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_a^{x-\epsilon} \frac{1}{x-y} dy + \int_{x+\epsilon}^b \frac{1}{x-y} dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(-\ln(x-y) \Big|_a^{x-\epsilon} - \ln(y-x) \Big|_{x+\epsilon}^b \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} (-\ln \epsilon + \ln(x-a) - \ln(b-x) + \ln \epsilon) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \ln \frac{x-a}{b-x} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{x-a}{b-x}. \end{aligned}$$

U oba slučaja dobili smo da je

$$(Tf)(x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|.$$

2. Neka je $f(x) := C$, pri čemu je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Uočimo da ovako zadana funkcija f nije u prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$ budući da je $\int_{\mathbb{R}} C^2 dx = C^2 \int_{\mathbb{R}} dx =$



Slika 1.1: Hilbertova transformacija karakteristične funkcije intervala $[1, 5]$.

$+\infty$. Prema tome, f nije u domeni Hilbertove transformacije pa Tf teoretski nema smisla. No, i za ovu funkciju možemo po istoj definiciji izračunati p.v. $\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy$, pa možemo provjeriti kako bi Hilbertova transformacija djelovala na konstantnu funkciju kada bi bila definirana na širem prostoru funkcija koji bi uključivao i takve funkcije.

Vrijedi

$$\begin{aligned}
 (Tf)(x) &= \text{p.v.} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{x-y} dy = \frac{C}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\frac{1}{\epsilon} \geq |x-y| \geq \epsilon} \frac{1}{x-y} dy \\
 &= \frac{C}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{x-\frac{1}{\epsilon}}^{x-\epsilon} \frac{1}{x-y} dy + \int_{x+\epsilon}^{x+\frac{1}{\epsilon}} \frac{1}{x-y} dy \right) \\
 &= \frac{C}{\pi} \left(-\ln(x-y) \Big|_{x-\frac{1}{\epsilon}}^{x-\epsilon} - \ln(y-x) \Big|_{x+\epsilon}^{x+\frac{1}{\epsilon}} \right) \\
 &= \frac{C}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(-\ln \epsilon + \ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right) - \ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right) + \ln \epsilon \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Dakle, $(Tf) \equiv 0$ za sve konstantne funkcije f .

Hilbertova transformacija primjer je Calderón-Zygmundovog operatora na jednodim-

menzionalnom prostoru \mathbb{R} . Sljedeći primjer navodi višedimenzionalni analogon te transformacije koji je također Calderón-Zygmundov operator.

Primjer 1.7. Neka je $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ i $K_i : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^d\} \rightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje koje je za $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$, $x \neq y$ dano s

$$K_i(x, y) := \frac{x_i - y_i}{\pi \omega_{d-1} \|x - y\|^{d+1}}.$$

Nadalje, neka je $T_i : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ operator koji je za $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ dan s

$$(T_i f)(x) := \frac{1}{\pi \omega_{d-1}} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(x_i - y_i) f(y)}{\|x - y\|^{d+1}} dy, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}^d.$$

Funkciju K_i nazivamo *Rieszovom jezgrom* nad i -tom koordinatom, a operator T zovemo *Rieszov operator* nad i -tom koordinatom.

Na ovaj način, ovisno o odabranoj koordinati, definirali smo d različitih Rieszovih operatora. Također, u slučaju $d = 1$ za $x = x_1 \in \mathbb{R}$ i $y = y_1 \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ vrijedi

$$K_1(x, y) = \frac{x - y}{\pi \omega_0 |x - y|^2} = \frac{\Gamma(1)}{\pi} \cdot \frac{1}{x - y} = \frac{1}{\pi(x - y)},$$

te, uz to, za $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$(T_1 f)(x) = \frac{1}{\pi \omega_0} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{(x - y) f(y)}{\|x - y\|^2} dy = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x - y} dy.$$

Prema tome, u slučaju $d = 1$ Rieszova jezgra K_1 i Rieszova transformacija T_1 su redom Hilbertova jezgra i Hilbertova transformacija.

Pokažimo sada da je Rieszova transformacija nad i -tom koordinatom još jedan primjer Calderón-Zygmundovog operatora.

Za to trebamo pokazati da Rieszova transformacija zadovoljava odgovarajući integralni prikaz koji uključuje Rieszovu jezgru. I zaista, za $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ te $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i

$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $x \notin \text{supp} f$, vrijedi

$$\begin{aligned} (T_i f)(x) &= \frac{1}{\pi\omega_{d-1}} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(x_i - y_i) f(y)}{\|x - y\|^{d+1}} dy = \frac{1}{\pi\omega_{d-1}} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(x, \epsilon)} \frac{(x_i - y_i) f(y)}{\|x - y\|^{d+1}} dy \\ &= \frac{1}{\pi\omega_{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(x_i - y_i) f(y)}{\|x - y\|^{d+1}} dy = \int_{\mathbb{R}^d} K_i(x, y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Pritom smo prelaskom iz prvog u drugi red koristili činjenicu da je $x \notin \text{supp} f$ pa je $f \equiv 0$ na nekoj okolini točke x , pa tako i na nekoj kugli $K(x, \epsilon)$ za dovoljno maleni $\epsilon > 0$.

Nadalje, uočimo da je Rieszova jezgra $K_i \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^d\})$, pa je dovoljno za neke konstante $C_0, C_1 > 0$ pokazati da vrijedi

$$1.' \quad |K_i(x, y)| \leq \frac{C_0}{\|x - y\|^d},$$

$$2.' \quad \|\nabla_x K_i(x, y)\| \leq \frac{C_1}{\|x - y\|^{d+1}},$$

$$3.' \quad \|\nabla_y K_i(x, y)\| \leq \frac{C_1}{\|x - y\|^{d+1}}.$$

za $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$. Iz ovoga će, po ranijoj diskusiji, slijediti da je K_i Calderón-Zygmundova jezgra s parametrom 1.

Budući da je

$$\frac{|x_i - y_i|}{\pi\omega_{d-1} \|x - y\|^{d+1}} \leq \frac{\|x - y\|}{\pi\omega_{d-1} \|x - y\|^{d+1}} = \frac{1}{\pi\omega_{d-1}} \cdot \frac{1}{\|x - y\|^d},$$

prva nejednakost vrijedi uz $C_0 := \frac{1}{\pi\omega_{d-1}}$.

Označimo $\partial_j = \partial_{x_j}$ za svaki $j \in \{1, 2, \dots, d\}$. Ako je $j \neq i$, vrijedi

$$\begin{aligned} \partial_j K_i(x, y) &= \partial_j \left(\frac{x_i - y_i}{\pi\omega_{d-1} \|x - y\|^{d+1}} \right) = \partial_j \left(\frac{x_i - y_i}{\pi\omega_{d-1}} \left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2 \right)^{-\frac{d+1}{2}} \right) \\ &= \frac{x_i - y_i}{\pi\omega_{d-1}} \left(-\frac{d+1}{2} \right) \left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2 \right)^{-\frac{d+3}{2}} \cdot 2(x_j - y_j) \end{aligned}$$

$$= \frac{-(d+1)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{\pi\omega_{d-1}\|x - y\|^{d+3}}.$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} \partial_i K_i(x, y) &= \partial_i \left(\frac{x_i - y_i}{\pi\omega_{d-1}\|x - y\|^{d+1}} \right) \\ &= \partial_i \left(\frac{1}{\pi\omega_{d-1}\|x - y\|^{d+1}} \right) (x_i - y_i) + \frac{\partial_i(x_i - y_i)}{\pi\omega_{d-1}\|x - y\|^{d+1}} \\ &= \frac{-(d+1)(x_i - y_i)^2}{\pi\omega_{d-1}\|x - y\|^{d+3}} + \frac{1}{\pi\omega_{d-1}\|x - y\|^{d+1}}. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \|\nabla_x K_i(x, y)\|^2 &= \sum_{j=1}^d (\partial_j K_i(x, y))^2 \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{(d+1)^2 (x_i - y_i)^2 (x_j - y_j)^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2(d+3)}} + \frac{1}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2(d+1)}} \\ &\quad - 2 \cdot \frac{(d+1)(x_i - y_i)^2}{\pi\omega_{d-1}\|x - y\|^{d+3}} \cdot \frac{1}{\pi\omega_{d-1}\|x - y\|^{d+1}} \\ &= \frac{(d+1)^2 (x_i - y_i)^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+6}} \sum_{j=1}^d (x_j - y_j)^2 + \frac{1}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+2}} \\ &\quad - \frac{2(d+1)(x_i - y_i)^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{d+3+d+1}} \\ &= \frac{(d+1)^2 (x_i - y_i)^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+6}} \|x - y\|^2 + \frac{1}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+2}} \\ &\quad - \frac{2(d+1)(x_i - y_i)^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+4}} \\ &= \frac{(d+1)^2 (x_i - y_i)^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+4}} + \frac{1}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+2}} - \frac{2(d+1)(x_i - y_i)^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+4}} \\ &= \frac{(d+1)^2 (x_i - y_i)^2 + \|x - y\|^2 - 2(d+1)(x_i - y_i)^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+4}} \\ &\stackrel{(x_i - y_i)^2 \leq \|x - y\|^2}{\leq} \frac{(d+1)(d-1)(x_i - y_i)^2 + \|x - y\|^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+4}} \\ &\leq \frac{(d^2 - 1)\|x - y\|^2 + \|x - y\|^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{d^2 \|x - y\|^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+4}} = \frac{d^2}{\pi^2 \omega_{d-1}^2 \|x - y\|^{2d+2}}.$$

Iz ovih nejednakosti dobivamo

$$\|\nabla_x K_i(x, y)\| \leq \frac{d}{\pi \omega_{d-1}} \cdot \frac{1}{\|x - y\|^{d+1}},$$

dakle uvjet 2.' je zadovoljen za $C_1 := \frac{d}{\pi \omega_{d-1}}$.

Time smo pokazali da je Rieszov operator uistinu Calderón-Zygmundov operator. Dokaz da navedena formula doista daje L^2 omeđeni operator se može naći u [15, pogl. 3]. \square

Iako smo Calderón-Zygmundovu jezgru i operator definirali kao realne funkcije realnih varijabli, moguće je i za kompleksne funkcije kompleksnih varijabli promatrati svojstva iz definicija 1.1 i 1.3. Naime, u nekim slučajevima moguće je uz danu Calderón-Zygmundovu jezgru $K : \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ definirati operator T_K takav da za $f \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ imamo kompleksnu funkciju $T_K f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$. Tada će i pripadna jezgra K biti kompleksna funkcija koju možemo definirati na $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$. Pritom poistovjećujemo prostore \mathbb{R}^2 i \mathbb{C} preslikavanjem $(x, y) \mapsto x + iy$, a analogno i prostore \mathbb{R}^{2d} i \mathbb{C}^d preslikavanjem $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2d-1}, x_{2d}) \mapsto (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, \dots, x_{2d-1} + ix_{2d})$. Naravno, definicijom jezgri i operatora na \mathbb{C}^d moguće je da gubimo svojstva koja smo prethodno imali na \mathbb{R}^{2d} , no ocjene iz definicije 1.1 će i dalje vrijediti.

U sljedećem primjeru dan je jedan kompleksni Calderón-Zygmundov operator.

Primjer 1.8. Neka je $K : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{C}\} \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija koja je za $x, y \in \mathbb{C}, x \neq y$ dana s

$$K(x, y) := \frac{1}{\pi (x - y)^2}.$$

Također, neka je $T : L^2(\mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{C})$ operator koji je za $f \in L^2(\mathbb{C})$ i $x \in \mathbb{C}$ dan s

$$(Tf)(x) := \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(y)}{(x - y)^2} dy.$$

Ovako definirani T zove se *Ahlfors-Beurlingova transformacija*, a K *Ahlfors-Beurlingova jezgra*.

Napomenimo ponovo kako, kao i kod Hilbertovog operatora, u definiciji Ahlfors-Beurlingove transformacije imamo konstantu $\frac{1}{\pi}$ kako bismo dobili $\|T\|_{L^2(\mathbb{C})}$.

Pokažimo da je T Calderón-Zygmundov operator. Prije svega, za $f \in L^2(\mathbb{C})$ i $x \notin \text{supp} f$ vrijedi

$$(Tf)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{C} \setminus K(x, \epsilon)} \frac{f(y)}{(x-y)^2} dy = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(y)}{(x-y)^2} dy = \int_{\mathbb{C}} K(x, y) f(y) dy,$$

budući da je $x \notin \text{supp} f$.

Nadalje, treba pokazati da za neki $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ te $C_0, C_1 > 0$ vrijedi

1. $\left| \frac{1}{\pi(x-y)^2} \right| \leq \frac{C_0}{|x-y|^2},$
2. $\left| \frac{1}{\pi(x-y)^2} - \frac{1}{\pi(x'-y)^2} \right| \leq C_1 \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{2+\alpha}},$
3. $\left| \frac{1}{\pi(x-y)^2} - \frac{1}{\pi(x-y')^2} \right| \leq C_1 \frac{|y-y'|^\alpha}{|x-y|^{2+\alpha}},$

pri čemu su $x, x', y, y' \in \mathbb{C}, x \neq y, x \neq y', x' \neq y$ te vrijedi $|x-x'| \leq \frac{|x-y|}{2}$ i $|y-y'| \leq \frac{|x-y|}{2}$.

Prva nejednakost direktno slijedi uz $C_0 := \frac{1}{\pi}$. Prije dokazivanja druge nejednakosti, primijetimo da, zbog $|x-x'| \leq \frac{|x-y|}{2}$, vrijedi $|x'-y| \geq |y-x| - |x-x'| \geq \frac{|y-x|}{2}$.

Prema tome,

$$\frac{1}{|x'-y|^2} \leq \frac{4}{|y-x|^2}.$$

Uz to, vrijedi i

$$|x'-y| \leq |x'-x| + |x-y| \leq \frac{|x-y|}{2} + |x-y| = \frac{3}{2} |x-y|.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\pi (x-y)^2} - \frac{1}{\pi (x'-y)^2} \right| &= \frac{|(x'-y)^2 - (x-y)^2|}{\pi |x-y|^2 |x'-y|^2} = \frac{|x'-y+x-y| |x'-x|}{\pi |x-y|^2 |x'-y|^2} \\
&\leq \frac{4(|x'-y|+|x-y|)|x-x'|}{\pi |x-y|^4} \leq \frac{4\left(\frac{3}{2}|x-y|+|x-y|\right)|x-x'|}{\pi |x-y|^4} \\
&= \frac{4 \cdot \frac{5}{2} |x-x'|}{\pi |x-y|^3} = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{|x-x'|}{|x-y|^3}.
\end{aligned}$$

Sada tražena ocjena vrijedi uz parametar $\alpha = 1$ te konstantu $C_1 := \frac{10}{\pi}$.

Treća ocjena slijedi analognim računom uz isti odabir parametra α i konstante C_1 . Dakle, Ahlfors-Beurlingova transformacija je uistinu Calderón-Zygmundov operator. Njena ograničenost se izučava u kontekstu općenite klase translacijski-invarijantnih singularnih integralnih operatora; detalji se mogu naći u [15] i [17]. Zapravo se pokazuje da ona čini unitarni operator na $L^2(\mathbb{C})$. □

Poglavlje 2

Familija slučajnih dijadskih kocki

2.1. Definicija slučajnih dijadskih kocki

Neka je $d \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Definiramo *standardnu familiju dijadskih kocki* kao

$$\mathcal{D}^0 := \{2^{-k} ([0, 1]^d + m) : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^d\}.$$

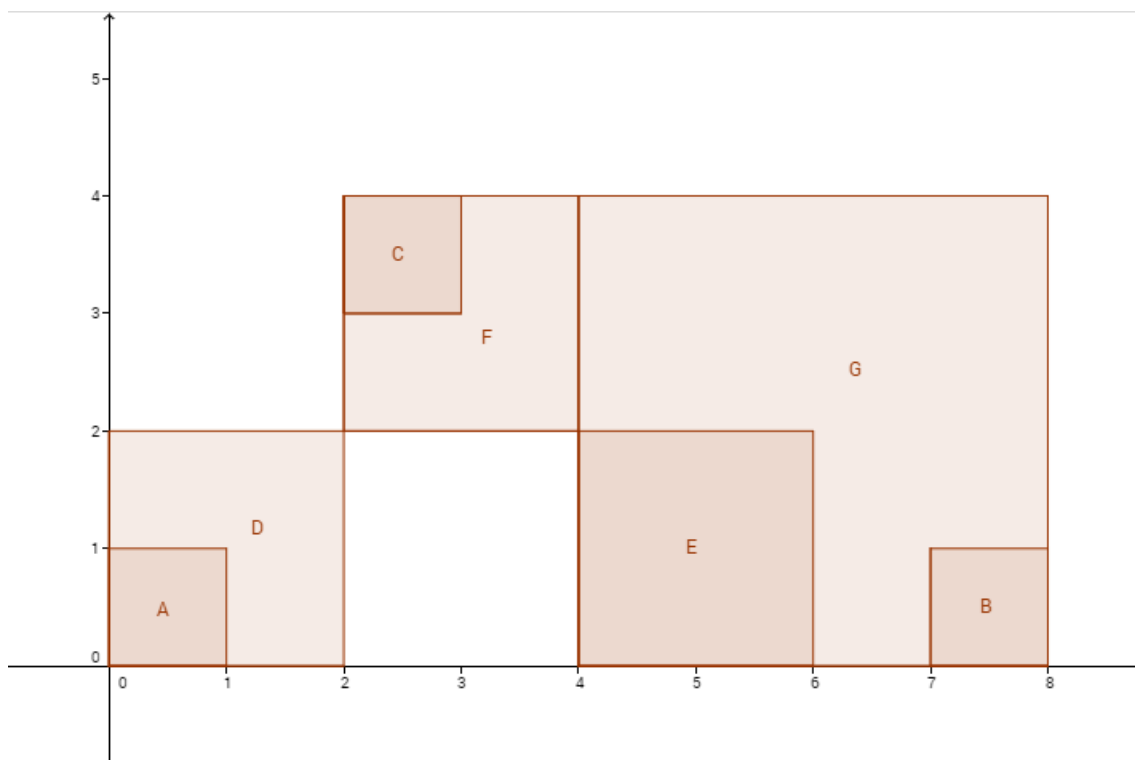
Primijetimo da se svaka dijadska kocka iz \mathcal{D}^0 može prikazati kao Kartezijev produkt d dijadskih intervala, odnosno, za $I \in \mathcal{D}^0, I \subseteq \mathbb{R}^d$, postoje $I_1, I_2, \dots, I_d \in \mathcal{D}^0$ jednake duljine, $I_1, I_2, \dots, I_d \subseteq \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$.

Primjer 2.1. Promotrimo kako u slučaju $d = 2$ izgledaju neke kocke iz \mathcal{D}^0 te odredimo njihov zapis u skladu s definicijom familije \mathcal{D}^0 .

Neka je

$$\begin{aligned} A &= [0, 1]^2, \quad B = [7, 8] \times [0, 1], \quad C = [2, 3] \times [3, 4], \\ D &= [0, 2]^2, \quad E = [4, 6] \times [0, 2], \quad F = [2, 4]^2, \\ G &= [4, 8] \times [0, 4]. \end{aligned}$$

Uočimo da se A jednostavno zapiše u obliku iz definicije od \mathcal{D}^0 za $k = 0$ i $m = (0, 0)$

Slika 2.1: Prikaz nekih elemenata iz \mathcal{D}^0 .

jer je

$$A = [0, 1]^2 = 1 \cdot [0, 1]^2 = 2^{-0} ([0, 1]^2 + (0, 0)).$$

Kocke B i C su iste veličine kao i A , pa je za njih također $k = 0$, dok je pripadni m za kocku B jednak $(7, 0)$, a za kocku C $(2, 3)$. Uistinu,

$$B = [7, 8] \times [0, 1] = 1 \cdot [7, 8] \times [0, 1] = 2^{-0} ([0, 1]^2 + (7, 0)),$$

$$C = [2, 3] \times [3, 4] = 1 \cdot [2, 3] \times [3, 4] = 2^{-0} ([0, 1]^2 + (2, 3)).$$

Kocka D ima dvostruko veći brid od kocke A , a to se u zapisu odražava na parametru k i to tako da je $k = -1$. S druge strane, A i D imaju zajednički donji lijevi vrh $(0, 0)$,

a kako m utječe na translaciju kocke, taj parametar im je isti, odnosno $m = 0$.

$$D = [0, 2]^2 = 2 \cdot [0, 1]^2 = 2^{-(-1)} \left([0, 1]^2 + (0, 0) \right).$$

Kocke E i F su iste veličine kao i D tako da imaju zajednički parametar $k = -1$. Pripadni parametar m je $(2, 0)$ za kocku E , odnosno $(1, 1)$ za kocku F . Doista,

$$E = [4, 6] \times [0, 2] = 2 \cdot [2, 3] \times [0, 1] = 2^{-(-1)} \left([0, 1]^2 + (2, 0) \right),$$

$$F = [2, 4]^2 = 2 \cdot [1, 2]^2 = 2^{-(-1)} \left([0, 1]^2 + (1, 1) \right).$$

Preostala kocka G ima duljinu brida $4 = 2^2$, pa joj je odgovarajući $k = -2$. Nadalje, pripadni pomak joj je $m = (1, 0)$, jer je

$$G = [4, 8] \times [0, 4] = 4 \cdot [1, 2] \times [0, 1] = 2^{-(-2)} \left([0, 1]^2 + (1, 0) \right).$$

Uočimo da, iako kocke D, E i F imaju dvostruko veći brid od kocke A, B i C , pripadni parametar k koji utječe na veličinu brida im je manji. To je posljedica negativnog predznaka uz k u zapisu iz definicije od \mathcal{D}^0 . Dakle, dijadska kocka je veća ako joj je parametar k manji.

Također, uočimo da parametar m određuje pomak kocke, no nije jednak vektoru translacije. To je također posljedica definicije od \mathcal{D}^0 budući da se m množi s 2^{-k} , pa je vektor translacije zapravo $2^{-k}m$. Iz ovoga također slijedi da pomak po koordinatama dijadske kocke duljine brida 2^{-k} mora biti jednak nekom cjelobrojnom višekratniku broja 2^{-k} , odnosno $n2^{-k}$ za neki $n \in \mathbb{Z}$. Prema tome, kocka $I = [1, 3] \times [0, 2]$ nije element iz \mathcal{D}^0 budući da joj je veličina brida 2, a pomak po prvoj koordinati iznosi 1, što nije višekratnik od 2. \square

Neka je $I \in \mathcal{D}^0$ oblika $I = 2^{-k} \left([0, 1]^d + m \right)$, pri čemu su $k \in \mathbb{Z}$ i $m \in \mathbb{Z}^d$. Označimo s $l(I)$ duljinu brida kocke I (udaljenost dvaju susjednih vrhova kocke I), a s $V(I) = l(I)^d$

volumen kocke I u d -dimenzionalnom prostoru.

Napomena 2.2. Uočimo da vrijedi $\lambda|_{\mathcal{D}^0} = V$, odnosno volumen dijadske kocke je jednak Lebesgueovoj mjeri te kocke kao podskupa od \mathbb{R}^d . \square

Kao što se vidi u prethodnom primjeru, iz zapisa kocke I očitavamo da vrijedi $l(I) = 2^{-k}$, a prema tome i $V(I) = (2^{-k})^d = 2^{-kd}$. Također, $l(I)$ i $V(I)$ ne ovisi o parametru m , što je zapravo posljedica činjenice da su duljina brida i volumen kocke invarijantni obzirom na translaciju.

U primjeru 2.1 za promatrane kocke uočavamo da su ili međusobno disjunktne ili je jedna kocka podskup druge. To svojstvo vrijedi općenito za sve kocke iz \mathcal{D}^0 , a iskazano je u sljedećoj lemi.

Lema 2.3. *Za svake dvije dijadske kocke $I, J \in \mathcal{D}^0$ vrijedi $I \subseteq J, J \subseteq I$ ili $I \cap J = \emptyset$. Odnosno, $I \cap J \in \{I, J, \emptyset\}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da za $I = 2^{-k_i} ([0, 1]^d + m_i) = \prod_{k=1}^d [2^{-k_i} m_i^k, 2^{-k_i} (m_i^k + 1)]$ i $J = 2^{-k_j} ([0, 1]^d + m_j) = \prod_{k=1}^d [2^{-k_j} m_j^k, 2^{-k_j} (m_j^k + 1)]$ vrijedi $I \cap J \neq \emptyset$, slijedi $2^{-k_j} m_j^k < 2^{-k_i} (m_i^k + 1)$ te $2^{-k_i} m_i^k < 2^{-k_j} (m_j^k + 1)$ za sve $k \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Pretpostavimo da vrijedi $k_i \geq k_j$. Po prvoj nejednakosti vrijedi $2^{k_i - k_j} m_j^k < m_i^k + 1$, a budući da je $k_i \geq k_j$, pa su $2^{k_i - k_j} m_j^k, m_i^k + 1 \in \mathbb{Z}$, slijedi $2^{k_i - k_j} m_j^k \leq m_i^k$, odnosno $2^{-k_j} m_j^k \leq 2^{-k_i} m_i^k$. Također, po drugoj nejednakosti vrijedi $m_i^k < 2^{k_i - k_j} (m_j^k + 1)$, a budući da su $m_i^k, 2^{k_i - k_j} (m_j^k + 1) \in \mathbb{Z}$, slijedi $m_i^k + 1 \leq 2^{k_i - k_j} (m_j^k + 1)$, odnosno $2^{-k_i} (m_i^k + 1) \leq 2^{-k_j} (m_j^k + 1)$. Dakle, za svaki $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ vrijedi $2^{-k_j} m_j^k \leq 2^{-k_i} m_i^k < 2^{-k_i} (m_i^k + 1) \leq 2^{-k_j} (m_j^k + 1)$, što povlači $I \subseteq J$, odnosno $I \cap J = I$.

Analogno, zamjenom uloga I i J , dobivamo da vrijedi $J \subseteq I$, tj. $I \cap J = J$.

Time smo pokazali da je skup $I \cap J$ jednak jednom od skupova \emptyset, I ili J . $\square \mathfrak{E} \mathfrak{D}$.

Sada uvodimo dijadske kocke koje su dobivene iz \mathcal{D}^0 dodatnim translacijama i to takvima da sve kocke jednake veličine imaju isti pomak. Tu ćemo uključiti i mogućnost

nul-pomaka, odnosno pomaka svih kocki za nul-vektor, što znači da efektivno ne mijenjamo \mathcal{D}^0 . Stoga novu strukturu možemo smatrati poopćenjem familije \mathcal{D}^0 . Formalno, novu strukturu definiramo na sljedeći način.

Neka je $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ dvostrani beskonačni niz elemenata od $\{0, 1\}^d$ te $I \in \mathcal{D}^0$. Tada definiramo

$$I \dot{+} \omega := I + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j} \omega_j = \left\{ x + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j} \omega_j : x \in I \right\}.$$

Ovaj skup je dobro definiran jer za danu vrijednost $l(I)$ vrijedi $\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j} \omega_j \leq \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j}$
 $= \sum_{j=-2\lfloor \log_2 l(I) \rfloor + 1}^{+\infty} 2^{-j} < +\infty$, pri čemu je posljednji red konačan jer je to konvergentan geometrijski red. Definirajmo

$$\mathcal{D}^\omega := \{I \dot{+} \omega : I \in \mathcal{D}^0\}.$$

Familije \mathcal{D}^ω nazivamo *familijama slučajnih dijadskih kocki*.

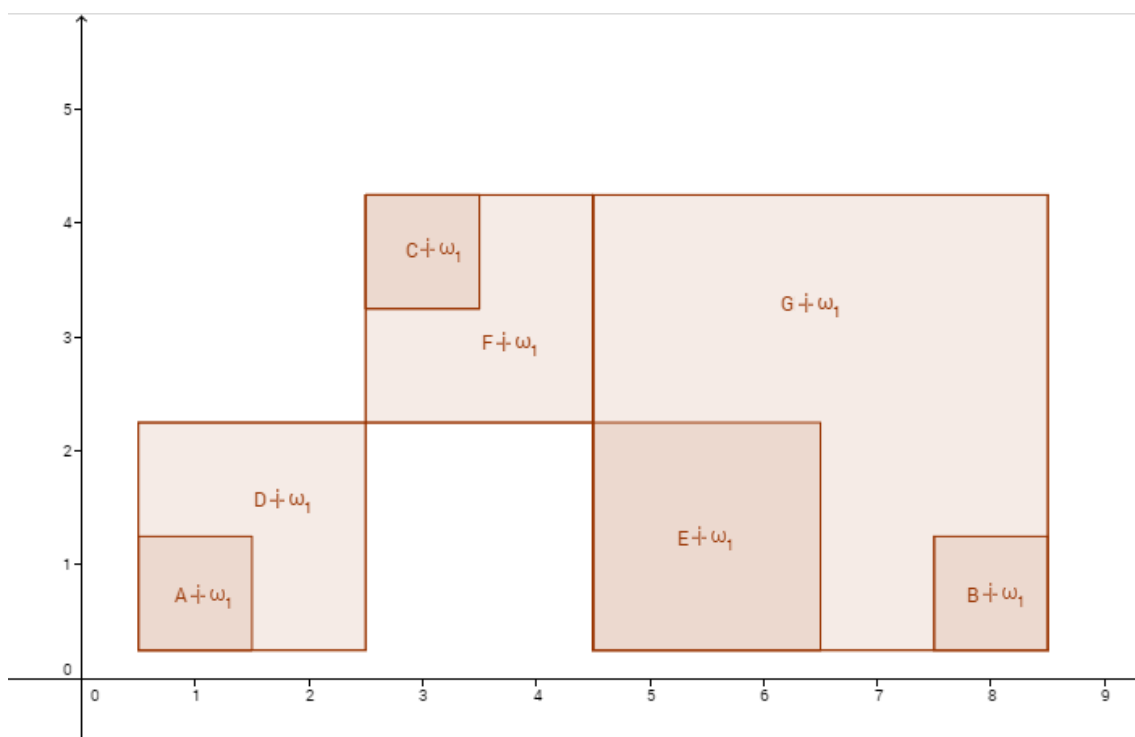
Primjer 2.4. Promotrimo što se događa s dijadskim kockama iz primjera 2.1 kada ih pomaknemo za određene ω .

Neka je $\omega_1 = (\omega_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$ dvostrani beskonačni niz u $\{0, 1\}^d$ takav da je

$$\omega_2^1 = (0, 1), \omega_1^1 = (1, 0) \text{ te } \omega_j^1 = (0, 0) \text{ za } j \neq 1, 2.$$

Tada za svaki $I \in \mathcal{D}^{\omega_1}$, po definiciji te familije vrijedi

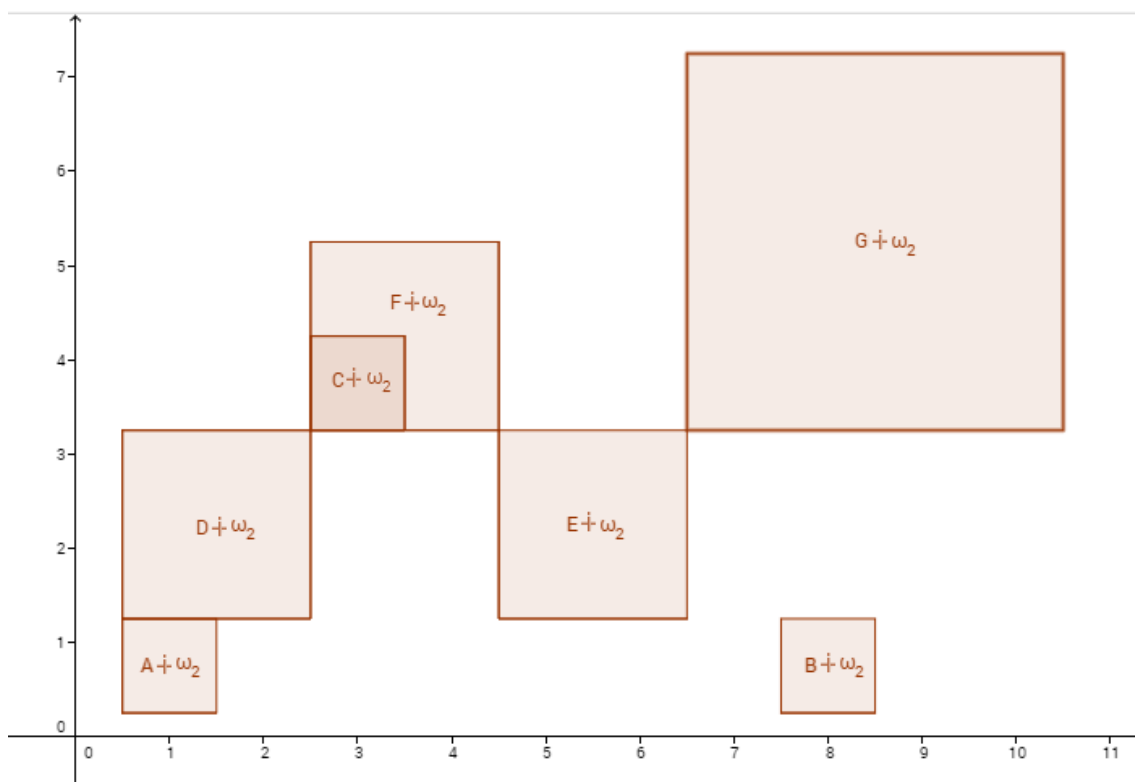
$$I \dot{+} \omega_1 = I + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j} \omega_j^1 = \begin{cases} I, & 2^{-2} \geq l(I), \\ I + 2^{-2}(0, 1), & 2^{-1} = l(I), \\ I + 2^{-2}(0, 1) + 2^{-1}(1, 0), & 2^0 \leq l(I). \end{cases}$$

Slika 2.2: Prikaz nekih elemenata iz \mathcal{D}^{ω_1} .

$$= \begin{cases} I, & 0.25 \geq l(I), \\ I + (0, 0.25), & 0.5 = l(I), \\ I + (0.5, 0.25), & 1 \leq l(I). \end{cases}$$

U primjeru 2.1 duljine brida svih promatranih kocki su veće ili jednake od 1, pa su novodobivene kocke

$$\begin{aligned} A \dot{+} \omega_1 &= [0, 1]^2 + (0.5, 0.25) = [0.5, 1, 5] \times [0.25, 1.25], \\ B \dot{+} \omega_1 &= [7, 8] \times [0, 1] + (0.5, 0.25) = [7.5, 8.5] \times [0.25, 1.25], \\ C \dot{+} \omega_1 &= [2, 3] \times [3, 4] + (0.5, 0.25) = [2.5, 3.5] \times [3.25, 4.25], \\ D \dot{+} \omega_1 &= [0, 2]^2 + (0.5, 0.25) = [0.5, 2, 5] \times [0.25, 2.25], \\ E \dot{+} \omega_1 &= [4, 6] \times [0, 2] + (0.5, 0.25) = [4.5, 6.5] \times [0.25, 2.25], \\ F \dot{+} \omega_1 &= [2, 4]^2 + (0.5, 0.25) = [2.5, 4, 5] \times [2.25, 4.25], \end{aligned}$$

Slika 2.3: Prikaz nekih elemenata iz \mathcal{D}^{ω_2} .

$$G \dot{+} \omega_1 = [4, 8) \times [0, 4) + (0.5, 0.25) = [4.5, 8.5) \times [0.25, 4.25).$$

Sve novonastale kocke dobivene su translacijom kocki iz primjera 2.1 za vektor smjera $(0.5, 0.25)$. Dakle, relativne pozicije tih kocki su jednake, odnosno udaljenosti i pozicije jedne kocke u odnosu na drugu su iste kao i prije, a jedina razlika je u apsolutnoj poziciji u koordinatnom sustavu.

Nešto složeniji, ali i zanimljiviji slučaj je pomicanje tih kocki za $\omega_2 = (\omega_j^2)_{j \in \mathbb{Z}}$ takav da je

$$\omega_2^2 = (0, 1), \omega_1^2 = (1, 0), \omega_0^2 = (0, 1), \omega_{-1}^2 = (1, 1) \text{ te } \omega_j^1 = (0, 0) \text{ za } j \neq -1, 0, 1, 2.$$

Uočimo da je $\omega_2^1 = \omega_2^2$ i $\omega_1^1 = \omega_1^2$, pa su translacije za 0.5 i 0.25 po prvoj, odnosno

drugoj koordinati jednake. U ovom slučaju pojavljuju se i translacije za 1 i 2 koje su određene komponentama ω_0^2 i ω_{-1}^2 , pa za $I \in \mathcal{D}^{\omega_2}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
 I \dot{+} \omega_2 &= I + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j} \omega_j^2 \\
 &= \begin{cases} I, & 2^{-2} \geq l(I), \\ I + 2^{-2}(0, 1), & 2^{-1} = l(I), \\ I + 2^{-2}(0, 1) + 2^{-1}(1, 0), & 2^0 = l(I), \\ I + 2^{-2}(0, 1) + 2^{-1}(1, 0) + 2^0(0, 1), & 2^1 = l(I), \\ I + 2^{-2}(0, 1) + 2^{-1}(1, 0) + 2^0(0, 1) + 2^1(1, 1), & 2^2 \leq l(I), \end{cases} \\
 &= \begin{cases} I, & 0.25 \geq l(I), \\ I + (0, 0.25), & 0.5 = l(I), \\ I + (0.5, 0.25), & 1 = l(I), \\ I + (0.5, 1.25), & 2 = l(I), \\ I + (2.5, 3.25), & 4 \leq l(I). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Za kocke iz primjera 2.1 vrijedi

$$A \dot{+} \omega_2 = [0, 1]^2 + (0.5, 0.25) = [0.5, 1, 5] \times [0.25, 1.25],$$

$$B \dot{+} \omega_2 = [7, 8] \times [0, 1] + (0.5, 0.25) = [7.5, 8.5] \times [0.25, 1.25],$$

$$C \dot{+} \omega_2 = [2, 3] \times [3, 4] + (0.5, 0.25) = [2.5, 3.5] \times [3.25, 4.25],$$

$$D \dot{+} \omega_2 = [0, 2]^2 + (0.5, 1.25) = [0.5, 2, 5] \times [1.25, 3.25],$$

$$E \dot{+} \omega_2 = [4, 6] \times [0, 2] + (0.5, 1.25) = [4.5, 6.5] \times [1.25, 3.25],$$

$$F \dot{+} \omega_2 = [2, 4]^2 + (0.5, 1.25) = [2.5, 4, 5] \times [3.25, 5.25],$$

$$G \dot{+} \omega_2 = [4, 8] \times [0, 4] + (2.5, 3.25) = [6.5, 10.5] \times [3.25, 7.25].$$

Primijetimo kako zapravo vrijedi $A \dot{+} \omega_1 = A \dot{+} \omega_2$, $B \dot{+} \omega_1 = B \dot{+} \omega_2$ i $C \dot{+} \omega_1 = C \dot{+} \omega_2$ budući da je $\omega_2^1 = \omega_2^2$ i $\omega_1^1 = \omega_1^2$ te da ω_0^2 i ω_{-1}^2 ne utječu na pomak kocki A, B i C . S druge strane, za kocke duljih bridova, u ovom slučaju D, E, F i G dobili smo dva različita pomaka, pa tako i po dvije različite pomaknute kocke za svaku od ovih početnih kocki. \square

Za kocke iz $I \in \mathcal{D}^\omega$ analogno označimo s $l(I)$ duljinu brida kocke I te s $V(I) = l(I)^d$ volumen kocke I .

Ranije smo uočili kako su duljina brida i volumen kocke invarijantni obzirom na translaciju. Budući da je, za $I \in \mathcal{D}^0$, kocka $I \dot{+} \omega$ dobivena translacijom kocke I za $\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j} \omega_j$, vrijedi $l(I) = l(I \dot{+} \omega)$ te $V(I) = V(I \dot{+} \omega)$.

Svojstvo koje smo dokazali u lemi 2.3 za familiju dijadskih kocki \mathcal{D}^0 vrijedi i za familiju slučajnih dijadskih kocki \mathcal{D}^ω , pri čemu je $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}} \subseteq \{0, 1\}^d$ proizvoljan.

Lema 2.5. *Neka je $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}} \subseteq \{0, 1\}^d$ te neka su $I, J \in \mathcal{D}^\omega$. Tada je $I \cap J \in \{I, J, \emptyset\}$.*

Dokaz. Po definiciji skupa \mathcal{D}^ω , postoje $I^0, J^0 \in \mathcal{D}^0$ za koje vrijedi $I = I^0 \dot{+} \omega = I^0 +$

$$\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j} \omega_j \text{ te } J = J^0 \dot{+} \omega = J^0 + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(J)}} 2^{-j} \omega_j.$$

U slučaju da vrijedi $l(I) = l(J)$, imamo jednakost suma $\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j} \omega_j = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(J)}} 2^{-j} \omega_j$.

Budući je da po lemi 2.3 skup $I^0 \cap J^0$ jednak \emptyset, I^0 ili J^0 , slijedi da je $I \cap J$ jednak, redom, \emptyset, I ili J .

Pretpostavimo da vrijedi $l(I) < l(J)$ te označimo $J' := J^0 + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j} \omega_j$. Kako je

$I^0 \cap J^0 \in \{\emptyset, I^0, J^0\}$, slijedi $I \cap J' \in \{\emptyset, I, J'\}$, odnosno $I \cap J' \in \{\emptyset, I\}$ budući da je $l(I) < l(J) = l(J')$. Uz to, po lemi 2.3 možemo zaključiti da J' sadrži točno $\frac{l(J')}{l(I)}$

međusobno disjunktne slučajne dijadske kocke duljine brida $l(I)$.

Iz definicije od J' te prikaza od J slijedi $J = J' + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ l(I) \leq 2^{-j} < l(J)}} 2^{-j} \omega_j$. No, za svaki takav

indeks j postoji $m_j \in \mathbb{N}_0$ za koji vrijedi $2^{-j} = 2^{m_j} \cdot l(I)$. Prema tome,
$$\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ l(I) \leq 2^{-j} < l(J)}} 2^{-j} \omega_j =$$

$$\left(\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ l(I) \leq 2^{-j} < l(J)}} 2^{m_j} \omega_j \right) l(I)$$
. Dakle, J je kocka dobivena pomakom kocke J' za cjelobrojni

višekratnik od $l(I)$ (odnosno, za neku vrijednost $m \cdot l(I)$, $m \in \mathbb{N}_0$). Iz toga zaključujemo

da za svaku podkocku I' od J' duljine brida $l(I') = l(I)$ vrijedi $I' \subseteq J$ ili $I' \cap J = \emptyset$,

te ako je $I'' \in \mathcal{D}^\omega$ takva da je $I'' \cap J \neq \emptyset$, mora vrijediti $I'' \subseteq J$, odnosno $I'' \cap J = I''$.

Primjenom ovih zaključaka na danu kocku I slijedi $I \cap J \in \{\emptyset, I\}$.

Za slučaj $l(J) < l(I)$ analogno slijedi (zamjenom uloga I i J) $I \cap J = \{\emptyset, J\}$. $\Omega.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}$.

Do sada smo uočili neka osnovna svojstva dijadskih kocki, poput veličine i pozicije u prostoru \mathbb{R}^d ili relativne u odnosu na neku drugu kocku. Za ovaj rad važno je još jedno svojstvo karakteristično isključivo za slučajne dijadske kocke koje nije elementarno kao prethodna svojstva, no u nastavku će se pokazati ključnim.

Definicija 2.6. Neka je $\omega \in (\{0, 1\}^d)^\mathbb{Z}$. Neka je $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$ proizvoljan te $r \in \mathbb{N}$ broj koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $2^{2-r\gamma} \leq 1$,
2. $\frac{d}{\gamma} 2^{3-r\gamma} < 1$,
3. $2^{r(1-\gamma)} > \frac{\sqrt{d}}{2}$.

Za kocku $I \in \mathcal{D}^\omega$ kažemo da je *loša* ako postoji $J \in \mathcal{D}^\omega$ takva da vrijedi $l(J) \geq 2^r l(I)$ i koja zadovoljava

$$d(I, \partial J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}.$$

U suprotnom kažemo da je kocka $I \in \mathcal{D}^\omega$ *dobra*. Svojstvo da je I loša ili dobra kocka nazivat ćemo *svojstvo dobrote*.

Primijetimo prvo da možemo odabrati ovakav r . Naime, postoje (dovoljno veliki) $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi $2^{2-r_1\gamma} \leq 1$, $\frac{d}{\gamma} 2^{3-r_2\gamma} < 1$ i $2^{r_3(1-\gamma)} > \frac{\sqrt{d}}{2}$. Tada $r :=$

$\max\{r_1, r_2, r_3\}$ zadovoljava sva tri svojstva. Nadalje, za r iz ove definicije po prvom svojstvu slijedi da je $r > 2$.

Intuitivno, kocka I je loša ako i samo ako se nalazi dovoljno blizu ruba kocke J s mnogo većom duljinom brida od kocke I .

Autori rada [12], koji su prvi uveli definiciju dobrih/loših kocki, koristili su odabir

$$\gamma = \frac{\alpha}{2(d + \alpha)}, \quad (2.1)$$

pri čemu je $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ parametar dan u definiciji Calderón-Zygmundove jezgre. Ipak, mi ćemo samo trebati

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{d + \alpha}$$

i dokaz ćemo provesti uz takvu općenitiju vrijednost od γ , a tek na kraju ćemo (radi ilustracije) uvrstiti i gornji posebni odabir.

2.2. Vjerojatnosna struktura

Označimo sada $\Omega := (\{0, 1\}^d)^{\mathbb{Z}}$ i neka je \mathcal{F} σ -algebra generirana tzv. cilindrima; vidjeti detalje u [14]. Neka je \mathbb{P} uniformna vjerojatnost na izmjerivom prostoru (Ω, \mathcal{F}) , u smislu da je za $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \Omega$, vjerojatnost da $\omega_j, j \in \mathbb{Z}$, poprimi proizvoljnu vrijednost iz $\{0, 1\}^d$ ista za svaku vrijednost i iznosi $\frac{1}{2^d} = 2^{-d}$. Neka je također \mathbb{P} vjerojatnost takva da su komponente međusobno nezavisne, odnosno da je familija događaja takvih da svaki događaj ovisi o jedinstvenoj komponenti $\omega_j, j \in \mathbb{Z}$ zapravo familija nezavisnih događaja u odnosu na vjerojatnost \mathbb{P} . Time smo definirali vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Rečeno jezikom teorije mjere kao u [1] ili [4], taj vjerojatnosni prostor je beskonačni produkt simetričnih prostora mjere na $\{0, 1\}^d$.

Navedenu vjerojatnost \mathbb{P} često ćemo označavati s \mathbb{P}_ω (iako vjerojatnost ne ovisi o zadanom ω), kao što ćemo i očekivanje \mathbb{E} na pripadnom vjerojatnosnom prostoru označavati

s \mathbb{E}_ω , čime želimo naglasiti da se očekivanje uzima po ω .

Važna svojstva slučajne dijadske kocke su pozicija u prostoru \mathbb{R}^d , određena koordinatama nekog od njenih vrhova, te njena dobrotu. Zanimljivo je da su ta dva svojstva međusobno nezavisna. Da bismo to formalno dokazali, uvodimo sljedeće definicije.

Neka je $I \in \mathcal{D}^0$ proizvoljan i oblika $I = 2^{-l}([0, 1]^d + m)$ za neke $l \in \mathbb{Z}$ i $m \in \mathbb{Z}^d$. Zatim, neka su funkcije $X_{\text{pozicija}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ i $X_{\text{dobrota}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dane s

$$X_{\text{pozicija}}(\omega) := 2^{-l}m + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j < l(I)}} 2^{-j}\omega_j,$$

$$X_{\text{dobrota}}(\omega) := \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) = \begin{cases} 1, & I \dot{+} \omega \text{ je dobra kocka,} \\ 0, & I \dot{+} \omega \text{ je loša kocka.} \end{cases}$$

Uočimo da su to slučajne varijable na promatranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\omega)$.

Vrijedi:

Lema 2.7. *Neka je $I \in \mathcal{D}^0$ te $\omega \in \Omega$. Tada su pozicija i dobrota slučajne dijadske kocke $I \dot{+} \omega$ nezavisna svojstva.*

Dokaz. U duhu prethodnih definicija, treba pokazati da su X_{pozicija} i X_{dobrota} nezavisne slučajne varijable.

Iz definicije funkcije X_{pozicija} slijedi da ta funkcija ovisi o onim i samo onim ω_j za koje indeks j zadovoljava $2^{-j} < l(I)$. S druge strane, dobrota od I ovisi o tome koliko je $I \dot{+} \omega$ relativno blizu nekoj drugoj slučajnoj dijadskoj kocki $J \dot{+} \omega$, $J \in \mathcal{D}^0$, za koju također vrijedi i $l(J) \geq 2^r l(I)$, pa posebno $l(J) > l(I)$. Vrijedi

$$J \dot{+} \omega = J + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(J)}} 2^{-j}\omega_j = J + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j}\omega_j + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ l(I) \leq 2^{-j} < l(J)}} 2^{-j}\omega_j.$$

Suma $\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j}\omega_j$ se pojavljuje i u raspisu od $I \dot{+} \omega$ i od $J \dot{+} \omega$, pa prema tome na relativnu poziciju, odnosno na dobrotu kocke I utječu oni i samo oni ω_j za koje indeks

j zadovoljava $l(I) \leq 2^{-j} < l(J)$.

Budući da ne postoji indeks $j \in \mathbb{Z}$ takav da i X_{pozicija} i X_{dobrota} ovise o ω_j , po odabiru vjerojatnosne mjere \mathbb{P} i nezavisnosti komponenti od ω , slijedi da su pozicija i dobrota od I nezavisna svojstva. $\Omega.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Primijetimo sljedeće: po definiciji dobre kocke, dobrota kocke $I \in \mathcal{D}^\omega$ u odnosu na neku drugu kocku $J \in \mathcal{D}^\omega$ ovisi isključivo o relativnoj duljini brida J u odnosu na brid kocke I te o relativnoj poziciji od J , točnije od ruba ∂J u odnosu na I . Naime, I je loša u odnosu na J ako vrijedi $\frac{l(J)}{l(I)} \geq 2^r$ te $d(I, \partial J) \leq l(I) \left(\frac{l(J)}{l(I)} \right)^{1-\gamma}$. Dakle, dobrota od I ovisi isključivo o relativnim veličinama (duljini brida ili poziciji) u odnosu na J , pa zaključujemo da je vjerojatnost da je kocka I dobra neovisna o odabiru J , odnosno ista je za svaki $I \in \mathcal{D}^\omega$.

To nas motivira da uvedemo oznake

$$\pi_L := \mathbb{P}_\omega(I \dagger \omega \text{ je loša kocka}),$$

$$\pi_D := \mathbb{P}_\omega(I \dagger \omega \text{ je dobra kocka}) (= 1 - \pi_L),$$

pri čemu je $I \in \mathcal{D}^0$ proizvoljan.

Po gornjoj diskusiji zaključujemo da π_L i π_D ovise o odabiru parametara γ i r , kao i o dimenziji d prostora \mathbb{R}^d . Kako je π_L vjerojatnost, vrijedi $0 \leq \pi_L \leq 1$. Zanima nas gornja granica ove vjerojatnosti u ovisnosti o ovim parametrima, a i željeli bismo imati pozitivnu vjerojatnost da je kocka $I \in \mathcal{D}^\omega$ dobra. Rezultat nam daje sljedeća lema, koja u svom dokazu krije i motivaciju prvih dviju granica za parametar r u definiciji dobre kocke $\left(2^{2-r\gamma} \leq 1 \text{ i } \frac{d}{\gamma} 2^{3-r\gamma} < 1 \right)$; prva granica je nužna da bismo iskoristili Bernoullijevu nejednakost iskazanu u dokazu, a druga da bi vrijedilo $\pi_D > 0$, uvjet ključan za dokaz jednog od glavnih rezultata ovog rada.

Lema 2.8. *Vrijedi*

$$\pi_L \leq \frac{d}{\gamma} 2^{3-r\gamma} < 1.$$

Posebno, vjerojatnost da je kocka $I \in \mathcal{D}^\omega$ dobra je strogo veća od nule, tj. $\pi_D > 0$.

Dokaz. Neka su $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ proizvoljni. Postoji jedinstveni $J' \in \mathcal{D}^\omega$ za koji vrijedi $I \subseteq J'$ te $l(J') = l(J)$. U slučaju da je $J' \neq J$, vrijedi $I \cap J = \emptyset$, pa prema tome vrijedi $d(I, \partial J') \leq d(I, J) = d(I, \partial J)$. Ako pretpostavimo da vrijedi nejednakost $d(I, \partial J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$ iz definicije loše kocke, slijedi $d(I, \partial J') \leq d(I, \partial J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} = l(I)^\gamma l(J')^{1-\gamma}$. Zaključujemo, ako je I loša kocka, onda je I loša obzirom na neku kocku J' koja sadrži I .

Stoga u nastavku dokaza, da bismo procijenili vjerojatnost da je I loša kocka, promatramo slučajne dijadske kocke J koje sadrže I , tj. $I \subseteq J$.

Također, ako je I loša kocka obzirom na kocku J , vrijedi $l(J) \geq 2^r l(I)$, odnosno $l(J) = 2^k l(I)$ za neki $k \geq r$. Kao i u dokazu leme 2.7, slijedi da je relativna pozicija od I u odnosu na J određena sumom

$$\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ l(I) \leq 2^{-j} < 2^k l(I)}} 2^{-j} \omega_j.$$

Primijetimo da ova suma, ovisno o odabiru $\omega_j \in \{0, 1\}$ za promatrane indekse j , može poprimiti ukupno $(2^d)^k = 2^{kd}$ različitih vrijednosti.

Uočimo da se udaljenost I od ∂J može izraziti kao $m \cdot l(I)$ za neki $m \in \mathbb{Z}$. U slučaju da je I loš u odnosu na J , vrijedi $d(I, \partial J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} = \left(\frac{l(I)}{l(J)}\right)^{\gamma-1} l(I) = 2^{k(1-\gamma)} l(I)$, pa vrijednost m mora biti manja od

$$\begin{aligned} \lceil 2^{k(1-\gamma)} \rceil l(I) &\leq (2^{k(1-\gamma)} + 1) l(I) = (2^{k(1-\gamma)} + 1) 2^{-k} l(J) \leq 2 \cdot 2^{k(1-\gamma)} \cdot 2^{-k} l(J) \\ &= 2^{1-k\gamma} l(J), \end{aligned}$$

budući da je $k(1-\gamma) > 0$, pa je $2^{k(1-\gamma)} > 1$.

U slučaju da je kocka I dobra u odnosu na kocku J , ona se nalazi u podskupu od J koji

je također kocka, u smislu da je to Kartezijev produkt intervala (bridova) duljine

$$l(J) - 2 \lceil 2^{k(1-\gamma)} \rceil l(I) \geq l(J) - 2^{2-k\gamma} l(J).$$

Prema tome, volumen područja koje čine sve loše podkocke od J čiji je brid duljine $l(I)$ jednako je

$$\begin{aligned} V(J) - \left(l(J) - 2 \lceil 2^{k(1-\gamma)} \rceil l(I) \right)^d &\leq V(J) - \left(l(J) - 2^{2-k\gamma} l(J) \right)^d \\ &= V(J) - V(J) \left(1 - 2^{2-k\gamma} \right)^d \stackrel{(*)}{\leq} V(J) - V(J) \left(1 - d2^{2-k\gamma} \right) \\ &= \left(1 - 1 + 2^{2-k\gamma} d \right) V(J) = 2^{2-k\gamma} dV(J). \end{aligned}$$

Pritom nejednakost (*) slijedi iz Bernoullijeve nejednakosti

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \text{ za sve } n \in \mathbb{N} \text{ i za sve } x \in \mathbb{R}, x \geq -1, \quad (2.2)$$

(koja se lako dokazuje matematičkom indukcijom po n) te iz činjenice da, po odabiru broja $r \in \mathbb{N}$, vrijedi $2^{2-r\gamma} \leq 1$, odnosno $-2^{2-k\gamma} \geq -2^{2-r\gamma} \geq -1$.

Budući da je \mathbb{P}_ω uniformna vjerojatnost, vjerojatnost da je I loš u odnosu na J možemo računati kao omjer volumena područja svih loših podkocki od J duljine brida $l(I)$ te volumena od J , a ta vjerojatnost nije veća od $\frac{2^{2-k\gamma} dV(J)}{V(J)} = 2^{2-k\gamma} d$.

Obzirom da je k bio proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava $k \geq r$, odnosno da promatramo da je kocka I loša u odnosu na bilo koju nadkocku J čija je duljina brida barem $2^r l(I)$, ukupna vjerojatnost da je I loša kocka jednaka je

$$\begin{aligned} \pi_L = \mathbb{P}_\omega (I \dagger \omega \text{ je loša}) &\leq \sum_{k=r}^{+\infty} 2^{2-k\gamma} d = 2^3 d \sum_{k=r}^{+\infty} 2^{-k\gamma-1} = 2^3 d \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{1}{2^{-k-1}} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} 2^{-1} (2^{-k})^\gamma dt \\ &= 2^3 d \sum_{k=r}^{+\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} (2^{-k})^{\gamma-1} dt \stackrel{\gamma-1 < 0}{\leq} 2^3 d \sum_{k=r}^{+\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} t^{\gamma-1} dt \stackrel{(**)}{=} 2^3 d \int_0^{2^{-r}} t^{\gamma-1} dt \end{aligned}$$

$$= 2^3 d \frac{1}{\gamma} (2^{-r\gamma} - 0) = \frac{d}{\gamma} 2^{3-r\gamma} < 1.$$

Pritom jednakost (**) slijedi iz Beppo-Levijevog teorema ([1, kor. 2.4.2]) primijenjenog na niz karakterističnih funkcija $(\mathbb{1}_{[2^{-k-1}, 2^{-k}]} : k \in \mathbb{N}, k \geq r)$. Konačno, zbog $\pi_L < 1$ vrijedi $\pi_D = 1 - \pi_L > 0$. $\Omega.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}$.

Poglavlje 3

Haarov sistem funkcija nad familijom slučajnih dijadskih kocki

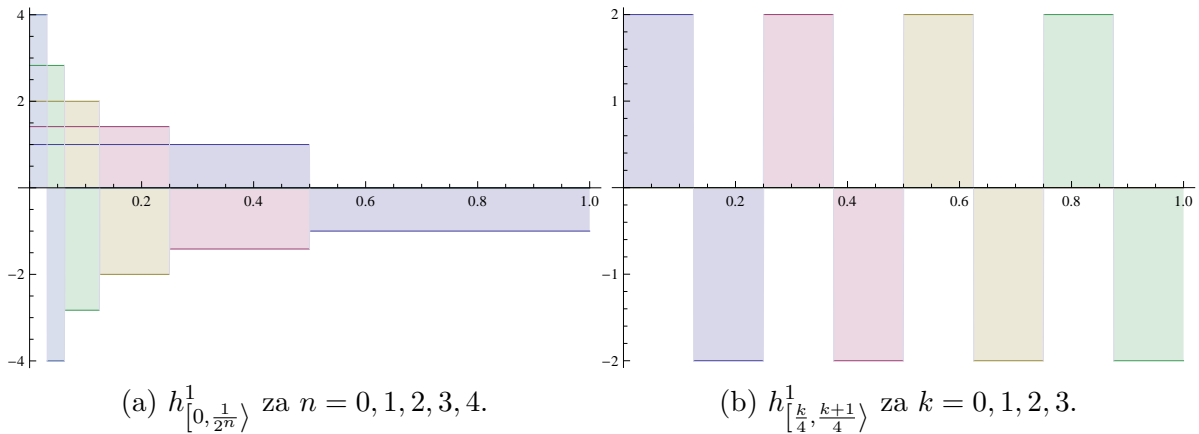
3.1. Haarove funkcije

Sljedeći sistem je uveo Alfréd Haar [5] još 1910. godine. Prvo definirajmo Haarovu funkciju u jednoj dimenziji, tj. za $d = 1$.

Definicija 3.1. Neka je $I \in \mathcal{D}^\omega$ proizvoljan i oblika $I = [a, b)$, za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Označimo lijevi podinterval od I s $I_l := \left[a, \frac{a+b}{2} \right)$ i desni podinterval od I s $I_r := \left[\frac{a+b}{2}, b \right)$. Definiramo *Haarove funkcije* nad intervalom I na sljedeći način:

$$h_I^0(x) := \frac{1}{\sqrt{V(I)}} \mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{V(I)}}, & x \in I, \\ 0, & x \notin I; \end{cases}$$

$$h_I^1(x) := \frac{1}{\sqrt{V(I)}} (\mathbb{1}_{I_l}(x) - \mathbb{1}_{I_r}(x)) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{V(I)}}, & x \in I_l, \\ -\frac{1}{\sqrt{V(I)}}, & x \in I_r, \\ 0, & x \notin I_l \cup I_r. \end{cases}$$



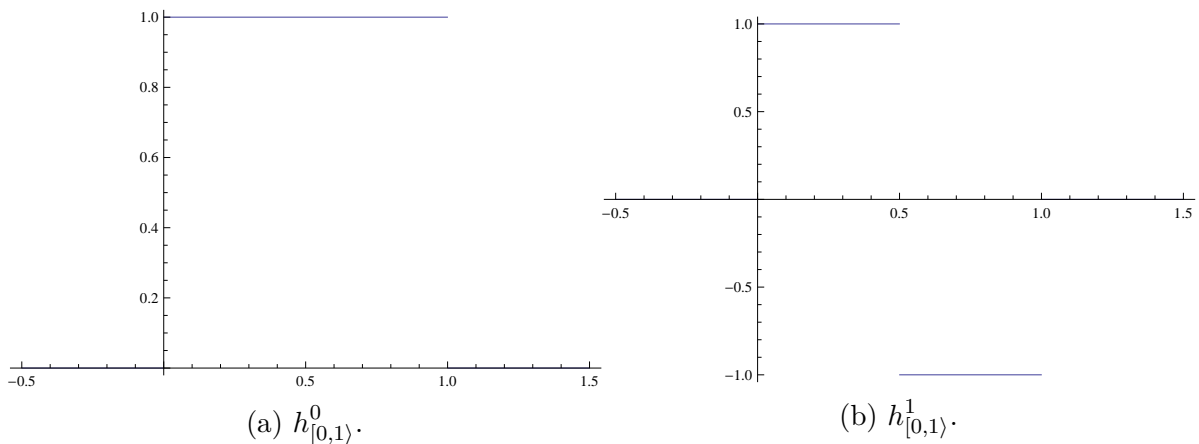
Slika 3.1: Prikaz utjecaja veličine kocke i translacije kocke na vrijednosti Haarovih funkcija.

U višedimenzionalnom prostoru \mathbb{R}^d Haarove funkcije definiramo na sljedeći način.

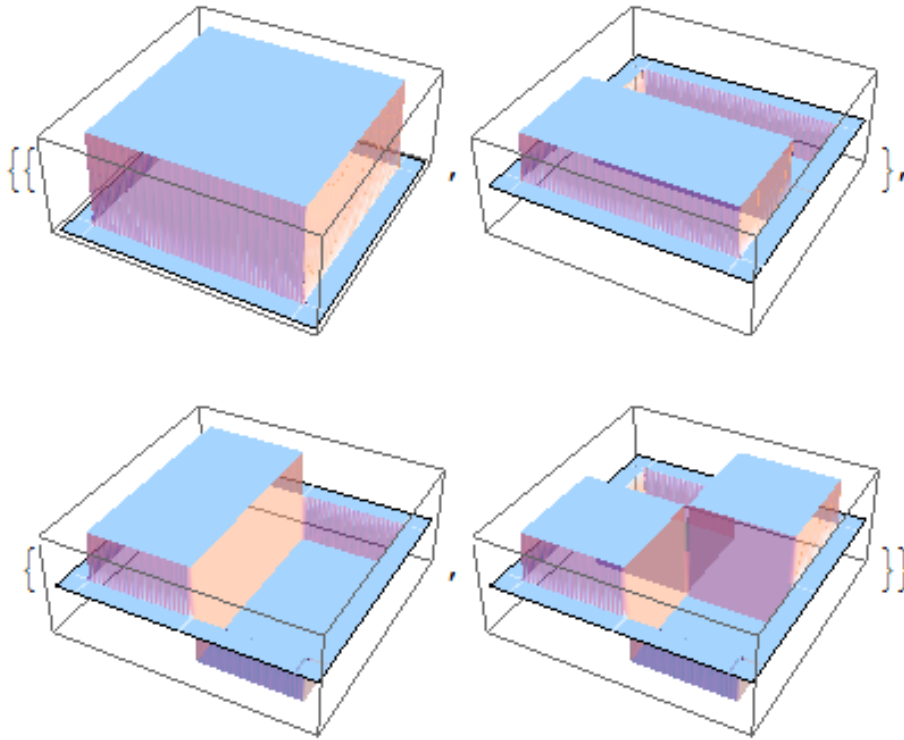
Definicija 3.2. Neka je $d \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Za $I \in \mathcal{D}^\omega$ oblika $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$, pri čemu su I_1, I_2, \dots, I_d standardni dijadski intervali (elementi od \mathcal{D}^ω u slučaju $d = 1$), te za $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d) \in \{0, 1\}^d$, definiramo *Haarovu funkciju* nad I u točki $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ kao

$$h_I^\eta(x) = h_{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d}^{(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d)}(x_1, x_2, \dots, x_d) := \prod_{i=1}^d h_{I_i}^{\eta_i}(x_i) = h_{I_1}^{\eta_1}(x_1) \cdot h_{I_2}^{\eta_2}(x_2) \cdot \dots \cdot h_{I_d}^{\eta_d}(x_d).$$

Primjer 3.3. Promotrimo kako Haarove funkcije izgledaju za dimenziju $d = 1$ na kocki $[0, 1]$.



Slika 3.2: Haarove funkcije u jednoj dimenziji na kocki $[0, 1]$.

Slika 3.3: Haarove funkcije na kocki $[0, 1]^2$.

Iz slike uočavamo da vrijedi $\int_0^1 h_I^0(x) dx = 1 = \sqrt{V(I)}$ te $\int_0^1 h_I^1(x) dx = 0$, što se može pokazati i općenito za proizvoljan $d \in \mathbb{N}$ i za proizvoljnu kocku I .

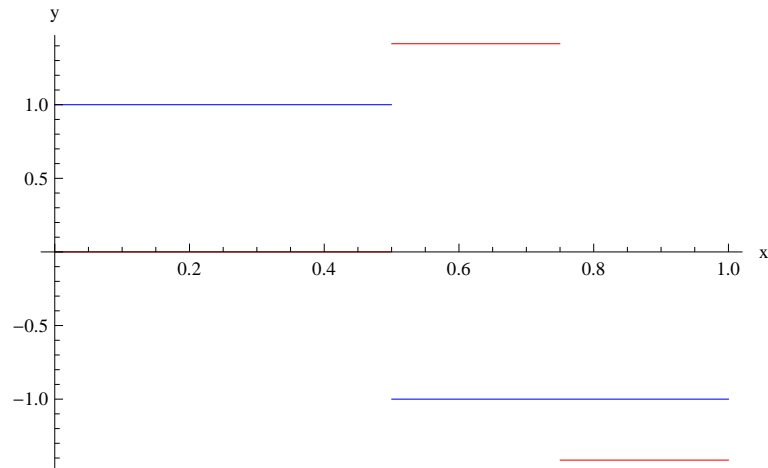
Naime, za $d = 1$ i $I \in \mathcal{D}^\omega$ vrijedi $\int_{\mathbb{R}} h_I^0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{V(I)}} \int_I dx = \frac{1}{\sqrt{V(I)}} \cdot V(I) = \sqrt{V(I)}$

te $\int_{\mathbb{R}} h_I^1(x) dx = \frac{1}{V(I)} \left(\int_{I_l} dx - \int_{I_r} dx \right) = \frac{1}{V(I)} (V(I_l) - V(I_r)) = 0$, budući da iz def-

inicije poluintervalu danog intervala slijedi $V(I_l) = V(I_r) = \frac{V(I)}{2}$.

Za općeniti $d \in \mathbb{N}$ te $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d \in \mathcal{D}^\omega$ i $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d) \in \{0, 1\}^d$ po Fubinijevom teoremu za apsolutno integrabilne funkcije vrijedi $\int_{\mathbb{R}^d} h_I^\eta(x) dx = \prod_{i=1}^d \left(\int_{I_i} h_{I_i}^{\eta_i}(x_i) dx_i \right)$,

pa je taj integral jednak $\sqrt{V(I)}$ u slučaju $\eta = \theta$ (budući da su svi integrali u produktu jednaki $\sqrt{V(I_i)} = \sqrt{l(I)}$), a jednak je 0 čim je $\eta \neq \theta$ (budući da postoji $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ za koji je $\eta_i = 1$ pa je $\int_{I_i} h_{I_i}^{\eta_i}(x_i) dx_i = 0$, a onda je i produkt jednak nuli).



Slika 3.4: Haarove funkcije na kocki $[0, 1)$ i na prvoj podkocki $[\frac{1}{2}, 1)$ za $d = 1$.

Primijetimo još da za svaki $\eta \in \{0, 1\}^d$ i za svaki $I \in \mathcal{D}^\omega$ vrijedi $|h_I^\eta| = h_I^\theta$, budući da se vrijednosti tih dviju funkcija razlikuju isključivo do na predznak.

Dakle, za svaki $I \in \mathcal{D}^\omega$ vrijedi

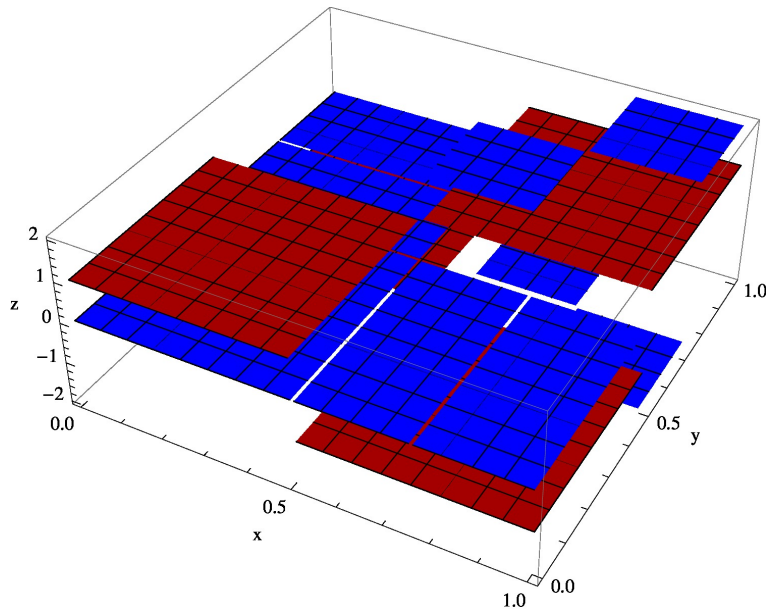
$$\int_{\mathbb{R}^d} h_I^\eta(x) dx = \begin{cases} \sqrt{V(I)}, & \eta = \theta \\ 0, & \eta \neq \theta \end{cases}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |h_I^\eta(x)| dx = \sqrt{V(I)}. \quad (3.1)$$

□

Primjer 3.4. Sada usporedimo dvije Haarove funkcije dane na nekoj kocki I i na njenoj prvoj podkocki, odnosno na kocki sadržanoj u I čija je duljina brida jednaka $\frac{l(I)}{2}$.

Pogledajmo slike 3.4 i 3.5.

Ono što uočavamo iz tih slika jest da vrijedi $\int_{\mathbb{R}} h_{[0,1)}^1(x) h_{[\frac{1}{2},1)}^1(x) dx = 0$, kao i $\int_{\mathbb{R}^2} h_{[0,1)^2}^{(1,1)}(x) h_{[\frac{1}{2},1)^2}^{(1,1)}(x) dx = 0$. Naime, kako su Haarove funkcije jednake 0 izvan kocke kojom su indeksirane, oba ova integrala se svode na integrale po manjoj kocki $[\frac{1}{2}, 1)$, odnosno $[\frac{1}{2}, 1)^2$. No, na tim kockama su Haarove funkcije $h_{[0,1)}^1$ i $h_{[0,1)^2}^{(1,1)}$ konstantne, pa vrijedi $\int_{[\frac{1}{2},1)} h_{[0,1)}^1(x) h_{[\frac{1}{2},1)}^1(x) dx = (\text{const.}) \cdot \int_{[\frac{1}{2},1)} h_{[\frac{1}{2},1)}^1(x) dx = 0$. Slično,



Slika 3.5: Haarove funkcije na kocki $[0, 1]^2$ i na prvoj podkocki $\left[\frac{1}{2}, 1\right]^2$ za $d = 2$.

$$\int_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]^2} h_{[0,1]^2}^{(1,1)}(x) h_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]^2}^{(1,1)}(x) dx = (\text{const.}) \cdot \int_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]^2} h_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]^2}^{(1,1)}(x) dx = 0.$$

Ovo zapažanje navodi nas na pretpostavku da su i općenito različite nekonstantne Haarove funkcije međusobno okomite u $L^2(\mathbb{R}^d)$, odnosno da vrijedi $\int_{\mathbb{R}^d} h_I^\eta(x) h_{I'}^{\eta'}(x) dx = 0$ za proizvoljne $I, I' \in \mathcal{D}^0$ i $\eta, \eta' \in \{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}$ takve da je $I \neq I'$ ili $\eta \neq \eta'$. \square

Osim svojstva uočenog u prethodnom primjeru, može se pokazati i općenita tvrdnja, a ta je da Haarove funkcije nad \mathbb{R}^d čine ortonormiranu bazu prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$. Prije nego krenemo na dokaz tog teorema, trebamo dokazati sljedeću lemu.

Lema 3.5. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^d$ proizvoljan omeđen otvoren skup. Tada postoji konačan ili prebrojiv skup indeksa $T \subseteq \mathbb{N}$ i familija $\{I_i : i \in T\} \subseteq \mathcal{D}^\omega$ međusobno disjunktних dijadskih kocki takva da vrijedi $U = \bigcup_{i \in T} I_i$.*

Dokaz. Definirajmo

$$\mathcal{N} := \{I \in \mathcal{D}^\omega : I \subseteq U\}.$$

Uočimo da za svaki $x \in U$ postoji $I_x \in \mathcal{N}$ takva da je $x \in I_x$. Naime, U je otvoren skup

pa postoji dijadska kocka $I_x \in \mathcal{D}^\omega$ dovoljno malene duljine brida koja sadrži x . Prema tome, $U \subseteq \bigcup_{x \in U} I_x \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{N}} I \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{N}} U = U$, odnosno $U = \bigcup_{I \in \mathcal{N}} I$. Nadalje, neka je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ familija dijadskih kocki iz \mathcal{N} koje su maksimalne obzirom na relaciju inkluzije, odnosno

$$\mathcal{M} := \{I \in \mathcal{N} : (\forall I' \in \mathcal{N}) I \subseteq I' \Rightarrow I = I'\}.$$

Pretpostavimo da postoji $I_0 \in \mathcal{N}$ koja nije sadržana niti u jednoj $I \in \mathcal{M}$, odnosno za sve $I \in \mathcal{M}$ vrijedi $I_0 \not\subseteq I$. Posebno, $I_0 \notin \mathcal{M}$, pa po definiciji te familije postoji $I_1 \in \mathcal{N}$ koja strogo sadrži I_0 , odnosno $I_0 \subset I_1$. Induktivno, dobivamo strogo rastući niz $(I_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ u \mathcal{N} obzirom na relaciju inkluzije, što znači da vrijedi $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$. No, po definiciji familije \mathcal{N} , svaka kocka tog niza sadržana je u skupu U koji je ograničen, a kako su duljine bridova dijadskih kocki cjelobrojne potencije broja 2, to bi značilo da je $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} I_n$ neograničen skup sadržan u U , što je kontradikcija s omeđenošću od U . Pretpostavka je pogrešna, dakle za svaku kocku $I \in \mathcal{N}$ postoji kocka $I' \in \mathcal{M}$ takva da vrijedi $I \subseteq I'$.

Iz ovoga zaključujemo da vrijedi $\bigcup_{I \in \mathcal{N}} I \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{M}} I$. Kako po definiciji familije \mathcal{M} vrijedi $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, dobivamo da vrijedi $\bigcup_{I \in \mathcal{M}} I = \bigcup_{I \in \mathcal{N}} I = U$.

Uz to, primijetimo da za svake dvije različite kocke $I, I' \in \mathcal{M}$ vrijedi $I \cap I' = \emptyset$. U suprotnom, po lemi 2.5 vrijedi $I \subseteq I'$ ili $I' \subseteq I$, a kako su te kocke maksimalne obzirom na relaciju \subseteq , u oba slučaja dobivamo $I = I'$, što proturječi pretpostavci $I \neq I'$.

Kako je $\mathcal{D}^\omega = \{2^{-k}([0, 1]^d + m) + \omega : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^d\}$, svaka dijadska kocka iz \mathcal{D}^ω određena je parametrima $k \in \mathbb{Z}$ i $m \in \mathbb{Z}^d$, dakle skup \mathcal{D}^ω je prebrojiv. Kako je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}^\omega$, slijedi da je U , kao unija elemenata iz \mathcal{M} , unija prebrojivo mnogo međusobno disjunktih dijadskih kocki. Prema tome, možemo urediti skup \mathcal{M} tako da za neki (konačan ili beskonačan) skup indeksa $T \subseteq \mathbb{N}$ označimo njegove elemente s I_i , pri čemu je $i \in T$. Tada je $\{I_i : i \in T\} = \mathcal{M}$ i $U = \bigcup_{i \in T} I_i$. □.◻.◻.

Sada smo spremni za dokaz važnog teorema.

Teorem 3.6. *Familija $\{h_I^\eta : I \in \mathcal{D}^\omega, \eta \in \{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}\}$ je ortonormirana baza prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Dokaz. Prvo treba dokazati da je $\{h_I^\eta : I \in \mathcal{D}^\omega, \eta \in \{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}\}$ ortornormiran skup u $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Neka su $I \in \mathcal{D}^\omega$ i $\eta \in \{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}$ proizvoljni. Vrijedi

$$\|h_I^\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |h_I^\eta(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{\sqrt{V(I)}} \mathbb{1}_I \right)^2 dx = \frac{1}{V(I)} \int_I dx = \frac{1}{V(I)} V(I) = 1,$$

odnosno $\|h_I^\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Nadalje, neka su $I, I' \in \mathcal{D}^\omega$ i $\eta, \eta' \in \{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}$ takvi da je $h_I^\eta \neq h_{I'}^{\eta'}$. Razlikujemo dva slučaja: $I \neq I'$ ili $I = I', \eta \neq \eta'$. U slučaju $I \neq I'$, po lemi 2.5 vrijedi $I \cap I' = \emptyset$, $I \subset I'$ ili $I' \subset I$. Jasno, u slučaju $I \cap I' = \emptyset$ vrijedi

$$\langle h_I^\eta, h_{I'}^{\eta'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} h_I^\eta(x) h_{I'}^{\eta'}(x) dx = 0$$

budući da je $h_I^\eta(x) = 0$ za $x \notin I$ te $h_{I'}^{\eta'}(x) = 0$ za $x \notin I'$, a, kako su I i I' međusobno disjunktni, podintegralni izraz jednak je nuli za svaki $x \in \mathbb{R}^d$. U slučaju $I \subset I'$, po definiciji Haarove funkcije $h_{I'}^{\eta'}$ je konstantna na skupu I , pa vrijedi

$$\langle h_I^\eta, h_{I'}^{\eta'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} h_I^\eta(x) h_{I'}^{\eta'}(x) dx = \pm \frac{1}{\sqrt{V(I')}} \int_I h_I^\eta(x) dx = 0,$$

pri čemu posljednja jednakost vrijedi po 3.1. Slučaj $I' \subset I$ slijedi analogno.

Pretpostavimo sada da je $I = I' = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ i $\eta \neq \eta'$. Tada postoji $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ takav da je $\eta_i \neq \eta'_i$. Kako su $\eta, \eta' \in \{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}$, vrijedi $\eta_i = 1, \eta'_i = 0$ ili $\eta_i = 0, \eta'_i = 1$.

Primjenom Fubinijevog teorema dobivamo

$$\langle h_I^\eta, h_I^{\eta'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} h_I^\eta(x) h_I^{\eta'}(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{k=1}^{i-1} \left(\int_{\mathbb{R}} h_{I_k}^{\eta_k}(x_k) h_{I_k}^{\eta'_k}(x_k) dx_k \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} h_{I_i}^{\eta_i}(x_i) h_{I_i}^{\eta'_i}(x_i) dx_i \right) \\
 &\quad \cdot \prod_{k=i+1}^d \left(\int_{\mathbb{R}} h_{I_k}^{\eta_k}(x_k) h_{I_k}^{\eta'_k}(x_k) dx_k \right) = 0,
 \end{aligned}$$

budući da je $h_{I_i}^0$ konstantna na I_i s vrijednošću $\frac{1}{\sqrt{V(I_i)}}$ pa vrijedi $\int_{\mathbb{R}} h_{I_i}^0(x_i) h_{I_i}^1(x_i) dx_i = \frac{1}{\sqrt{V(I_i)}} \int_{\mathbb{R}} h_{I_i}^1(x_i) dx_i = 0$ po 3.1.

Dakle, $\{h_I^\eta : I \in \mathcal{D}^\omega, \eta \in \{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}\}$ je ortonormiran skup u $L^2(\mathbb{R}^d)$. Da bismo dokazali da je to ortonormirana baza, po karakterizaciji ortonormirane baze iz [10, teorem 2, pp. 55] dovoljno je provjeriti da je sistem maksimalan, tj. da za sve $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi implikacija

$$(\forall I \in \mathcal{D}^\omega) (\forall \eta \in \{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}) \langle f, h_I^\eta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0 \implies f \equiv 0. \quad (3.2)$$

Neka je dakle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ koja zadovoljava $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) h_I^\eta(x) dx = \langle f, h_I^\eta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$ za sve $I \in \mathcal{D}^\omega$ i $\eta \in \{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}$. Fiksirajmo $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d \in \mathcal{D}^\omega$. Označimo s I_i^l i I_i^r lijevu i desnu polovicu intervala I_i za sve $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Tada su prve podkocke od I , odnosno podkocke dvostruko kraće duljine brida od duljine brida I , oblika $I^{(k_1, k_2, \dots, k_d)} := I_1^{k_1} \times I_2^{k_2} \times \dots \times I_d^{k_d}$, pri čemu su $k_1, k_2, \dots, k_d \in \{l, r\}$. U ovisnosti o dimenziji d , postoji 2^d takvih podkocki, ovisno o odabiru k_i -eva, $i \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Po definiciji Haarove funkcije h_I^η , za svaku točku $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ vrijedi $h_I^\eta(x) = h_{I_1}^{\eta_1}(x_1) h_{I_2}^{\eta_2}(x_2) \dots h_{I_d}^{\eta_d}(x_d)$. Pritom, za svaki $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ vrijedi da je $h_{I_i}^{\eta_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{V(I_i)}}$ ako je $x_i \in I_i^l$, dok je $h_{I_i}^{\eta_i}(x_i) = \pm \frac{1}{\sqrt{V(I_i)}}$ za $x_i \in I_i^r$. Pritom se pozitivan predznak pojavljuje u slučaju $\eta_i = 0$, a negativan u slučaju $\eta_i = 1$.

Također, primijetimo da je za 2^d mogućnosti odabira $\eta \in \{0, 1\}^d$ za $x_i \in I_i^l$ vrijednost $h_{I_i}^{\eta_i}(x_i)$ uvijek pozitivna (tj. ne ovisi o odabiru η), dok je za $x_i \in I_i^r$ vrijednost $h_{I_i}^{\eta_i}(x_i)$

pozitivna za 2^{d-1} mogućnosti odabira η te negativna za isti broj odabira η , ovisno o tome je li $\eta_i = 0$ ili $\eta_i = 1$. Pritom, za $\eta = \theta$ je $h_{I_i}^{\eta_i}(x_i)$ pozitivna vrijednost neovisno je li $x_i \in I_i^l$ ili $x_i \in I_i^r$ i to za sve $i \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Prema tome, vrijedi

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{\eta \in \{0,1\}^d \setminus \{\theta\}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) h_I^\eta(x) dx = \sum_{\eta \in \{0,1\}^d \setminus \{\theta\}} \int_I f(x) h_I^\eta(x) dx \quad (3.3) \\
 &= \sum_{k_1, \dots, k_d \in \{l,r\}} \int_{I^{(k_1, \dots, k_d)}} f(x_1, \dots, x_d) \left(\sum_{\eta \in \{0,1\}^d \setminus \{\theta\}} h_{I_1}^{\eta_1}(x_1) \cdots h_{I_d}^{\eta_d}(x_d) \right) d(x_1, \dots, x_d) \\
 &= (2^d - 1) \frac{1}{\sqrt{V(I_1) \cdots V(I_d)}} \int_{I^{(l, l, \dots, l)}} f(x_1, \dots, x_d) d(x_1, \dots, x_d) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{V(I_1) \cdots V(I_d)}} \sum_{(k_1, \dots, k_d) \in \{l,r\}^d \setminus \{(l, l, \dots, l)\}} \int_{I^{(k_1, \dots, k_d)}} f(x_1, \dots, x_d) d(x_1, \dots, x_d),
 \end{aligned}$$

odnosno

$$(2^d - 1) \int_{I^{(l, l, \dots, l)}} f(x) dx = \sum_{(k_1, \dots, k_d) \in \{l,r\}^d \setminus \{(l, l, \dots, l)\}} \int_{I^{(k_1, \dots, k_d)}} f(x) dx.$$

Pribojimo li ovoj jednakosti $\int_{I^{(l, l, \dots, l)}} f(x) dx$, dobivamo

$$2^d \int_{I^{(l, l, \dots, l)}} f(x) dx = \sum_{(k_1, \dots, k_d) \in \{l,r\}^d} \int_{I^{(k_1, \dots, k_d)}} f(x) dx = \int_I f(x) dx,$$

odnosno, dijeljenjem s $2^d V(I^{(l, l, \dots, l)})$,

$$\frac{1}{V(I^{(l, l, \dots, l)})} \int_{I^{(l, l, \dots, l)}} f(x) dx = \frac{1}{2^d V(I^{(l, l, \dots, l)})} \int_I f(x) dx = \frac{1}{V(I)} \int_I f(x) dx,$$

budući da je $l(I^{(l, l, \dots, l)}) = 2^{-1} l(I)$, pa je $V(I^{(l, l, \dots, l)}) = 2^{-d} V(I)$.

Neka je sada $(k_1, k_2, \dots, k_d) \in \{l, r\}^d$ proizvoljan te neka je $\{j_1, j_2, \dots, j_l\} \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$ skup svih indeksa za koje je $k_{j_1} = k_{j_2} = \dots = k_{j_l} = r$ (pritom je $l \in \mathbb{N}, l \leq d$).

Tada u raspisu (3.3) možemo koristiti jednakost $0 = \sum_{\eta \in \{0,1\}^d \setminus \{\theta\}} \pm \int_{\mathbb{R}^d} f(x) h_I^\eta(x) dx$, pri čemu je za svaki član u sumi predznak \pm ako i samo ako je kardinalan broj skupa $\{p \in \{j_1, j_2, \dots, j_l\} : \eta_p = 1\}$ paran broj, odnosno $\eta_{j_i} = 1$ za paran broj podindeksa $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. U tako postavljenoj sumi, slično kao i gore, dobivamo integral funkcije f po kocki $I^{(k_1, k_2, \dots, k_d)}$ pomnožen brojem $2^d - 1$ te integrale funkcije f po preostalim kockama s negativnim predznakom. Sličnim izvodom dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{I^{(k_1, \dots, k_d)}} f(x) dx &= \frac{1}{\lambda(I^{(k_1, \dots, k_d)})} \int_{I^{(k_1, \dots, k_d)}} f(x) dx = \frac{1}{V(I^{(k_1, \dots, k_d)})} \int_{I^{(k_1, \dots, k_d)}} f(x) dx \\ &= \frac{1}{V(I)} \int_I f(x) dx = \frac{1}{\lambda(I)} \int_I f(x) dx = \int_I f(x) dx. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da je $\int_I f(x) dx = \int_{I'} f(x) dx$ čim je I' dijadska podkocka od I duljine brida $l(I') = 2^{-1}l(I)$. Induktivno, pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da za sve $I' \in \mathcal{D}^\omega, I' \subset I$ takve da je $l(I') = 2^{-k}l(I)$ vrijedi $\int_I f(x) dx = \int_{I'} f(x) dx$. Neka je $I'' \in \mathcal{D}^\omega, I'' \subset I$ takva da je $l(I'') = 2^{-(k+1)}l(I)$. Tada postoji $I' \in \mathcal{D}^\omega$ takva da vrijedi $I'' \subset I' \subset I$. Po pretpostavci i po pokazanoj tvrdnji za I'' i I' (vrijedi $l(I'') = 2^{-k-1}l(I) = 2^{-1}l(I')$), vrijedi $\int_{I''} f(x) dx = \int_{I'} f(x) dx = \int_I f(x) dx$. Dakle, navedena tvrdnja vrijedi i za broj $k + 1$. Stoga po induktivnom principu dobivamo da vrijedi jednakost čim je $\int_I f(x) dx = \int_{I'} f(x) dx$ čim je $I' \subseteq I$ ili $I \subseteq I'$.

Neka je sada $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{D}^\omega$ proizvoljan niz kocki koji zadovoljava $I_n \subset I_{n+1}$ i $l(I_n) = 2^n$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Po tome, za sve $m, n \in \mathbb{Z}$ za koje je $m \leq n$ vrijedi $I_m \subseteq I_n$, pa po gornjem izvodu vrijedi jednakost $\int_{I_m} f(x) dx = \int_{I_n} f(x) dx$. Nadalje, vrijedi $V(I_n) = (2^n)^d = 2^{nd}$.

Za $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi i sljedeće:

$$\left| \int_{I_n} f(x) dx \right| = \frac{1}{V(I_n)} \left| \int_{I_n} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{V(I_n)} \int_{I_n} |f(x)| dx$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{V(I_n)} \left(\int_{I_n} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{I_n} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \frac{1}{V(I_n)} \cdot \sqrt{V(I_n)} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\sqrt{V(I_n)}} = \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{2^{\frac{nd}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.
\end{aligned}$$

Pritom smo u (*) koristili Hölderovu nejednakost ([4, tm 6.2]) za $p = q = 2$ za funkcije $\mathbb{1} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ i $|f|$.

Prema tome, $\left(\int_{I_n} f(x) dx \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ je konstantni niz realnih brojeva koji konvergira prema nuli. Dakle, $\int_{I_n} f(x) dx = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Time zapravo dobivamo i da vrijedi $\int_I f(x) dx = 0$ za svaki $I \in \mathcal{D}^\omega$. Naime, možemo definirati niz kocki $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ iz \mathcal{D}^ω na sljedeći način. Ako je $k \in \mathbb{Z}$ takav da vrijedi $l(I) = 2^k$, tada označimo $I_k := I$. Nadalje, za proizvoljan $n \in \mathbb{Z}$ biramo bilo koju kocku $I'_n \in \mathcal{D}^\omega$ takvu da vrijedi $l(I'_n) = 2^n l(I)$ i $I' \cap I = \emptyset$, pa definiramo $I_{k+n} := I'_n$.

Uočimo da vrijedi $l(I_{k+n}) = l(I'_n) = 2^n l(I) = 2^{k+n}$. Nadalje, za $m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n$ uistinu vrijedi $I_m \subset I_n$. To slijedi iz leme 2.5, budući da je tada $I \subseteq I'_n$ u slučaju $n \geq 0$, odnosno $I'_n \subset I$ u slučaju $n < 0$.

Budući da ovako definirani niz $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ zadovoljava ova svojstva, po gornjem izvodu dobivamo da je to nul-niz. Posebno, za $I = I_k$ dobivamo $\int_I f(x) dx = 0$.

Sada smo spremni pokazati željeni tvrdnju. Pretpostavimo suprotno, tj. $f \not\equiv 0$. To znači da postoji $\epsilon > 0$ takav da je skup $\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq \epsilon\} = \{|f| \geq \epsilon\}$ Lebesgueove mjere veće od nula, odnosno $\lambda(\{|f| \geq \epsilon\}) > 0$. Kako je $\{|f| \geq \epsilon\} = \{f \geq \epsilon\} \cup \{f \leq -\epsilon\}$, a to je unija dvaju međusobno disjunktnih skupova, vrijedi $\lambda(\{|f| \geq \epsilon\}) = \lambda(\{f \geq \epsilon\}) + \lambda(\{f \leq -\epsilon\}) > 0$, pa je barem jedan od skupova $\{f \geq \epsilon\}$ i $\{f \leq -\epsilon\}$ Lebesgueove mjere veće od nula.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\lambda(\{f \geq \epsilon\}) > 0$ jer preostali slučaj

$\lambda(\{f \leq -\epsilon\})$ slijedi analognim izvodom. Lebesgueova mjera λ na \mathbb{R}^d je regularna, pa prema tome postoji kompaktni skup $K \subseteq \{f \geq \epsilon\}$ takav da je $\lambda(K) > 0$.

Neka je U proizvoljan omeđen otvoren skup koji sadrži K , odnosno $U \supseteq K$. Po lemi 3.5, postoji $T \subseteq \mathbb{N}$ i familija međusobno disjunktne dijadskih kocki $\{I_i : i \in T\} \subseteq \mathcal{D}^\omega$ takvih da vrijedi $\bigcup_{i \in T} I_i = U$.

Slijedi

$$\int_U f(x) dx = \int_{\bigcup_{i \in T} I_i} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i \in T} f(x) \mathbb{1}_{I_i} dx \stackrel{(*)}{=} \sum_{i \in T} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathbb{1}_{I_i} dx = \sum_{i \in T} \int_{I_i} f(x) dx = 0.$$

Pritom u (*) koristimo Beppo-Levijev teorem za niz pozitivnih funkcija $(f \mathbb{1}_{I_i} : i \in T)$ u slučaju da je T beskonačan skup (u slučaju da je T konačan, koristimo konačnu aditivnost integrala). S druge strane, kako je $K \subseteq U$ i $f > 0$ na K ,

$$\int_U f(x) dx \geq \int_K f(x) dx > \int_K \epsilon dx = \epsilon \lambda(K) > 0,$$

što je kontradikcija. Prema tome, uistinu vrijedi $f \equiv 0$.

Pokazali smo da vrijedi implikacija (3.2), pa slijedi da je $\{h_I^\eta : I \in \mathcal{D}^\omega, \eta \in \{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}\}$ maksimalan u prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$. Prema tome, ta familija je uistinu ortonormirana baza prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$. $\Omega. \mathfrak{E}. \mathfrak{D}.$

Primjer 3.7. Promotrimo kako bi dokaz prethodnog teorema, točnije dokaz o maksimalnosti skupa Haarovih funkcija izgledao u slučaju $d = 2$ i za $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ takav da vrijedi $\omega_j = 0$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$. Tada za $k \in \mathbb{Z}$ i $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ imamo dijadske kocke oblika $I = 2^{-k} \left([0, 1]^2 + (m_1, m_2) \right)$ i $I = \left[2^{-k} m_1, 2^{-k} (m_1 + 1) \right) \times \left[2^{-k} m_2, 2^{-k} (m_2 + 1) \right)$.

Uočimo da se proizvoljna kocka I dijeli na četiri podkocke čiji su bridovi kraći od brida

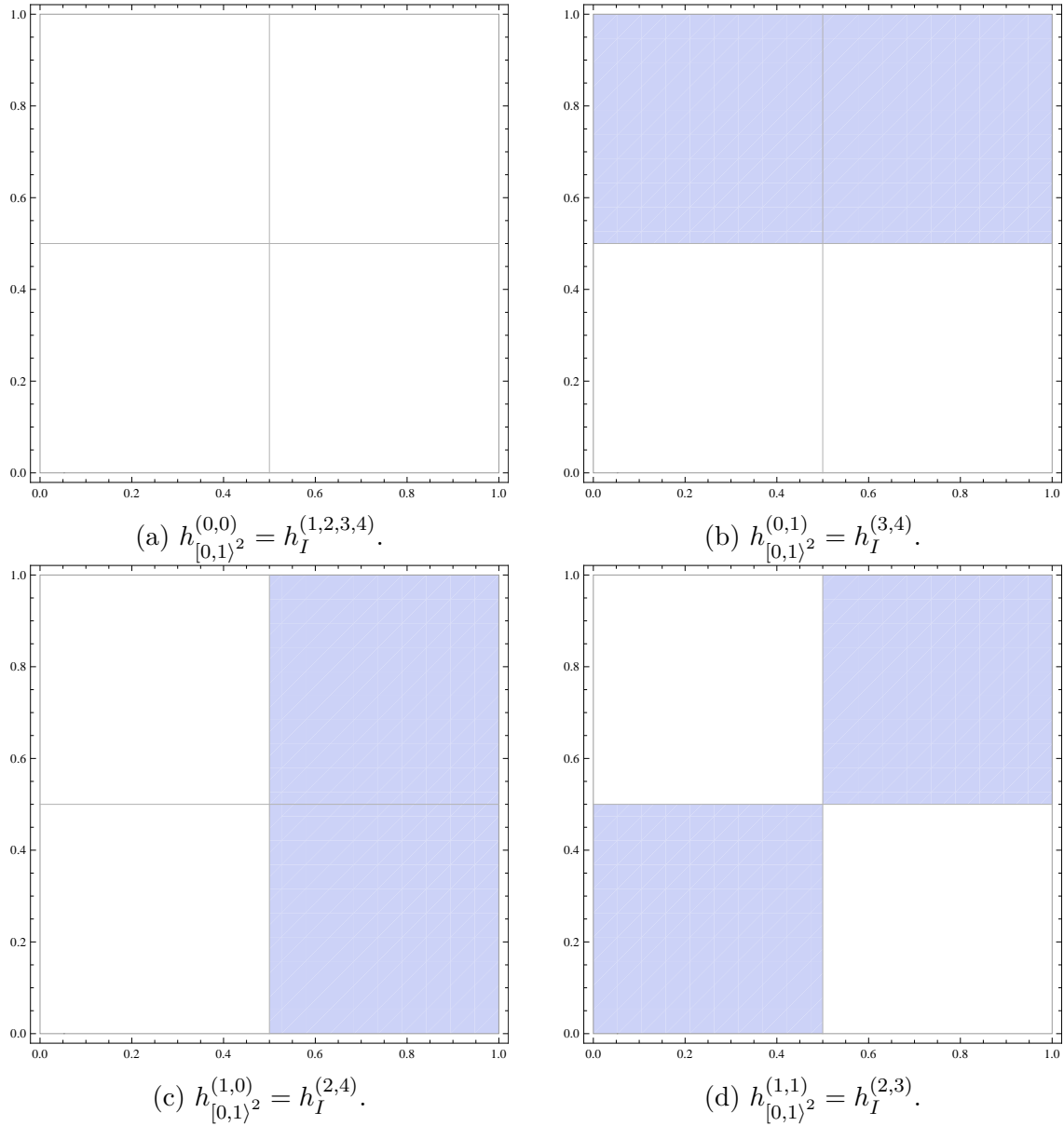
kočke I . Označimo te kočke s

$$\begin{aligned} I_1 &:= \left[2^{-(k+1)} m_1, 2^{-(k+1)} (m_1 + 1) \right) \times \left[2^{-(k+1)} m_2, 2^{-(k+1)} (m_2 + 1) \right) \\ I_2 &:= \left[2^{-(k+1)} (m_1 + 1), 2^{-(k+1)} (m_1 + 2) \right) \times \left[2^{-(k+1)} m_2, 2^{-(k+1)} (m_2 + 1) \right) \\ I_3 &:= \left[2^{-(k+1)} m_1, 2^{-(k+1)} (m_1 + 1) \right) \times \left[2^{-(k+1)} (m_2 + 1), 2^{-(k+1)} (m_2 + 2) \right) \\ I_4 &:= \left[2^{-(k+1)} (m_1 + 1), 2^{-(k+1)} (m_1 + 2) \right) \times \left[2^{-(k+1)} (m_2 + 1), 2^{-(k+1)} (m_2 + 2) \right) \end{aligned}$$

Za svaku kočku I postoje četiri različite Haarove funkcije koje se mogu zapisati pomoću kočki I_1, I_2, I_3, I_4 na sljedeći način:

$$\begin{aligned} h_I^{(1,2,3,4)} &:= \frac{1}{\sqrt{V(I)}} (\mathbb{1}_{I_1} + \mathbb{1}_{I_2} + \mathbb{1}_{I_3} + \mathbb{1}_{I_4}) \\ h_I^{(2,3)} &:= \frac{1}{\sqrt{V(I)}} (\mathbb{1}_{I_2} + \mathbb{1}_{I_3}) - \frac{1}{\sqrt{V(I)}} (\mathbb{1}_{I_1} + \mathbb{1}_{I_4}) \\ h_I^{(2,4)} &:= \frac{1}{\sqrt{V(I)}} (\mathbb{1}_{I_2} + \mathbb{1}_{I_4}) - \frac{1}{\sqrt{V(I)}} (\mathbb{1}_{I_1} + \mathbb{1}_{I_3}) \\ h_I^{(3,4)} &:= \frac{1}{\sqrt{V(I)}} (\mathbb{1}_{I_3} + \mathbb{1}_{I_4}) - \frac{1}{\sqrt{V(I)}} (\mathbb{1}_{I_1} + \mathbb{1}_{I_2}) \end{aligned}$$

Na slici 3.6 prikazane su Haarove funkcije za $I = [0, 1]^2$. Pošto funkcije poprimaju samo dvije vrijednosti na tom skupu, njih možemo prikazati kao dvodimenzionalni graf koji je dobiven od trodimenzionalnog tako što je dimenzija visine zamijenjena bojom. Pritom je bijelom bojom označen skup na kojem funkcije poprimaju pozitivnu vrijednost, a plavom skup na kojem poprimaju negativnu vrijednost. Uočimo da su na istoj slici kočke I_1, I_2, I_3, I_4 zapravo kočke:

Slika 3.6: Alternativni prikaz Haarovih funkcija na kocki $[0, 1]^2$.

$$I_1 = [0, 2^{-1}] \times [0, 2^{-1}], \quad I_2 = [2^{-1}, 1] \times [0, 2^{-1}]$$

$$I_3 = [0, 2^{-1}] \times [2^{-1}, 1], \quad I_4 = [2^{-1}, 1] \times [2^{-1}, 1]$$

Neka je $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ okomita na sve Haarove funkcije na svim kockama I , odnosno

takva da je $\langle f, h_I^k \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0$ za svaku kocku I i za svaki $k \in \{(2,3), (2,4), (3,4)\}$.

Potrebno je dokazati da je tada funkcija $f \equiv 0$. To ćemo napraviti u nekoliko koraka.

Korak 1. Pokažimo da je prosjek funkcije f na kocki I jednak prosjeku na svakoj od kocki I_1, I_2, I_3, I_4 .

Prosijek funkcije f na kocki I je formalno $\frac{1}{\sqrt{V(I)}} \int_I f(x) dx$. Koristeći činjenicu da je f okomita na Haarove funkcije dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f, h_I^{(2,3)} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= \int_I f(x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{V(I)}} (\mathbb{1}_{I_2}(x) + \mathbb{1}_{I_3}(x)) - \frac{1}{\sqrt{V(I)}} (\mathbb{1}_{I_1}(x) + \mathbb{1}_{I_4}(x)) \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{V(I)}} \left(\int_{I_2} f(x) dx + \int_{I_3} f(x) dx - \int_{I_1} f(x) dx - \int_{I_4} f(x) dx \right), \end{aligned}$$

odnosno dobivamo

$$(*) \quad \int_{I_2} f(x) dx + \int_{I_3} f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_4} f(x) dx.$$

Analognim računom se pomoću funkcija $h_I^{(2,4)}$ i $h_I^{(3,4)}$ dobiva

$$\begin{aligned} (**) \quad & \int_{I_2} f(x) dx + \int_{I_4} f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_3} f(x) dx, \\ (***) \quad & \int_{I_3} f(x) dx + \int_{I_4} f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx. \end{aligned}$$

Po slici 3.6 to bi značilo da je integral funkcije f po plavim područjima jednak integralu funkcije f po bijelim područjima. Sada tvrdnja slijedi kombinacijom ovih triju jednadžbi, odnosno

$$(*) + (**) + (***) \implies 3 \int_{I_1} f(x) dx = \int_{I_2} f(x) dx + \int_{I_3} f(x) dx + \int_{I_4} f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{1}{V(I)} \int_I f(x) dx = \frac{1}{V(I)} \left(\int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx + \int_{I_3} f(x) dx + \int_{I_4} f(x) dx \right) \\
&= \frac{1}{4V(I_1)} 4 \int_{I_1} f(x) dx = \frac{1}{V(I_1)} \int_{I_1} f(x) dx, \\
(*) + (**) - (***) &\implies 3 \int_{I_2} f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_3} f(x) dx + \int_{I_4} f(x) dx \\
&\implies \frac{1}{V(I)} \int_I f(x) dx = \frac{1}{V(I)} \left(\int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx + \int_{I_3} f(x) dx + \int_{I_4} f(x) dx \right) \\
&= \frac{1}{4V(I_2)} 4 \int_{I_2} f(x) dx = \frac{1}{V(I_2)} \int_{I_2} f(x) dx, \\
(*) - (**) + (***) &\implies 3 \int_{I_3} f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx + \int_{I_4} f(x) dx \\
&\implies \frac{1}{V(I)} \int_I f(x) dx = \frac{1}{V(I)} \left(\int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx + \int_{I_3} f(x) dx + \int_{I_4} f(x) dx \right) \\
&= \frac{1}{4V(I_3)} 4 \int_{I_3} f(x) dx = \frac{1}{V(I_3)} \int_{I_3} f(x) dx, \\
- (*) + (**) + (***) &\implies 3 \int_{I_4} f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx + \int_{I_3} f(x) dx \\
&\implies \frac{1}{V(I)} \int_I f(x) dx = \frac{1}{V(I)} \left(\int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx + \int_{I_3} f(x) dx + \int_{I_4} f(x) dx \right) \\
&= \frac{1}{4V(I_4)} 4 \int_{I_4} f(x) dx = \frac{1}{V(I_4)} \int_{I_4} f(x) dx.
\end{aligned}$$

Odnosno, prosjek funkcije f na kocki I jednak prosjeku na svakoj od kocki I_1, I_2, I_3, I_4 .

Korak 2. Pokažimo da prosjek funkcije f na kocki I teži u nulu kako se kocka I povećava u beskonačnost. Formalno,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I_k} f(x) dx = 0$$

za $I_k \in \left\{ [0, 2^k]^2, [0, -2^k] \times [0, 2^k], [0, 2^k] \times [0, -2^k], [0, -2^k]^2 \right\}$ fiksnog oblika. Budući da je $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_k} f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{V(I_k)} \int_{I_k} |f(x) \cdot 1| dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{V(I_k)} \left(\int_{I_k} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{I_k} |1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{V(I_k)}}{V(I_k)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\sqrt{V(I_k)}}, \end{aligned}$$

iz čega, ako uvrstimo čemu je jednak volumen kocke I_k , dobivamo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{I_k} f(x) dx \right| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{2^k} = 0.$$

Iz ovoga slijedi $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I_k} f(x) dx = 0$, pa je time Korak 2. dokazan.

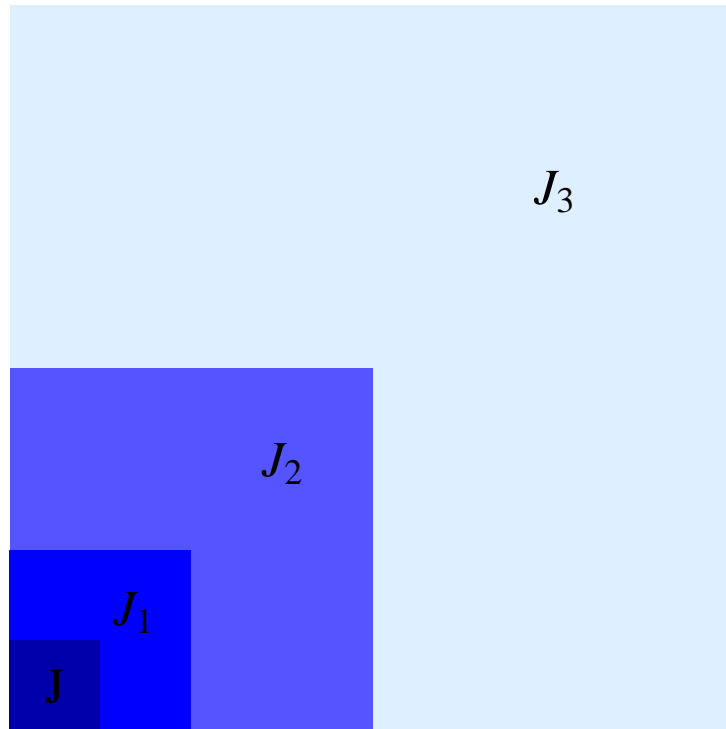
Korak 3. Preostaje pokazati da je prosjek funkcije f jednak nuli na svakoj dijadskoj kocki.

U ovom koraku koristit ćemo tvrdnje iz oba prethodna koraka. Pretpostavimo da tražena tvrdnja nije točna, odnosno da postoji kocka J na kojoj je prosjek funkcije f različit od nule. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\frac{1}{V(J)} \int_J f(x) dx = \epsilon > 0$.

Također, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se kocka J nalazi u prvom kvadrantu jer inače tvrdnja analogno slijedi. Promatramo dva slučaja:

1° Neka je kocka J oblika $J = [0, 2^{-k}]^2$.

Tada promatramo niz $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dan s $J_n := [0, 2^{-k+n}]^2$. Kako je J podkocka od J_1 , po Koraku 1. znamo da je $\int_{J_1} f(x) dx = \epsilon$. Induktivno dobivamo da

Slika 3.7: Prikaz 1° za $J = [0, 2]^2$.

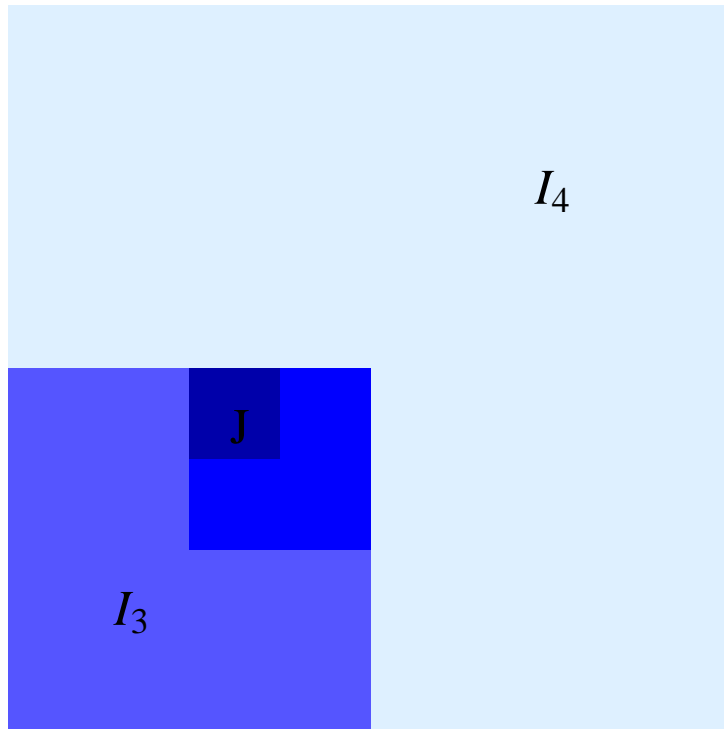
je $\int_{J_n} f(x) dx = \epsilon$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada po Koraku 2. dobivamo da vrijedi

$$\epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f(x) dx = 0, \text{ što je kontradikcija s pretpostavkom da je } \epsilon > 0.$$

2° Vrijedi $J \neq [0, 2^{-k}]^2$.

U ovom slučaju postoji neka kocka I_n iz niza $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ danog s $I_m := [0, 2^m]^2$ takva da je $J \subset I_n$, budući da je J ograničen skup u prvom kvadrantu, a $\bigcup_{m=1}^{+\infty} I_m$ prekriva cijeli prvi kvadrant. Uzastopnom primjenom Koraka 1. na kocke koje su sadržane u I_n , a sadrže kocku J ponovno dobivamo da je $\int_{I_n} f(x) dx = \epsilon$. Primjenom 1° za I_n umjesto J ponovno dobivamo kontradikciju.

Iz ovoga zaključujemo da je prosjek funkcije f jednak nuli na svakoj dijadskoj kocki, a pokazali smo da iz toga slijedi $f \equiv 0$.

Slika 3.8: Prikaz 2° za $J = [4, 6) \times [6, 8)$.

□

Prema teoremu 3.6 svaka funkcija $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ zadovoljava prikaz

$$f = \sum_{I \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{\eta \in \{0,1\}^d \setminus \{\theta\}} \langle f, h_I^\eta \rangle h_I^\eta,$$

pri čemu konvergenciju shvaćamo u L^2 normi, tj. u normi $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Napomena 3.8. Zbog jednostavnosti, u nastavku koristimo kraći zapis koji implicitno pretpostavlja sumu po svim $\eta \in \{0,1\}^d \setminus \{\theta\}$, odnosno sumu u kojoj se pojavljuju sve Haarove funkcije ovisno o η i $I \in \mathcal{D}^\omega$, uz nešto drugačije oznake Haarovih funkcija:

$$f = \sum_{I \in \mathcal{D}^\omega} \langle f, h_I \rangle h_I.$$

Slično ćemo kraćim zapisom označavati bilo kakve sume u kojima se pojavljuju Haarove

funkcije te ćemo i njih označavati bez indeksa η . \square

Na kraju ovog poglavlja definiramo posebnu klasu neprekidnih linearnih operatora na prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$ koje definiramo pomoću Haarovih funkcija na \mathcal{D}^ω . Ključnu ulogu igraju u najopćenitijem rezultatu ovog rada gdje ćemo proizvoljan Calderón-Zygmundov operator prikazati kao dekompoziciju upravo po toj posebnoj klasi operatora.

Definicija 3.9. Neka je $\omega \in (\{0, 1\}^d)^\mathbb{Z}$ proizvoljan. *Dijadski šift* s parametrima $(i, j) \in \mathbb{N}_0^2$ je operator $S : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ oblika

$$Sf = \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} A_Q f,$$

pri čemu je za svaki $Q \in \mathcal{D}^\omega$ operator $A_Q : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ oblika

$$A_Q f = \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ I, J \subseteq Q \\ l(I)=2^{-i}l(Q) \\ l(J)=2^{-j}l(Q)}} a_{IJQ} \langle f, h_I \rangle h_J,$$

dok koeficijenti a_{IJQ} zadovoljavaju ocjenu

$$|a_{IJQ}| \leq \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(Q)}.$$

Zbog jednostavnosti te kraćeg zapisa definiramo sljedeću oznaku sumacije:

$$\sum_{I, J \subseteq Q}^{(i, j)} := \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ I, J \subseteq Q \\ l(I)=2^{-i}l(Q) \\ l(J)=2^{-j}l(Q)}}.$$

Prema tome, za dani $Q \in \mathcal{D}^0$ te parametre $i, j \in \mathbb{N}_0$ operator A_Q ima alternativni zapis

$$A_Q f = \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i, j)} a_{IJQ} \langle f, h_I \rangle h_J.$$

3.2. Razvoj funkcija u Haarovoj bazi

Po teoremu 3.6 svaku funkciju $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ možemo prikazati u obliku

$$f = \sum_{I \in \mathcal{D}^\omega} \langle f, h_I \rangle h_I.$$

Dakle, moguće je za neki odabir konačne familije dijadskih kocki \mathcal{D}' zapisom $\sum_{I \in \mathcal{D}'} \langle f, h_I \rangle h_I$ približno opisati ponašanje funkcije. Stoga ćemo u nastavku za neke funkcije iz $L^2(\mathbb{R}^d)$ odrediti vrijednost gornje sume za slučajne dijadske kocke određenih duljina bridova te procijeniti ponašanje u graničnom slučaju. Pošto ćemo promatrati funkcije s kompaktnim nosačem, koeficijenti $\langle f, h_I \rangle$ će biti različiti od nule za najviše konačno mnogo kocki I iste duljine brida.

Primjer 3.10. Neka je $d = 1$ te $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana s $f(x) := \sin(\pi x) \mathbb{1}_{[0,1)}(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uočimo da je $f \in L^2(\mathbb{R})$ jer je f neprekidna funkcija s kompaktnim nosačem $\text{supp} f = [0, 1]$. Nadalje, neka je $\omega \in \Omega$ dan s $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, pri čemu je $\omega_j = 0$, za svaki $j \in \mathbb{Z}$. Dakle, promatramo standardni sistem dijadskih intervala.

Prvo promotrimo vrijednost zapisa $\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \geq 2^{-3}}} \langle f, h_I \rangle h_I$. Kao što smo naveli prije početka ovog primjera, promatramo kocke I za koje je $I \cap \text{supp} f \neq \emptyset$. U ovoj sumi to uključuje sve kocke $I \in \mathcal{D}^\omega$ sadržane u dijadskoj kocki $[0, 1)$ duljine brida $2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}$ ili 1 te sve dijadske kocke oblika $[0, 2^n)$ za $n \in \mathbb{N}$.

Ovu sumu rastavljamo na dva dijela:

$$f = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) > 1}} \langle f, h_I \rangle h_I + \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ 2^{-3} \leq l(I) \leq 2^0}} \langle f, h_I \rangle h_I.$$

Suma $\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) > 1}} \langle f, h_I \rangle h_I$ je beskonačna, no po gornjoj diskusiji kocka $[0, 2^n)$, $n \in \mathbb{N}$ je jedinstvena kocka duljine brida 2^n koja siječe skup $[0, 1)$. Stoga je jednostavno izračunati vrijednost tog reda u točki $x \in [0, 1)$.

Vrijedi

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) > 1}} \langle f, h_I \rangle h_I(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, h_{[0, 2^n)} \rangle h_{[0, 2^n)}(x) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{V([0, 2^n))}} \left(\int_{[0, 1)} \sin(\pi y) dy \right) h_{[0, 2^n)}(x) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{V([0, 2^n))} \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi y) \Big|_0^1 \right) (\mathbb{1}_{[0, 2^{n-1})}(x) - \mathbb{1}_{[2^{n-1}, 2^n)}(x)) \\
 &\stackrel{0 \leq x < 1}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi}.
 \end{aligned}$$

Preostaje odrediti koeficijente $\langle f, h_I \rangle$ za $I \subseteq [0, 1)$, $l(I) = 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}$ ili 2^{-3} .

Za $l(I) = 2^0 = 1$ postoji samo jedna Haarova funkcija koja nas zanima, a to je

$$h_{[0, 1)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Računamo odgovarajući koeficijent $\langle f, h_{[0, 1)} \rangle$

$$\langle f, h_{[0, 1)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{V([0, 1))}} \left(\int_{[0, \frac{1}{2})} \sin(\pi x) dx - \int_{[\frac{1}{2}, 1)} \sin(\pi x) dx \right) = 0.$$

Za $l(I) = 2^{-1}$ promatramo $I = [0, \frac{1}{2})$ i $[\frac{1}{2}, 1)$ te Haarove funkcije

$$h_{[0, \frac{1}{2})}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}}, & 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ -\frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}}, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad h_{[\frac{1}{2}, 1)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}}, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ -\frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}}, & \frac{3}{4} \leq x < 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Koeficijente $\langle f, h_I \rangle$ računamo pomoću programa Wolfram Mathematica i to na slje-

deći način. Prvo definiramo dvije tablice koje nazivamo `MatricaKoeficijenata` i `MatricaHaarovihFunkcija`. Tablice u Mathematici su općenitije od matematičkog pojma matrice budući da različiti retci imaju različit broj elemenata, odnosno matrica nije striktno standardnog oblika $m \times n$, za $m, n \in \mathbb{N}$.

`MatricaKoeficijenata` sadrži šest redaka koje označavamo od 0 do 5, a u i -tom retku sadrži koeficijente $\langle f, h_I \rangle$ za kocke $I \subseteq [0, 1)$ duljine brida $l(I) = 2^{-i}$. U skladu s tim, u svakom retku ova tablica sadrži 2^i koeficijenata oblika $\langle f, h_{[(j-1)2^{-i}, j2^{-i})} \rangle$ za $j = 1, \dots, 2^i$. Dodatno, koristimo naredbu `N` za numeričku aproksimaciju danih vrijednosti.

`MatricaHaarovihFunkcija` istog je formata kao i `MatricaKoeficijenata`, a umjesto skalarnog produkta $\langle f, h_{[2^{-i}(j-1), 2^{-i}j]} \rangle$ sadrži Haarovu funkciju $h_{[(j-1)2^{-i}, j2^{-i})} = 2^{\frac{i}{2}} \left(\mathbb{1}_{[(j-1)2^{-i}, (j-1)2^{-i} + 2^{-(i+1)})} - \mathbb{1}_{[(j-1)2^{-i} + 2^{-(i+1)}, (j-1)2^{-i} + 2^{-i})} \right)$ za $0 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 2^i$. `SumaPoVelikimKockama` predstavlja $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, h_{[0, 2^n]} \rangle \mathbb{1}_{[0, 2^n]}$, što je dio aproksimativne sume po kockama duljine brida veće od 1, a koje sadrže $[0, 1)$.

Na kraju, `F` predstavlja traženu aproksimaciju $\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \geq 2^{-5}}} \langle f, h_I \rangle h_I$ koju prikazujemo grafički zajedno s funkcijom f .

```

MatricaKoficijenata =
  Table[ (Integrate[ Sin[ Pi * x ],
    { x, (j - 1) * 2 ^ (- i), (j - 1) * 2 ^ (- i) + 2 ^ (- ( i + 1)) } ]
  - Integrate[ Sin[ Pi * x ],
    { x, (j - 1) * 2 ^ (- i) + 2 ^ (- ( i + 1)), (j - 1) * 2 ^ (- i) + 2 ^ (- i) } ] )
  * 2 ^ ( i / 2) // N, { i, 0, 5}, { j, 1, 2 ^ i} ]
MatricaHaarovihFunkcija =
  Table[ (Boole[ (j - 1) * 2 ^ (- i) ≤ x < (j - 1) * 2 ^ (- i) + 2 ^ (- ( i + 1)) ] -
    Boole[ (j - 1) * 2 ^ (- i) + 2 ^ (- ( i + 1)) ≤ x < (j - 1) * 2 ^ (- i) + 2 ^ (- i) ] ) *
    2 ^ ( i / 2), { i, 0, 5}, { j, 1, 2 ^ i} ]
SumaPoVelikimKockama = Sum[ Integrate[ Sin[ Pi * x ], { x, 0, 1} ] * 1 / ( 2 ^ n),
  { n, 1, Infinity} ] * Boole[ 0 ≤ x < 1 ]
F = Sum[ MatricaKoficijenata[[ i, j]] * MatricaHaarovihFunkcija[[ i, j]],
  { i, 1, 5}, { j, 1, 2 ^ ( i - 1) + 1} ] + SumaPoVelikimKockama
Plot[ F, { x, 0, 1} ]

```

Za $l(I) = 2^{-1}$ dobivamo da vrijedi

$$\langle f, h_{[0, \frac{1}{2}]} \rangle \approx -0.186462, \quad \langle f, h_{[\frac{1}{2}, 1]} \rangle \approx 0.186462.$$

Slično, za $l(I) = 2^{-2}$ promatramo $I = [0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ i $[\frac{3}{4}, 1]$ te dobivamo koeficijente

$$\begin{aligned} \langle f, h_{[0, \frac{1}{4}]} \rangle &\approx -0.089542, & \langle f, h_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]} \rangle &\approx -0.0370895, \\ \langle f, h_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]} \rangle &\approx 0.0370895, & \langle f, h_{[\frac{3}{4}, 1]} \rangle &\approx 0.089542. \end{aligned}$$

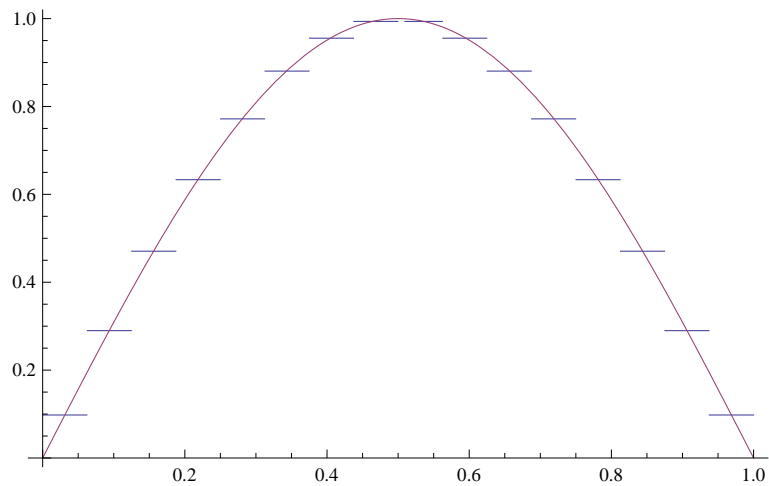
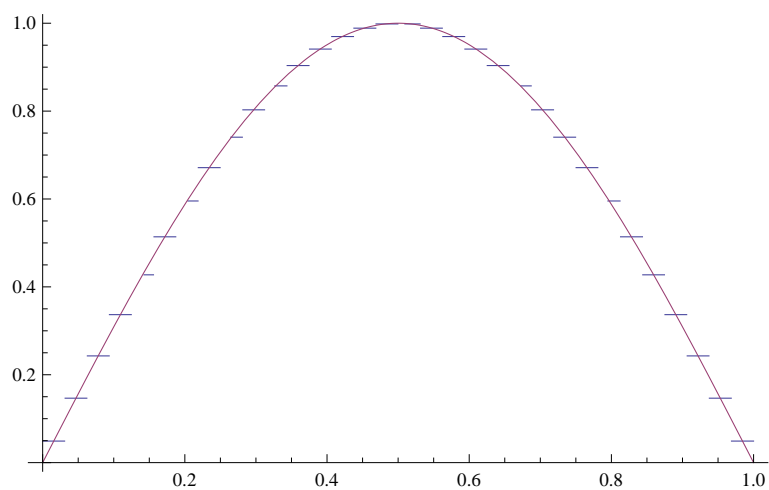
Konačno, za $l(I) = 2^{-3}$ te za kocke $I = [0, \frac{1}{8}]$, $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$, $[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$, $[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$ i $[\frac{7}{8}, 1]$ dobivamo

$$\begin{aligned} \langle f, h_{[0, \frac{1}{8}]} \rangle &\approx -0.0339338, & \langle f, h_{[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]} \rangle &\approx -0.0287677, \\ \langle f, h_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]} \rangle &\approx -0.019222, & \langle f, h_{[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]} \rangle &\approx -0.00674986, \\ \langle f, h_{[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]} \rangle &\approx 0.00674986, & \langle f, h_{[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]} \rangle &\approx 0.019222, \\ \langle f, h_{[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]} \rangle &\approx 0.0287677, & \langle f, h_{[\frac{7}{8}, 1]} \rangle &\approx 0.0339338. \end{aligned}$$

Usporedba grafa funkcije f s grafom njezine aproksimacije sumom $\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \geq 2^{-3}}} \langle f, h_I \rangle h_I$ na $[0, 1]$ dan je na slici 3.9.

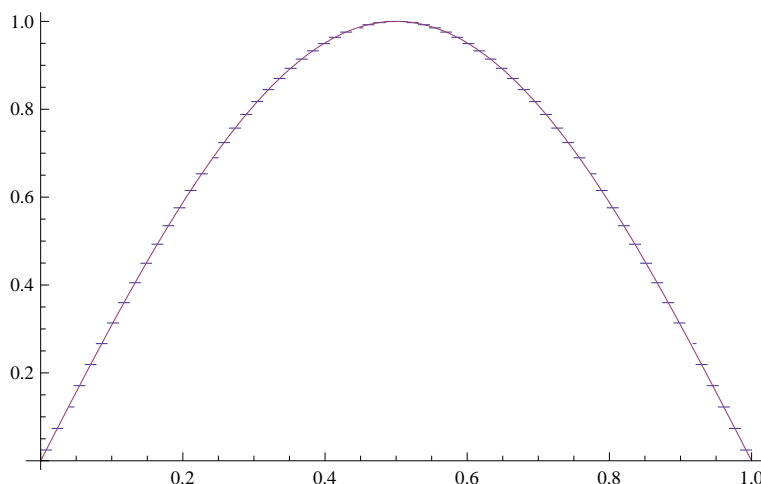
Sada ovoj sumi pridodajmo $\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) = 2^{-4}}} \langle f, h_I \rangle h_I$, a onda i $\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) = 2^{-5}}} \langle f, h_I \rangle h_I$ kako bi dobili nešto precizniju aproksimaciju od f .

Aproksimacije koeficijenata $\langle f, h_I \rangle$ za podkocke I od $[0, 1]$ duljine brida 2^{-4} i 2^{-5} ponovno računamo pomoću programa Wolfram Mathematica. Dobiveni podaci navedeni su u tablici , a nove aproksimacije uz manje kocke prikazane su na slici 3.10 uz pridodane kocke duljine bridova 2^{-4} te na slici 3.11 uz pridodane kocke duljine bridova 2^{-5} .

Slika 3.9: Aproksimacija funkcije $\sin(\pi x)$ na intervalu $[0, 1]$ za $l(I) \geq 2^{-3}$.Slika 3.10: Aproksimacija funkcije $\sin(\pi x)$ na intervalu $[0, 1]$ za $l(I) \geq 2^{-4}$.

Tablica 3.1: Vrijednosti koeficijenata $\langle f, h_I \rangle$ za $f(x) = \sin(\pi x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ i $I \subseteq [0, 1]$, $l(I) = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$.

I	$\left[0, \frac{1}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.0122029	-0.011734	-0.0108141	-0.00947865
I	$\left[\frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{5}{16}, \frac{3}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{8}, \frac{7}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{7}{16}, \frac{1}{2}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00777893	-0.00578026	-0.00355947	-0.00120189
I	$\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{9}{16}, \frac{5}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{5}{8}, \frac{11}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{11}{16}, \frac{3}{4}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	0.00120189	0.00355947	0.00578026	0.00777893
I	$\left[\frac{3}{4}, \frac{13}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{13}{16}, \frac{7}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{15}{16}, 1\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	0.00947865	0.0108141	0.011734	0.0122029
I	$\left[0, \frac{1}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{32}, \frac{1}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{16}, \frac{3}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{32}, \frac{1}{8}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00433266	-0.00429093	-0.00420788	-0.00408431
I	$\left[\frac{1}{8}, \frac{5}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{5}{32}, \frac{3}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{16}, \frac{7}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{7}{32}, \frac{1}{4}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.0039214	-0.00372073	-0.00348422	-0.00321416
I	$\left[\frac{1}{4}, \frac{9}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{9}{32}, \frac{5}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{5}{16}, \frac{11}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{11}{32}, \frac{3}{8}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00291314	-0.00258407	-0.00223012	-0.00185468
I	$\left[\frac{3}{8}, \frac{13}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{13}{32}, \frac{7}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{7}{16}, \frac{15}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{15}{32}, \frac{1}{2}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00146139	-0.00105402	-0.000636499	-0.00021285
I	$\left[\frac{1}{2}, \frac{17}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{17}{32}, \frac{9}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{9}{16}, \frac{19}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{19}{32}, \frac{5}{8}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	0.00021285	0.000636499	0.00105402	0.00146139
I	$\left[\frac{5}{8}, \frac{21}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{21}{32}, \frac{11}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{11}{16}, \frac{23}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{23}{32}, \frac{3}{4}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	0.00185468	0.00223012	0.00258407	0.00291314
I	$\left[\frac{3}{4}, \frac{25}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{25}{32}, \frac{13}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{13}{16}, \frac{27}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{27}{32}, \frac{7}{8}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	0.00321416	0.00348422	0.00372073	0.0039214
I	$\left[\frac{7}{8}, \frac{29}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{29}{32}, \frac{15}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{15}{16}, \frac{31}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{31}{32}, 1\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	0.00408431	0.00420788	0.00429093	0.00433266



Slika 3.11: Aproksimacija funkcije $\sin(\pi x)$ na intervalu $[0, 1]$ za $l(I) \geq 2^{-5}$.

Po raspisu s početka ovog primjera uočavamo da su koeficijenti $\langle f, h_{[0, 2^n]} \rangle$ različiti od nule za svaki $n \in \mathbb{N}$. No, za $x > 1$ vrijedi $f(x) = 0$, pa nas zanima kako se ista suma

$\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \geq 2^{-5}}} \langle f, h_I \rangle h_I(x)$ ponaša u takvoj točki x , odnosno konvergira li i s kojom brzinom taj red prema nuli.

Za $I \subseteq [0, 1]$ vrijedi $h_I(x) = 0$ jer je $x > 1$. Zato je u gornjoj sumi dovoljno promatrati kocke $I = [0, 2^n]$ za $n \in \mathbb{N}$.

Za $x > 1$ postoji jedinstveni $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in [2^{n_0-1}, 2^{n_0})$, pa je prema tome $h_{[0, 2^n]}(x) = 0$ za $n < n_0$. Nadalje, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ 2^n \geq l(I) \geq 2^{-5}}} \langle f, h_I \rangle h_I(x) &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ 2^n \geq l(I) \geq 2^{n_0}}} \langle f, h_I \rangle h_I(x) = \sum_{k=n_0}^n \langle f, h_{[0, 2^k]} \rangle h_{[0, 2^k]}(x) \\
 &= \langle f, h_{[0, 2^{n_0}]} \rangle \cdot \frac{-1}{\sqrt{V([0, 2^{n_0}])}} + \sum_{k=n_0+1}^n \langle f, h_{[0, 2^k]} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{V([0, 2^k])}} \\
 &= \int_{[0, 1]} \sin(\pi x) dx \left(\frac{-1}{V([0, 2^{n_0}])} + \sum_{k=n_0+1}^n \frac{1}{V([0, 2^k])} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{k=n_0+1}^n \frac{1}{2^k} \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-n_0}}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2^{n_0}} + \frac{2^{n-n_0} - 1}{2^n} \right).
 \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \geq 2^{-5}}} \langle f, h_I \rangle h_I(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ 2^n \geq l(I) \geq 2^{-5}}} \langle f, h_I \rangle h_I(x) = -\frac{1}{\pi 2^{n_0-1}} + \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n-n_0} - 1}{2^n} \\ &= -\frac{1}{\pi 2^{n_0-1}} + \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^{-n_0} - 2^{-n}) = -\frac{1}{\pi 2^{n_0-1}} - \frac{1}{\pi 2^{n_0-1}} = 0. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo željenu preciznu aproksimaciju od f u točki $x > 1$.

$$\sum_{I \in \mathcal{D}^\omega} \langle f, h_I \rangle h_I(x) = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \geq 2^{-5}}} \langle f, h_I \rangle h_I(x) = 0 = f(x).$$

Štoviše, brzina konvergencije aproksimativnog reda je eksponencijalna. \square

Primjer 3.11. Stavimo $d = 1$ i promotrimo još jedan jednodimenzionalan primjer aproksimacije funkcije pomoću Haarovih funkcija. U ovom slučaju promatrat ćemo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danu s $f(x) := e^x \mathbb{1}_{[0,1)}(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uočimo da je $f \in L^2(\mathbb{R})$ jer je f neprekidna u svim točkama osim u 0 i 1 i ograničena funkcija s kompaktnim nosačem $\text{supp } f = [0, 1]$. Nadalje, neka je kao i ranije $\omega \in \Omega$ dan s $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, pri čemu je $\omega_j = 0$, za svaki $j \in \mathbb{Z}$.

Promotrimo vrijednost zapisa $\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \geq 2^{-r}}} \langle f, h_I \rangle h_I$ za $r = 3, 4, 5$. Ponovno promatramo sve

kočke $I \in \mathcal{D}^\omega$ sadržane u dijadskoj kocki $[0, 1)$ duljine brida od 2^{-5} do 2^{-1} ili 1 i sve dijadske kočke oblika $[0, 2^n)$ za $n \in \mathbb{N}$.

Ovu sumu rastavljamo na dva dijela:

$$f = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) > 1}} \langle f, h_I \rangle h_I + \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ 2^{-r} \leq l(I) \leq 2^0}} \langle f, h_I \rangle h_I.$$

Prvo računamo vrijednost sume $\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) > 1}} \langle f, h_I \rangle h_I$ uz kočke $I = [0, 2^n)$, $n \in \mathbb{N}$ za $x \in [0, 1)$.

Vrijedi

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) > 1}} \langle f, h_I \rangle h_I(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, h_{[0, 2^n]} \rangle h_{[0, 2^n]}(x) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{V([0, 2^n])}} \left(\int_{[0, 1]} e^y dy \right) h_{[0, 2^n]}(x) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{V([0, 2^n])} (e-1) \left(\mathbb{1}_{[0, 2^{n-1}]}(x) - \mathbb{1}_{[2^{n-1}, 2^n]}(x) \right) \\
 &\stackrel{0 \leq x < 1}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot (e-1) = \frac{(e-1)}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{(e-1)}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = (e-1).
 \end{aligned}$$

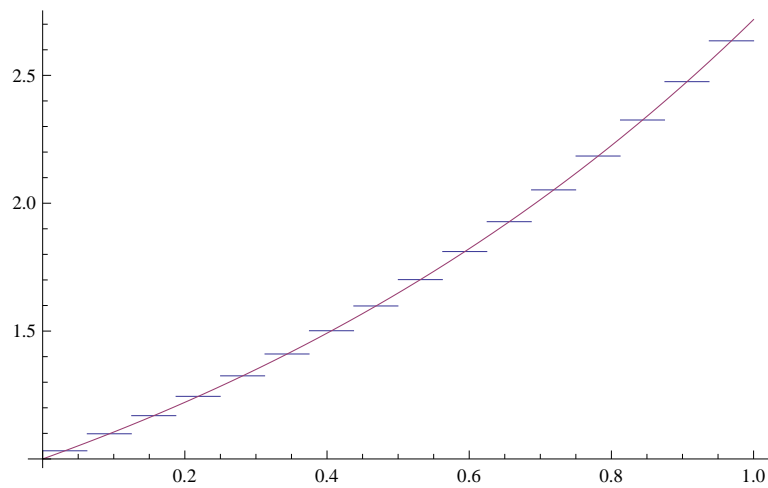
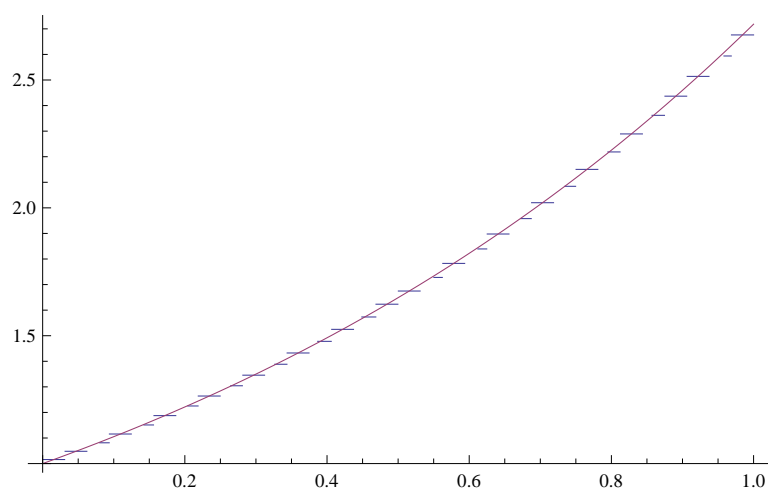
Preostaje odrediti koeficijente $\langle f, h_I \rangle$ za $I \subseteq [0, 1], l(I) = 2^{-r}, 5 \geq r \geq 0$. Kao i u prethodnom primjeru radimo pomoću programa Wolfram Mathematica i dobivamo slijedeće podatke u tabličnom odnosno grafičkom obliku. Za $r = 0, 1$ i 2 dobivamo

$$\begin{aligned}
 \langle f, h_{[0, 1]} \rangle &\approx -0.420839, \\
 \langle f, h_{[0, \frac{1}{2}]} \rangle &\approx -0.114085, \quad \langle f, h_{[\frac{1}{2}, 1]} \rangle \approx -0.188095, \\
 \langle f, h_{[0, \frac{1}{4}]} \rangle &\approx -0.035457, \quad \langle f, h_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]} \rangle \approx -0.0455277, \\
 \langle f, h_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]} \rangle &\approx -0.0584587, \quad \langle f, h_{[\frac{3}{4}, 1]} \rangle \approx -0.0750625.
 \end{aligned}$$

Koeficijenti $\langle f, h_I \rangle, l(I) = 2^{-r}$ za $r = 3, 4, 5$ dani su u tablici 3.2.

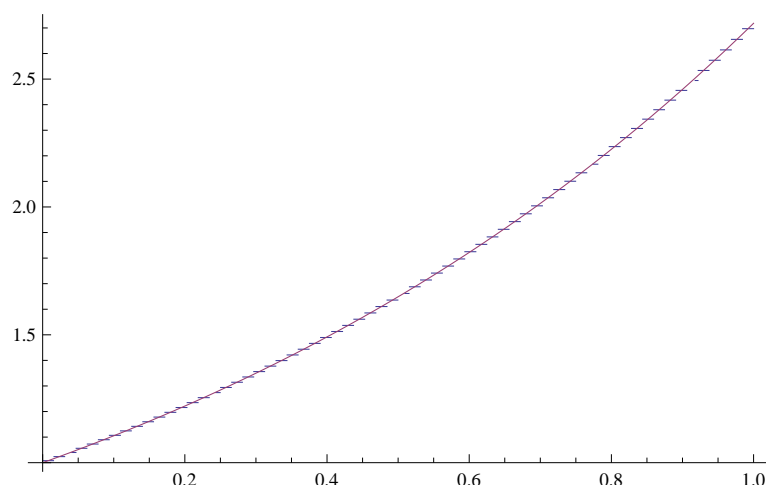
Kod kojim smo u Wolfram Mathematici računali tražene koeficijente sličan je kao i u prethodnom primjeru. □

Primjer 3.12. Vratimo se na funkciju $f(x) := \sin(\pi x) \mathbb{1}_{[0, 1]}(x)$ iz primjera 3.10. Funkciju aproksimiramo prikladnim redom $\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \geq 2^{-4}}} \langle f, h_I \rangle h_I$, dakle za kocke duljine brida većeg ili jednakog od 2^{-4} . U ovom primjeru to radimo za različite $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ i zanima nas hoće li to i kako utjecati na krajnju aproksimaciju. Prisjetimo se da smo jednu

Slika 3.12: Aproksimacija funkcije e^x na intervalu $[0, 1]$ za $l(I) \geq 2^{-3}$.Slika 3.13: Aproksimacija funkcije e^x na intervalu $[0, 1]$ za $l(I) \geq 2^{-4}$.

Tablica 3.2: Vrijednosti koeficijenata $\langle f, h_I \rangle$ za $f(x) = e^x \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ i $I \subseteq [0, 1)$, $l(I) = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$.

I	$\left[0, \frac{1}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.0117649	-0.0133314	-0.0151065	-0.0171179
I	$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.0193971	-0.0219798	-0.0249064	-0.0282226
I	$\left[0, \frac{1}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00403058	-0.00429053	-0.00456724	-0.0048618
I	$\left[\frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{5}{16}, \frac{3}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{8}, \frac{7}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{7}{16}, \frac{1}{2}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00517536	-0.00550914	-0.00586445	-0.00624268
I	$\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{9}{16}, \frac{5}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{5}{8}, \frac{11}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{11}{16}, \frac{3}{4}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.0066453	-0.00707388	-0.00753011	-0.00801576
I	$\left[\frac{3}{4}, \frac{13}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{13}{16}, \frac{7}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{15}{16}, 1\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00853273	-0.00908304	-0.00966885	-0.0102924
I	$\left[0, \frac{1}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{32}, \frac{1}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{16}, \frac{3}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{32}, \frac{1}{8}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00140285	-0.00144738	-0.00149332	-0.00154072
I	$\left[\frac{1}{8}, \frac{5}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{5}{32}, \frac{3}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{16}, \frac{7}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{7}{32}, \frac{1}{4}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00158963	-0.00164009	-0.00169215	-0.00174587
I	$\left[\frac{1}{4}, \frac{9}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{9}{32}, \frac{5}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{5}{16}, \frac{11}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{11}{32}, \frac{3}{8}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00180129	-0.00185847	-0.00191746	-0.00197833
I	$\left[\frac{3}{8}, \frac{13}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{13}{32}, \frac{7}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{7}{16}, \frac{15}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{15}{32}, \frac{1}{2}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00204113	-0.00210592	-0.00217277	-0.00224174
I	$\left[\frac{1}{2}, \frac{17}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{17}{32}, \frac{9}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{9}{16}, \frac{19}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{19}{32}, \frac{5}{8}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.0023129	-0.00238632	-0.00246207	-0.00254022
I	$\left[\frac{5}{8}, \frac{21}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{21}{32}, \frac{11}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{11}{16}, \frac{23}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{23}{32}, \frac{3}{4}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00262086	-0.00270405	-0.00278989	-0.00287845
I	$\left[\frac{3}{4}, \frac{25}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{25}{32}, \frac{13}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{13}{16}, \frac{27}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{27}{32}, \frac{7}{8}\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00296982	-0.0030641	-0.00316136	-0.00326171
I	$\left[\frac{7}{8}, \frac{29}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{29}{32}, \frac{15}{16}\right\rangle$	$\left[\frac{15}{16}, \frac{31}{32}\right\rangle$	$\left[\frac{31}{32}, 1\right\rangle$
$\langle f, h_I \rangle$	-0.00336525	-0.00347208	-0.00358229	-0.003696



Slika 3.14: Aproksimacija funkcije e^x na intervalu $[0, 1]$ za $l(I) \geq 2^{-5}$.

takvu aproksimaciju, označimo je s f_0 , već izračunali za $\omega_j = 0$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$, a sada promotrimo slučaj kada je $\omega_6 = 1, \omega_j = 0$ za $j \neq 6$. Ponovno tražene koeficijente računamo u Wolfram Mathematici, ali u ovom primjeru ih nećemo sve ispisivati već samo prilažemo kod pomoću kojeg smo ih izračunali. Pri procjenjivanju koja je aproksimacija bolja služit ćemo se isključivo grafovima.

Kod kojim smo odredili koeficijente $\langle f, h_I \rangle$ sličan je, ali nešto kompliciraniji od onog iz primjera 3.10. I dalje imamo dvije tablice koje nazivamo `MatricaKoeficijenata` odnosno `MatricaHaarovihFunkcija`. Razlika od prijašnjeg primjera je u varijablama `Pomak[i]` koje označavaju koliki pomak uzrokuje ω za kocke dimenzije $l(I) = 2^{-i}$. `MatricaKoeficijenata` sadrži pet redaka koje označavamo od 0 do 4, jer nas zanimaju koeficijenti po kockama I takvima da je $l(I) \geq 2^{-1}$. U i -tom retku ponovno imamo koeficijente $\langle f, h_I \rangle$ za kocke I duljine brida $l(I) = 2^{-i}$ samo što u ovom slučaju imamo jedan koeficijent više budući da su kocke pomaknute za $\omega_6 \cdot 2^{-6} = 2^{-6}$ što dovodi do preklapanja. Tako će nas, primjerice, zanimati i kocka $I = \left[-\frac{3}{64}, \frac{1}{64}\right)$ koja nije podskup od $[0, 1]$. U skladu s tim, u svakom retku ova tablica sadrži $2^i + 1$ koeficijenata oblika $\langle f, h_{[\text{Pomak}[i] + (j-1)2^{-i}, \text{Pomak}[i] + j2^{-i})} \rangle$ za $j = 0, \dots, 2^i$. I dalje koristimo naredbu `\N` za numeričku aproksimaciju danih vrijednosti.

MatricaHaarovihFunkcija istog je formata kao i MatricaKoficijenata, a umjesto skalarnog produkta sadrži odgovarajuću Haarovu funkciju.

SumaPoVelikimKockama se također promjenila u odnos na onu iz primjera 3.10 jer nas sada zanimaju dva reda. Prvi red je po kockama oblika $[-2^n + \text{Pomak}[i], \text{Pomak}[i])$, a drugi po kockama oblika $[\text{Pomak}[i], \text{Pomak}[i] + 2^n)$. Varijabla SumaPoVelikimKockama je dio aproksimativne sume po kockama duljine stranice veće od 1, a koje sijeku $[0, 1)$.

Na kraju, F6 predstavlja traženu aproksimaciju $\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \geq 2^{-4}}} \langle f, h_I \rangle h_I$ koju prikazujemo grafički koristeći funkciju Plot.

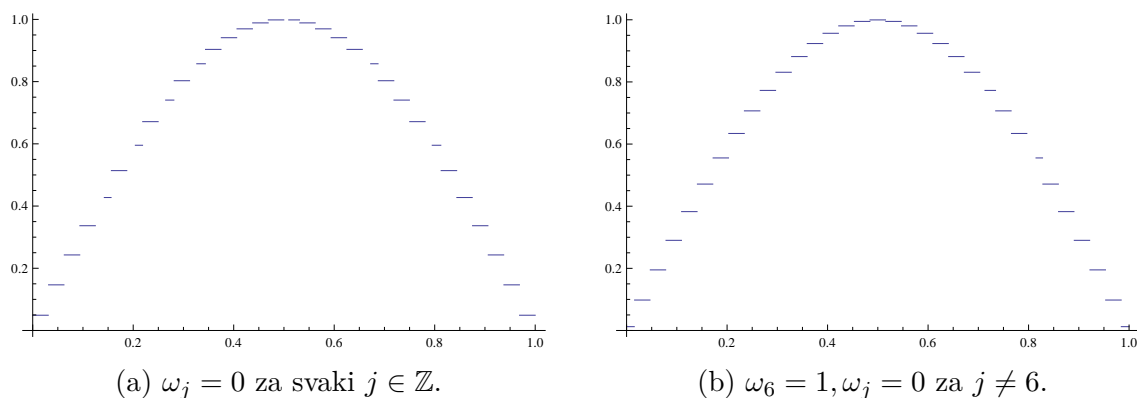
```

Pomak[0] = 2 ^ (-6)
Pomak[1] = 2 ^ (-6)
Pomak[2] = 2 ^ (-6)
Pomak[3] = 2 ^ (-6)
Pomak[4] = 2 ^ (-6)
Pomak[5] = 2 ^ (-6)
MatricaKoficijenata =
Table[(Integrate[Sin[Pi * x] * Boole[0 ≤ x < 1],
{x, Pomak[i] + (j - 1) * 2 ^ (-i), Pomak[i] + (j - 1) * 2 ^ (-i) + 2 ^ (- (i + 1))}]
- Integrate[Sin[Pi * x] * Boole[0 ≤ x < 1],
{x, Pomak[i] + (j - 1) * 2 ^ (-i) + 2 ^ (- (i + 1)),
Pomak[i] + (j - 1) * 2 ^ (-i) + 2 ^ (-i)}])
* 2 ^ (i / 2) // N, {i, 0, 4}, {j, 0, 2 ^ i}]
MatricaHaarovihFunkcija = Table[
(Boole[Pomak[i] + (j - 1) * 2 ^ (-i) ≤ x < Pomak[i] + (j - 1) * 2 ^ (-i) + 2 ^ (- (i + 1))] -
Boole[Pomak[i] + (j - 1) * 2 ^ (-i) + 2 ^ (- (i + 1)) ≤ x <
Pomak[i] + (j - 1) * 2 ^ (-i) + 2 ^ (-i)]) * 2 ^ (i / 2), {i, 0, 4}, {j, 0, 2 ^ i}]
SumaPoVelikimKockama = Sum[Integrate[Sin[Pi * x] * Boole[0 ≤ x < 1],
{x, 0, Pomak[0]}] * 1 / (2 ^ n), {n, 1, Infinity}] * Boole[0 ≤ x < Pomak[0]] +
Sum[Integrate[Sin[Pi * x] * Boole[0 ≤ x < 1], {x, Pomak[0], 1}] * 1 / (2 ^ n),
{n, 1, Infinity}] * Boole[Pomak[0] ≤ x < 1]
F6 = Sum[MatricaKoficijenata[[i, j]] * MatricaHaarovihFunkcija[[i, j]],
{i, 1, 5}, {j, 1, 2 ^ (i - 1) + 1}] + SumaPoVelikimKockama
Plot[F6, {x, 0, 1}]

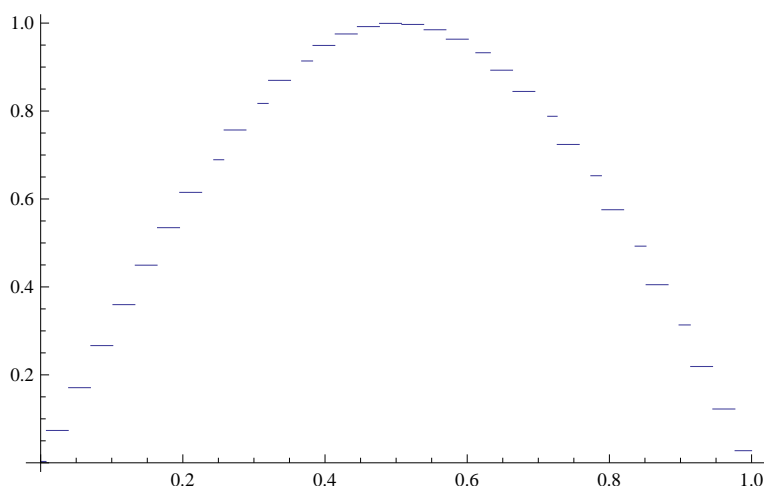
```

Izračunatu aproksimaciju f_6 možemo usporediti sa aproksimacijom iz primjera 3.10 pomoću grafova na slici 3.20

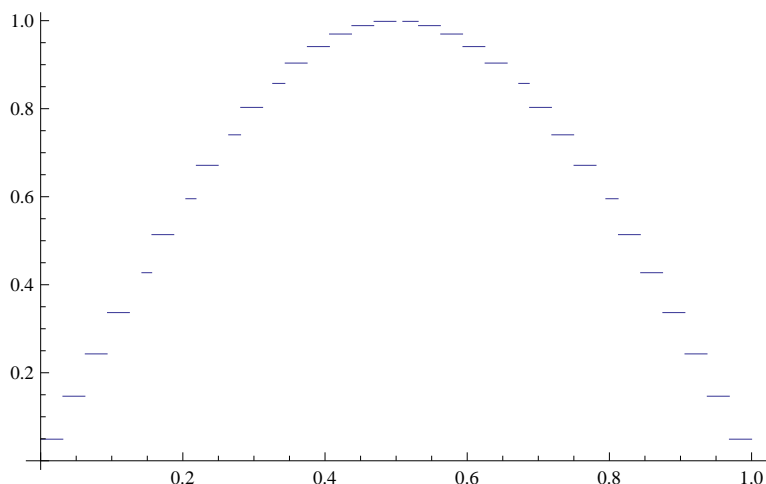
Isti kod smo uz jednostavne izmjene prilagodili kako bi dobili koeficijente i grafički prikaz raznih aproksimacija, odnosno aproksimacija za različite ω . Tako su na slikama 3.16 i 3.17 prikazane aproksimacije za $\omega_7 = 1, \omega_j = 0$ za $j \neq 7$ koju ćemo označiti s f_7 i

Slika 3.15: Usporedba različitih aproksimacija funkcije $\sin(\pi x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

aproksimacija uz $\omega_4 = \omega_3 = \omega_2 = \omega_1 = 1, \omega_j = 0$ za $j \notin \{1, 2, 3, 4\}$ koju ćemo označiti s f_4 .

Slika 3.16: Aproksimacija funkcije $\sin(\pi x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ uz $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ takav da je $\omega_7 = 1, \omega_j = 0$ za $j \neq 7$

Iz priloženih se grafova može uočiti da su izračunate aproksimacije različite, ali da su razlike vrlo male. Teško bi bilo na osnovu ovih grafova formirati mišljenje odnosno izraziti tezu oko toga koja je aproksimacija bolja. Budući da smo priložili slike za samo četiri različite ω razumna je pretpostavka da bi odgovarajući grafovi mogli izgledati osjetno drugačije za neke druge ω , ali je isto tako razumno i pretpostaviti da bi sve slike izgledale relativno slično. U nastavku ovog primjera ćemo se posvetiti nešto drugačijem pristupu. Proučit ćemo što se događa ako promatramo kombinaciju gore navedenih



Slika 3.17: Aproksimacija funkcije $f(x) := \sin(\pi x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ uz $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ takav da je $\omega_4 = \omega_3 = \omega_2 = \omega_1 = 1, \omega_j = 0$ za $j \notin \{1, 2, 3, 4\}$.

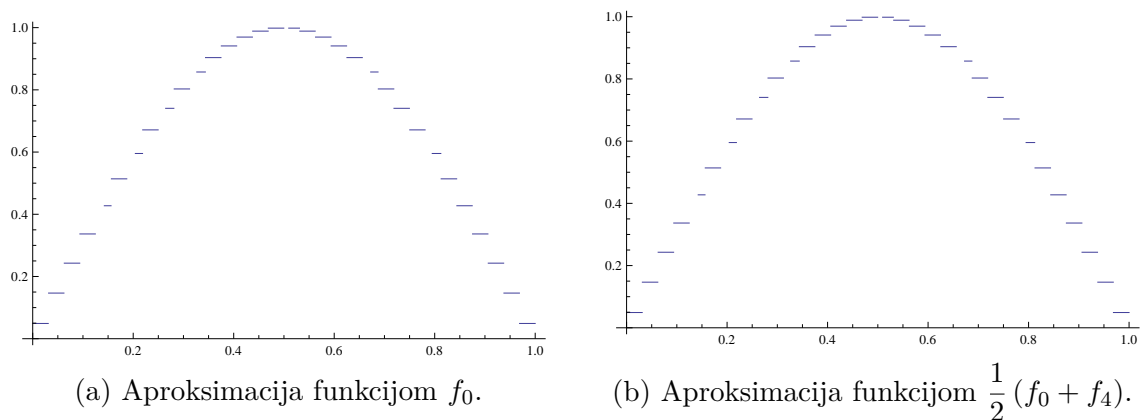
aproksimacija. Opravdanje za takav pristup daje nam sljedeći niz implikacija.

$$\begin{aligned}
 f = \sum_{I \in \mathcal{D}^{\omega_1}} \langle f, h_I \rangle h_I &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^{\omega_1} \\ l(I) \geq 2^{-n}}} \langle f, h_I \rangle h_I \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0, \\
 f = \sum_{I \in \mathcal{D}^{\omega_2}} \langle f, h_I \rangle h_I &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^{\omega_2} \\ l(I) \geq 2^{-n}}} \langle f, h_I \rangle h_I \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0, \\
 \implies 0 &\leq \left\| 2f - \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^{\omega_1} \\ l(I) \geq 2^{-n}}} \langle f, h_I \rangle h_I - \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^{\omega_2} \\ l(I) \geq 2^{-n}}} \langle f, h_I \rangle h_I \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
 &\leq \left\| f - \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^{\omega_1} \\ l(I) \geq 2^{-n}}} \langle f, h_I \rangle h_I \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| f - \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^{\omega_2} \\ l(I) \geq 2^{-n}}} \langle f, h_I \rangle h_I \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

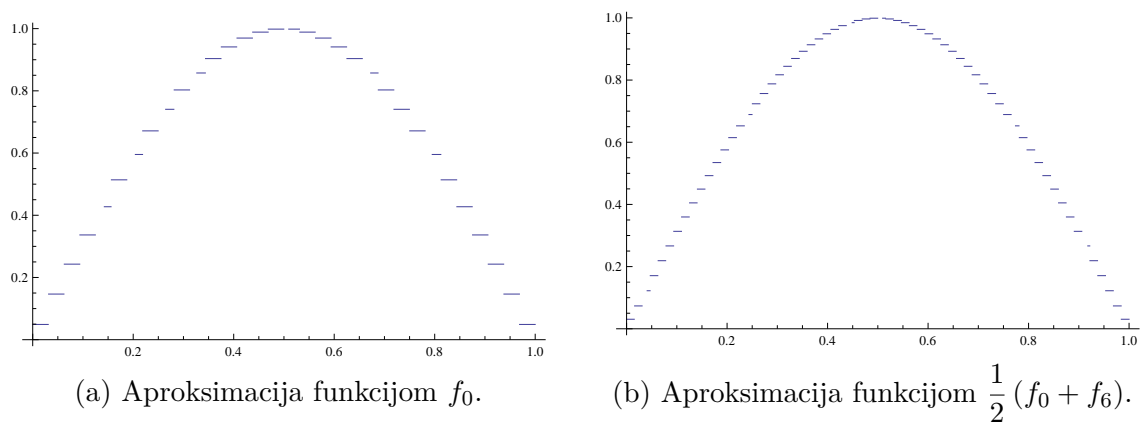
Prema tome, $f \approx \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^{\omega_1} \\ l(I) \geq 2^{-n}}} \langle f, h_I \rangle h_I + \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^{\omega_2} \\ l(I) \geq 2^{-n}}} \langle f, h_I \rangle h_I \right)$ za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$.

Na slikama koje slijede mogu se usporediti graf aproksimacije f_0 i razne kombinacije u smislu upravo izvedene tvrdnje. Možemo uočiti da se bitna razlika vidi na grafovima

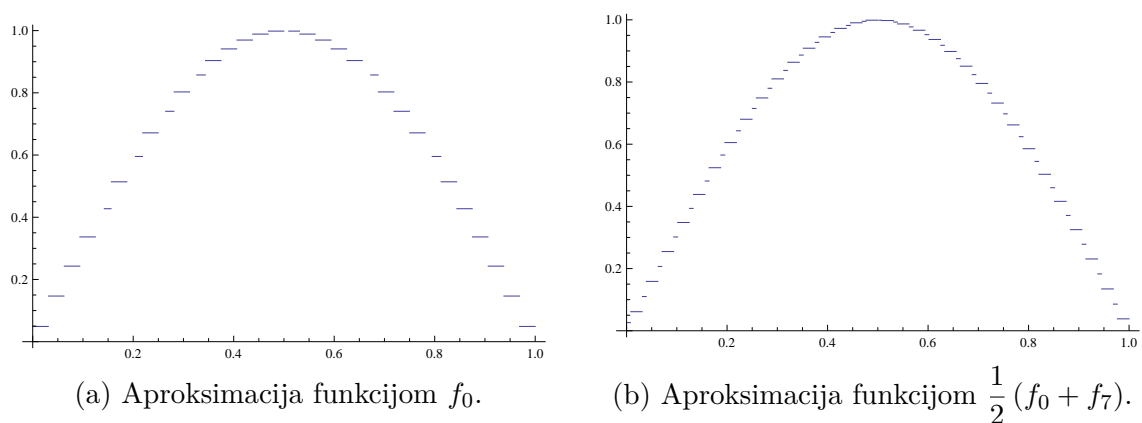
gdje je pomak manji od dimenzije kocki koje promatramo u našim aproksimacijama. \square



Slika 3.18: Aproksimacije funkcije $\sin(\pi x)\mathbb{1}_{[0,1)}(x)$.



Slika 3.19: Aproksimacije funkcije $\sin(\pi x)\mathbb{1}_{[0,1)}(x)$.



Slika 3.20: Aproksimacije funkcije $\sin(\pi x)\mathbb{1}_{[0,1)}(x)$.

Poglavlje 4

Slučajna dijadska dekompozicija Calderón-Zygmundovih operatora

Sada smo spremni iskazati ključni rezultat ovoga rada. Kao što smo već bili rekli u uvodnom poglavlju, taj rezultat je prvi dokazao Hytönen [8], a skicu malo jednostavnijeg dokaza je kasnije predstavio u [7]. Varijanta dokaza koju ćemo izložiti u ovom radu ima malu prednost što će se iz nje moći eksplicitno iščitati ocjene koeficijenata matrice operatora u slučajnoj Haarovoj bazi, što će nam omogućiti numeričku usporedbu s klasičnom valičnom dekompozicijom u zadnjem poglavlju.

4.1. Rastav operatora po slučajnim dijadskim koc- kama

Teorem 4.1. *Neka je T Calderón-Zygmundov operator takav da je $T\mathbb{1} = 0$ i $T^*\mathbb{1} = 0$. Tada za sve $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ vrijedi*

$$\langle Tf, g \rangle = \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \langle S^{ij} f, g \rangle,$$

pri čemu su $\tau(i, j)$ koeficijenti u ovisnosti o $i, j \in \mathbb{N}_0$ koji zadovoljavaju $\sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| < +\infty$, a S_ω^{ij} je dijadski šift s parametrima (i, j) dan nad familijom slučajnih dijadskih kocki \mathcal{D}^ω .

Napomena 4.2. Očekivanje \mathbb{E}_ω nad proizvoljnim funkcijama i funkcijskim izrazima promatramo kao očekivanje nad funkcijama iz Ω u \mathbb{R} (pritom, ako izraz ne ovisi o $\omega \in \Omega$, interpretiramo kao konstantnu funkciju nad Ω). Pritom je svaka takva funkcija ujedno i slučajna varijabla nad Ω budući da je praslika proizvoljnog Borelovog skupa po toj funkciji element familije izmjerivih skupova \mathcal{F} na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Primjerice, u jednakosti navedenoj u ovom teoremu pojavljuje se očekivanje slučajne varijable dane s $\omega \mapsto \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \langle S_\omega^{ij} f, g \rangle$. \square

Napomena 4.3. Ovaj teorem može se iskazati i općenitije, odnosno bez pretpostavki $T\mathbb{1} = 0$ i $T^*\mathbb{1} = 0$. Naime, uz pretpostavku da je teorem dokazan u tom posebnom slučaju, za proizvoljan Calderón-Zygmundov operator T promatramo novi operator N dobiven od T oduzimanjem dvaju posebnih operatora koji su definirani preko T . Za takav operator N vrijedi $N\mathbb{1} = 0$ i $N^*\mathbb{1} = 0$, što u kombinaciji s teoremom 4.1 direktno daje tvrdnju i za operator T . Detaljniji i precizniji raspis može se pronaći u [16] ili [9]. U ovom radu ipak provodimo dokaz uz dodatne pretpostavke $T\mathbb{1} = 0$ i $T^*\mathbb{1} = 0$. Naime, u tim slučajevima možemo odrediti gornju granicu faktora $|\langle Th_I, h_J \rangle|$ koji će se kasnije pojavljivati u dokazu, a koji su nam od posebnog interesa. Točnije, u ovisnosti o $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ (odnosno o njihovim duljinama bridova) možemo odrediti brzinu opadanja tih brojeva. Takve ocjene ne moraju vrijediti u općem slučaju. \square

Reprezentacija iz teorema 4.1 se tvrdi samo za funkcije f i g iz gustog potprostora $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ od $L^2(\mathbb{R}^d)$. (Da je doista riječ o gustom potprostoru je klasična činjenica i može se pronaći npr. u [1, pogl. 3].) Ta pretpostavka ne umanjuje primjenjivost reprezentacije jer je uvijek dovoljno promatrati funkcije iz gustog potprostora i eventualno na kraju prijeći na limes.

Prije dokaza ovog teorema dokazat ćemo propoziciju o dekompoziciji skalarnog produkta $\langle Tf, g \rangle$ preko slučajnih dijadskih kocki, a zatim ćemo, ovisno o slučajevima, izvesti neke ocjene na konstante i sumande pomoću kojih ćemo moći uvesti dijadske šiftove odgovarajućih parametara.

Propozicija 4.4. *Vrijedi*

$$\langle Tf, g \rangle = \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{I, J \in \mathcal{D}^\omega} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle.$$

Pritom za $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ definiramo

$$I \wedge J := \begin{cases} I, & l(I) \leq l(J), \\ J, & l(I) > l(J). \end{cases}$$

Napomena 4.5. Prije samog dokaza obrazložimo zašto se moramo ograničiti na promatranje $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, a ne općenitih L^2 funkcija. Ujedno ćemo i opravdati i višestruko komutiranje suma redova i očekivanja u dokazu koji slijedi.

Prije svega primijetimo da je

$$|\langle Th_I, h_J \rangle| \leq \|T\| \|h_I\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|h_J\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|T\| < +\infty,$$

tj. ti brojevi su ograničeni nekom konstantom koja ovisi samo o T . Iz kasnijih razmatranja će slijediti i mnogo više, ali ovo je najjednostavnije (i dovoljno) što smo mogli uočiti. Kako funkcije f i g iščezavaju izvan neke (dovoljno velike) kugle radijusa R , očigledno za svaku fiksiranu duljinu brida $l > 2R$ postoji najviše 2^d dijadskih kocki iz svake familije slučajnih dijadskih kocki \mathcal{D}^ω koje sijeku njihove nosače. Kako je

$$|\langle f, h_I \rangle| \leq V(I)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = l^{-\frac{d}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

odnosno

$$|\langle g, h_J \rangle| \leq l^{-\frac{d}{2}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

možemo ocijeniti

$$\sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I)=l(J)>2R}} |\langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle| \leq 2^d \|T\| \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \sum_{\substack{l>2R \\ l \text{ je potencija od } 2}} l^{-d} < +\infty.$$

S druge pak strane, za fiksirani $l \leq 2R$ najviše $\left(\frac{2R}{l} + 1\right)^d \leq \left(\frac{4R}{l}\right)^d$ dijadskih kocki duljine brida l siječe nosače od f i g . Ovog puta možemo ocijeniti (korištenjem parcijalne integracije u varijabli j obzirom na koju h_I ima integral nula)

$$|\langle f, h_I \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) h_I(x) dx \right| \leq V(I)^{-1/2} \int_I |\partial_j f(x)| \frac{l}{2} dx \leq l^{\frac{d}{2}+1} \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

i, analogno,

$$|\langle g, h_J \rangle| \leq l^{\frac{d}{2}+1} \|\nabla g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

pa je

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I)=l(J) \leq 2R}} |\langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle| \\ & \leq (4R)^d \|T\| \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \sum_{\substack{l \leq 2R \\ l \text{ je potencija od } 2}} l^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Dakle, pogotovo je

$$\mathbb{E}_\omega \sum_{I, J \in \mathcal{D}^\omega} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) |\langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle| < +\infty. \quad \square$$

Dokaz. Budući da je, za proizvoljan $\omega \in \Omega$, po teoremu 3.6 $\{h_{I+\omega} : I \in \mathcal{D}^0\}$ ortonormi-

rana baza prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$, za svaki $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi

$$f = \sum_{I \in \mathcal{D}^0} \langle f, h_{I+\omega} \rangle h_{I+\omega}, \quad g = \sum_{J \in \mathcal{D}^0} \langle g, h_{J+\omega} \rangle h_{J+\omega}.$$

Također, za svaki $I \in \mathcal{D}^0$ vrijedi

$$\pi_D = \mathbb{P}_\omega(I \dot{+} \omega \text{ je dobra}) = \mathbb{E}_\omega \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega).$$

Koristeći Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji te napomenu 4.5, iz ovih jednakosti slijedi

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \mathbb{E}_\omega \langle Tf, g \rangle = \mathbb{E}_\omega \left\langle T \left(\sum_{I \in \mathcal{D}^0} \langle f, h_{I+\omega} \rangle h_{I+\omega} \right), g \right\rangle & (4.1) \\ &= \frac{1}{\pi_D} \sum_{I \in \mathcal{D}^0} \pi_D \mathbb{E}_\omega \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, g \rangle \\ &= \frac{1}{\pi_D} \sum_{I \in \mathcal{D}^0} \mathbb{E}_\omega \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \mathbb{E}_\omega \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, g \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\pi_D} \sum_{I \in \mathcal{D}^0} \mathbb{E}_\omega \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, g \rangle \\ &= \frac{1}{\pi_D} \sum_{I \in \mathcal{D}^0} \mathbb{E}_\omega \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \left\langle Th_{I+\omega}, \sum_{J \in \mathcal{D}^0} \langle g, h_{J+\omega} \rangle h_{J+\omega} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{I, J \in \mathcal{D}^0} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle. \end{aligned}$$

Jednakost (*) slijedi primjenom leme 2.7. Naime, za proizvoljan $I \in \mathcal{D}^0$ izraz $\mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega)$ ovisi isključivo o dobroći kocke $I \dot{+} \omega$, dok izraz $\langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, g \rangle$ ovisi isključivo o poziciji kocke $I \dot{+} \omega$ budući da se ω pojavljuje kod funkcije $h_{I+\omega}$ koja je različita od nule jedino unutar skupa $I \dot{+} \omega = I + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(I)}} 2^{-j} \omega_j$, a iz dokaza leme 2.7 slijedi da komponente ω_j iz ove sume utječu isključivo na poziciju te kocke.

Ovu sumu možemo napisati kao

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) \leq l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\ &+ \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) > l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle. \end{aligned}$$

Za drugu sumu u ovom zapisu vrijedi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) > l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\ &= \frac{1}{\pi_D} \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) > l(J)}} \mathbb{E}_\omega \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \mathbb{E}_\omega \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\ &= \frac{1}{\pi_D} \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) > l(J)}} \pi_L \mathbb{E}_\omega \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\ &= \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) > l(J)}} \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle, \end{aligned}$$

pri čemu smo u prvoj jednakosti ponovo koristili lemu 2.7. Naime, uz već spomenutu nezavisnost dobrote i pozicije od $I \dot{+} \omega$, budući da vrijedi $J \dot{+} \omega = J + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 2^{-j} < l(J)}} 2^{-j} \omega_j$, na izraz $\langle g, h_{J+\omega} \rangle$ utječu isključivo oni ω_j za koje vrijedi $2^{-j} < l(J) < l(I)$, dakle oni koji ne utječu na dobrotu od $I \dot{+} \omega$.

Prema tome,

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) \leq l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\ &+ \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) > l(J)}} \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle. \end{aligned}$$

Budući da vrijedi

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \mathbb{E}_\omega \langle Tf, g \rangle = \mathbb{E}_\omega \left\langle T \left(\sum_{I \in \mathcal{D}^0} \langle f, h_{I+\omega} \rangle h_{I+\omega} \right), \sum_{J \in \mathcal{D}^0} \langle g, h_{J+\omega} \rangle h_{J+\omega} \right\rangle \\ &= \mathbb{E}_\omega \sum_{I, J \in \mathcal{D}^0} \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle, \end{aligned}$$

izjednačavanjem s gornjom jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) \leq l(J)}} \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\ &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) \leq l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle. \end{aligned}$$

Potpuno analogno, sličnim izvodom kao što je izvod jednakosti (4.1), izvede se jednakost

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{I, J \in \mathcal{D}^0} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(J \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\ &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) < l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(J \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) \geq l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(J \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle, \end{aligned}$$

iz koje, sličnim argumentima kao i gore, slijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) > l(J)}} \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\ &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) > l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(J \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle. \end{aligned}$$

Sveukupno, uz korištenje definicije od $I \wedge J$,

$$\begin{aligned}
 \langle Tf, g \rangle &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{I, J \in \mathcal{D}^0} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\
 &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) \leq l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) > l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(J \dot{+} \omega) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\
 &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) \leq l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}((I \dot{+} \omega) \wedge (J \dot{+} \omega)) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^0 \\ l(I) > l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}((I \dot{+} \omega) \wedge (J \dot{+} \omega)) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\
 &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{I, J \in \mathcal{D}^0} \mathbb{1}_{\text{dobra}}((I \dot{+} \omega) \wedge (J \dot{+} \omega)) \langle f, h_{I+\omega} \rangle \langle Th_{I+\omega}, h_{J+\omega} \rangle \langle g, h_{J+\omega} \rangle \\
 &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{I, J \in \mathcal{D}^\omega} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle,
 \end{aligned}$$

što je ujedno i tvrdnja ove propozicije.

\square .

U nastavku za fiksni $\omega \in \Omega$ sumu unutar očekivanja iz iskaza ove propozicije

$$\sum_{I, J \in \mathcal{D}^\omega} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle \quad (4.2)$$

raspisujemo i prikazujemo preko dijadskih šiftova, u cilju dokazivanja teorema 4.1. Prvo promatramo ovu sumu po familiji slučajnih dijadskih kvadrata $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ za koje vrijedi $l(I) \leq l(J)$ (a onda ćemo nakon tog raspisa slučaj $l(I) > l(J)$ dobiti zamjenom uloga I i J , uz razliku što taj slučaj ne uključuje one I i J za koje je $l(I) = l(J)$). Pritom, po definiciji funkcije $\mathbb{1}_{\text{dobra}}$, sumandi su različiti od nule kada je $I \wedge J = I$ dobra kocka.

Pritom za takve I i J vrijedi točno jedan od ova četiri slučaja:

1. $d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$

$$2. d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} \text{ i } I \cap J = \emptyset$$

$$3. I \subset J$$

$$4. I = J$$

Naime, po lemi 2.5 i činjenici da je $l(I) \leq l(J)$ ili vrijedi $I = J$ ili $I \subset J$ ili $I \cap J = \emptyset$. Također, vrijedi ili $d(I, \partial J) = d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$ ili $d(I, \partial J) = d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$, čime dobivamo dva posebna slučaja za slučaj $I \cap J = \emptyset$.

Pritom, ako za I i J vrijedi $d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$, zbog $l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} > 0$ slijedi $d(I, J) > 0$, pa prema tome mora vrijediti $I \cap J = \emptyset$ (jer je udaljenost između dva skupa koja nisu međusobno disjunktna 0).

Promatranu sumu možemo razdvojiti na četiri sume, ovisno kojem od ova četiri slučaja pripadaju određeni I i J . Točnije, ako označimo

$$\sigma_1 := \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \leq l(J) \\ I \text{ je dobra} \\ d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle,$$

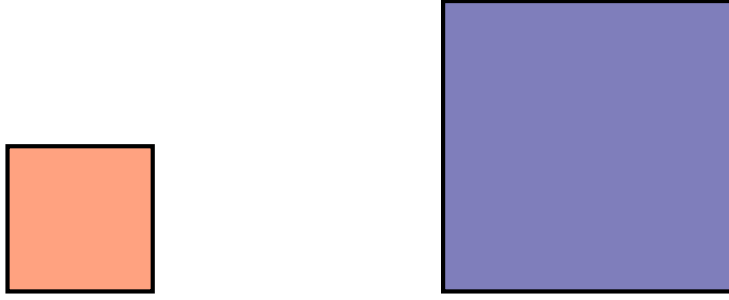
$$\sigma_2 := \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \leq l(J) \\ I \text{ je dobra} \\ I \cap J = \emptyset \\ d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle,$$

$$\sigma_3 := \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \leq l(J) \\ I \text{ je dobra} \\ I \subset J}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle,$$

$$\sigma_4 := \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \leq l(J) \\ I \text{ je dobra} \\ I = J}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle,$$

tada vrijedi

$$\sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \leq l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4. \quad (4.3)$$



Slika 4.1: Odnos kocki I i J iz σ_1 u slučaju $d(I, J) = 2$.

U nastavku dokaza unutar svake pojedine sume potrebno je naći ocjenu za faktor $\langle Th_I, h_J \rangle$ kako bismo mogli na pravilan način uvesti dijadske šiftove.

Primjer 4.6. Prikažimo vizualno odnose dijadskih kocki u svakom od ovih slučajeva za dimenziju $d = 2$ te za parametar $\alpha = 1$. Po tome je prirodno uzeti $\gamma = \frac{2}{2(2+1)} = \frac{1}{3}$. Neka su $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ kocke čije su veličine bridova $l(I) = 1$ i $l(J) = 2$. Po uvjetu u sumi σ_1 udaljenost tih kocki mora zadovoljavati

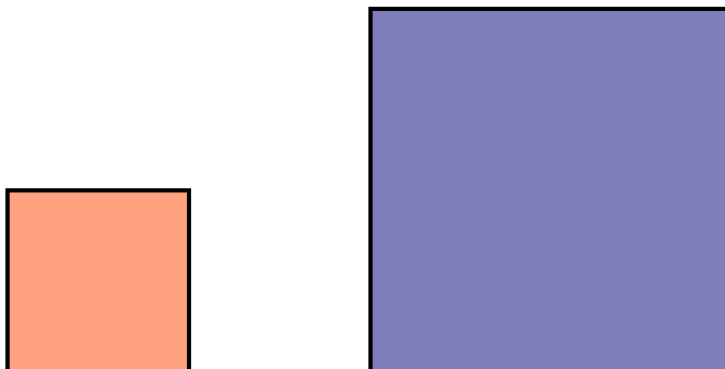
$$d(I, J) > 1^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{1-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1.58.$$

Budući da je $d(I, J)$ cjelobrojni višekratnik od $l(I) = 1$, dobivamo $d(I, J) \geq 2$.

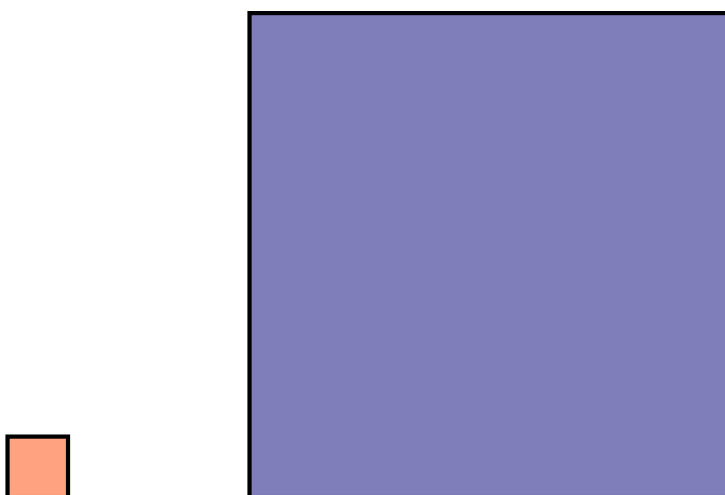
Za I i J iz sume σ_2 , osim što su također međusobno disjunktne kocke, vrijedi suprotna nejednakost, a ta je $d(I, J) \leq 1.58$, a onda i $d(I, J) \leq 1$. U ovom posebnom slučaju, kako je $d(I, J)$ cjelobrojni višekratnik od 1, jedina mogućnost je $d(I, J) = 1$.

Uočimo da je ocjena nejednakosti u sumama σ_1 i σ_2 za proizvoljne kocke I i J zapravo $l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$, odnosno za $\gamma = \frac{1}{3}$ ocjena je $l(I)^{\frac{1}{3}} l(J)^{\frac{2}{3}}$. Dakle, ona ovisi o duljini bridova tih dviju kocki, što znači da za neku fiksnu vrijednost $d(I, J)$, ovisno o veličinama $l(I)$ i $l(J)$, kocke I i J ne pripadaju uvijek istoj sumi.

Primjerice, za $l(I) = 1$ i $l(J) = 8$ vrijedi $l(I)^{\frac{1}{3}} l(J)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$. Dakle, ako odaberemo takve I i J da je $d(I, J) = 3$ (što je cjelobrojni višekratnik od $l(I) = 1$), kocke I i J pripadati će sumi σ_2 , iako smo u prethodnom slučaju za $l(J) = 2$ i još manju udaljenost



Slika 4.2: Odnos kocki I i J u sumi σ_2 .



Slika 4.3: Odnos kocki I i J za koje je $d(I, J) = 3$.

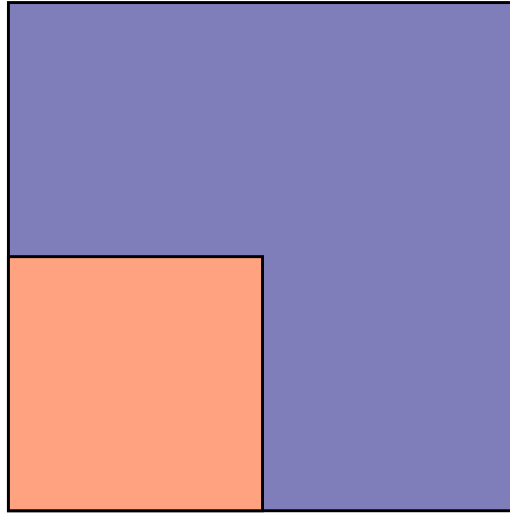
$d(I, J) = 2$ dobili da I i J pripada sumi σ_1 .

U sumi σ_3 jedini je uvjet sumacije $I \subset J$, a u σ_4 uvjet je $I = J$, dakle nemamo posebnih uvjeta na međusobnu udaljenost ili na veličinu. \square

Prije prelaska na pojedine sume, dokažimo sljedeću lemu.

Lema 4.7. *Neka je $\omega \in \Omega$ proizvoljan. Ako je $I \in \mathcal{D}^\omega$ dobra kocka i $J \in \mathcal{D}^\omega$ takva da vrijedi $l(I) \leq l(J)$ i $I \cap J = \emptyset$, tada postoji $Q \in \mathcal{D}^\omega$ takva da vrijedi $I \cup J \subseteq Q$ i zadovoljava*

$$l(Q) \leq 2^r l(I), \text{ ako vrijedi } d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma},$$



Slika 4.4: Odnos kocki I i J u sumi σ_3 .

odnosno

$$l(I)^\gamma l(Q)^{1-\gamma} \leq 2^r d(I, J), \text{ ako vrijedi } d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}.$$

Dokaz. Prije svega, ako je $Q \in \mathcal{D}^\omega$ takva da vrijedi $I \subseteq Q$, $J \subset Q^c$ i $l(Q) \geq 2^r l(I)$, tada vrijedi

$$l(I)^\gamma l(Q)^{1-\gamma} \stackrel{I \text{ je dobra}}{<} d(I, \partial Q) \stackrel{I \cap Q^c = \emptyset}{=} d(I, Q^c) \stackrel{J \subset Q^c}{\leq} d(I, J). \quad (4.4)$$

Pretpostavimo da vrijedi $d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$. Kako je $I \cap J = \emptyset$, vrijedi $d(I, \partial J) = d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$, pa je, budući da je I dobra kocka, $l(J) < 2^r l(I)$.

Neka je $Q \in \mathcal{D}^\omega$ jedinstvena kocka za koju vrijedi $I \subseteq Q$ te $l(Q) = 2^r l(I)$ (jedinstvenost slijedi iz leme 2.5; naime, bilo koje dvije kocke s ova dva svojstva imaju neprazan presjek pa se ujedno i podudaraju zbog jednake duljine bridova). Direktno vrijedi $l(Q) \leq 2^r l(I)$, pa je za dokaz prvog slučaja dovoljno još pokazati da je $J \subseteq Q$, iz čega bi slijedilo $I \cup J \subseteq Q$. Pretpostavimo suprotno, tj. (po lemi 2.5) $J \subset Q^c$. Po (4.4) vrijedi

$$l(I)^\gamma l(Q)^{1-\gamma} < d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}. \quad (4.5)$$

Podijelimo li ovu nejednakost s $l(I)^\gamma > 0$ te je potenciramo s $1 - \gamma > 0$, dobivamo da

vrijedi $l(Q) < l(J)$. No, vrijedi i $l(Q) = 2^r l(I) > l(J)$, što nas dovodi u kontradikciju.

Dakle, pretpostavka je pogrešna pa prema tome $J \subseteq Q$.

Neka sada vrijedi $d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$. Neka je $Q \in \mathcal{D}^\omega$ najmanji (u smislu relacije \subseteq) skup za koji vrijedi $I \subset Q, l(Q) \geq 2^r l(I)$ te $d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(Q)^{1-\gamma}$; takav Q dobivamo tako da biramo najmanji prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $k \geq r$ i $d(I, J) \leq (2^k)^{1-\gamma} l(I)$ te je tada $Q \in \mathcal{D}^\omega$ jedinstvena kocka za koju je $I \subset Q$ te $l(Q) = 2^k l(I)$. Vrijedi $d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} > 0$, pa prema tome $I \cap J = \emptyset$ te, kao i u prvom slučaju, $l(J) < 2^r l(I)$. Prema tome, $l(Q) \geq 2^r l(I) > l(J)$. No, tada po (4.5) vrijedi $l(I)^\gamma l(Q)^{1-\gamma} < l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} < l(I)^\gamma l(Q)^{1-\gamma}$, što je kontradikcija. Pretpostavka $J \subset Q^c$ je bila pogrešna. Dakle, $J \not\subseteq Q^c$, odnosno $J \subset Q$.

Po minimalnosti u odabiru od Q , vrijedi barem jedna od sljedeće dvije nejednakosti:

$$\frac{1}{2}l(Q) < 2^r l(I) \text{ ili } l(I)^\gamma \left(\frac{1}{2}l(Q)\right)^{1-\gamma} < d(I, J).$$

(Inače bi dobili kontradikciju s minimalnošću od Q budući da bi $Q' \in \mathcal{D}^\omega, Q' \subset Q$ takav da je $I \subset Q'$ i $l(Q') = \frac{1}{2}l(Q)$ također zadovoljavao iste dvije nejednakosti kojima smo odredili Q .)

Ako vrijedi $\frac{1}{2}l(Q) < 2^r l(I)$, tada je $2^r l(I) \leq l(Q) < 2^{r+1} l(I)$, pa prema tome $l(Q) = 2^r l(I)$. Kako je $l(I) \leq l(J) \leq l(Q)$, slijedi

$$\begin{aligned} l(I)^\gamma l(Q)^{1-\gamma} &= l(I)^\gamma l(Q) l(Q)^{-\gamma} = 2^r l(I)^\gamma l(I) l(Q)^{-\gamma} \leq 2^r l(I)^\gamma l(J) l(Q)^{-\gamma} \\ &\stackrel{-\gamma < 0}{\leq} 2^r l(I)^\gamma l(J) l(J)^{-\gamma} = 2^r l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} < 2^r d(I, J), \end{aligned}$$

što daje traženu nejednakost u drugom slučaju.

U slučaju da vrijedi $l(I)^\gamma \left(\frac{1}{2}l(Q)\right)^{1-\gamma} < d(I, J)$, direktno slijedi $l(I)^\gamma l(Q)^{1-\gamma} < 2^{1-\gamma} d(I, J) \leq 2^r d(I, J)$, pa tražena nejednakost opet vrijedi. $\square \cdot \mathcal{E} \cdot \mathcal{D}$.

Značenje ove leme je sljedeće: za svaki $I, J \in \mathcal{D}^\omega$, pri čemu je manja od tih kocki

dobra, postoji ne previše veliki $Q \in \mathcal{D}^\omega$ za koji vrijedi $I \cup J \subseteq Q$.

Naime, ako je $I \cap J \neq \emptyset$, po lemi 2.5 vrijedi $I \cap J = I$ ili $I \cap J = J$, a tada možemo uzeti, redom, $Q = J$, odnosno $Q = I$.

U slučaju $I \cap J = \emptyset$, pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je I dobra kocka (inače zamijenimo uloge od I i J). Ako vrijedi $l(I) \leq l(J)$, traženi Q dobivamo iz leme 4.7. U slučaju $l(I) > l(J)$, biramo proizvoljni $J' \in \mathcal{D}^\omega$ takav da vrijedi $J \subset J'$ i $l(J') \geq l(I)$. Po istoj lemi primijenjenoj na I i J' , za pripadni Q vrijedi $I \cup J \subset I \cup J' \subseteq Q$, pa je Q traženi nadskup za početne I i J .

Stoga za svaki $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ postoji ujedno i najmanji (u smislu relacije \subseteq) $Q \in \mathcal{D}^\omega$ za koji je $I \cup J \subseteq Q$ i označavamo ga s $I \vee J$. Preciznije,

$$I \vee J := \bigcap_{\substack{Q \in \mathcal{D}^\omega \\ I \cup J \subseteq Q}} Q.$$

Primjer 4.8. Za $d = 2$ označimo $I = [0, 1]^2$ i $J = [0, 4]^2$. Neka je $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ takav da je $\omega_0 = \omega_{-1} = (1, 0)$, $\omega_{-2} = (1, 1)$ te $\omega_j = (0, 0)$ za sve $j \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1, 0\}$. Tada je

$$I \dot{+} \omega = I + \sum_{2^{-j} < l(I)} 2^{-j} \omega_j = [0, 1]^2 + \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} \omega_j = [0, 1]^2$$

te je

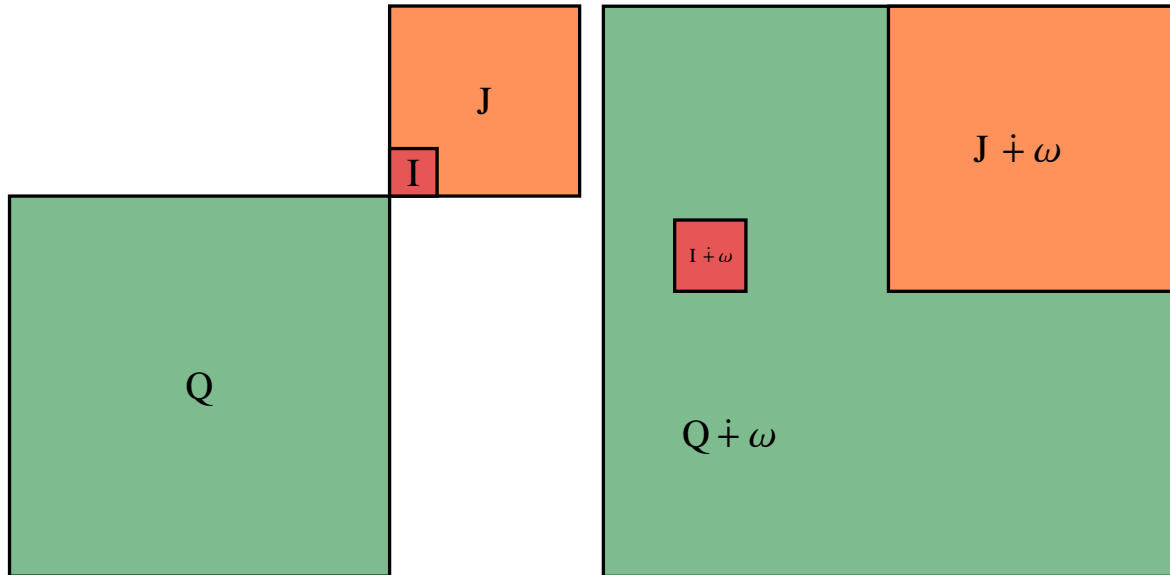
$$\begin{aligned} J \dot{+} \omega &= J + \sum_{2^{-j} < l(J)} 2^{-j} \omega_j = [0, 4]^2 + \sum_{j=-1}^{+\infty} 2^{-j} \omega_j = [0, 4]^2 + 2^1 (1, 0) + 2^0 (1, 0) \\ &= [3, 7] \times [0, 4]. \end{aligned}$$

Ukoliko je I dobra, po lemi 4.7 postoji $(I \dot{+} \omega) \vee (J \dot{+} \omega) \in \mathcal{D}^\omega$. U ovom primjeru je $(I \dot{+} \omega) \vee (J \dot{+} \omega) = [-1, 7] \times [-4, 4]$, a ta kocka se može zapisati kao $Q \dot{+} \omega$, gdje je

$Q = [-8, 0]^2 \in \mathcal{D}^0$. Uistinu,

$$\begin{aligned} Q \dot{+} \omega &= Q + \sum_{2^{-j} < l(Q)} 2^{-j} \omega_j = [-8, 0]^2 + \sum_{j=-2}^{+\infty} 2^{-j} \omega_j \\ &= [-8, 0]^2 + 2^2 (1, 1) + 2^1 (1, 0) + 2^0 (1, 0) = [-1, 7] \times [-4, 4] \\ &= (I \dot{+} \omega) \vee (J \dot{+} \omega). \end{aligned}$$

Uočimo da je $Q \dot{+} \omega$ najmanja kocka koja sadrži $I \dot{+} \omega$ i $J \dot{+} \omega$, budući da je $(I \dot{+} \omega) \cap (J \dot{+} \omega) = \emptyset$ te je $l(Q \dot{+} \omega) = 2l(J \dot{+} \omega)$. \square



(a) Kocke $I, J, Q \in \mathcal{D}^0$.

(b) Kocke $I \dot{+} \omega, J \dot{+} \omega, Q \dot{+} \omega \in \mathcal{D}^\omega$.

Slika 4.5: Odnos kocki $I \dot{+} \omega$ i $J \dot{+} \omega$ te pripadna $(I \dot{+} \omega) \vee (J \dot{+} \omega) = Q \dot{+} \omega$.

4.2. Ocjene na faktore u pojedinim sumama

1. Raspis suma σ_1 i σ_2 .

Promotrimo sume σ_1 i σ_2 koje sumiramo po svim međusobno disjunktivnim kockama I i J za koje je I dobra. Ovisno o tome je li međusobna udaljenost tih kocki veća ili manja

od ocjene $l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$, parove kocki I i J razdvajamo u ove dvije sume.

Sumu σ_1 raspisujemo kao sumu po $Q \in \mathcal{D}^\omega$ te po $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ određenih duljina bridova u odnosu na duljinu brida od Q te za koje je $I \vee J = Q$. Odnosno,

$$\sigma_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=j}^{+\infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ I \text{ je dobra} \\ d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} \\ I \vee J = Q \\ l(I) = 2^{-i} l(Q) \\ l(J) = 2^{-j} l(Q)}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle.$$

Pritom, sumiramo po takvim i, j za koje vrijedi $i \geq j$ (budući da vrijedi $l(I) \leq l(J)$) te $j \geq 1$ (budući da je $I \cap J = \emptyset$, pa je $I \vee J$ različit i od I i od J). Da bismo ovu sumu prikazali kao sumu izraženu preko dijadskih šiftova, trebaju nam sljedeće leme.

Lema 4.9. *Za $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ koji se pojavljuju u sumi σ_1 , uz $Q = I \vee J$ te $l(I) = 2^{-i} l(Q)$, vrijedi*

$$|\langle Th_I, h_J \rangle| \leq C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(Q)}.$$

Pritom je $C_1 > 0$ realna konstanta koja ne ovisi niti o parametru i niti o kockama I, J .

Dokaz. Pretpostavimo najprije da vrijedi $d(I, J) \leq \sqrt{d} l(I)$. Kako I i J pripadaju sumi σ_1 , vrijedi nejednakost $d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$. Po lemi 4.7 slijedi

$$l(I)^\gamma l(Q)^{1-\gamma} \leq 2^r d(I, J) \leq 2^r \sqrt{d} l(I).$$

Dijeljenjem ove nejednakosti s $l(I)$ te potenciranjem eksponentom $\frac{1}{\gamma-1} < 0$ dobivamo

$$2^{-i} = \frac{l(I)}{l(Q)} \geq (2^r \sqrt{d})^{-\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
 |\langle Th_I, h_J \rangle| &\leq \|T\| \|h_I\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|h_J\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|T\| = \|T\| (2^r \sqrt{d})^{d+\alpha} (2^r \sqrt{d})^{-d-\alpha} \\
 &= \|T\| (2^r \sqrt{d})^{d+\alpha} \left((2^r \sqrt{d})^{-\frac{1}{1-\gamma}} \right)^{(d+\alpha)(1-\gamma)} \leq \|T\| (2^r \sqrt{d})^{d+\alpha} 2^{-(d+\alpha)(1-\gamma)i} \\
 &= \|T\| (2^r \sqrt{d})^{d+\alpha} (2^{-i})^d 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \\
 &= \|T\| (2^r \sqrt{d})^{d+\alpha} \frac{V(I)}{V(Q)} 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} = \|T\| (2^r \sqrt{d})^{d+\alpha} 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \frac{\sqrt{V(I)V(I)}}{V(Q)} \\
 &\leq \|T\| (2^r \sqrt{d})^{d+\alpha} 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(Q)}.
 \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je $d(I, J) > \sqrt{d}l(I)$. Neka je $y_0 \in I$ središte kocke I ; dakle, ako je $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, tada je $y_0 = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_d + b_d}{2} \right)$.

Uočimo, za svaki $y \in I$ vrijedi $\|y - y_0\| \leq \frac{l(I)\sqrt{d}}{2}$ budući da je najveća udaljenost središnje točke y_0 od neke druge točke iz kocke I jednaka polovini najveće udaljenosti dviju točki iz I , a najveća udaljenost ostvaruje se u vrhovima kocke.

Uz proizvoljan $x \in J$ vrijedi i

$$\|y - y_0\| \leq \frac{l(I)\sqrt{d}}{2} < \frac{d(I, J)}{2} \leq \frac{\|x - y\|}{2}.$$

Koristeći treću nejednakost iz definicije 1.1 te činjenicu da je $\int_{\mathbb{R}^d} h_I(y) dy = 0$, dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
 |\langle Th_I, h_J \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_T(x, y) h_J(x) h_I(y) dy dx \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_T(x, y) h_J(x) h_I(y) dy dx - \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_T(x, y_0) h_J(x) h_I(y) dy dx \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (K_T(x, y) - K_T(x, y_0)) h_J(x) h_I(y) dy dx \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |K_T(x, y) - K_T(x, y_0)| |h_J(x)| |h_I(y)| dy dx \\
 &\leq \|K\|_{CZ1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|y - y_0\|^\alpha}{\|x - y\|^{d+\alpha}} |h_J(x)| |h_I(y)| dy dx \\
 &\leq \|K\|_{CZ1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{l(I)\sqrt{d}}{2} \right)^\alpha \|x - y\|^{-d-\alpha} |h_I(x)| |h_J(y)| dy dx \\
 &\stackrel{\|x-y\| \geq d(I,J)}{\leq} \frac{l(I)^\alpha d^{\frac{\alpha}{2}}}{2^\alpha} \|K\|_{CZ1} d(I, J)^{-d-\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |h_I(x)| |h_J(y)| dy dx \\
 &= l(I)^\alpha d^{\frac{\alpha}{2}} 2^{-\alpha} \|K\|_{CZ1} d(I, J)^{-d-\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |h_I(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |h_J(y)| dy \right) \\
 &= l(I)^\alpha d^{\frac{\alpha}{2}} 2^{-\alpha} \|K\|_{CZ1} d(I, J)^{-d-\alpha} \frac{1}{\sqrt{V(I)}} V(I) \frac{1}{\sqrt{V(J)}} V(J) \\
 &\stackrel{\text{lema 4.7}}{\leq} l(I)^\alpha d^{\frac{\alpha}{2}} 2^{-\alpha} \|K\|_{CZ1} \sqrt{V(I)V(J)} 2^{r(d+\alpha)} l(I)^{-(d+\alpha)\gamma} l(Q)^{-(d+\alpha)(1-\gamma)} \\
 &= d^{\frac{\alpha}{2}} 2^{-\alpha} \|K\|_{CZ1} \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{l(Q)^d} 2^{r(d+\alpha)} \left(\frac{l(I)}{l(Q)} \right)^{-(d+\alpha)\gamma+\alpha} \\
 &= d^{\frac{\alpha}{2}} 2^{-\alpha} \|K\|_{CZ1} \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(Q)} 2^{r(d+\alpha)} 2^{i((d+\alpha)\gamma-\alpha)} \\
 &= d^{\frac{\alpha}{2}} \|K\|_{CZ1} 2^{-\alpha+r(d+\alpha)} \cdot 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(Q)}.
 \end{aligned}$$

Uz uvođenje konstante $C_1 := \max \left\{ d^{\frac{\alpha}{2}} 2^{-\alpha+r(d+\alpha)} \|K\|_{CZ1}, \|T\| (2^r \sqrt{d})^{d+\alpha} \right\}$ koja ne ovisi o parametru i dobivamo željenu tvrdnju za oba promatrana slučaja. $\Omega.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}$.

Kod sume σ_2 koristimo nešto jednostavniju ocjenu faktora $|\langle Th_I, h_J \rangle|$. Točnije

$$|\langle Th_I, h_J \rangle| \leq \|Th_I\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|h_J\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|T\| \|h_I\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|h_J\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|T\|, \quad (4.6)$$

pri čemu smo koristili činjenicu da su h_I i h_J jedinični vektori u prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Ova ocjena vrijedi i općenito, za proizvoljne kocke I i J , no nećemo je koristiti za sve

četiri definirane sume. Naime, za sumu σ_2 ova ocjena je dovoljno dobra budući da ćemo pokazati da je ta suma zapravo konačna. No, za druge sume s tako slabom ocjenom bila bi upitna konvergencija reda.

Prije definicije koeficijenata, uočimo da I i J iz ove sume zadovoljavaju pretpostavke leme 4.7, pa stoga, kao i u prethodnu sumu, i σ_2 možemo izraziti kao sumu po faktoru $I \vee J$.

Za $I, J, Q \in \mathcal{D}^\omega$ takve da je I dobra kocka, $I \cap J = \emptyset$ i $I \vee J = Q$ definiramo koeficijente

$$a_{IJQ} := \begin{cases} \langle Th_I, h_J \rangle \left(C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \right)^{-1} & d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}, \\ \langle Th_I, h_J \rangle \|T\|^{-1}, & d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}, \end{cases}$$

dok za sve preostale kocke I, J i Q označimo $a_{IJQ} := 0$.

U slučaju da za I i J vrijedi $d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$, po lemi 4.9 i po činjenici da je $\frac{V(I)V(J)}{V(Q)} \geq 0$ vrijedi $|a_{IJQ}| \leq |\langle Th_I, h_J \rangle| \left(C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \right)^{-1} \leq \frac{V(I)V(J)}{V(Q)}$.

U slučaju $d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$ vrijedi ista ocjena, odnosno $|a_{IJQ}| \leq |\langle Th_I, h_J \rangle| \|T\|^{-1} \leq \frac{V(I)V(J)}{V(Q)}$.

Neka je $A_Q^{ij} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ dan s

$$A_Q f = \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ} \langle f, h_I \rangle h_J.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ I \text{ je dobra} \\ d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} \\ I \vee J = Q \\ l(I) = 2^{-i} l(Q) \\ l(J) = 2^{-j} l(Q)}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle \\ &= \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} \langle f, h_I \rangle a_{IJQ} C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \langle g, h_J \rangle \\ &= C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \left\langle g, \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ} \langle f, h_I \rangle h_J \right\rangle \end{aligned}$$

$$= C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \langle A_Q^{ij} f, g \rangle.$$

U skladu s tim, za sumu σ_1 vrijedi

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=j}^{+\infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ I \text{ je dobra} \\ d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} \\ I \vee J = Q \\ l(I) = 2^{-i} l(Q) \\ l(J) = 2^{-j} l(Q)}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=j}^{+\infty} C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \left\langle \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} A_Q^{ij} f, g \right\rangle, \end{aligned}$$

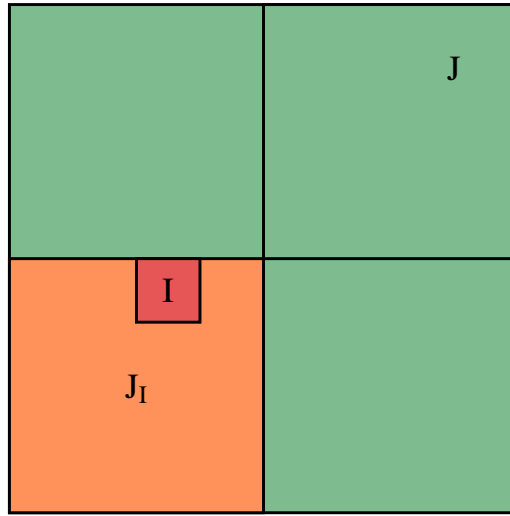
pri čemu, za dane i i j , uvodimo operator $S^{ij} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ dan s $S^{ij} := \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} A_Q^{ij}$.

Slično, za sumu σ_2 dobivamo

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ I \text{ je dobra} \\ l(I) \leq l(J) \\ I \cap J = \emptyset \\ d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i \left\langle g, \sum_{\substack{(i,j) \\ I, J \subseteq Q}} \|T\| a_{IJQ} \langle f, h_I \rangle h_J \right\rangle \\ &= \|T\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i \left\langle g, \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} A_Q f \right\rangle = \|T\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i \langle S^{ij} f, g \rangle \end{aligned}$$

Uočimo da je pritom dovoljno promatrati $i \in \mathbb{N}$ za koje je $1 \leq i \leq r$. Naime, za I i J iz ove sume vrijedi $d(I, \partial J) = d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$, a I je dobra kocka, pa po definiciji dobre kocke mora vrijediti $l(J) < 2^r l(I)$. No, kako već vrijedi $l(I) \leq l(J)$, dobivamo da je suma σ_2 konačna te da su željeni parametri i i j takvi da vrijedi $j \leq i$ i $-j < r - i$, odnosno $i < r + j$ i $i \leq r$.

Primijetimo da je, po definiciji 3.9, S^{ij} dijadski šift s parametrima (i, j) , za svaki $i \geq j \geq 1$.


 Slika 4.6: Kocke I i J s pripadnom kockom J_I .

Za te dvije sume zajedno dobivamo

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 + \sigma_2 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^i C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \langle S^{ij} f, g \rangle + \|T\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i \langle S^{ij} f, g \rangle \\
 &= \sum_{i=r+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^i C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \langle S^{ij} f, g \rangle \\
 &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i (C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} + \|T\|) \langle S^{ij} f, g \rangle.
 \end{aligned}$$

2. Raspis sume σ_3 .

Nastavljamo sa sumom σ_3 . Neka su $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ takvi da je $I \subset J$. Označimo s $J_I \in \mathcal{D}^\omega$ jedinstvenu kocku koja zadovoljava $I \subseteq J_I \subset J$ i $l(J_I) = \frac{l(I)}{2}$. Budući da je J_I prava podkocka od J , a Haarova funkcija h_J je po definiciji konstantna po podkockama od J čija je veličina brida $\frac{l(J)}{2}$, posebno je h_J konstantna i na skupu J_I ; označimo vrijednost od h_J na skupu J_I s $c_{I,J}$ (uočimo, $c_{I,J} = \pm \frac{1}{\sqrt{V(J)}}$).

Slijedi

$$\langle Th_I, h_J \rangle = \langle Th_I, (\mathbb{1}_{J_I^c} + \mathbb{1}_{J_I}) h_J \rangle = \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c} h_J \rangle + \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I} h_J \rangle \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c} h_J \rangle + c_{I,J} \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I} \rangle = \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c} h_J \rangle + c_{I,J} \langle Th_I, \mathbb{1} - \mathbb{1}_{J_I^c} \rangle \\
 &= \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c} (h_J - c_{I,J}) \rangle + c_{I,J} \langle Th_I, \mathbb{1} \rangle \\
 &= \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c} (h_J - c_{I,J}) \rangle + c_{I,J} \langle h_I, T^* \mathbb{1} \rangle \\
 &= \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c} (h_J - c_{I,J}) \rangle,
 \end{aligned}$$

budući da je po pretpostavci teorema $T^* \mathbb{1} = 0$ pa je i $c_{I,J} \langle h_I, T^* \mathbb{1} \rangle = 0$.

Lema 4.10. Za $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ takve da je I dobra, $I \subset J$ i $l(I) = 2^{-i} l(J)$ za neki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left| \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c} (h_J - c_{I,J}) \rangle \right| \leq C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}},$$

pri čemu je $C_3 > 0$ konstanta koja ne ovisi niti o i niti o I, J .

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}
 \left| \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c} (h_J - c_{I,J}) \rangle \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |Th_I(x)| \mathbb{1}_{J_I^c}(x) |h_J(x) - c_{I,J}| dx & (4.8) \\
 &\leq \int_{J_I^c} |Th_I(x)| (|h_J(x)| + |c_{I,J}|) dx \\
 &= \frac{2}{\sqrt{V(J)}} \int_{J_I^c} |Th_I(x)| dx \stackrel{I \subset J_I}{\leq} \frac{2}{\sqrt{V(J)}} \int_{I^c} |Th_I(x)| dx.
 \end{aligned}$$

Pretpostavimo najprije da vrijedi $l(I) \geq 2^{-r} l(J)$. Označimo s $4dI$ kocku čiji je brid $4d$ puta dulji od duljine brida kocke I te sadrži kocku I u svom središtu; odnosno, ako je $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$, tada je $4dI = \left[a_1 - \frac{4d-1}{2} l(I), a_1 + \frac{4d-1}{2} l(I) \right] \times \left[a_2 - \frac{4d-1}{2} l(I), a_2 + \frac{4d-1}{2} l(I) \right] \times \dots \times \left[a_d - \frac{4d-1}{2} l(I), a_d + \frac{4d-1}{2} l(I) \right]$. Primijetimo da $4dI$ ne mora biti dijadska kocka, no i za nju po standardnoj geometrijskoj interpretaciji definiramo njenu duljinu brida kao udaljenost dvaju susjednih vrhova te volumen te kocke kao d -tu potenciju njene duljine brida. Dakle, $l(4dI) = 4dl(I)$ i $V(4dI) = (4dl(I))^d$.

Označimo s $y_0 \in I$ središte kocke I definirano kao i u dokazu leme 4.9. Uočimo da za proizvoljne $y \in I$ i $x \in 4dI$ vrijedi sljedeće:

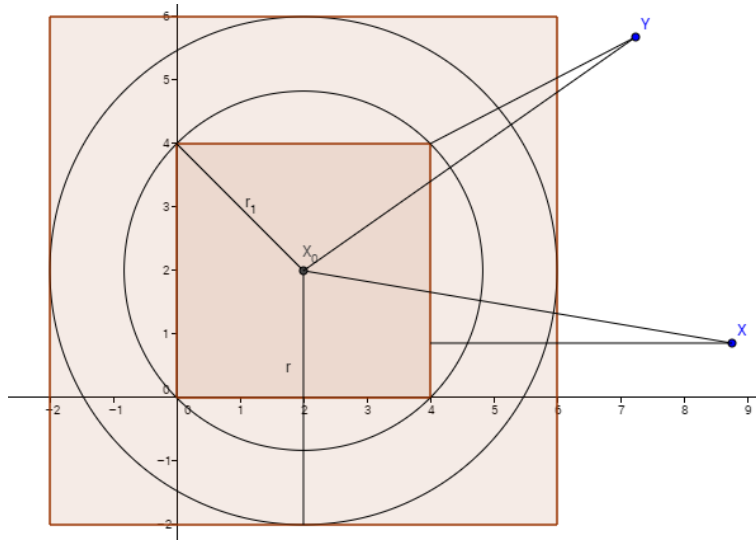
$$\frac{\|y - x\|}{2} \geq \frac{(4d - 1)l(I)}{4} > \frac{(2\sqrt{d} + 1) \cdot d - 1)l(I)}{4} = \frac{\sqrt{d}l(I)}{2} \geq \|y - y_0\|.$$

Naime, $4d = 2d + 2d > 2\sqrt{d} + 1$, pa je i $4 > \frac{2\sqrt{d} + 1}{d}$.

Koristeći drugu nejednakost iz definicije 1.1 te činjenicu da je $\int_I h_I(x) dx = 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{I^c} |Th_I(x)| dx &= \int_{(4dI) \setminus I} |Th_I(x)| dx + \int_{(4dI)^c} |Th_I(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathbb{1}_{(4dI) \setminus I}(x) Th_I(x) \right| dx \\ &\quad + \int_{(4dI)^c} \left| \int_{\mathbb{R}^d} K_T(x, y) h_I(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} K_T(x, y') h_I(y) dy \right| dx \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \left\| \mathbb{1}_{(4dI) \setminus I} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|Th_I\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_{(4dI)^c} \int_{\mathbb{R}^d} |K_T(x, y) - K_T(x, y')| |h_I(y)| dy dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(4dI) \setminus I}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \|T\| \|h_I\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \int_{(4dI)^c} \int_I \|K\|_{CZ1} \frac{\|y - y'\|^\alpha}{\|x - y\|^{d+\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{V(I)}} dy dx \\ &\leq \sqrt{V(4dI) - V(I)} \|T\| + \frac{\|K\|_{CZ1}}{\sqrt{V(I)}} \int_{(4dI)^c} \int_I \frac{l(I)^\alpha}{d(x, I)^{d+\alpha}} dy dx \\ &= \sqrt{(4dl(I))^d - V(I)} \|T\| + \frac{\|K\|_{CZ1}}{\sqrt{V(I)}} \cdot V(I) \int_{(4dI)^c} \frac{l(I)^\alpha}{d(x, I)^{d+\alpha}} dx \\ &= \sqrt{4^d d^d - 1} \sqrt{V(I)} \|T\| + \|K\|_{CZ1} \sqrt{V(I)} l(I)^\alpha \int_{(4dI)^c} \frac{1}{d(x, I)^{d+\alpha}} dx. \end{aligned}$$

Pritom smo u koraku (*) koristili Hölderovu nejednakost primijenjenu na funkcije $\mathbb{1}_{(4dI) \setminus I}$ i Th_I , za parametre $p = q = 2$.



Slika 4.7: Odnos kocki $I = [0, 4]^2$ i $8I = [-14, 18]^2$ i kružnica oko $x_0 = (2, 2)$ te označena udaljenost točki $x, y \in (8I)^c$ od skupa I i od točke x_0 ($8I = 4dI$ za $d = 2$).

Potrebno je procijeniti integral $\int_{(4dI)^c} \frac{1}{d(x, I)^{d+\alpha}} dx$. Budući da za svaki $x' \in I$ vrijedi

$$d(x, x_0) \leq \frac{\sqrt{d}}{2} l(I), \text{ vrijedi } I \subseteq K\left(x_0, \frac{\sqrt{d}}{2} l(I)\right), \text{ a onda i } d(x, I) \geq d\left(x, K\left(x_0, \frac{\sqrt{d}}{2} l(I)\right)\right) = d(x, x_0) - \frac{\sqrt{d}}{2} l(I).$$

Nadalje, vrijedi $K(x_0, dl(I)) \subseteq 4dI$, a onda i $(4dI)^c \subseteq K(x_0, dl(I))^c$.

Prema tome, kako je $\frac{1}{d(x, I)^{d+\alpha}} \geq 0$, gornji integral je manji ili jednak od integrala po nadskupu $K\left(x_0, \frac{d}{2} l(I)\right)^c$, pa vrijedi

$$\int_{(4dI)^c} \frac{1}{d(x, I)^{d+\alpha}} dx \leq \int_{K(x_0, dl(I))^c} \frac{1}{d(x, I)^{d+\alpha}} dx \leq \int_{K(x_0, dl(I))^c} \frac{1}{\left(d(x, x_0) - \frac{\sqrt{d}}{2} l(I)\right)^{d+\alpha}} dx.$$

Sada ovaj integral možemo izraziti kao dvostruki integral, jedan integral ovisi o parametru $\rho \geq dl(I)$, a drugi integral je po sferi $S(x_0, \rho)$. Pritom, za proizvoljan $x \in S(x_0, \rho)$ vrijedi $d(x, x_0) = \rho$.

Primijetimo, kako je ω_d volumen d -dimenzionalne jedinične kugle, odnosno kugle radijusa 1, onda je $\omega_d \rho^d$ volumen d -dimenzionalne kugle radijusa ρ te je $d\omega_d \rho^{d-1}$ veličina

(oplošje) $(d - 1)$ -dimenzionalne sfere radijusa ρ . Naime, za proizvoljan $x_0 \in \mathbb{R}^d$ i $\rho > 0$ vrijedi jednakost

$$V(K(x_0, \rho)) = \int_{K(x_0, \rho)} dx = \left[t = \frac{x - x_0}{\rho}, dt = \frac{1}{\rho^d} dx \right] = \int_{K(\theta, 1)} \rho^d dt \stackrel{\text{definicija od } \omega_d}{=} \omega_d \rho^d,$$

a onda, kako je $V(K(x_0, \rho)) = \int_0^\rho V(S(x_0, t)) dt$, deriviranjem po ρ slijedi

$$V(S(x_0, \rho)) = \frac{\partial}{\partial \rho} (\omega_d \rho^d) = d\omega_d \rho^{d-1}.$$

Uočimo još sljedeće: iz nejednakosti $\rho \geq dl(I)$ slijedi $\frac{l(I)\sqrt{d}}{2\rho} \leq \frac{1}{dl(I)} \cdot \frac{l(I)\sqrt{d}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{d}}$,

a onda i $\left(1 - \frac{l(I)\sqrt{d}}{2\rho}\right)^d \geq \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{d}}\right)^d$ i konačno $\frac{1}{\left(1 - \frac{l(I)\sqrt{d}}{2\rho}\right)^d} \stackrel{(**)}{\leq} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{d}}\right)^d}$.

U tom slučaju vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{K(x_0, dl(I))^c} \frac{1}{\left(d(x, x_0) - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)\right)^{d+\alpha}} dx &= \int_{dl(I)}^{+\infty} \int_{S(x_0, \rho)} \frac{1}{\left(d(x, x_0) - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)\right)^{d+\alpha}} d\sigma_x d\rho \quad (4.9) \\ &= \int_{dl(I)}^{+\infty} \frac{1}{\left(\rho - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)\right)^{d+\alpha}} \cdot d\omega_d \rho^{d-1} d\rho \\ &= d\omega_d \int_{dl(I)}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{d}l(I)}{2\rho}\right)^d} \cdot \frac{1}{\left(\rho - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)\right)^\alpha} d\rho \\ &\stackrel{(**)}{\leq} d\omega_d \int_{dl(I)}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{d}}\right)^d} \cdot \frac{1}{\left(\rho - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)\right)^\alpha} d\rho \\ &\stackrel{\rho \geq \rho - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)}{\leq} \frac{d\omega_d}{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{d}}\right)^d} \int_{dl(I)}^{+\infty} \frac{1}{\left(\rho - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)\right)^{1+\alpha}} \\ &= \left[t = \rho - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I), dt = d\rho \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d\omega_d}{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{d}}\right)^d} \int_{\left(d - \frac{\sqrt{d}}{2}\right)l(I)}^{+\infty} t^{-1-\alpha} dt = \frac{d\omega_d}{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{d}}\right)^d} \cdot \frac{-1}{\alpha} t^{-\alpha} \Big|_{d - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)}^{+\infty} \\
 &= \frac{d^{1+\frac{d}{2}}\omega_d}{\alpha \left(2\sqrt{d} - 1\right)^d} \cdot \frac{d^{-\frac{\alpha}{2}} \left(2\sqrt{d} - 1\right)^{-\alpha}}{2^{-\alpha}} l(I)^{-\alpha} \\
 &= \frac{2^\alpha d^{1+\frac{d-\alpha}{2}}\omega_d}{\alpha \left(2\sqrt{d} - 1\right)^{d+\alpha}} l(I)^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Konačno, tražena ocjena koeficijenta $|\langle Th_I, \mathbb{1}_{I^c}(h_J - c_{I,J}) \rangle|$ jest

$$\begin{aligned}
 |\langle Th_I, \mathbb{1}_{I^c}(h_J - c_{I,J}) \rangle| &\leq \frac{2}{\sqrt{V(J)}} \int_{I^c} |Th_I(x)| dx \\
 &\leq \frac{2}{\sqrt{V(J)}} \cdot \left(\sqrt{4^d d^d - 1} \|T\| + \|K\|_{CZ_1} l(I)^\alpha \int_{(dI)^c} \frac{1}{d(x, I)^{d+\alpha}} dx \right) \sqrt{V(I)} \\
 &\leq \frac{2}{\sqrt{V(J)}} \left(\sqrt{4^d d^d - 1} \|T\| + \|K\|_{CZ_1} l(I)^\alpha \cdot \frac{2^\alpha d^{1+\frac{d-\alpha}{2}}\omega_d}{\alpha \left(2\sqrt{d} - 1\right)^{d+\alpha}} l(I)^{-\alpha} \right) \sqrt{V(I)} \\
 &= \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}} \left(2\sqrt{4^d d^d - 1} \|T\| + \|K\|_{CZ_1} \cdot \frac{2^{1+\alpha} d^{1+\frac{d-\alpha}{2}}\omega_d}{\alpha \left(2\sqrt{d} - 1\right)^{d+\alpha}} \right),
 \end{aligned}$$

odnosno, uvođenjem konstante $C'_3 := 2\sqrt{4^d d^d - 1} \|T\| + \|K\|_{CZ_1} \cdot \frac{2^{1+\alpha} d^{1+\frac{d-\alpha}{2}}\omega_d}{\alpha \left(2\sqrt{d} - 1\right)^{d+\alpha}}$ koja ne ovisi o kockama I i J ,

$$|\langle Th_I, \mathbb{1}_{I^c}(h_J - c_{I,J}) \rangle| \leq C'_3 \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}}.$$

Pretpostavimo sada da je $l(I) < 2^{-r}l(J)$. Posebno, vrijedi $l(I) \leq 2^{-r-1}l(J) = 2^{-r}l(J_I)$; također, budući da je $r > 1$, vrijedi $l(I) < l(J_I)$, odnosno $I \subset J_I$.

Budući da je I dobra kocka, vrijedi

$$d(I, J_I^c) = d(I, \partial J_I) > l(I)^\gamma l(J_I)^{1-\gamma} = l(I)^\gamma \left(\frac{l(J)}{2}\right)^{1-\gamma} > 0.$$

Kako za svaki $x \in J_I^c$ vrijedi $d(x_0, x) \geq d(I, J_I^c)$, slijedi $J_I^c \subseteq K\left(x_0, l(I)^\gamma \left(\frac{l(J)}{2}\right)^{1-\gamma}\right)^c$. Nadalje, uočimo da po trećoj nejednakosti iz odabira broja r (definicija 2.6) vrijedi

$$l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} \geq l(I)^\gamma (2^r l(I))^{1-\gamma} = 2^{r(1-\gamma)} l(I) > \frac{\sqrt{d}}{2} l(I).$$

Prema tome, $I \subseteq K\left(x_0, \frac{\sqrt{d}}{2} l(I)\right) \subset K\left(x_0, l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}\right)$, tj. $K\left(x_0, l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}\right)^c \subset K\left(x_0, \frac{\sqrt{d}}{2} l(I)\right)^c \subseteq I^c$.

Također, za $x \in J_I^c$ vrijedi $d(x, I) \geq d\left(x, K\left(x_0, \frac{\sqrt{d}}{2} l(I)\right)\right) = d(x, x_0) - \frac{\sqrt{d}}{2} l(I)$.

Po početnoj izvedenoj nejednakosti (4.8) i, opet, uz $\int_{\mathbb{R}^d} h_I(y) dy = 0$, vrijedi

$$\begin{aligned} & \left| \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c}(h_J - c_{I,J}) \rangle \right| \leq \frac{2}{\sqrt{V(J)}} \int_{J_I^c} |Th_I(x)| dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{V(J)}} \int_{J_I^c} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (K_T(x, y) - K_T(x, y_0)) h_I(y) dy \right| dx \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{V(J)}} \int_{J_I^c} \int_I |K_T(x, y) - K_T(x, y_0)| |h_I(y)| dy dx \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{V(J)V(I)}} \int_{J_I^c} \int_I \frac{\|y - y_0\|^\alpha}{\|x - y\|^{d+\alpha}} dy dx \leq \frac{2}{\sqrt{V(J)V(I)}} \int_{J_I^c} \int_I \frac{\left(l(I) \frac{\sqrt{d}}{2}\right)^\alpha}{d(x, I)^{d+\alpha}} dy dx \\ &= d^{\frac{\alpha}{2}} 2^{1-\alpha} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}} l(I)^\alpha \int_{J_I^c} \frac{1}{d(x, I)^{d+\alpha}} dx \\ &\leq d^{\frac{\alpha}{2}} 2^{1-\alpha} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}} l(I)^\alpha \int_{K\left(x_0, l(I)^\gamma \left(\frac{l(J)}{2}\right)^{1-\gamma}\right)^c} \frac{1}{d(x, I)^{d+\alpha}} dx \\ &\leq d^{\frac{\alpha}{2}} 2^{1-\alpha} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}} l(I)^\alpha \int_{K\left(x_0, l(I)^\gamma \left(\frac{l(J)}{2}\right)^{1-\gamma}\right)^c} \frac{1}{\left(d(x, x_0) - \frac{\sqrt{d}}{2} l(I)\right)^{d+\alpha}} dx. \end{aligned}$$

Primijetimo sljedeće: po odabiru broja r iz definicije 2.6, točnije po trećoj nejednakosti

iz iste definicije vrijedi $2^{r(1-\gamma)} > \frac{\sqrt{d}}{2}$. Kako je u ovom slučaju $l(I) \leq 2^{-r-1}l(J)$, vrijedi $2^r \leq \frac{l(J)}{2l(I)}$. Prema tome, $\left(\frac{l(J)}{2l(I)}\right)^{1-\gamma} \geq 2^{r(1-\gamma)} > \frac{\sqrt{d}}{2}$, pa množenjem nejednakosti s $l(I)$ dobivamo $l(I)^\gamma \left(\frac{l(J)}{2}\right)^{1-\gamma} > \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)$.

Uz oznaku $\rho_1 := l(I)^\gamma \left(\frac{l(J)}{2}\right)^{1-\gamma}$ dobili smo da vrijedi $\rho_1 - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I) > 0$. Prema tome, postoji dovoljno malena konstanta $c \in \langle 0, 1 \rangle$ takva da je $\rho_1 - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I) > c\rho_1$. No, za sve $\rho \geq \rho_1$ je tada $(1-c)\rho \geq (1-c)\rho_1 > \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)$, što nam i za ρ daje nejednakost $\rho - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I) > c\rho$.

Slijedi

$$\begin{aligned} \int_{K(x_0, \rho_1)^c} \frac{1}{\left(d(x, x_0) - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)\right)^{d+\alpha}} dx &= \int_{\rho_1}^{+\infty} \int_{S(x_0, \rho)} \frac{1}{\left(\rho - \frac{\sqrt{d}}{2}l(I)\right)^{d+\alpha}} d\sigma_x d\rho \\ &\leq \int_{\rho_1}^{+\infty} \frac{1}{(c\rho)^{d+\alpha}} d\omega_d \rho^{d-1} d\rho = c^{d+\alpha} d\omega_d \int_{\rho_1} \rho^{-\alpha-1} d\rho = c^{d+\alpha} d\omega_d \left(-\frac{1}{\alpha} \rho^{-\alpha}\right) \Big|_{\rho_1}^{+\infty} \\ &= \frac{c^{d+\alpha} d\omega_d}{\alpha} \rho_1^{-\alpha} = \frac{c^{d+\alpha} d\omega_d}{\alpha} l(I)^{-\gamma\alpha} \left(\frac{l(J)}{2}\right)^{-(1-\gamma)\alpha}. \end{aligned}$$

Konačno,

$$\begin{aligned} \left| \langle Th_I, \mathbb{1}_{J^c}(h_J - c_{I,J}) \rangle \right| &\leq d^{\frac{\alpha}{2}} 2^{1-\alpha} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}} l(I)^\alpha \cdot \frac{c^{d+\alpha} d\omega_d}{\alpha} l(I)^{-\gamma\alpha} \left(\frac{l(J)}{2}\right)^{-(1-\gamma)\alpha} \\ &= \frac{c^{d+\alpha} d^{\frac{\alpha}{2}+1} \omega_d 2^{1-\gamma\alpha}}{\alpha} 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}} \end{aligned}$$

Tvrđnja ove leme slijedi uz uvođenje konstante

$$C_3 := \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{c^{d+\alpha} d^{\frac{\alpha}{2}+1} \omega_d 2^{1-\gamma\alpha}}{\alpha}, C'_3 2^{(1-\gamma)\alpha i} \right\}.$$

Naime, ako je $l(I) \geq 2^{-r}l(J)$, vrijedi

$$\begin{aligned} \left| \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c}(h_J - c_{I,J}) \rangle \right| &\leq C'_3 \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}} \cdot \underbrace{C_3 \cdot (C'_3 2^{(1-\gamma)\alpha i})^{-1}}_{\geq 1} \\ &= C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}}, \end{aligned}$$

dok u slučaju $l(I) < 2^{-r}l(J)$ vrijedi

$$\begin{aligned} \left| \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c}(h_J - c_{I,J}) \rangle \right| &\leq \frac{c^{d+\alpha} d^{\frac{\alpha}{2}+1} \omega_d 2^{1-\gamma\alpha}}{\alpha} 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}} \\ &\leq \underbrace{C_3 \left(\frac{c^{d+\alpha} d^{\frac{\alpha}{2}+1} \omega_d 2^{1-\gamma\alpha}}{\alpha} \right)^{-1}}_{\geq 1} \frac{c^{d+\alpha} d^{\frac{\alpha}{2}+1} \omega_d 2^{1-\gamma\alpha}}{\alpha} 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}} \\ &= C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}}. \quad \square \text{.} \end{aligned}$$

Za sumu σ_3 vrijedi

$$\sigma_3 = \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \leq l(J) \\ I \text{ je dobra} \\ I \subset J}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle = \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \leq l(J) \\ I \text{ je dobra} \\ I \subset J}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c}(h_J - c_{I,J}) \rangle \langle g, h_J \rangle.$$

Za $I, J, Q \in \mathcal{D}^\omega$ definiramo

$$a_{IJQ} := \begin{cases} \langle Th_I, \mathbb{1}_{J_I^c}(h_J - c_{I,J}) \rangle (C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha i})^{-1}, & J = Q, I \text{ je dobra}, l(I) \leq l(J), I \subset J, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

Direktno po definiciji vrijedi $|a_{IJQ}| \leq \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(Q)}$; naime, ili je $a_{IJQ} = 0$ ili je, za

određene I i J , $|a_{IJJ}| \leq \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}} = \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(J)}$.

Neka je $i \in \mathbb{N}_0$. Definiramo li, za svaki $J \in \mathcal{D}^\omega$ operator $A_J^{i0} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$

s $A_J^{i0} := \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,0)} a_{IJQ} \langle f, h_I \rangle h_J$, te operator $S^{i0} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ s $S^{i0} := \sum_{J \in \mathcal{D}^\omega} A_J^{i0}$, zaključujemo da je S^{i0} dijadski šift s parametrima $(i, 0)$.

Prema tome, vrijedi

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \leq l(J) \\ I \text{ je dobra} \\ I \subset J}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, \mathbb{1}_{J^c}(h_J - c_{I,J}) \rangle \langle g, h_J \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{J \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ I \text{ je dobra} \\ I \subset J \\ l(I) = 2^{-i}l(J)}} \langle g, \langle Th_I, \mathbb{1}_{J^c}(h_J - c_{I,J}) \rangle \langle f, h_I \rangle h_J \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left\langle g, \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,0)} a_{IJQ} C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \langle f, h_I \rangle h_J \right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \langle g, S^{i0} f \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \langle S^{i0} f, g \rangle.
 \end{aligned}$$

Dakle,

$$\sigma_3 = \sum_{i=1}^{+\infty} C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \langle S^{i0} f, g \rangle.$$

3. Raspis sume σ_4 .

Preostala suma σ_4 sumira se po onim I i J za koje je I dobra kocka te vrijedi $I = J$. U ovom slučaju vrijedi $d(I, J) = 0 \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$, a kako je I dobra, mora vrijediti $l(I) > 2^{-r}l(J)$. Obzirom da vrijedi $l(J) \geq l(I)$, za fiksnu kocku J postoji samo konačno mnogo takvih kocki I . U ovom slučaju koristit ćemo istu ocjenu izvedenu kao i kod sume σ_2 u (4.6), odnosno

$$|\langle Th_I, h_J \rangle| \leq \|T\|.$$

Kako bismo sumu σ_4 sveli na sumu po dijadskim šiftovima, definiramo

$$a_{IJQ} := \begin{cases} \langle Th_I, h_J \rangle \|T\|^{-1}, & I \text{ je dobra, } I = J = Q, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Po definiciji ovih koeficijenata slijedi $|a_{III}| \leq |\langle Th_I, h_I \rangle| \|T\|^{-1} \leq \|T\| \|T\|^{-1} = 1 = \frac{\sqrt{V(I)V(I)}}{V(I)}$ za svaku dobru $I \in \mathcal{D}^\omega$, a i za sve ostale $I, J, Q \in \mathcal{D}^\omega$ vrijedi $a_{IJQ} = 0 \leq \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(Q)}$.

Prema tome, za svaki $I \in \mathcal{D}^\omega$ operator $A_I^{00} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ definiran s $A_Q^{00}(f) := \sum_{I \in \mathcal{D}^\omega} a_{III} \langle f, h_I \rangle h_I$ je isti kao i onaj iz definicije 3.9 za $i = j = 0$ (tada se sumira po familiji svih $I, J, Q \in \mathcal{D}^\omega$ za koje je $I, J \subseteq Q$ i $l(I) = l(J) = l(Q)$, a to nužno povlači $I = J = Q$), pa je operator $S^{00} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ dan s $S^{00}(f) := \sum_{I \in \mathcal{D}^\omega} A_I f$ dijadski šift s parametrima $(0, 0)$.

Stoga vrijedi

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \leq l(J) \\ I \text{ je dobra} \\ I=J}} \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle = \langle Th_I, h_I \rangle \left\langle g, \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^\omega \\ I \text{ je dobra}}} \langle f, h_I \rangle h_I \right\rangle \\ &= \left\langle g, \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ} \|T\| \langle f, h_I \rangle h_J \right\rangle = \|T\| \left\langle g, \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} A_Q f \right\rangle = \|T\| \langle S^{00} f, g \rangle. \end{aligned}$$

4.3. Konačni rezultat i generalna ocjena

Vratimo se na sume iz (4.3). Vrijedi

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) \leq l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 \\ &= \sum_{i=r+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^i C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \langle S^{ij} f, g \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i (C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} + \|T\|) \langle S^{ij} f, g \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{+\infty} C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \langle S^{i0} f, g \rangle \\ &\quad + \|T\| \langle S^{00} f, g \rangle. \end{aligned}$$

Dobili smo željeni raspis za podsumu sume iz (4.2) i to kada je $l(I) \leq l(J)$. Preostala je suma po kockama I i J za koje je $l(I) > l(J)$. U tom slučaju je $I \wedge J = J$, pa se ta suma dobiva analogno, zamjenom uloga I i J . Pritom u takvom raspisu jedino nemamo slučaj kada je $I = J$, pa se uopće ne pojavljuje analogna suma σ_4 , te u sumama σ_1 i σ_2 ne sumiramo po indeksima i i j za koje je $i = j$ jer bi u tom slučaju vrijedilo $l(I) = l(J)$. Također, u raspisu od σ_3 , da bismo na analogan način raspisali tu sumu, u jednakosti (4.7) koristimo identitet $\langle Th_I, h_J \rangle = \langle h_I, T^*h_J \rangle$, pa u tom slučaju dobivamo skalarni produkt u kojem se pojavljuje $(T^*)^* \mathbb{1} = T\mathbb{1} = 0$.

Stoga dobivamo

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ l(I) > l(J)}} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle \\
 &= \sum_{j=r+1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{j-1} C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)j} \langle S^{ij} f, g \rangle \\
 &+ \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{j-1} \left(C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)j} + \|T\| \right) \langle S^{ij} f, g \rangle \\
 &+ \sum_{j=1}^{+\infty} C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha j} \langle S^{0j} f, g \rangle.
 \end{aligned}$$

Sveukupno,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{I, J \in \mathcal{D}^\omega} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle \\
 &= \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ \max\{i, j\} \geq r+1 \\ \min\{i, j\} > 0}} C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha) \max\{i, j\}} \langle S^{ij} f, g \rangle \\
 &+ \sum_{i, j=1}^r \left(C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha) \max\{i, j\}} + \|T\| \right) \langle S^{ij} f, g \rangle \\
 &+ \sum_{i=1}^{+\infty} C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \left(\langle S^{i0} f, g \rangle + \langle S^{0i} f, g \rangle \right) \\
 &+ \|T\| \langle S^{00} f, g \rangle,
 \end{aligned}$$

odnosno, uz parametar $\gamma = \frac{\alpha}{2(d+\alpha)}$ kao što smo definirali u (2.1),

$$\begin{aligned}
 & \sum_{I, J \in \mathcal{D}^\omega} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle \\
 &= \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ \max\{i, j\} \geq r+1 \\ \min\{i, j\} > 0}} C_1 2^{-\frac{\alpha}{2} \max\{i, j\}} \langle S^{ij} f, g \rangle \\
 &+ \sum_{i, j=1}^r \left(C_1 2^{-\frac{\alpha}{2} \max\{i, j\}} + \|T\| \right) \langle S^{ij} f, g \rangle \\
 &+ \sum_{i=1}^{+\infty} C_3 2^{-\frac{(2d+\alpha)\alpha}{2(d+\alpha)} \max i} \left(\langle S^{i0} f, g \rangle + \langle S^{0i} f, g \rangle \right) \\
 &+ \|T\| \langle S^{00} f, g \rangle.
 \end{aligned}$$

Sada za $i, j \in \mathbb{N}_0$ definiramo sljedeće koeficijente:

$$\tau(i, j) := \begin{cases} \frac{C_1}{\pi_D} 2^{-\frac{\alpha}{2} \max\{i, j\}}, & \max\{i, j\} \geq r+1, \min\{i, j\} > 0 \\ \frac{1}{\pi_D} \left(C_1 2^{-\frac{\alpha}{2} \max\{i, j\}} + \|T\| \right), & 1 \leq i, j \leq r, \\ \frac{C_3}{\pi_D} 2^{-\frac{(2d+\alpha)\alpha}{2(d+\alpha)} \max\{i, j\}}, & \max\{i, j\} > 0, \min\{i, j\} = 0, \\ \frac{\|T\|}{\pi_D}, & i = j = 0. \end{cases}$$

Uz ovako definirane koeficijente vrijedi

$$\sum_{I, J \in \mathcal{D}^\omega} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle = \pi_D \sum_{i, j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \langle S^{ij} f, g \rangle,$$

pa primjenom propozicije 4.4 dobivamo

$$\begin{aligned}
 \langle Tf, g \rangle &= \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{I, J \in \mathcal{D}^\omega} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle \\
 &= \mathbb{E}_\omega \sum_{i, j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \langle S_\omega^{ij} f, g \rangle.
 \end{aligned}$$

Pritom smo napravili zamjenu oznaka S^{ij} i S_ω^{ij} budući da smo do sada definirali i razvijali dijadske šiftove za proizvoljni, ali fiksni $\omega \in \Omega$, a u ovoj jednakosti ω kao varijabla u očekivanju varira.

Za potpuni dokaz teorema 4.1 preostaje pokazati da red $\sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j)$ konvergira. Vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) &= \sum_{\substack{\max\{i,j\} \geq r+1 \\ \min\{i,j\} > 0}} \tau(i, j) + \sum_{1 \leq i, j \leq r} \tau(i, j) + \sum_{\substack{\max\{i,j\} \geq r+1 \\ \min\{i,j\} = 0}} \tau(i, j) + \tau(0, 0) \\ &= \tau(0, 0) + \sum_{1 \leq i, j \leq r} \tau(i, j) + \frac{2C_1}{\pi_D} \sum_{k=r+1}^{+\infty} (k+1) \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^k + \frac{2C_3}{\pi_D} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(2^{-\frac{(2d+\alpha)\alpha}{2(d+\alpha)}}\right)^k. \end{aligned}$$

Budući da je $-\frac{(2d+\alpha)\alpha}{2(d+\alpha)} < 0$, a onda i $2^{-\frac{(2d+\alpha)\alpha}{2(d+\alpha)}} < 1$, slijedi da je $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(2^{-\frac{(2d+\alpha)\alpha}{2(d+\alpha)}}\right)^k$ konvergentan geometrijski red. Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{k=r+1}^{+\infty} (k+1) \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r+2) \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^{k+r+1} = \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^{r+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=1}^{k+r+2} \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^k \\ &= \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^{r+1} \left(\sum_{l=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^k + \sum_{l=r+2}^{+\infty} \sum_{k=l-r-2}^{+\infty} \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^k \right) \\ &= \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^{r+1} (r+1) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^k + \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^{r+1-r-2} \sum_{l=r+2}^{+\infty} \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^l \sum_{k=0}^{+\infty} \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^k \\ &= \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^{r+1} \sum_{k=1}^{+\infty} (r+1) \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^k + \frac{2^{\frac{\alpha}{2}}}{1-2^{-\frac{\alpha}{2}}} \sum_{l=r+2}^{+\infty} \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^{l-1} < +\infty, \end{aligned}$$

budući da je $2^{-\frac{\alpha}{2}} < 1$ pa su i $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^k$ i $\sum_{l=r+2}^{+\infty} \left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^{l-1}$ konvergentni geometrijski redovi.

Dakle, uistinu vrijedi $\sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| < +\infty$ pa prema tome svaki Calderón-Zygmundov operator može se dekomponirati u sumu po dijadskim šiftovima s konvergentnim redom koeficijenata $(\tau(i, j))_{i,j \in \mathbb{N}_0}$. Time je teorem 4.1 dokazan.

Napomena 4.11. Za konvergenciju reda $\sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j)$ dovoljno je bilo pretpostaviti $\gamma < \frac{\alpha}{d+\alpha}$. Naime, u općem obliku (dakle, za proizvoljan $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$), koeficijenti $\tau(i, j)$ za

$i, j \in \mathbb{N}_0$ iznose

$$\tau(i, j) := \begin{cases} \frac{C_1}{\pi_D} 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)\max\{i,j\}}, & \max\{i, j\} \geq r+1, \min\{i, j\} > 0 \\ \frac{1}{\pi_D} \left(C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)\max\{i,j\}} + \|T\| \right), & 1 \leq i, j \leq r, \\ \frac{C_3}{\pi_D} 2^{-(1-\gamma)\alpha\max\{i,j\}}, & \max\{i, j\} > 0, \min\{i, j\} = 0, \\ \frac{\|T\|}{\pi_D}, & i = j = 0. \end{cases}$$

Nužan i dovoljan uvjet da red $\sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j)$ konvergira jest da konvergiraju geometrijski redovi $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(2^{\gamma(d+\alpha)-\alpha} \right)^k$ i $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(2^{-(1-\gamma)\alpha} \right)^k$. To pak vrijedi ako i samo ako vrijedi $\gamma(d+\alpha) - \alpha < 0$ i $-(1-\gamma)\alpha < 0$. Prvi uvjet ekvivalentan je uvjetu $\gamma < \frac{\alpha}{d+\alpha}$, dok drugi uvjet vrijedi za sve $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ i $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$. \square

Poglavlje 5

Obrat teorema o dijadskoj dekompoziciji

5.1. Iskaz i dokaz teorema

U prethodnom poglavlju dokazali smo centralni teorem ovog rada, ali vrijedi i njegov svojevrsni obrat. Naime pokazuje se da je promatranje upravo Calderón-Zygmundovih operatora bilo ključno za konstrukciju dekompozicije, odnosno da ista ne vrijedi za širu klasu operatora. Tu činjenicu je prvi primijetio i formulirao Orponen [13]. Ovdje ćemo iznijeti malu varijantu njegovog dokaza. Prije nego iskažemo taj rezultat, dokazat ćemo lemu koja će nam biti potrebna u dokazu obrata.

Lema 5.1. *Neka su $k \in \mathbb{Z}$ i $x \in \mathbb{R}^d$ proizvoljni. Za $\omega \in \Omega$ označimo s $Q_\omega^k \in \mathcal{D}^\omega$ jedinstvenu kocku za koju je $x \in Q_\omega^k$ te $l(Q_\omega^k) = 2^k$. Tada vrijedi*

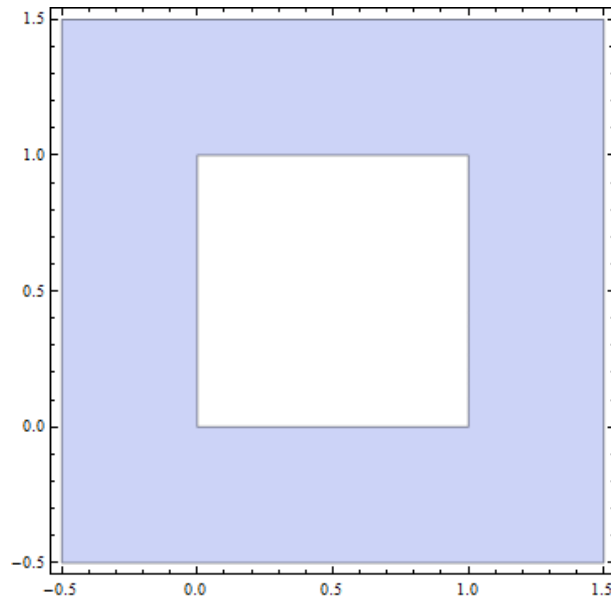
$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : d(x, \partial Q_\omega^k) \leq tl(Q_\omega^k)\}) \leq 2dt, \quad \forall t \geq 0.$$

Dokaz. Traži se vjerojatnost skupa svih $\omega \in \Omega$ koji za $t \geq 0$ zadovoljavaju nejednakost $d(x, \partial Q_\omega^k) \leq tl(Q_\omega^k)$, pri čemu je x fiksna.

Prisjetimo se da vrijedi $Q_\omega^k = Q_0 + \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ 2^{-i} \leq l(Q_\omega^k)}} \omega_i 2^{-i} = Q_0 + \sum_{i=-k}^{+\infty} \omega_i 2^{-i}$ za neki $Q_0 \in \mathcal{D}^0$.

Stoga ovu vjerojatnost interpretiramo na sljedeći način: kocku Q_0 pomičemo za $\sum_{i=-k}^{+\infty} \omega_i 2^{-i}$ tako da sadrži x te je udaljenost točke x od ruba manja ili jednaka $t2^k$.

No, to je geometrijski ekvivalentno fiksiranju kocke Q duljine brida 2^k te pomicanju točke $x \in \mathbb{R}^d$ tako da zadovoljava iste uvjete.



Slika 5.1: Geometrijska interpretacija. Skup točaka x koje zadovoljavaju nejednakost za $t = \frac{1}{4}$ označen je plavom bojom.

Dakle, traženu vjerojatnost interpretiramo kao uniformnu vjerojatnost danu na skupu Q , pa je računamo kao omjer volumena skupa točaka x koje zadovoljavaju nejednakost $d(x, \partial Q) \leq t2^k$ te volumena $V(Q) = (2^k)^d = 2^{kd}$.

Primijetimo prvo da za svaki $x \in Q$ vrijedi $d(x, \partial Q) \leq \frac{l(Q)}{2}$, stoga za $t > \frac{1}{2}$ vrijedi $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : d(x, \partial Q_\omega^k) \leq tl(Q_\omega^k)\}) = 1$.

Pretpostavimo sada da je $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Područje točaka iz Q za koje vrijedi $d(x, \partial Q) > t2^k$ je kocka (ne nužno dijadska) sadržana u Q s istim središtem. Duljina brida te kocke je $l(Q) - 2 \cdot tl(Q) = (1 - 2t)2^k$, pa je volumen te kocke jednak $(1 - 2t)^d 2^{kd}$.

Stoga je volumen traženog područja jednak razlici volumena $V(Q) = 2^{kd}$ i navedene

podkocke, pa je tražena vjerojatnost jednaka

$$\frac{2^{kd} - (1 - 2t)^d 2^{kd}}{2^{kd}} = \frac{(1 - (1 - 2t)^d) 2^{kd}}{2^{kd}} = 1 - (1 - 2t)^d \stackrel{(*)}{\leq} 1 - (1 - 2dt) = 2dt,$$

pri čemu smo nejednakost (*) dobili primjenom Bernoullijeve nejednakosti dane u (2.2) (uočimo da je $-2t \geq -1$).

Dakle, dobili smo da za $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ vrijedi $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : d(x, \partial Q_\omega^k) \leq tl(Q_\omega^k)\}) \leq 2dt$.

Na kraju, primijetimo da za $t > \frac{1}{2}$ vrijedi $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : d(x, \partial Q_\omega^k) \leq tl(Q_\omega^k)\}) = 1 < 2t \leq 2dt$. □.□.□.

Sada smo spremni za dokazivanje obrata teorema 4.1.

Teorem 5.2. *Neka je T operator dan preko jednakosti*

$$\langle Tf, g \rangle = \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \langle S_\omega^{ij} f, g \rangle, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ omeđeni i s kompaktnim nosačima,}$$

pri čemu je S_ω^{ij} dijadski šift s parametrima (i, j) dan nad familijom slučajnih dijadskih kocki \mathcal{D}^ω , a $\tau(i, j)$ koeficijent u ovisnosti o i i j koji zadovoljavaju $\sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| < +\infty$.

Tada je T Calderón-Zygmundov operator.

Dokaz. Po definiciji 1.3 treba pronaći Calderón-Zygmundovu jezgru $K : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^d\} \rightarrow \mathbb{R}$ koja zadovoljava pripadne ocjene iz definicije 1.1 te vrijedi prikaz

$$\langle Tf, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) g(x) dy dx, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset.$$

Neka je za sve $i, j \in \mathbb{N}_0$ operator S_ω^{ij} oblika

$$S_\omega^{ij} = \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} A_{\omega, Q}^{ij},$$

pri čemu za svaki $Q \in \mathcal{D}^\omega$ operator $A_{\omega,Q}^{ij}$ zadovoljava

$$A_{\omega,Q}^{ij} f = \sum_{I,J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega \langle f, h_I \rangle h_J, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

uz ocjenu $|a_{IJQ}^\omega| \leq \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(Q)}$, $\forall I, J, Q \in \mathcal{D}^\omega$. Sve ove pretpostavke slijede iz definicije dijadskog šifra, tj. definicije 3.9.

Tvrdimo da je tražena jezgra dana s

$$K(x, y) := \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I,J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega h_I(x) h_J(y).$$

Prvo pokažimo da je K dobro definirana funkcija. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y$. Za $I, J \in \mathcal{D}^\omega$, nosači funkcija h_I i h_J su redom I i J , a oba ta skupa su sadržana u Q , stoga su nosači tih funkcija sadržani u Q . Prema tome, ako vrijedi $\|x - y\| > \max_{x', y' \in Q} d(x', y') = \sqrt{d} \cdot l(Q)$, mora vrijediti $h_I(x) = 0$ ili $h_J(y) = 0$. Dakle, možemo pisati

$$\begin{aligned} |K(x, y)| &= \left| \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I,J \subseteq Q}^{(i,j)} h_I(x) h_J(y) \right| & (5.1) \\ &\leq \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{\substack{I,J \in \mathcal{D}^\omega \\ I,J \subseteq Q \\ l(I)=2^{-i}l(Q) \\ l(J)=2^{-j}l(Q) \\ \|x-y\| \leq \sqrt{d} \cdot l(Q)}} |a_{IJQ}^\omega| |h_I(x)| |h_J(y)| \\ &\leq \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{\substack{I,J \in \mathcal{D}^\omega \\ I,J \subseteq Q \\ x \in I, y \in J \\ l(I)=2^{-i}l(Q) \\ l(J)=2^{-j}l(Q) \\ \|x-y\| \leq \sqrt{d} \cdot l(Q)}} \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(Q)} \cdot \frac{1}{\sqrt{V(I)V(J)}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^\omega \\ x, y \in Q \\ \|x-y\| \leq \sqrt{d} \cdot l(Q)}} \frac{1}{V(Q)} \\ &\stackrel{(**)}{=} \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \frac{2^d}{2^d - 1} \frac{1}{V(Q')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2^d}{2^d - 1} \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \frac{d^{\frac{d}{2}}}{\|x - y\|^d} \\ &= \frac{2^d}{2^d - 1} \frac{d^{\frac{d}{2}}}{\|x - y\|^d} \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| < +\infty \end{aligned}$$

jer po pretpostavci teorema red $\sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)|$ konvergira.

Pritom smo u (*) koristili činjenicu da su I i J koji sadrže redom x i y te koji su točno određene duljine brida jedinstvene kocke, pa suma po I i J je zapravo suma gdje su svi osim jednog sumanda jednaki nuli.

U (**) smo koristili sljedeće: postoji jedinstvena najmanja kocka (u smislu da je to kocka s najmanjom duljinom brida) $Q' \in \mathcal{D}^\omega$ koja sadrži x i y te zadovoljava $\|x - y\| \leq \sqrt{d} \cdot l(Q')$. Za sve preostale kocke Q koje zadovoljavaju isti uvjet duljina brida im je jednaka $l(Q) = 2^m l(Q')$ za neki $m \in \mathbb{N}$ i pritom su svake dvije takve kocke različitih duljina bridova (jer postoji jedinstvena kocka fiksne duljine brida koja sadrži točke x i y). Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^\omega \\ x, y \in Q \\ \|x - y\| \leq \sqrt{d} \cdot l(Q)}} \frac{1}{V(Q)} &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^m l(Q'))^d} = \frac{1}{V(Q')} \sum_{m=0}^{+\infty} (2^{-d})^m = \frac{1}{V(Q')} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-d}} \\ &= \frac{2^d}{(2^d - 1) V(Q')}. \end{aligned}$$

Prema tome, $K(x, y)$ je dobro definiran za $x \neq y$ (red preko kojeg je K definiran konvergira u toj točki). Štoviše, dobili smo ocjenu

$$|K(x, y)| \leq \frac{2^d d^{\frac{d}{2}}}{2^d - 1} \cdot \left(\sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \right) \frac{1}{\|x - y\|^d},$$

što uz $C_0 := \frac{2^d d^{\frac{d}{2}}}{2^d - 1} \cdot \left(\sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \right)$ daje prvi uvjet iz definicije Calderón-Zygmundove jezgre.

Provjerimo sada da je K jezgra pripadna operatoru T , odnosno da vrijedi prikaz $\langle Tf, g \rangle =$

$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K(x, y) f(x) g(y) dx dy$ za omeđene $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ s disjunktним kompaktnim nosačima. Dakle, postoje $\|f\|_\infty \|g\|_\infty < +\infty$. Također, budući da su im nosači zatvoreni podskupovi od \mathbb{R}^d , vrijedi $\epsilon := d(\text{supp} f, \text{supp} g) > 0$, pa je, za svaki $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega h_I(x) h_J(y) f(x) g(y) dx dy \right| \\
 & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} |a_{IJQ}^\omega| |h_I(x)| |h_J(y)| |f(x)| |g(y)| dx dy \\
 & \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty \int_{\text{supp} f} \int_{\text{supp} g} \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{\substack{I, J \in \mathcal{D}^\omega \\ I, J \subseteq Q \\ x \in I, y \in J \\ l(I) = 2^{-i} l(Q) \\ l(J) = 2^{-j} l(Q) \\ \epsilon \leq \sqrt{d} l(Q)}} \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(Q)} \cdot \frac{1}{\sqrt{V(I)V(J)}} dx dy \\
 & \stackrel{\text{slično kao i u (5.1)}}{\leq} \frac{2^d}{2^d - 1} \|f\|_\infty \|g\|_\infty \int_{\text{supp} f} \int_{\text{supp} g} \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \frac{d^{\frac{d}{2}}}{\epsilon^d} \\
 & = \frac{2^d}{2^d - 1} \|f\|_\infty \|g\|_\infty \left(\sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \right) \frac{d^{\frac{d}{2}}}{\epsilon^d} \lambda(\text{supp} f) \lambda(\text{supp} g) < +\infty,
 \end{aligned}$$

budući da su nosači od f i g kompaktni skupovi, pa su posebno i ograničeni.

Ova ocjena vrijedi neovisno o $\omega \in \Omega$, pa vrijedi

$$\mathbb{E}_\omega \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega h_I(x) h_J(y) f(x) g(y) dx dy \right| < +\infty.$$

Prema tome, $(\omega, x, y) \mapsto \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega h_I(x) h_J(y) f(x) g(y)$ je apsolutno integrabilna funkcija obzirom na mjeru $\mathbb{P}_\omega \times \lambda \times \lambda$, odnosno obzirom na vjerojatnosnu mjeru \mathbb{P}_ω po varijabli ω (koja je konačna mjera, budući da je $\mathbb{P}_\omega(\Omega) = 1$) i obzirom na d -dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru λ po varijablama x i y . Prema tome, za tu funkciju možemo primijeniti Fubinijev teorem, kao i Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji (jer je funkcija apsolutno dominirana sama sobom).

Slijedi

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g \rangle &= \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \langle S_\omega^{ij} f, g \rangle = \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \int_{\mathbb{R}^d} (S^{ij} f)(y) g(y) dy \\
&= \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} (A_{\omega, Q}^{ij} f)(y) g(y) dy \\
&= \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega \langle f, h_I \rangle h_J(y) g(y) dy \\
&= \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) h_I(x) dx \right) h_J(y) g(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega h_I(x) h_J(y) f(x) g(y) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(x) g(y) dx dy.
\end{aligned}$$

Dakle, K je uistinu jezgra pripadna operatoru T i zadovoljava traženi zapis preko integrala.

Za dokaz ovog teorema preostaje još dokazati da vrijede preostale dvije ocjene iz definicije 1.1 za neku konstantu $C_1 \in \mathbb{R}$. Zbog simetričnosti varijabli x i y , dovoljno je pokazati, primjerice, da za sve $x, x', y \in \mathbb{R}^d$ takve da je $x \neq y$ i $x' \neq y$ vrijedi

$$|K(x, y) - K(x', y)| \leq C_1 \frac{\|x - x'\|^\alpha}{\|x - y\|^{d+\alpha}}, \text{ ako je } \|x - x'\| \leq \frac{\|x - y\|}{2}, \quad (5.2)$$

za neku konstantu $C_1 \in \mathbb{R}$. U slučaju da za treću nejednakost dobijemo neku drugu konstantu C_1 , i dalje dobivamo tvrdnju tako što za traženu konstantu uzmemo veću od dvije dobivene.

Stoga, neka su $x, x', y \in \mathbb{R}^d, x \neq y, x' \neq y$ takvi da vrijedi $0 < \|x - x'\| \leq \frac{\|x - y\|}{2}$. Iz ovih nejednakosti slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $\frac{\|x - y\|}{2^{N+1}} < \|x - x'\| \leq \frac{\|x - y\|}{2^N}$, odnosno $\frac{1}{2^{N+1}} < \frac{\|x - x'\|}{\|x - y\|} \leq \frac{1}{2^N}$.

Nadalje, neka je $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz brojeva dan s $i_n := \lceil \log_2 \|x - x'\rceil \rceil + n$, te $(E_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ niz skupova dan relacijom

$$E_0 := \Omega, \quad E_n := \left\{ \omega \in \Omega : d(x, \partial Q^{i_n}) < 2 \|x - x'\| \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je, uz dani $\omega \in \Omega$, $Q^{i_n} = Q_\omega^{i_n} \in \mathcal{D}^\omega$ jedinstvena kocka koja sadrži x i duljine brida 2^{i_n} .

Za $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in E_n$ i Q^{i_n} danu na opisani način vrijedi $d(x, \partial Q^{i_n}) < 2 \|x - x'\| = 2^{1+\log_2 \|x-x'\|} \leq 2^{1-n+n+\lceil \log_2 \|x-x'\rceil} = 2^{1-n} \cdot 2^{i_n} = 2^{1-n} l(Q^{i_n})$. Stoga po lemi 5.1 vrijedi $\mathbb{P}(E_n) \leq 2^{2-n} d$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$G_n := E_n \setminus \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} E_k \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Uočimo da vrijedi $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) \leq 4d \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 4d \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} < +\infty$. Prema tome,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\limsup_n E_n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(E_k) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{2-k} d = d \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{2-n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Vjerojatnost skupa $\limsup_n E_n$ u promatranom vjerojatnosnom prostoru je 0, što znači da je vjerojatnost 0 da za slučajno odabrani $\omega \in \Omega$ vrijedi $\omega \notin \limsup_n E_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k$.

Dakle, $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} E_k^c$ s vjerojatnošću 1, odnosno da je ω element najviše konačno mnogo skupova E_k , $k \geq 0$. To bi značilo da je $\omega \in G_k$ za neki $k \geq 0$; naime, od konačno mnogo indeksa k' za koji je $\omega \in E_{k'}$ definiramo k kao najveći od njih. Prema tome, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) = 1$.

Također, primijetimo da je $\mathbb{P}(G_n) = \mathbb{P}\left(E_n \setminus \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} E_k\right)\right) \leq \mathbb{P}(E_n) \leq 2^{2^{-n}}d, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, za $i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j$ je $G_i \cap G_j = \emptyset$. Naime, ako je $i < j$ i postoji $\omega \in G_i \cap G_j$, tada, kako je $\omega \in G_i$, vrijedi $\omega \notin E_j$ te, kako je $\omega \in G_j, \omega \in E_j$, što nije moguće. Slučaj $j < i$ slijedi analogno (ili zamjenom uloga indeksa).

Dakle, $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je niz u parovima međusobno disjunktnih skupova, pa vrijedi relacija

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{G_n}.$$

Po definiciji od K vrijedi

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K(x', y)| &= \left| \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} \tau(i, j) \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega (h_I(x) - h_I(x')) h_J(y) \right| \quad (5.3) \\ &\leq \mathbb{E}_\omega \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} |a_{IJQ}^\omega| |h_I(x) - h_I(x')| |h_J(y)| \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} |a_{IJQ}^\omega| |h_I(x) - h_I(x')| |h_J(y)| d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} |a_{IJQ}^\omega| |h_I(x) - h_I(x')| |h_J(y)| \mathbb{1}_{\bigcup_{n=0}^{+\infty} G_n}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} |a_{IJQ}^\omega| |h_I(x) - h_I(x')| |h_J(y)| \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{G_n}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{G_n} \sum_{i,j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} |a_{IJQ}^\omega| |h_I(x) - h_I(x')| |h_J(y)| d\mathbb{P}(\omega), \end{aligned}$$

pri čemu smo u posljednjoj jednakosti koristili Beppo-Levijev teorem.

Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$. Označimo $n_d := 2 + \lceil \log_2 \sqrt{d} \rceil$ i neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $i < N - n - n_d$.

Nadalje, neka je $\omega \in G_n$. Tvrdimo da za sve $j \in \mathbb{Z}$ i za sve $Q \in \mathcal{D}^\omega$ vrijedi

$$\sum_{I, J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega (h_I(x) - h_I(x')) h_J(y) = 0. \quad (5.4)$$

Pretpostavimo suprotno, tj. $\sum_{I,J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega (h_I(x) - h_I(x')) h_J(y) \neq 0$ za neku $Q \in \mathcal{D}^\omega$. To znači da je $a_{IJQ}^\omega (h_I(x) - h_I(x')) h_J(y) \neq 0$ za neke $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ iz pripadne sume, a po definiciji Haarovih funkcija vrijedi $y \in J \subseteq Q$ te $x \in I \subseteq Q$ ili $x' \in I \subseteq Q$. Ako je $x \in Q$, zaključujemo $\sqrt{d}l(Q) = \max_{z,z' \in Q} d(z, z') \geq \|x - y\|$. U slučaju $x' \in Q$, budući da je $\|x - x'\| \leq \frac{\|x - y\|}{2}$, vrijedi $\sqrt{d}l(Q) \geq \|x' - y\| \geq \|x - y\| - \|x - x'\| > \frac{\|x - y\|}{2}$, pri čemu smo koristili nejednakost trokuta $\|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$. U oba slučaja dobivamo $l(Q) \geq \frac{\|x - y\|}{2\sqrt{d}}$.

Neka je $R \in \mathcal{D}^\omega$ jedinstvena kocka koja sadrži x i duljine brida $l(R) = 2^{-n-1}l(Q)$. Iz nejednakosti $i < N - n - n_d$ za prirodne brojeve imamo $i \leq N - n - n_d - 1$, a zatim i

$$\begin{aligned} l(R) &= 2^{-i-1}l(Q) \geq 2^{-i-2} \cdot \frac{\|x - y\|}{\sqrt{d}} \geq 2^{-N+n+n_d+1-2} \cdot \frac{\|x - y\|}{\sqrt{d}} \\ &= 2^{-N+n+2+\lceil \log_2 \sqrt{d} \rceil - 1} \cdot \frac{\|x - y\|}{\sqrt{d}} \geq 2^{-N+n+1} \cdot 2^{\log_2 \sqrt{d}} \cdot \frac{\|x - y\|}{\sqrt{d}} = 2^{-N+n+1} \|x - y\| \\ &= 2^{-N} \cdot 2^{n+1} \|x - y\| \stackrel{\text{odabir broja } N}{\geq} \frac{\|x - x'\|}{\|x - y\|} \cdot 2^{n+1} \|x - y\| = 2^{n+1} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Označimo s $Q' \in \mathcal{D}^\omega$ jedinstvenu kocku za koju je $x \in Q'$ i $l(Q') = 2^{i_n}$. Vrijedi $l(Q') = 2^{i_n} = 2^{\lceil \log_2 \|x - x'\| \rceil + n} < 2^{\log_2 \|x - x'\| + 1 + n} = 2^{n+1} \|x - x'\| \leq l(R)$. Budući da je $x \in Q' \cap R$, posebno je $Q' \cap R \neq \emptyset$, pa po $l(Q') < l(R)$ i po lemi 2.5 vrijedi $Q' \subset R$. Budući da je $\omega \in G_n$, po definiciji tog skupa slijedi $\omega \notin E_{n+1}$, pa onda po definiciji skupa E_{n+1} i $2\|x - x'\| \leq d(x, \partial Q') \stackrel{Q' \subset R}{\leq} d(x, \partial R)$. Da je zatvorena kugla oko x radijusa $\|x - x'\|$ sadržana u skupu R , pa posebno $x' \in R$.

Slično, da smo krenuli od $R \in \mathcal{D}^\omega$ duljine brida $l(R) = 2^{-i-1}l(Q)$ i za koji je $x' \in R$, dobili bismo $x \in R$.

Iz ovog izvoda zaključujemo sljedeće: ako je $R \in \mathcal{D}^\omega$ i $l(R) = 2^{-i-1}l(Q)$, tada vrijedi: $x \in R$ ako i samo ako $x' \in R$.

Promotrimo sada pretpostavku $\sum_{I,J \subseteq Q}^{(i,j)} a_{IJQ}^\omega (h_I(x) - h_I(x')) h_J(y) \neq 0$. Ako je $I \in \mathcal{D}^\omega$ kocka za koju je $I \subseteq Q$ i $l(I) = 2^{-i}l(Q)$, također vrijedi $x \in I$ ako i samo ako $x' \in I$.

Naime, R sadrži $(2^d)^{i+1}$ različitih dijadskih kocki duljine bridova $2^{-i-1}l(Q) = \frac{l(I)}{2}$, od kojih su 2^d njih sadržani u I . Po dokazanom, postoji točno jedna podkocka $I' \subset R$ koju su $x, x' \in I'$, a, ovisno o tome je li $I' \subset I$ ili $I' \cap I = \emptyset$, vrijedi $x, x' \in I$ ili $x, x' \notin I$. Ovaj zaključak nam zapravo daje jednakost $h_I(x) = h_I(x')$; naime, funkcija h_I je po svojoj definiciji konstantna na pravim podkockama od I , s tim da je jednaka nuli izvan I . No, x i x' se nalaze u istoj kocki $I' \in \mathcal{D}^\omega$ duljine brida $l(I') = 2^{-i-1}l(Q)$, što je ili prava podkocka od I (tj. $I' \subset I$) ili kocka disjunktna s I (tj. $I' \cap I = \emptyset$); u oba slučaja dobivamo $h_I(x) = h_I(x')$.

Prema tome, za sve $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ koji se pojavljuju u sumi $\sum_{I, J \subseteq Q}^{(i, j)} a_{IJQ}^\omega (h_I(x) - h_I(x')) h_J(y)$ vrijedi $h_I(x) - h_I(x') = 0$. Prema tome, svaki sumand u ovoj sumi jednak je i nuli, pa je i ukupna suma jednaka nuli, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Dakle, uistinu vrijedi jednakost (5.4) koju koristimo u nastavku raspisivanja (5.3):

$$\begin{aligned}
 |K(x, y) - K(x', y)| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{G_n} \sum_{i, j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i, j)} |a_{IJQ}^\omega| |h_I(x) - h_I(x')| |h_J(y)| d\mathbb{P}(\omega) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{G_n} \sum_{i=N-n-n_d}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i, j)} |a_{IJQ}^\omega| |h_I(x) - h_I(x')| |h_J(y)| d\mathbb{P}(\omega) \\
 &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{G_n} \sum_{i=N-n-n_d}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{I, J \subseteq Q}^{(i, j)} |a_{IJQ}^\omega| (|h_I(x)| + |h_I(x')|) |h_J(y)| d\mathbb{P}(\omega) \\
 &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{G_n} \sum_{i=N-n-n_d}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{Q \in \mathcal{D}^\omega} \sum_{\substack{I, J \subseteq Q \\ x, x' \in I, y \in J \\ l(I) = 2^{-i}l(Q) \\ l(J) = 2^{-j}l(Q)}} \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(Q)} \cdot \frac{2}{\sqrt{V(I)V(J)}} d\mathbb{P}(\omega) \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{G_n} \sum_{i=N-n-n_d}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^\omega \\ x, x', y \in Q \\ \max\{\|x-y\|, \|x'-y\|\} \leq \sqrt{d}l(Q)}} \frac{1}{V(Q)} d\mathbb{P}(\omega) \\
 &\leq 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{G_n} \sum_{i=N-n-n_d}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \frac{2^d}{2^d - 1} \cdot \frac{d^{\frac{d}{2}}}{\max\{\|x-y\|, \|x'-y\|\}^d} d\mathbb{P}(\omega),
 \end{aligned}$$

pri čemu posljednju nejednakost dobivamo slično kao i u izvodu (5.1): odabirom naj-

manje kocke Q sa svojstvima koja zadovoljavaju kocke u uvjetu sume te izvodom geometrijskog reda i primjenom ocjene na duljinu brida od Q . Pritom koristimo da, zbog $x, x', y \in Q$, mora vrijediti $\|x' - y\| \leq \sqrt{dl(Q)}$ i $\|x - y\| \leq \sqrt{dl(Q)}$. Kako je $\|x' - y\| \geq \|x - y\| - \|x - x'\| \geq \frac{\|x - y\|}{2}$, slijedi

$$\begin{aligned}
 |K(x, y) - K(x', y)| &\leq 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{G_n} \sum_{i=N-n-n_d}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \frac{2^d}{2^d - 1} \cdot 2^d \cdot \frac{d^{\frac{d}{2}}}{\|x - y\|^d} d\mathbb{P}(\omega) \\
 &= \frac{2^{2d+1} d^{\frac{d}{2}}}{2^d - 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{G_n} \left(\sum_{i=N-n-n_d}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \right) \frac{1}{\|x - y\|^d} d\mathbb{P}(\omega) \\
 &= \frac{2^{2d+1} d^{\frac{d}{2}}}{2^d - 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=N-n-n_d}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \right) \frac{2^{(N+1)\alpha} \|x' - y\|^\alpha}{\|x - y\|^{d+\alpha}} \int_{G_n} d\mathbb{P}(\omega) \\
 &\leq \frac{2^{2d+1} d^{\frac{d}{2}}}{2^d - 1} \cdot 2^{(N+1)\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=N-n-n_d}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \right) \frac{\|x' - y\|^\alpha}{\|x - y\|^{d+\alpha}} \mathbb{P}(G_n) \\
 &\leq \frac{2^{2d+1} d^{\frac{d}{2}}}{2^d - 1} \cdot 2^{(N+1)\alpha} \cdot 2^{2-n} d \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=N-n-n_d}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \right) \frac{\|x' - y\|^\alpha}{\|x - y\|^{d+\alpha}} \\
 &\leq \frac{2^{2d+(N+1)\alpha+4} d^{\frac{d}{2}+1}}{2^d - 1} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \right) \frac{\|x' - y\|^\alpha}{\|x - y\|^{d+\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Sada tražena nejednakost (5.2) slijedi uz $C_1 := \frac{2^{2d+(N+1)\alpha+4} d^{\frac{d}{2}+1}}{2^d - 1} 2d \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\tau(i, j)| \right)$.

Prema tome, T je uistinu Calderón-Zygmundov operator uz pripadnu Calderón

-Zygmundovu jezgru K .

□.□.□.

Poglavlje 6

Ortonormirana valićna baza

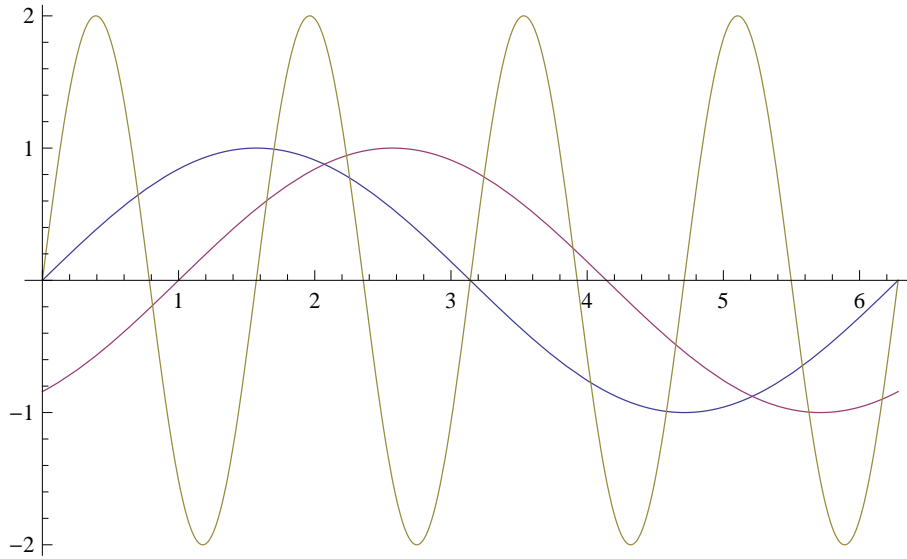
6.1. Definicija i osnovna svojstva

U ovom poglavlju promatramo poseban oblik ortonormirane baze prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ koju nazivamo *ortonormirana valićna baza*. Ona ima važnu i široku primjenu u dekompozicijama različitih funkcija i operatora zbog njenih iznimno jakih i praktičnih svojstava. Budući da i Haarov sistem funkcija te slučajni dijadski šiftovi koje promatramo u ovom radu imaju istu ulogu, u idućem poglavlju ćemo usporediti ključne elemente dekompozicije kako bismo naglasili prednosti primjene pojedine dekompozicije.

Uvodimo osnovne definicije i rezultate koji će nam trebati u ovom radu, a mogu se pronaći u [?]. Detaljniji raspisi koje navodimo, kao i opširnije o ortonormiranoj valićnoj bazi nalazi se u [3] i [6].

Za proizvoljnu funkciju $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ i za $c \in \mathbb{R}^d$ definiramo *operator translacije* T_c koji funkciji f pridružuje novu funkciju danu jednakošću

$$(T_c f)(x) := f(x - c) \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^d.$$



Slika 6.1: Grafovi funkcija f , $T_c f$ i $D_a f$ za $c = 1$, $a = \frac{1}{4}$ i $f(x) = \sin(x)$.

Nadalje, za $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ definiramo *operator dilatacije* D_a , koji na funkciju f djeluje na sljedeći način:

$$(D_a f)(x) := \frac{1}{\sqrt{a^d}} f\left(\frac{1}{a}x\right) \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^d.$$

Ako uspoređujemo grafove funkcija f , $T_c f$ i $D_a f$ za $d = 1$ te $c \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, primjećujemo da operator translacije utječe na translaciju grafa funkcije f po x -osi, dok operator dilatacije steže graf od f ako je $a > 1$, odnosno širi ako je $0 < a < 1$. Pritom je operatoru dilatacije pridodana konstanta $\frac{1}{\sqrt{a^d}}$ jer nam je želja da to budu unitarni operatori, odnosno da za svaku $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|T_c f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|D_a f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. I uistinu, vrijedi

$$\begin{aligned} \|T_c f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-c)|^2 dx = [t = x-c, dt = dx] & (6.1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \\ \|D_a f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= a^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| f\left(\frac{x}{a}\right) \right|^2 dx = \left[t = \frac{x}{a}, dt = \frac{dx}{a^d} \right] \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Definicija 6.1. *Multirezolucijska analiza* ili skraćeno *MRA* je niz $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ zatvorenih potprostora od $L^2(\mathbb{R}^d)$ koji zadovoljava sljedeća svojstva

1. $V_j \subseteq V_{j+1}$ za sve $j \in \mathbb{Z}$,
2. $f \in V_j$ ako i samo ako je $D_{2^{-j}}f \in V_0$ za svaki $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i za sve $j \in \mathbb{Z}$,
3. $f \in V_0$ ako i samo ako je $T_k f \in V_0$ za svaki $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i za sve $k \in \mathbb{Z}^d$,
4. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
5. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^d)$,
6. Postoji funkcija $\varphi \in V_0$ takva da je familija funkcija $\{T_k \varphi : k \in \mathbb{Z}^d\}$ ortonormirana baza prostora V_0 .

Funkciju φ iz 6. svojstva nazivamo *skalirajućom funkcijom* dane multirezolucijske analize.

Uvjeti 1.–6. iz ove definicije nisu međusobno nezavisni. Naime, može se pokazati da, primjerice, svojstva 1., 2. i 6. povlače svojstvo 3. (dokaz ove implikacije može se pronaći u [6]). Također, svojstvo 4. slijedi iz preostalih svojstava, točnije svojstava 2. i 6., što ćemo pokazati kasnije u primjeru 6.4. Isti dokaz vrijedit će i općenito, za proizvoljnu MRA, a razlog zašto dokaz ostavljamo za kasnije jest što će nam trebati propozicija koju ćemo tek dokazati. U ovoj definiciji ipak navodimo međusobno zavisna svojstva jer želimo naglasiti svojstva koja su nam važna i koja ćemo koristiti, a u ovom radu nije nam važna optimalnost definicije u smislu pretpostavki. Štoviše, u nekim knjigama i člancima definicija multirezolucijske analize zahtijeva još neke pretpostavke koje nisu posljedica ovih iz naše definicije, a povod tomu je također potreba i važnost tog svojstva u razmatranju. Primjerice, često se pretpostavlja da je $\varphi \in C^r$ s kompaktnim nosačem,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1 \text{ ili } \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} T_k \varphi \equiv 1.$$

Vrijedi:

Propozicija 6.2. *Familija funkcija $\{D_{2^{-j}}T_k\varphi : k \in \mathbb{Z}^d\}$ je ortonormirana baza prostora V_j za svaki fiksirani $j \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Neka je $j \in \mathbb{Z}$ proizvoljan. Po svojstvu 6. iz definicije, $\{T_k\varphi : k \in \mathbb{Z}^d\}$ je ortonormiran niz u $L^2(\mathbb{R}^d)$. Stoga za sve $k, k' \in \mathbb{Z}^d, k \neq k'$ vrijedi $\|T_k\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$ i $\langle T_k\varphi, T_{k'}\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$. U (6.1) smo pokazali da za $a = 2^{-j}$ i za funkciju $T_k\varphi$ vrijedi

$$\|D_{2^{-j}}T_k\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|T_k\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1.$$

Zamjenom varijabli dobivamo i

$$\begin{aligned} \langle D_{2^{-j}}T_k\varphi, D_{2^{-j}}T_{k'}\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= 2^{dj} \int_{\mathbb{R}^d} (T_k\varphi)(2^j x) (T_{k'}\varphi)(2^j x) dx = [t = 2^j x, dt = 2^{dj} dx] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (T_k\varphi)(t) (T_{k'}\varphi)(t) dt = \langle T_k\varphi, T_{k'}\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\{D_{2^{-j}}T_k\varphi : k \in \mathbb{Z}^d\}$ je ortonormiran niz u V_j . Neka je $f \in V_j$ proizvoljna funkcija. Po svojstvu 2. iz ove definicije vrijedi $D_2 f \in V_{j-1}$. Induktivno, korištenjem ove tvrdnje j puta dobivamo $D_{2^j} f \in V_0$. Po svojstvu 6. tada vrijedi

$$D_{2^j} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle D_{2^j} f, T_k\varphi \rangle T_k\varphi.$$

Množenjem ove jednakosti s $\sqrt{2^{dj}}$ te zamjenom varijabli $2^{-j}x \leftrightarrow t$, po definiciji operatora dilatacije vrijedi

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, D_{2^{-j}}T_k\varphi \rangle D_{2^{-j}}T_k\varphi,$$

koristeći uz to i $\langle D_{2^j} f, T_k\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{2^{-jd}} f(2^{-j}x) (T_k\varphi)(x) dx = [t = 2^{-j}x, dt = 2^{-dj} dx] =$

$\int_{\mathbb{R}^d} f(t) \sqrt{2^{jd}} (D_{2^j} T_k \varphi)(2^j t) dt = \langle f, D_{2^{-j}} T_k \varphi \rangle$. Prema tome, $\{D_{2^{-j}} T_k \varphi : k \in \mathbb{Z}^d\}$ razapinje prostor V_j .

Konačno, ako je $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ takva da je $\langle f, D_{2^{-j}} T_k \varphi \rangle = 0$ za sve $k \in \mathbb{Z}^d$, tada vrijedi i $\langle D_{2^j} f, D_{2^j} D_{2^{-j}} T_k \varphi \rangle = \langle D_{2^j} f, T_k \varphi \rangle = 0$. Po svojstvu 6., familija $\{T_k \varphi : k \in \mathbb{Z}^d\}$ je maksimalna u V_0 pa po tome vrijedi $D_{2^j} f \equiv 0$. To znači da za svaku točku $x \in \mathbb{R}^d$ vrijedi $2^{-dj} f(2^{-j} x) = 0$, a to povlači $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^d$. Prema tome, $f \equiv 0$.

Pokazali smo da je familija $\{D_{2^{-j}} T_k \varphi : k \in \mathbb{Z}^d\}$ maksimalna u V_j te je ortonormirana baza u V_j , dakle to je ujedno i ortonormirana baza u V_j . □.◻.◻.

Definicija 6.3. Neka je E proizvoljan konačan skup. Kažemo da je familija funkcija $\{\psi_{j,k}^\eta : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, \eta \in E\}$ *ortonormirani valićni sistem* ili *ortonormirana valićna baza* ako je ta familija ortonormirana baza prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ te ako postoji kolekcija funkcija $(\psi^\eta)_{\eta \in E}$ takva da za sve $\eta \in E, j \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{Z}^d$ vrijedi $\psi_{j,k}^\eta = D_{2^{-j}} T_k \psi^\eta$.

Kako za svaki $j \in \mathbb{Z}$ vrijedi $V_j \subseteq V_{j+1}$, možemo definirati W_j kao ortogonalni komplement od V_j unutar V_{j+1} , što drugačije pišemo kao $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$. Uz ove dvije definicije, kažemo da je ortonormirani valićni sistem $\{\psi_{j,k}^\eta : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, \eta \in E\}$ *pri-družen* nekoj multirezolucijskoj analizi $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ako je familija $\{T_k \psi^\eta : \eta \in E, k \in \mathbb{Z}^d\}$ ortonormirana baza od W_0 . Slično kao i u dokazu propozicije 6.2 zaključujemo da je $\{D_{2^{-j}} T_k \psi^\eta : \eta \in E, k \in \mathbb{Z}^d\} = \{\psi_{j,k}^\eta : \eta \in E, k \in \mathbb{Z}^d\}$ ortonormirana baza prostora W_j za svaki $J \in \mathbb{Z}$.

U definiciji 6.3 E predstavlja skup različitih indeksa η kojim indeksiramo promatrane funkcije. Može se pokazati da mora vrijediti $|E| = 2^d - 1$. Obično se taj skup zbog jednostavnosti zapisa i računa zanemaruje i ne piše te se implicitno pretpostavlja promatranje tih funkcija za sve moguće $\eta \in E$. Stoga bismo po ovoj definiciji promatrali ortonormirani valićni sistem $\{\psi_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d\}$ te funkciju φ takvu da za sve $j \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{Z}^d$ vrijedi $\varphi_{j,k} = D_{2^{-j}} T_k \varphi$.

Promotrimo sada dva važna primjera ortonormiranih valićnih sistema koja koristimo u

ovom radu.

Primjer 6.4. Pokazat ćemo da je Haarov sistem funkcija $\{h_I : I \in \mathcal{D}^\omega\}$ ortonormirani valićni sistem pridružen nekoj MRA. Naime, već znamo po teoremu 3.6 da je to ortonormirana baza prostora $L^2(\mathbb{R})$. No, potrebno je pronaći pripadnu skalirajuću funkciju φ , kao i niz funkcijskih prostora koji bi činili MRA vezanu uz Haarov sistem funkcija. Za svaki $j \in \mathbb{Z}$ definirajmo vektorski prostor funkcija

$$V_j := \overline{\text{span} \left\{ \mathbb{1}_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))} : k \in \mathbb{Z} \right\}}.$$

Tvrdimo da je $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ MRA uz skalirajuću funkciju

$$\varphi := \mathbb{1}_{[0,1)}.$$

Prije svega primijetimo da za svaki $j, k \in \mathbb{Z}$ po definiciji 3.1 vrijedi $\mathbb{1}_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))} = h_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))}^0$. Također, $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) \in \mathcal{D}^\omega$ za $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \Omega$ takav da je $\omega_j = 0$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$.

Za sve $j, k \in \mathbb{Z}$ označimo $I_{j,k} := [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ i $h_{j,k}^0 := h_{I_{j,k}}^0$. Kako je

$$[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) = [2^{-(j+1)} \cdot 2k, 2^{-(j+1)}(2k+1)) \cup [2^{-(j+1)}(2k+1), 2^{-(j+1)} \cdot 2(k+1)),$$

vrijedi $h_{j,k}^0 = h_{j+1,k}^0 + h_{j+1,k+1}^0 \in V_{j+1}$. Po definiciji ovog niza prostora slijedi $V_j \subseteq V_{j+1}$, pa vrijedi svojstvo 1. iz definicije 6.1.

Za provjeru drugog i trećeg svojstva iz iste definicije dovoljno je sljedeće. Za $j, k \in \mathbb{Z}$ te za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $D_{2^{-1}}h_{j,k}^0(x) = 2\mathbb{1}_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))}(2x) = 2\mathbb{1}_{[2^{-j-1}k, 2^{-j-1}(k+1))}(x) = 2h_{j+1,k}^0(x)$, a znamo da je $2h_{j+1,k}^0 \in V_{j+1}$. Po definiciji prostora V_j proširenjem na proizvoljnu $f \in V_j$ dobivamo istu implikaciju. Obratna implikacija slijedi analogno, pa zaključujemo da drugo svojstvo zaista vrijedi. Slično, za $k' \in \mathbb{Z}$ je $T_{k'}h_{0,k}^0(x) = \mathbb{1}_{[k,k+1)}(x - k') = \mathbb{1}_{[k+k', k+1+k')}(x) = h_{0,k+k'}^0(x)$, a kako je $h_{0,k+k'}^0 \in V_0$, proširenjem na

proizvoljan $f \in V_0$ dobivamo i treće svojstvo.

Primijetimo svojstvo 5. slijedi direktno iz teorema 3.6 budući da je $\{h_I : I \in \mathcal{D}^\omega\} = \{h_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$. Svojstvo 6. slijedi iz definicije od V_0 , ortogonalnosti skupa $\{h_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ te činjenice da je, za svaki $k \in \mathbb{Z}$ i $x \in \mathbb{R}$, $T_k \varphi(x) = h_{0,-k}(x)$.

Preostaje pokazati svojstvo 4.. Činjenica da se f nalazi u V_j zapravo znači da je funkcija f konstantna na dijadskim intervalima duljine 2^{-j} . Kako j može biti po volji mali (negativan) broj, zaključujemo da je f konstantna na intervalima $[0, +\infty)$ i $(-\infty, 0)$. Ipak, za L^2 funkciju to može vrijediti jedino ako je ona g.s. identički jednaka 0. Time smo zapravo dokazali da vrijedi $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

Prema tome $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ je MRA. Kako je $h_{j,k} = D_{2^{-j}} T_k \left(\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2})} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1)} \right)$, ujedno je $\{h_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana valićna baza pridružena MRA iz ovog primjera.

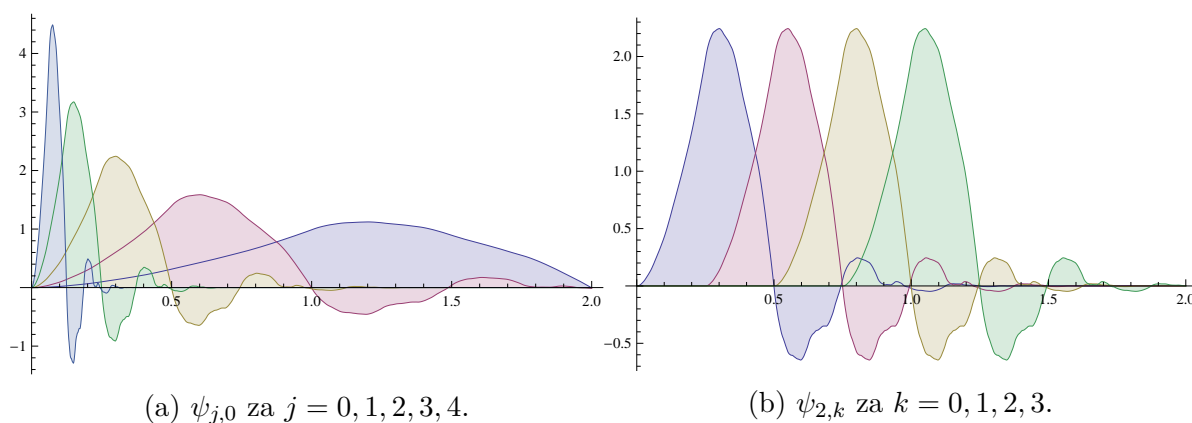
Prisjetimo se još usporedbi različitih Haarovih funkcija sa slike 3.1, koja prikazuje utjecaj operatora translacije za cjelobrojni pomak i dilatacije na Haarove funkcije. Ovakvo ponašanje prenosi se i općenito na proizvoljnu ortonormiranu bazu, a što ćemo primijetiti i u sljedećem primjeru.

Za kraj, naglasimo još da je Haarov sistem funkcija ortonormirana valićna baza i općenito, za proizvoljan $d \in \mathbb{N}$ uz MRA definiranu potpuno analogno kao i u ovom primjeru. Jedina razlika je $k \in \mathbb{Z}^d$ u definiciji prostora $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ te u skalirajućoj funkciji $\varphi = \mathbb{1}_{[0,1]^d}$, a dokaz je sličan navedenom u jednodimenzionalnom slučaju. U skladu s formalnom definicijom treba nam skup E kardinalnog broja $2^d - 1$. Prisjetimo se definicije 3.2: Haarove funkcije zadali smo pomoću skupa $\{0, 1\}^d$, s tim da smo u nastavku rada izostavili θ kao indeks, a po napomeni 3.8 odlučili zanemariti taj skup u daljnim zapisima. U ovom primjeru odgovara nam $E = \{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}$ jer je $|\{0, 1\}^d \setminus \{\theta\}| = 2^d - 1$. \square

Zanimljivo je da je za svaku multirezolucijsku analizu $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ moguće konstruirati pripadni ortonormirani valićni sistem, što se može vidjeti u [6]. No, jedan od najvažnijih rezultata teorije valića jest konstrukcija MRA i dovoljno glatke ortonormirane valićne baze s kompaktnim nosačem koja zadovoljava još neka korisna svojstva. Taj rezultat

je dokazala Ingrid Daubechies u [3], pa se u njenu čast ta ortonormirana valićna baza naziva i *Daubechiesin ortonormiran valićni sistem*.

Na slici 6.2 prikazan je izgled nekih elemenata Daubechiesine ortonormirane valićne baze. Svojstva koja zadovoljava ta baza dana su u sljedećem teoremu.



Slika 6.2: Prikaz utjecaja veličine kocke i translacije kocke na vrijednosti Daubechiesinih valića.

Teorem 6.5. Za svaki $r \in \mathbb{N}_0$ postoje multirezolucijska analiza $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ i njoj pridružen ortonormiran valićni sistem $\{\psi_{j,k}^\eta : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, \eta \in E\}$ koji zadovoljava

1. skalirajuća funkcija φ je klase $C^r(\mathbb{R}^d)$ i ima kompaktan nosač,
2. za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ i za svaki multiindeks $\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq r$ postoji konstanta $C_m > 0$ koja ovisi samo o m i za koju vrijedi

$$\|\partial^\alpha \varphi(x)\| \leq \frac{C_m}{1 + |x|^m} \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^d,$$

3. $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1,$

4. za svaki $\eta \in E$ funkcija ψ^η je klase $C^r(\mathbb{R}^d)$ i ima kompaktan nosač,

5. za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ i za svaki multiindeks $\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq r$ postoji konstanta $C_m > 0$

koja ovisi samo o m i za koju vrijedi

$$\|\partial^\alpha \varphi(x)\| \leq \frac{C_m}{1 + |x|^m} \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^d, \text{ za sve } \eta \in E,$$

6. za svaki multiindeks $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq r$ i za sve $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$ i $\eta \in E$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \psi_{j,k}^\eta(x) dx = 0.$$

Poglavlje 7

Zaključak: Analiza i primjena dobivenih teorijskih rezultata

U ovom poglavlju konačno rezimiramo teorijske rezultate iz 4 poglavlja te zahvaljujući tamo izvedenim izrazima uspoređujemo efikasnost pristupa dekompoziciji operatora pomoću slučajnih dijadskih kocki (poglavlja 2, 3 i 4) i pomoću valičnih baza (poglavlje 6). Cilj nam je potkrijepiti tezu da prvi pristup teorijski nije ništa lošiji od drugog, a zapravo je mnogo praktičniji za implementaciju.

7.1. Usporedba brzine konvergencije

U 4. poglavlju dokazali smo da se Calderón-Zygmundov operator T koji zadovoljava $T\mathbb{1} = 0$ i $T^*\mathbb{1} = 0$ može dekomponirati u sumu dijadskih šiftova. Pritom smo, da bismo pokazali konvergenciju dobivenog reda, promatrali vrijednosti brojeva $\langle Th_I, h_J \rangle$ za različite $I, J \in \mathcal{D}^\omega$ te izveli gornje granice koje su nam garantirale konvergenciju reda. Ponovimo ukratko, za kocke I i J takve da je I dobra kocka te $l(I) \leq l(J)$ dobili smo

da vrijedi

$$|\langle Th_I, h_J \rangle| \leq \begin{cases} C_1 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(I \vee J)}, & d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}, \\ C_3 2^{-(1-\gamma)\alpha i} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}}, & I \subset J, \\ \|T\|, & d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma} \\ & \text{i } I \cap J = \emptyset \text{ ili } I = J, \end{cases} \quad (7.1)$$

za neke konstante $C_1, C_3 > 0$ neovisne o kockama I i J . Pritom je $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $l(I) = 2^{-i} l(I \vee J)$.

Posebno nas zanima brzina opadanja ovih koeficijenata kada omjer $\frac{l(I)}{l(J)}$ teži u nulu.

Pritom treći slučaj zanemarujemo budući da je navedeni omjer ograničen odozdo s 2^{-r} pa

on niti ne može težiti u nulu. Naime, za $I = J$ je $\frac{l(I)}{l(I)} = 1$, a za $d(I, J) \leq l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$, $I \cap$

$J = \emptyset$ mora vrijediti $l(I) \geq 2^{-r} l(J)$, odnosno $\frac{l(I)}{l(J)} \geq 2^{-r}$.

Raspišimo ove ocjene u ovisnosti o omjeru $\frac{l(I)}{l(J)}$. Neka I i J zadovoljavaju $d(I, J) > l(I)^\gamma l(J)^{1-\gamma}$. Kako je $J \subset J \vee I$, slijedi $l(J) \leq l(J \vee I)$ pa dobivamo

$$\begin{aligned} 2^{(\gamma(d+\alpha)-\alpha)i} \frac{\sqrt{V(I)V(J)}}{V(I \vee J)} &= 2^{-i(\alpha-\gamma(d+\alpha))} \sqrt{\frac{V(I)}{V(I \vee J)}} \sqrt{\frac{V(J)}{V(I \vee J)}} \\ &\leq \left(\frac{l(I)}{l(I \vee J)} \right)^{\alpha-\gamma(d+\alpha)} \left(\frac{l(I)}{l(I \vee J)} \right)^{\frac{d}{2}} \cdot 1 \\ &\leq \left(\frac{l(I)}{l(J)} \right)^{\alpha-\gamma(d+\alpha)} \left(\frac{l(I)}{l(J)} \right)^{\frac{d}{2}} = \left(\frac{l(I)}{l(J)} \right)^{\frac{d}{2} + \alpha - \gamma(d+\alpha)}. \end{aligned}$$

U slučaju $I \subset J$, budući da je $I \vee J = J$, dobivamo $2^{-i} = \frac{l(I)}{l(I \vee J)} = \frac{l(I)}{l(J)}$, odnosno

$$2^{-(1-\gamma)\alpha i} \sqrt{\frac{V(I)}{V(J)}} = \left(\frac{l(I)}{l(J)} \right)^{(1-\gamma)\alpha + \frac{d}{2}}.$$

Neka je sada $\{\psi_{j,k}^\eta : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, \eta \in E\}$ proizvoljna ortonormirana valićna baza klase C^1 pridružena nekoj multirezolucijskoj analizi. Analogno kao i kod Haarovih funkcija, zanima nas ocjena koeficijenta $|\langle T\psi_{j,k}^\eta, \psi_{j',k'}^{\eta'} \rangle|$ u ovisnosti o $j, j' \in \mathbb{Z}, k, k' \in \mathbb{Z}^d, \eta, \eta' \in E$. Traženu ocjenu odredili su Coifman i Meyer u [2, prop. 1, pp. 52].

Točan rezultat koji će nam trebati je sljedeći:

Teorem 7.1. *Neka je $T : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ Calderón-Zygmundov operator koji zadovoljava $T\mathbb{1} = 0$ i $T^*\mathbb{1} = 0$. Tada postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $j, j' \in \mathbb{Z}, k, k' \in \mathbb{Z}^d$ i $\eta, \eta' \in E$ vrijedi*

$$|\langle T\psi_{j,k}^\eta, \psi_{j',k'}^{\eta'} \rangle| \leq C 2^{-|j-j'|(\frac{d}{2}+\alpha)} \left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + \|2^{-j}k + 2^{-j'}k'\|_{\mathbb{R}^d}} \right)^{d+\alpha}.$$

Izraze kojima smo dominirali faktor $|\langle T\psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle|$ možemo zorno prikazati preko tablice 7.1. Prvo navodimo izraze dobivene Haarovim funkcijama, dekompozicijom preko slučajnih dijadskih šiftova izvedene u 4. poglavlju te navedene u (7.1) i dodatno raspisane, a koje smo izrazili preko kvocijenta $\frac{l(I_{j,k})}{l(I_{j',k'})} = \frac{2^{-j}}{2^{-j'}} = 2^{j'-j}$ u slučaju $l(I_{j,k}) \leq l(I_{j',k'})$, odnosno $j \geq j'$. U sljedećem retku tablice navodimo izraze dobivene preko glatkog ortonormiranog valićnog sistema, a koji su navedeni u teoremu 7.1.

Pritom zanemarujemo konstante koje ne ovise o parametrima j, j', k, k' budući da one ne utječu na brzinu konvergencije promatranog faktora. Dodatno, za $k = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ označimo $k+1 = (k_1+1, k_2+1, \dots, k_d+1) \in \mathbb{Z}^d$. U tablici koristimo prije uvedenu oznaku $I_{j,k} = \left[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1) \right)$ za $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d$ te skraćene oznake $I_m = I_m^{(j,k),(j',k')} := I_{j,k} \vee I_{j',k'}$ (pri čemu smo operaciju \vee nad dijadskim kockama definirali u propoziciji 4.4), kao i $I_M = I_M^{(j,k),(j',k')} := I_{j,k}$ u slučaju $I_m = I_{j',k'}$, odnosno $I_M = I_M^{(j,k),(j',k')} := I_{j',k'}$ u slučaju $I_m = I_{j,k}$.

S tim oznakama možemo i raspisati uvjete iz (7.1) u ovisnosti o $j, j' \in \mathbb{Z}, k, k' \in \mathbb{Z}^d$. Primijetimo, kako ocjene vrijede za $l(I_{j,k}) \leq l(I_{j',k'})$, imamo dodatan uvjet $j \geq j'$.

Tablica 7.1: Usporedba dominirajućih izraza koeficijenta $|\langle T\psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle|$ dobivena dvama navedenim pristupima.

slučajni dijadski šiftovi	$d(I_m, I_M) > l(I_m)^\gamma l(I_M)^{1-\gamma}$	$I_m \subset I_M$
$ \langle T\psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle $	$2^{- j-j' (\frac{d}{2}+\alpha-\gamma(d+\alpha))}$	$2^{- j-j' ((1-\gamma)\alpha+\frac{d}{2})}$
ortonormirani valićni sistemi	$I_{j,k}, I_{j',k'}$ proizvoljni	
$ \langle T\psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle $	$2^{- j-j' (\frac{d}{2}+\alpha)} \left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + \ 2^{-j}k + 2^{-j'}k'\ _{\mathbb{R}^d}} \right)^{d+\alpha}$	

U prvom slučaju kocke $I_{j,k}$ i $I_{j',k'}$ su međusobno disjunktne pa vrijedi

$$\begin{aligned} d(I_{j,k}, I_{j',k'}) &= d\left(\left[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\right], \left[2^{-j'}k', 2^{-j'}(k'+1)\right]\right) \\ &= \begin{cases} 2^{-j'}k' - 2^{-j}(k+1), & 2^{-j'}k' \geq 2^{-j}(k+1), \\ 2^{-j}k - 2^{-j'}(k'+1), & 2^{-j}k \geq 2^{-j'}(k'+1). \end{cases} \end{aligned}$$

Uz to,

$$l(I_{j,k})^\gamma l(I_{j',k'})^{1-\gamma} = 2^{-j\gamma+j'(1-\gamma)}.$$

Prema tome, uvjet za prvi slučaj ekvivalentan je (u ovisnosti o j, j', k, k')

$$\min\left\{2^{-j'}k' - 2^{-j}(k+1), 2^{-j}k - 2^{-j'}(k'+1)\right\} > 2^{-j\gamma+j'(1-\gamma)}.$$

U drugom slučaju jedini zahtjev je $I_{j,k} \subset I_{j',k'}$, a taj je ekvivalentan zahtjevu $2^{-j'}k' \leq 2^{-j}k$ i $2^{-j}(k+1) < 2^{-j'}(k'+1)$ ili $2^{-j'}k' < 2^{-j}k$ i $2^{-j}(k+1) \leq 2^{-j'}(k'+1)$.

Kao što smo i najavili, granično ponašanje koje nas zanima jest $|j-j'| \rightarrow +\infty$. U tom slučaju vrijedi $-|j-j'| \rightarrow -\infty$, odnosno $2^{-|j-j'|} \rightarrow 0$.

Za ograde dobivene preko slučajnih dijadskih šiftova zaključujemo sljedeće. Kako je $\gamma < \frac{\alpha}{d+\alpha}$, vrijedi $\frac{d}{2}+\alpha-\gamma(d+\alpha) > \frac{d}{2}+\alpha-\alpha = \frac{d}{2} > 0$. Prema tome, $2^{-|j-j'|(\frac{d}{2}+\alpha-\gamma(d+\alpha))} \rightarrow 0$ kada $|j-j'| \rightarrow +\infty$, što znači da prva ograda eksponencijalno opada s konstantom $\frac{d}{2}+\alpha-\gamma(d+\alpha)$ u eksponentu. S druge strane, trivijalno vrijedi $(1-\gamma)\alpha+\frac{d}{2} > 0$ pa i druga ograda eksponencijalno opada, ovoga puta s konstantom u eksponentu $(1-\gamma)\alpha+\frac{d}{2}$.

Promotrimo sada ogradu dobivenu pomoću glatkih ortonormiranih valićnih sistema. Jasno, $\frac{d}{2} + \alpha > 0$ pa stoga $2^{-|j-j'|(\frac{d}{2}+\alpha)} \rightarrow 0$ kada $|j - j'| \rightarrow 0$. Preostaje još provjeriti ponašanje izraza

$$\left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + \|2^{-j}k + 2^{-j'}k'\|_{\mathbb{R}^d}} \right)^{d+\alpha}.$$

Pomnožimo li brojnik i nazivnik ovog razlomka s 2^j u slučaju $j < j'$, dobivamo jednakost

$$\left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + \|2^{-j}k + 2^{-j'}k'\|_{\mathbb{R}^d}} \right)^{d+\alpha} = \left(\frac{1 + 2^{-|j-j'|}}{1 + 2^{-|j-j'|} + \|k + 2^{-|j-j'|}k'\|_{\mathbb{R}^d}} \right)^{d+\alpha},$$

uz korištenje jednakosti $j - j' = -|j - j'|$. Analogno, ako je $j' < j$, množenjem brojnika i nazivnika brojem $2^{j'}$ te uvrštavanjem $j' - j = -|j - j'|$ dobivamo

$$\left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + \|2^{-j}k + 2^{-j'}k'\|_{\mathbb{R}^d}} \right)^{d+\alpha} = \left(\frac{1 + 2^{-|j-j'|}}{1 + 2^{-|j-j'|} + \|k' + 2^{-|j-j'|}k\|_{\mathbb{R}^d}} \right)^{d+\alpha}.$$

U oba slučaja puštanjem $|j - j'| \rightarrow +\infty$ te korištenjem $2^{-|j-j'|} \rightarrow 0$, dobivamo

$$\left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + \|2^{-j}k + 2^{-j'}k'\|_{\mathbb{R}^d}} \right)^{d+\alpha} \rightarrow \left(\frac{1 + 0}{1 + 0 + \|k_0 + \theta\|_{\mathbb{R}^d}} \right)^{d+\alpha},$$

pri čemu je $k_0 = k$ ili k' , ovisno o slučaju. U oba slučaja, cjelokupna ograda iz tablice 7.1 eksponencijalno teži u nulu, uz eksponencijalni faktor $\frac{d}{2} + \alpha$ (konstantu ovisnu o k_0 ne navodimo jer nije u direktnoj ovisnosti o parametrima j, j' pa stoga ne utječe na brzinu konvergencije).

Zaključak je da, bilo da je naš pristup preko Haarovih funkcija i slučajnih dijadskih šiftova ili preko glatkih ortonormiranih valićnih sistema, imamo eksponencijalno opadanje eksponenta $\left| \langle T\psi_{j,k}^\eta, T\psi_{j',k'}^\eta \rangle \right|$, no s različitim eksponencijalnim faktorima. Ti faktori nalaze se u tablici 7.2.

Nadalje, u pristupu s glatkim ortonormiranim valićnim sistemima dobivamo univerzalni eksponencijalni faktor $\frac{d}{2} + \alpha$, dok primjenom slučajnih dijadskih šiftova dobivamo

Tablica 7.2: Usporedba eksponencijalnih faktora dobivenim prilikom ocjenjivanja brzine opadanja broja $|\langle T\psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle|$ prema nuli.

slučajni dijadski šiftovi	$d(I_m, I_M) > l(I_m)^\gamma l(I_M)^{1-\gamma}$	$I_m \subset I_M$
eksponencijalni faktor	$\frac{d}{2} + \alpha - \gamma(d + \alpha)$	$\frac{d}{2} + \alpha - \alpha\gamma$
ortonormirani valićni sistemi	$I_{j,k}, I_{j',k'}$ proizvoljni	
eksponencijalni faktor	$\frac{d}{2} + \alpha$	

dva faktora. U slučaju $d(I_m, I_M) > l(I_m)^\gamma l(I_M)^{1-\gamma}$ taj faktor iznosi $\frac{d}{2} + \alpha - \gamma(d + \alpha) < \frac{d}{2} + \alpha$, dakle lošiji je od faktora dobivenog s glatkim ortonormiranim valićnim sistemima za $\gamma(d + \alpha) < \alpha$. U slučaju $I_m \subset I_M$ taj faktor je $\frac{d}{2} + \alpha - \alpha\gamma < \frac{d}{2} + \alpha$, pa je i taj faktor lošiji od $\frac{d}{2} + \alpha$ i to za $\gamma\alpha$.

Prema tome, u oba pristupa dobili smo eksponencijalni pad koeficijenata, no primjenom slučajnih dijadskih šiftova dobili smo nešto sporije eksponencijalno opadanje. Ipak, riječ je o blagom pogoršanju, primarno zbog istog tipa konvergencije, a zatim i, kako su $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ te $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$, dakle koeficijenti koji mogu biti izrazito maleni, tako su i navedene razlike u eksponencijalnim faktorima relativno malene.

7.2. Hilbertova transformacija na Haarovom sistemu funkcija

U 1. poglavlju kao glavni primjer Calderón-Zygmundovih operatora naveli smo Hilbertov operator. U primjeru 1.5 dokazali smo da je to uistinu Calderón-Zygmundov operator i pokazali neka njegova osnovna svojstva. Također smo izveli kako Hilbertov operator H djeluje na karakterističnu funkciju nekog intervala, odnosno pokazali smo da vrijedi

$$(H\mathbb{1}_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|.$$

Sada ćemo proučiti još neka svojstva ovog operatora koja proizlaze iz tvrdnji koje smo dokazali za Haarove funkcije.

Neka su $I = [2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)]$ i $J = [2^{-l}n, 2^{-l}(n+1)]$ proizvoljne dijadske kocke, h_I i h_J odgovarajuće Haarove funkcije i H Hilbertov operator. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} (Hh_I)(x) &= \left(H \left(\frac{1}{\sqrt{l(I)}} (\mathbb{1}_I - \mathbb{1}_{I_r}) \right) \right) (x) = \frac{1}{\sqrt{l(I)}} (H(\mathbb{1}_I) - H(\mathbb{1}_{I_r})) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{l(I)}} \left(\ln \left| \frac{x - 2^{-k}m}{x - 2^{-k-1}(2m+1)} \right| - \ln \left| \frac{x - 2^{-k-1}(2m+1)}{x - 2^{-k}(m+1)} \right| \right) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{l(I)}} \left(\ln \left| \frac{(x - 2^{-k}m)(x - 2^{-k}(m+1))}{(x - 2^{-k-1}(2m+1))^2} \right| \right). \end{aligned}$$

Iz ovoga i definicije skalarnog produkta dobivamo

$$\begin{aligned} \langle Hh_I, h_J \rangle &= \int_{\mathbb{R}} (Hh_I)(x) h_J(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{l(I)l(J)}} \int_{\mathbb{R}} \ln \left| \frac{(x - 2^{-k}m)(x - 2^{-k}(m+1))}{(x - 2^{-k-1}(2m+1))^2} \right| (\mathbb{1}_{J_l} - \mathbb{1}_{J_r}) dx \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{l(I)l(J)}} \int_{2^{-l}n}^{2^{-l-1}(2n+1)} \ln \left| \frac{(x - 2^{-k}m)(x - 2^{-k}(m+1))}{(x - 2^{-k-1}(2m+1))^2} \right| dx \\ &\quad - \frac{1}{\pi\sqrt{l(I)l(J)}} \int_{2^{-l-1}(2n+1)}^{2^{-l}(n+1)} \ln \left| \frac{(x - 2^{-k}m)(x - 2^{-k}(m+1))}{(x - 2^{-k-1}(2m+1))^2} \right| dx. \end{aligned}$$

Dobivenu formulu koristimo kako bismo pomoću programa Wolfram Mathematica sljedećim kodom dobili koeficijente koji su prikazani u tablici 7.5 na kraju poglavlja. Koristili smo naredbu numeričke integracije zbog čega su rješenja točna do na preciznost od četiri znamenke. Tako na primjer u tablicama možemo uočiti da se na dijagonali javlja element $7.0679 \cdot 10^{-17}$ zbog preciznosti rješenja koju smo koristili; njega možemo poistovjetiti s 0, što je zapravo i egzaktna vrijednost traženog skalarnog produkta. Zaista,

po korolaru 1.6 znamo da vrijedi $H^* = -H$, pa za proizvoljni I vrijedi

$$\langle Hh_I, h_I \rangle = \langle h_I, H^*h_I \rangle = -\langle h_I, Hh_I \rangle = -\langle Hh_I, h_I \rangle \implies \langle Hh_I, h_I \rangle = 0.$$

```

Table[ $\frac{1}{\text{Pi} * 2^{\frac{-(j+k)}{2}}}$ 
  (NIntegrate[Log[Abs[ $\frac{(x-1) * (x-1-2^{-k})}{(x-1-2^{-k-1})^2}$ ]]], {x, i, i+2^{-j-1}}, PrecisionGoal -> 4,
  MaxRecursion -> 12] - NIntegrate[Log[Abs[ $\frac{(x-1) * (x-1-2^{-k})}{(x-1-2^{-k-1})^2}$ ]]],
  {x, i+2^{-j-1}, i+2^{-j}}, PrecisionGoal -> 4, MaxRecursion -> 12]
  )],
  {j, 0, 3}, {i, 0, 1-2^{-j}, 2^{-j}}, {k, 0, 3}, {l, 0, 1-2^{-k}, 2^{-k}}]
    
```

Zbog rezultata dokazanih u ovom radu razumno je pretpostaviti da bismo bolje rezultate mogli dobiti ukoliko promatramo razvoj Hilbertovog operatora pomoću Haarovog sistema nad familijom slučajnih dijadskih kocki. No s takvim zaključcima moramo biti oprezni jer se problem s dekompozicijom može javiti iz više razloga. Prisjetimo se da smo u propoziciji 4.4 dokazali sljedeći rastav operatora

$$\langle Tf, g \rangle = \frac{1}{\pi_D} \mathbb{E}_\omega \sum_{I, J \in \mathcal{D}^\omega} \mathbb{1}_{\text{dobra}}(I \wedge J) \langle f, h_I \rangle \langle Th_I, h_J \rangle \langle g, h_J \rangle.$$

Jedan od problema koji se može javiti jest da se u ovom teorijskom rezultatu na koji se pozivamo sumacija vrši samo po dobrim kockama. Svojstvo dobrote ovisi o parametru r koji može biti vrlo velik pa pitanje određivanja dobrote neke konkretne kocke može biti subjektivno (podložno dobroj procjeni). Također, konvergencija koja je zagarantirana teoremom 4.1 ne mora uvijek biti korisna u praksi zbog toga što teorijski rezultat ne ovisi o konstantama koje na konkretnim primjerima mogu činiti razliku. Usprkos ovim potencijalnim problemima pokušat ćemo iskoristiti dokazani rezultat na primjeru Hilbertovog operatora kako bismo dobili što bolju aproksimaciju.

Kao i u slučaju standardne Haarove baze promatrat ćemo intervale

$$\begin{aligned} I_1 &:= [0, 1), I_2 := \left[0, \frac{1}{2}\right), I_3 := \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ I_4 &:= \left[0, \frac{1}{4}\right), \dots, I_7 := \left[\frac{3}{4}, 1\right), \\ I_8 &:= \left[0, \frac{1}{8}\right), \dots, I_{15} := \left[\frac{7}{8}, 1\right). \end{aligned}$$

Promatrat ćemo pomake za četiri različita $\omega_i = (\omega_j^i)_{j \in \mathbb{Z}}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Neka je $\omega_j^1 = 0$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$, tada se radi upravo o već obrađenom zapisu uz Haarove funkcije na nepomaknutim intervalima. Nadalje neka je $\omega_3^2 = 1, \omega_j^2 = 0$ za $j \neq 3$, tada sličnim računom kao i ranije uzevši u obzir odgovarajuće pomake dobivamo tražene koeficijente. Isto radimo i za $\omega_2^3 = 1, \omega_j^3 = 0$ za $j \neq 2$ odnosno za $\omega_3^4 = 1, \omega_2^4 = 1, \omega_j^4 = 0$ za $j \neq 2, 3$. Kako bismo izrazili matematičko očekivanje koje se koristi u teoremu 4.1 u ovoj konačnoj aproksimaciji zanimat će nas kako izgleda prosječna vrijednost koeficijenata dobivenih uz ove $\omega_i, i = 1, 2, 3, 4$. Prosjeke ponovno prikazujemo u tablici 7.6 na kraju poglavlja uz notaciju da u nazivlju stupaca i redaka pišemo originalne intervale, a ne one dobivene nakon pojedinih pomaka. Tako će se na primjer u retku $I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ i stupcu $I_8 = \left[0, \frac{1}{8}\right)$ nalaziti vrijednost izraza

$$\frac{1}{4} (\langle H(h_{I_3+\omega_1}, h_{I_8+\omega_1}) \rangle + \langle H(h_{I_3+\omega_2}, h_{I_8+\omega_2}) \rangle + \langle H(h_{I_3+\omega_3}, h_{I_8+\omega_3}) \rangle + \langle H(h_{I_3+\omega_4}, h_{I_8+\omega_4}) \rangle)$$

Ponovno moramo uzeti u obzir da su dobivene vrijednosti samo numeričke aproksimacije koje nisu potpuno točne, pa zato na primjer elemente dijagonale koji iznose $9.71836 \cdot 10^{-17}$ i $3.53395 \cdot 10^{-17}$ ne treba smatrati različitima.

Za račun je korišten priloženi kod u programu Wolfram Mathematica. Matrica T u kodu predstavlja matricu koeficijenata u slučaju ω_1 i zato nema nikakvih pomaka. Matrice Ta, Tb i Tc odgovaraju matricama koeficijenata u slučajevima ω_2, ω_3 i ω_4 redom, pa zato imaju odgovarajuće pomake označene varijablama Pomaka, Pomakb i Pomakc.

$$\begin{aligned}
 T = & \text{Table} \left[\frac{1}{\text{Pi} * 2^{\frac{-(j+k)}{2}}} \right. \\
 & \left(\text{NIntegrate} \left[\text{Log} \left[\text{Abs} \left[\frac{(x-1) * (x-1-2^{-k})}{(x-1-2^{-k-1})^2} \right] \right] \right], \{x, i, i+2^{-j-1}\}, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4, \right. \\
 & \left. \left. \text{MaxRecursion} \rightarrow 12 \right] - \text{NIntegrate} \left[\text{Log} \left[\text{Abs} \left[\frac{(x-1) * (x-1-2^{-k})}{(x-1-2^{-k-1})^2} \right] \right] \right], \right. \\
 & \left. \left. \{x, i+2^{-j-1}, i+2^{-j}\}, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4, \text{MaxRecursion} \rightarrow 12 \right] \right), \\
 & \{j, 0, 3\}, \{i, 0, 1-2^{-j}, 2^{-j}\}, \{k, 0, 3\}, \{l, 0, 1-2^{-k}, 2^{-k}\} \\
 \text{Pomaka}[0] = & 2^{-3} \\
 \text{Pomaka}[1] = & 2^{-3} \\
 \text{Pomaka}[2] = & 2^{-3} \\
 \text{Pomaka}[3] = & 0 \\
 \text{Ta} = & \text{Table} \left[\right. \\
 & \frac{1}{\text{Pi} * 2^{\frac{-(j+k)}{2}}} \left(\text{NIntegrate} \left[\text{Log} \left[\text{Abs} \left[\frac{(x-1-\text{Pomaka}[k]) * (x-1-2^{-k}-\text{Pomaka}[k])}{(x-1-2^{-k-1}-\text{Pomaka}[k])^2} \right] \right] \right], \{x, \right. \\
 & \left. i+\text{Pomaka}[j], i+2^{-j-1}+\text{Pomaka}[j]\}, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4, \text{MaxRecursion} \rightarrow 12 \right] - \\
 & \left. \text{NIntegrate} \left[\text{Log} \left[\text{Abs} \left[\frac{(x-1-\text{Pomaka}[k]) * (x-1-2^{-k}-\text{Pomaka}[k])}{(x-1-2^{-k-1}-\text{Pomaka}[k])^2} \right] \right] \right], \right. \\
 & \left. \left. \{x, i+2^{-j-1}+\text{Pomaka}[j], i+2^{-j}+\text{Pomaka}[j]\}, \right. \right. \\
 & \left. \left. \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4, \text{MaxRecursion} \rightarrow 12 \right] \right), \\
 & \{j, 0, 3\}, \{i, 0, 1-2^{-j}, 2^{-j}\}, \{k, 0, 3\}, \{l, 0, 1-2^{-k}, 2^{-k}\} \\
 \end{aligned}$$

```

Pomakb[0] = 2-2
Pomakb[1] = 2-2
Pomakb[2] = 0
Pomakb[3] = 0
Tb = Table[
  
$$\frac{1}{\text{Pi} * 2^{\frac{-(j+k)}{2}}} \left( \text{NIntegrate} \left[ \text{Log} \left[ \text{Abs} \left[ \frac{(x-1-\text{Pomakb}[k]) * (x-1-2^{-k}-\text{Pomakb}[k])}{(x-1-2^{-k-1}-\text{Pomakb}[k])^2} \right] \right], \{x, i+\text{Pomakb}[j], i+2^{-j-1}+\text{Pomakb}[j]\}, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4, \text{MaxRecursion} \rightarrow 12 \right] - \right.$$

  
$$\text{NIntegrate} \left[ \text{Log} \left[ \text{Abs} \left[ \frac{(x-1-\text{Pomakb}[k]) * (x-1-2^{-k}-\text{Pomakb}[k])}{(x-1-2^{-k-1}-\text{Pomakb}[k])^2} \right] \right], \{x, i+2^{-j-1}+\text{Pomakb}[j], i+2^{-j}+\text{Pomakb}[j]\}, \right.$$

  
$$\left. \left. \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4, \text{MaxRecursion} \rightarrow 12 \right] \right),$$

  {j, 0, 3}, {i, 0, 1-2-j, 2-j}, {k, 0, 3}, {1, 0, 1-2-k, 2-k}]
Pomakc[0] = 2-3 + 2-2
Pomakc[1] = 2-3 + 2-2
Pomakc[2] = 2-3
Pomakc[3] = 0
Tc = Table[
  
$$\frac{1}{\text{Pi} * 2^{\frac{-(j+k)}{2}}} \left( \text{NIntegrate} \left[ \text{Log} \left[ \text{Abs} \left[ \frac{(x-1-\text{Pomakc}[k]) * (x-1-2^{-k}-\text{Pomakc}[k])}{(x-1-2^{-k-1}-\text{Pomakc}[k])^2} \right] \right], \{x, i+\text{Pomakc}[j], i+2^{-j-1}+\text{Pomakc}[j]\}, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4, \text{MaxRecursion} \rightarrow 12 \right] - \right.$$

  
$$\text{NIntegrate} \left[ \text{Log} \left[ \text{Abs} \left[ \frac{(x-1-\text{Pomakc}[k]) * (x-1-2^{-k}-\text{Pomakc}[k])}{(x-1-2^{-k-1}-\text{Pomakc}[k])^2} \right] \right], \{x, i+2^{-j-1}+\text{Pomakc}[j], i+2^{-j}+\text{Pomakc}[j]\}, \right.$$

  
$$\left. \left. \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4, \text{MaxRecursion} \rightarrow 12 \right] \right),$$

  {j, 0, 3}, {i, 0, 1-2-j, 2-j}, {k, 0, 3}, {1, 0, 1-2-k, 2-k}]
TP = Table[ $\frac{1}{4} * (\text{T}[[j, i, k, 1]] + \text{Ta}[[j, i, k, 1]] + \text{Tb}[[j, i, k, 1]] + \text{Tc}[[j, i, k, 1]]),$ 
  {j, 1, 4}, {i, 1, 2j-1}, {k, 1, 4}, {1, 1, 2k-1}]

```

Tablični prikaz izračunatih koeficijenata nam pruža dosta informacija, ali nije praktičan za njihovu usporedbu. Kako bismo podatke mogli bolje analizirati važno je prvo uočiti koja svojstva smatramo bitnima, odnosno zašto bismo za jednu aproksimaciju

rekli da je bolja od druge. Svakako je jedan od važnih čimbenika za takvu usporedbu brzina kojom koeficijenti opadaju. Zato nam je važan podatak koji je od elemenata na korespondentnim mjestima veći po apsolutnoj vrijednosti. U tablici 7.3 ta informacija je dana vizualno. Rozom bojom označene su ćelije za koje je koeficijent u slučaju standardnih Haarovih funkcija veći, plavom ćelije za koje je koeficijent dobiven u slučaju pomaknutih Haarovih funkcija, a ćelije u kojima se obje vrijednosti poklapaju nisu obojene.

Tablica 7.3: Usporedba koeficijenata u različitim razvojinama Hilbertove transformacije.

$J \backslash I$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}
I_1	roz	plav	plav	plav	plav	plav	roz	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav
I_2	plav	roz	plav	plav	plav	roz	roz	plav	plav	plav	plav	plav	roz	roz	roz
I_3	plav	plav	roz	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav
I_4	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	roz	roz	roz	roz	roz	roz
I_5	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	roz	roz	roz	roz
I_6	plav	roz	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	roz	roz
I_7	roz	roz	plav	plav	plav	plav	roz	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav
I_8	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav
I_9	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav
I_{10}	plav	plav	plav	roz	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav
I_{11}	plav	plav	plav	roz	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav
I_{12}	plav	plav	plav	roz	roz	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav
I_{13}	plav	roz	plav	roz	roz	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav
I_{14}	plav	roz	plav	roz	roz	roz	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav
I_{15}	plav	roz	plav	roz	roz	roz	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav	plav

Uočimo da tablica 7.3 pokazuje neke nelogičnosti, kao na primjer činjenicu da sve dijagonalne ćelije nisu ostale neobojene. Do toga je došlo zbog pogrešaka u računu. Kako bismo to ispravili uveli smo tablicu 7.4 u kojoj su prazne ostavljene sve ćelije u kojima je razlika promatranih koeficijenata po apsolutnoj vrijednosti manja od 0.0001.

Ovakva tablica daje puno očekivanije rezultate. Sva dijagonalna polja ostala su neobojena. Također uočimo da su sve ćelije za koje su oba intervala u skalarnom produktu veličine $\frac{1}{8}$ ostale neobojene. To je zato što te intervale nismo pomicali s odabranim

Tablica 7.4: Korigirana usporedba koeficijenata u različitim razvojima Hilbertove transformacije.

$J \backslash I$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}
I_1															
I_2															
I_3															
I_4															
I_5															
I_6															
I_7															
I_8															
I_9															
I_{10}															
I_{11}															
I_{12}															
I_{13}															
I_{14}															
I_{15}															

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$. Ukoliko prebrojimo roza polja u odnosu na plava polja uočavamo da je plavih više u omjeru 49 : 17 što ukazuje na rezultat koji odgovara onome dobivenom iz teorijskih razmatranja.

U nastavku slijede tablice koeficijenata u klasičnoj Haarovoj bazi i u slučajnoj Haarovoj bazi.

Tablica 7.5: Razvoj Hilbertove transformacije u klasičnoj Haarovoj bazi

J, I	$[0, 1\rangle$	$[0, \frac{1}{2}\rangle$	$[\frac{1}{2}, 1\rangle$
$[0, 1\rangle$	$7.0679 \cdot 10^{-17}$	0.429794	-0.429794
$[0, \frac{1}{2}\rangle$	-0.429798	$7.0679 \cdot 10^{-17}$	0.108161
$[\frac{1}{2}, 1\rangle$	0.429798	-0.108161	$-3.53395 \cdot 10^{-17}$
$[0, \frac{1}{4}\rangle$	-0.152991	-0.429798	0.0090521
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\rangle$	-0.231653	0.429798	0.102192
$[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\rangle$	0.231653	-0.102192	-0.429798
$[\frac{3}{4}, 1\rangle$	0.152991	-0.0090521	0.429798
$[0, \frac{1}{8}\rangle$	-0.0903846	-0.152991	0.00222767
$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\rangle$	-0.0374481	-0.231653	0.00443028
$[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\rangle$	-0.0444484	0.231653	0.0114702
$[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\rangle$	-0.157814	0.152991	0.0871314
$[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\rangle$	0.157814	-0.0871314	-0.152991
$[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\rangle$	0.0444484	-0.0114702	-0.231653
$[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\rangle$	0.0374481	-0.00443028	0.231653
$[\frac{7}{8}, 1\rangle$	0.0903846	-0.00222767	0.152991

$J \backslash I$	$\left[0, \frac{1}{4}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right\rangle$
$\left[0, 1\right\rangle$	0.152989	0.231651	-0.231651	-0.152989
$\left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$	0.429794	-0.429794	0.102192	0.0090521
$\left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$	-0.0090521	-0.102192	0.429794	-0.429794
$\left[0, \frac{1}{4}\right\rangle$	$7.0679 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936	0.00156103
$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.108161	$-3.53395 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936
$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\rangle$	-0.00569936	-0.108161	0	0.108161
$\left[\frac{3}{4}, 1\right\rangle$	-0.00156103	-0.00569936	-0.108161	$3.53395 \cdot 10^{-17}$
$\left[0, \frac{1}{8}\right\rangle$	-0.429798	0.0090521	0.00131672	0.000422319
$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\rangle$	0.429798	0.102192	0.00292624	0.000705683
$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\rangle$	-0.102192	-0.429798	0.0090521	0.00131672
$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.0090521	0.429798	0.102192	0.00292624
$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right\rangle$	-0.00292624	-0.102192	-0.429798	0.0090521
$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right\rangle$	-0.00131672	-0.0090521	0.429798	0.102192
$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\rangle$	-0.000705683	-0.00292624	-0.102192	-0.429798
$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$	-0.000422319	-0.00131672	-0.0090521	0.429798

$J \backslash I$	$\left[0, \frac{1}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right\rangle$
$\left[0, 1\right\rangle$	0.0903832	0.0374477	0.0444481	0.157813
$\left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$	0.152989	0.231651	-0.231651	-0.152989
$\left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$	-0.00222767	-0.00443028	-0.0114702	-0.0871314
$\left[0, \frac{1}{4}\right\rangle$	0.429794	-0.429794	0.102192	0.0090521
$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.0090521	-0.102192	0.429794	-0.429794
$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\rangle$	-0.00131672	-0.00292624	-0.0090521	-0.102192
$\left[\frac{3}{4}, 1\right\rangle$	-0.000422319	-0.000705683	-0.00131672	-0.00292624
$\left[0, \frac{1}{8}\right\rangle$	$7.0679 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936	0.00156103
$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\rangle$	-0.108161	$-3.53395 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936
$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\rangle$	-0.00569936	-0.108161	0	0.108161
$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.00156103	-0.00569936	-0.108161	$3.53395 \cdot 10^{-17}$
$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right\rangle$	-0.000641838	-0.00156103	-0.00569936	-0.108161
$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right\rangle$	-0.000324823	-0.000641838	-0.00156103	-0.00569936
$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\rangle$	-0.000186806	-0.000324823	-0.000641838	-0.00156103
$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$	-0.0001172	-0.000186806	-0.000324823	-0.000641838

$J \backslash I$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$
$[0, 1\rangle$	-0.157813	-0.0444481	-0.0374477	-0.0903832
$\left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$	0.0871314	0.0114702	0.00443028	0.00222767
$\left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$	0.152989	0.231651	-0.231651	-0.152989
$\left[0, \frac{1}{4}\right\rangle$	0.00292624	0.00131672	0.000705683	0.000422319
$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\rangle$	0.102192	0.0090521	0.00292624	0.00131672
$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\rangle$	0.429794	-0.429794	0.102192	0.0090521
$\left[\frac{3}{4}, 1\right\rangle$	-0.0090521	-0.102192	0.429794	-0.429794
$\left[0, \frac{1}{8}\right\rangle$	0.000641838	0.000324823	0.000186806	0.0001172
$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\rangle$	0.00156103	0.000641838	0.000324823	0.000186806
$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\rangle$	0.00569936	0.00156103	0.000641838	0.000324823
$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right\rangle$	0.108161	0.00569936	0.00156103	0.000641838
$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right\rangle$	$7.0679 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936	0.00156103
$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right\rangle$	-0.108161	$7.0679 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936
$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\rangle$	-0.00569936	-0.108161	$7.0679 \cdot 10^{-17}$	0.108161
$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$	-0.00156103	-0.00569936	-0.108161	$7.0679 \cdot 10^{-17}$

Tablica 7.6: Uprosječni razvoj Hilbertove transformacije u slučajnoj Haarovoj bazi.

$J \backslash I$	$[0, 1\rangle$	$\left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$
$[0, 1\rangle$	$9.71836 \cdot 10^{-17}$	0.429794	-0.429794
$\left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.429798	$3.53395 \cdot 10^{-17}$	0.108161
$\left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$	0.429798	-0.108161	$-5.30092 \cdot 10^{-17}$
$\left[0, \frac{1}{4}\right\rangle$	-0.0329299	-0.163803	0.00598917
$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.192322	$5.55112 \cdot 10^{-17}$	0.055622
$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\rangle$	$8.32667 \cdot 10^{-17}$	0.163803	-0.163803
$\left[\frac{3}{4}, 1\right\rangle$	0.192322	-0.055622	$1.11022 \cdot 10^{-16}$
$\left[0, \frac{1}{8}\right\rangle$	-0.00110322	-0.0124898	0.00122099
$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\rangle$	-0.0118016	-0.0715105	0.00219086
$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\rangle$	-0.0258732	-0.0164649	0.00485433
$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.0825237	$4.16334 \cdot 10^{-17}$	0.0263149
$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right\rangle$	-0.0204741	0.0164649	-0.0124898
$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\rangle$	$-1.38778 \cdot 10^{-17}$	0.0715105	-0.0715105
$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$	0.0204741	0.0124898	-0.0164649
$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$	0.0825237	-0.0263149	$1.38778 \cdot 10^{-17}$

$J \backslash I$	$\left[0, \frac{1}{4}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right\rangle$
$[0, 1\rangle$	0.0329289	0.19232	0	-0.19232
$\left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$	0.163801	$5.55112 \cdot 10^{-17}$	-0.163801	0.055622
$\left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$	-0.00598917	-0.055622	0.163801	$-1.11022 \cdot 10^{-16}$
$\left[0, \frac{1}{4}\right\rangle$	$-3.53395 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936	0.00156103
$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.108161	$1.76697 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936
$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\rangle$	-0.00569936	-0.108161	0	0.108161
$\left[\frac{3}{4}, 1\right\rangle$	-0.00156103	-0.00569936	-0.108161	$3.35725 \cdot 10^{-16}$
$\left[0, \frac{1}{8}\right\rangle$	-0.163803	0.00598917	0.0010112	0.000347577
$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\rangle$	$8.32667 \cdot 10^{-17}$	0.055622	0.00212148	0.000564001
$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\rangle$	0.163803	-0.163803	0.00598917	0.0010112
$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.055622	0	0.055622	0.00212148
$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right\rangle$	-0.00598917	0.163803	-0.163803	0.00598917
$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\rangle$	-0.00212148	-0.055622	$2.77556 \cdot 10^{-17}$	0.055622
$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$	-0.0010112	-0.00598917	0.163803	-0.163803
$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$	-0.000564001	-0.00212148	-0.055622	$2.77556 \cdot 10^{-17}$

$J \backslash I$	$\left[0, \frac{1}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\rangle$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right\rangle$
$\left[0, 1\right\rangle$	0.00110287	0.0118011	0.0258727	0.0825229
$\left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$	0.0124893	0.0715095	0.0164645	$4.16334 \cdot 10^{-17}$
$\left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$	-0.00122099	-0.00219086	-0.00485433	-0.0263149
$\left[0, \frac{1}{4}\right\rangle$	0.163801	0	-0.163801	0.055622
$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.00598917	-0.055622	0.163801	$-8.32667 \cdot 10^{-17}$
$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\rangle$	-0.0010112	-0.00212148	-0.00598917	-0.055622
$\left[\frac{3}{4}, 1\right\rangle$	-0.000347577	-0.000564001	-0.0010112	-0.00212148
$\left[0, \frac{1}{8}\right\rangle$	$7.0679 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936	0.00156103
$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\rangle$	-0.108161	$-3.53395 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936
$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\rangle$	-0.00569936	-0.108161	0	0.108161
$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.00156103	-0.00569936	-0.108161	$3.53395 \cdot 10^{-17}$
$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right\rangle$	-0.000641838	-0.00156103	-0.00569936	-0.108161
$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\rangle$	-0.000324823	-0.000641838	-0.00156103	-0.00569936
$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$	-0.000186806	-0.000324823	-0.000641838	-0.00156103
$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$	-0.0001172	-0.000186806	-0.000324823	-0.000641838

$J \backslash I$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right\rangle$	$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\rangle$	$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$
$[0, 1)$	0.0204739	0	-0.0204739	-0.0825229
$\left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.0164645	-0.0715095	-0.0124893	0.0263149
$\left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$	0.0124893	0.0715095	0.0164645	$-5.55112 \cdot 10^{-17}$
$\left[0, \frac{1}{4}\right\rangle$	0.00598917	0.00212148	0.0010112	0.000564001
$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\rangle$	-0.163801	0.055622	0.00598917	0.00212148
$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\rangle$	0.163801	$-2.77556 \cdot 10^{-17}$	-0.163801	0.055622
$\left[\frac{3}{4}, 1\right\rangle$	-0.00598917	-0.055622	0.163801	$-3.60822 \cdot 10^{-16}$
$\left[0, \frac{1}{8}\right\rangle$	0.000641838	0.000324823	0.000186806	0.0001172
$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\rangle$	0.00156103	0.000641838	0.000324823	0.000186806
$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\rangle$	0.00569936	0.00156103	0.000641838	0.000324823
$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right\rangle$	0.108161	0.00569936	0.00156103	0.000641838
$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right\rangle$	$7.0679 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936	0.00156103
$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\rangle$	-0.108161	$7.0679 \cdot 10^{-17}$	0.108161	0.00569936
$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$	-0.00569936	-0.108161	$7.0679 \cdot 10^{-17}$	0.108161
$\left[\frac{7}{8}, 1\right\rangle$	-0.00156103	-0.00569936	-0.108161	$7.0679 \cdot 10^{-17}$

Sažetak

Ivana Antoliš, Mario Stipčić

Primjene slučajnih dijadskih sistema na dekompozicije funkcija i operatora

Ovaj rad se bavi tehnikom dekompozicije funkcija i operatora u Haarove sisteme obzirom na slučajne dijadske rešetke. Tu tehniku su na integralne operatore prvi primijenili Nazarov, Treil i Volberg (*The Tb-theorem on non-homogeneous spaces*, Acta Math. 190 (2003), 151–239), da bi ju desetak godina kasnije usavršio Hytönen (*The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. (2) 175 (2012), 1473–1506). On je uspio prikazati općeniti Calderón-Zygmundov operator kao konvergentni red tzv. dijadskih šiftova. Taj rezultat je svoju važnost potvrdio primjenama na nekoliko otvorenih problema harmonijske analize.

Glavni cilj ovog rada je dati preciznu kvantitativnu formulaciju spomenutog Hytönenovog teorema reprezentacije. Posebno to uključuje ocjenjivanje brzine pada koeficijenata proizvoljnog Calderón-Zygmundovog operatora obzirom na slučajne Haarove baze. Motivacija za strogo kvantitativni teorem reprezentacije je dvostruka.

Kao prvo, u radu su razriješeni svi tehnički detalji Hytönenovog rezultata, što je posebno važno za njegove dosad poznate i eventualne buduće primjene. U radu su identificirani svi članovi koji se pojavljuju u prikazu i istaknuti svi parametri o kojima ovise veličine koeficijenata.

Kao drugo, eksplicitne ocjene koeficijenata iz prikaza operatora u slučajnim Haaro-

vim sistemima su korisna informacija u vrlo konkretnoj primjeni: memorijskoj pohrani djelovanja operatora pomoću što je moguće manje numeričkih podataka uz zadanu preciznost. Vrhunac ovog rada je usporedba brzine konvergencije aproksimacija operatora obzirom na slučajne dijadske rešetke s nešto klasičnijim prikazima u glatkim valićnim bazama. Izložena diskusija se može ukratko sažeti zaključkom da slučajnost doista može nadomjestiti glatkoću, a mnogo je superiornija po računskoj složenosti i jednostavnosti implementacije.

U radu se navode i sve potrebne definicije i rezultati vezani uz Calderón-Zygmundove operatore, slučajne dijadske kocke i Haarove sisteme. Osim spomenutog teorema reprezentacije radi potpunosti se iskazuje i dokazuje i njegov obrat.

Sav teorijski materijal je popraćen konkretnim primjerima, grafičkim ilustracijama i numeričkim simulacijama. Tako se za konkretne primjere funkcija računaju koeficijenti u različitim Haarovim bazama. Obzirom da je naglasak rada na dekompoziciji operatora, uzima se Hilbertova transformacija kao prototip Calderón-Zygmundovog operatora te se za nju računaju i diskutiraju koeficijenti obzirom na slučajne Haarove sisteme.

Ključne riječi: Calderón-Zygmundov operator, slučajna dijadska kocka, dijadski šift, Hytönenov teorem reprezentacije.

Summary

Ivana Antoliš, Mario Stipčić

Applications of random dyadic systems to decompositions of functions and operators

This paper deals with decomposition techniques for functions and operators into Haar systems with respect to random dyadic grids. This technique was first applied to integral operators by Nazarov, Treil, and Volberg (*The Tb-theorem on non-homogeneous spaces*, Acta Math. 190 (2003), 151–239), while it was perfected ten years later by Hytönen (*The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. (2) 175 (2012), 1473–1506). He succeeded in representing a general Calderón-Zygmund operator into a convergent series of the so-called dyadic shifts. This result has confirmed its importance in applications to several open problems of harmonic analysis.

The main objective of this paper is to provide a precise quantitative formulation of the aforementioned Hytönen's representation theorem. In particular, this includes estimation of the rate of the decay of the coefficients associated with an arbitrary Calderón-Zygmund operator with respect to the random Haar bases. Motivation for a strictly quantitative representation theorem is twofold.

Firstly, the paper clarifies all technical details of the result due to Hytönen, which is especially important for its known and possible future applications. All terms appearing in the representation and all parameters controlling the magnitudes of the coefficients are identified in this paper.

Secondly, the explicit estimates for the coefficients from the representation of an operator in random Haar systems constitute useful information with a very specific application: memory storage of an operator using the least number of numerical data with the given accuracy. The ultimate result of this paper is the comparison of the speed of convergence of operator approximations with respects to the random dyadic grids with the more classical representations in smooth wavelet bases. The presented discussion can be summarized with a conclusion that randomness can really compensate for the smoothness, while it is superior in the computational complexity and simplicity of the implementation.

The presentation includes all of the necessary definitions and results related to Calderón-Zygmund operators, random dyadic cubes, and Haar systems. Besides the aforementioned representation theorem, its converse is also formulated and proven for completeness.

All theoretical material is accompanied with concrete examples, graphical illustrations, and numerical simulations. Thus, for specific examples of functions the coefficients in different Haar bases are computed. Since the emphasis of the whole work is on decomposing operators, the Hilbert transform is chosen as a prototype Calderón-Zygmund operator and for this transform the coefficients with respect to random Haar systems are evaluated and discussed.

Keywords: Calderón-Zygmund operator, random dyadic lattice, dyadic shift, the Hytönen representation theorem.

Bibliografija

- [1] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser Advanced Texts, Springer, New York, 2013.
- [2] R. Coifman, Y. Meyer, *Wavelets: Calderón-Zygmund and multilinear operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 48, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [3] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conf. Series Appl. Math., SIAM, Philadelphia, 1992.
- [4] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1999.
- [5] A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Ann. 69 (1910), 331–371.
- [6] E. Hernández, G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [7] T. P. Hytönen, *Representation of singular integrals by dyadic operators, and the A_2 theorem*, arXiv:1108.5119 [math.CA] (2011), dostupno na <http://arxiv.org/abs/1108.5119> (travanj 2015.).
- [8] T. P. Hytönen, *The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. (2) 175 (2012), 1473–1506.
- [9] V. Kovač, *Singularni integrali*, skripta kolegija na doktorskom studiju 2014./2015., PMF — Matematički odsjek, dostupno na

<http://web.math.pmf.unizg.hr/~vjekovac/files/singintskripta.pdf> (travanj 2015.).

- [10] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza. Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [11] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
- [12] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg, *The Tb-theorem on non-homogeneous spaces*, Acta Math. 190 (2003), 151–239.
- [13] T. Orponen, *On the Haar shift representations of Calderón-Zygmund operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), 2693–2698.
- [14] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [15] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series 30, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [16] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [17] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Mathematical Series 32, Princeton University Press, Princeton, 1971.
- [18] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, verzija 9.0, Champaign, IL, 2012.