

Inno Gatin

Spektralna metoda viših redova za nelinearnu  
propagaciju površinskih valova.



Ovaj rad sam izradio na Katedri za turbostrojeve Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, pod vodstvom prof.dr.sc. Hrvoja Jasaka, dipl. ing. te je predan na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade za akademsku godinu 2014./2015.

# Sadržaj

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Uvod</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Cilj rada</b>  | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Matematički model</b>  | <b>4</b>  |
| 3.1      | Potencijalno strujanje . . . . .  | 4         |
| 3.2      | Formulacija problema površinskih valova . . . . .                           | 5         |
| 3.3      | Fourierova transformacija . . . . .   | 8         |
| 3.4      | Spektralna metoda viših redova za nelinearnu propagaciju valova (HOS) . . . | 11        |
| <b>4</b> | <b>Numerički model</b>  | <b>14</b> |
| 4.1      | Numerička procedura . . . . .   | 14        |
| 4.2      | Inicijalizacija HOS simulacije . . . . .                                    | 17        |
| 4.3      | Uklanjanje alias–efekta . . . . .   | 19        |
| 4.4      | Numerička integracija običnih diferencijalnih jednadžbi . . . . .           | 21        |
| <b>5</b> | <b>Validacija implementiranog algoritma</b>                                 | <b>23</b> |
| 5.1      | Propagacija monokromatskog vala . . . . .                                   | 23        |
| 5.2      | Propagacija valnog spektra . . . . .  | 26        |
| <b>6</b> | <b>Primjer CFD simulacije s inicijalizacijom vala pomoću HOS metode</b>     | <b>32</b> |
| 6.1      | Pronalaženje ekstremnog vala . . . . .                                      | 32        |
| 6.2      | CFD simulacija . . . . .  | 34        |
| <b>7</b> | <b>Zaključak</b>  | <b>38</b> |

## Popis simbola

|                  |  |                                |
|------------------|--|--------------------------------|
| $\Delta$         | konačni diferencijalni operator                        |                                |
| $\epsilon$       | nagib vala   |                                |
| $\epsilon_n$     | fazni pomak $n$ -tog Fourierovog harmonika             | rad                            |
| $\epsilon_{ijk}$ | Levi–Civita tenzor permutacije                         |                                |
| $\eta$           | elevacija slobodne površine                            | m                              |
| $\gamma$         | koeficijent vršnosti                                   |                                |
| $\gamma_p$       | višna kružna frekvencija                               | rad/s                          |
| $\lambda_i$      | duljina valne komponente                               | m                              |
| $\mathcal{F}$    | broj Fourierovih harmonika sa uklonjenim alias–efektom |                                |
| $\omega$         | kružna frekvencija                                     | rad/s                          |
| $\omega_c$       | Nyquistova frekvencija                                 | rad/s                          |
| $\omega_n$       | kružna frekvencija $n$ -tog Fourierovog harmonika      | rad/s                          |
| $\phi$           | potencijal brzine strujanja fluida                     | m <sup>2</sup> /s              |
| $\phi^{(m)}$     | $m$ -ti red potencijala brzine strujanja               | m <sup>2</sup> /s              |
| $\psi$           | površinski potencijal brzine strujanja                 | m <sup>2</sup> /s              |
| $\rho$           | gustoća  | kg/m <sup>3</sup>              |
| $a$              | amplituda vala   | m                              |
| $a_n$            | amplituda $n$ -tog Fourierovog harmonika               |                                |
| $a_n, c_n$       | amplituda $n$ -tog Fourierovog harmonika               |                                |
| $C(t)$           | konstanta Bernoullijeve jednadžbe                      | m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> |
| $c_k(t)$         | Fourierov koeficijent $k$ -tog harmonika               | m <sup>2</sup> /s              |
| $c_k^\eta$       | Fourierov koeficijent funkcije $\eta(x_n, t)$          | m                              |
| $c_k^\psi$       | Fourierov koeficijent funkcije $\psi(x_n, t)$          | m <sup>2</sup> /s              |
| $d$              | dubina fluida  | m                              |
| $E$              | valna energija svedena na jedinicu površine            | J/m <sup>2</sup>               |

|                |  |                                |
|----------------|--|--------------------------------|
| $F$            | nelinearni dio kinematičkog rubnog uvjeta            | m/s                            |
| $G$            | nelinearni dio dinamičkog rubnog uvjeta              | m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> |
| $g$            | gravitacijska konstanta                              | m/s <sup>2</sup>               |
| $G(\omega)$    | općenita funkcija u frekvencijskoj domeni            |                                |
| $g(t)$         | općenita funkcija u vremenskoj domeni                |                                |
| $H_i$          | visina valne komponente                              | m                              |
| $H_s$          | značajna valna visina                                | m                              |
| $K$            | valni broj   | rad/m                          |
| $k$            | redni broj točke diskretnog fizičkog prostora        |                                |
| $L$            | duljina domene                                       | m                              |
| $M$            | red nelinearnosti                                    |                                |
| $N$            | broj diskretizacijskih točaka                        |                                |
| $n$            | redni broj harmonika diskretnog Fourierovog prostora |                                |
| $n_a$          | relaksacijski eksponent                              |                                |
| $p$            | tlak   | Pa                             |
| $S_{\eta\eta}$ | valni spektar elevacije slobodne površine $\eta$     | m <sup>2</sup> s/rad           |
| $T$            | osnovni period                                       | s                              |
| $t$            | vremenska varijabla                                  | s                              |
| $T_a$          | relaksacijsko vrijeme                                | s                              |
| $T_f$          | vrijeme fokusiranja valova                           | s                              |
| $T_p$          | vršni valni period                                   | s                              |
| $T_s$          | simulirano vrijeme HOS proračuna                     | s                              |
| $v_i$          | vektor brzine čestice fluida                         | m/s <sup>2</sup>               |
| $v_x$          | brzina u smjeru osi $x$                              | m/s                            |
| $v_y$          | brzina u smjeru osi $y$                              | m/s                            |
| $v_z$          | brzina u smjeru osi $z$                              | m/s                            |
| $W$            | vertikalna brzina slobodne površine                  | m <sup>2</sup> /s              |

|           |   |     |
|-----------|---|-----|
| $W^{(m)}$ | $m$ -ti red vertikalne brzine slobodne površine | m/s |
| $x_i$     | radij vektor čestice fluida                     | m   |
| $x_n$     | diskretna prostorna koordinata                  | m   |

## Popis slika

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Prikaz koordinatnog sustava. . . . .  | 6  |
| 2  | Dijagram toka algoritma HOS metode. . . . .                                 | 17 |
| 3  | Razvoj viših harmonika. . . . .   | 24 |
| 4  | Konvergencija pojedinih harmonika. . . . .                                  | 25 |
| 5  | Domena CFD simulacije korištena u [1]. . . . .                              | 26 |
| 6  | Primjer spektra za strmine vala $H_i/\lambda_i = 1/715$ . . . . .           | 27 |
| 7  | Usporedba valnog spektra, slučaj $H_i/\lambda_i = 1/715, t = 37$ s. . . . . | 28 |
| 8  | Usporedba valnog spektra, slučaj $H_i/\lambda_i = 1/400, t = 37$ s. . . . . | 29 |
| 9  | Usporedba valnog spektra, slučaj $H_i/\lambda_i = 1/300, t = 37$ s. . . . . | 29 |
| 10 | Usporedba valnog spektra, slučaj $H_i/\lambda_i = 1/210, t = 84$ s. . . . . | 30 |
| 11 | Promjena valne energije u HOS simulaciji. . . . .                           | 31 |
| 12 | Dijagram početne spektralne gustoće valova. . . . .                         | 33 |
| 13 | Pojava ekstremnog vala u HOS domeni, vrijeme $t = 3120$ s. . . . .          | 34 |
| 14 | Domena CFD simulacije u početnom trenutku. . . . .                          | 36 |
| 15 | Polje brzine ekstremnog vala u početnom trenutku. . . . .                   | 36 |
| 16 | Prikaz prelaska ekstremnog vala preko prepreke. . . . .                     | 37 |



## Popis tablica

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | Usporedba HOS rezultata i nelinearog Stokesovog rješenja. . . . . | 24 |
| 2 | Parametri HOS simulacije. . . . .                                 | 28 |
| 3 | Parametri HOS simulacije ekstremnog vala. . . . .                 | 34 |

# 1 Uvod

U području brodogradnje i pomorske tehnike od velike važnosti su problemi vezani za dinamiku fluida, odnosno hidrodinamiku. Razmatrana tjela su često složene geometrije u isto tako složenom polju strujanja. Iz tog razloga sve veću pozornost dobivaju numeričke metode proračuna koje postaju sve dostupnije razvojem računala. U brodogradnji i morskoj tehnici postoji čitav niz raznovrsnih hidrodinamičkih problema. Pomorska tehnika je grana tehničkih znanosti koja se bavi pučinskim objektima. Najčešće se radi o industrijskim objektima, pretežno za eksploataciju podmorskih nalazišta nafte i plina. Problem otpora broda je osnovni brodograđevni problem prvenstveno zbog procjene potrebne snage porivnog stroja, te procjene i smanjenja potrošnje goriva. Osim problema otpora postoji i problem dinamičkih svojstava broda na valovitom moru, koja se skraćeno nazivaju pomorstvenost broda [2]. U morskoj tehnici od većeg značaja su problemi procjene valnih opterećenja. Naime, za razliku od brodova, pučinski objekti najčešće su nepomični. Prilikom oluja i uragana kapetani brodova biraju rute kojima izbjegavaju izlaganje nepovoljnim vremenskim uvjetima. Pučinski objekti nemaju tu mogućnost zbog čega su često izloženi opasnijim vremenskim uvjetima. Iscrpljenjem nalazišta nafte i plina u blizini obale, pučinski objekti postavljaju se sve dalje od obale gdje postoje bogata, neiscrpljena nalazišta. Vremenski uvjeti pogoršavaju se sa odmicanjem od obale, osobito visina vjetrovnih valova. Obzirom na katastrofalne posljedice u slučaju havarije pučinskih objekata, problem valnih opterećenja plijeni sve veću pažnju.

Osobito opasna je pojava ekstremnog vala. Ekstreman val naziv je za val koji je znatno veći od ostatka valova prisutnih na nekom stanju mora. Točnije, radi se o valu čija visina premašuje dvostruku značajnu valnu visinu stanja mora [3]. Značajna valna visina je statistička veličina koja odgovara prosječnoj visini trećine najviših valova na nekom stanju mora najčešće opisanim empirijskim spektrom valova [2]. Analiza rizika za pučinske objekte obuhvaća izračun opterećenja koja nastaju uslijed udara ekstremnog vala tokom oluje koja se može očekivati na tom području za vrijeme eksploatacije. Ekstreman val ima karakteristiku velike strmine zavjetrinske strane vala, koja uzrokuje visoka udarna opterećenja konstrukcije pučinskih objekata. Brodovi su također izloženi opterećenjima ekstremnih valova, te je u povjesti dokumentiran velik broj pogibelnih havarija uzrokovanih upravo fenomenom ekstremnog vala [3].

Kako bi se moglo pristupiti proračunu valnih opterećenja morskih objekata, potrebno je definirati teorijski model vala. Postoji niz valnih teorija koje matematički opisuju strujanje valova. Najpoznatiji i najjednostavniji model je razvio G. B. Airy u 19. stoljeću. Model Airyevog vala je rješenje lineariziranog problema površinskih valova [4]. Unatoč pojednostavljenju, ovaj model se i danas često koristi jer je primjenjiv na velik broj problema u brodogradnji i morskoj tehnici. Međutim, ekstremni val nije moguće opisati pomoću jednostavnog linearnog modela. Izrazito nelinearan karakter ekstremnog vala čini Airyevu valnu teoriju neadekvatnom. Zbog toga se pribjegava numeričkim rješenjima problema, pri čemu se iterativno dolazi do rješenja. Jedna od metoda nelinearne propagacije valova je spektralna metoda viših redova (eng. *Higher Order Spectrum method*, skraćeno HOS). Radi se o

pseudo-spektralnoj metodi rješavanja diferencijalnih jednadžbi koja je primjenjena na problem površinskih valova. Metoda je 1987. objavljena u dva članka čiji su autori nezavisno razvili teoriju, to su G. D. Dommermuh i D. K. P. Yue (1987) [5], te West et al. (1987) [6]. Od tada do danas mnogi su autori unaprijeđivali metodu kao što su G. D. Dommermuth (2000) [7], M. Tanaka (2001) [8] i Ducrozet et al. (2007) [9].

## 2 Cilj rada

Kako bi se mogli provoditi proračuni opterećenja plovnih objekata i pučinskih konstrukcija uslijed ekstremnog vala potreban je model ekstremnog vala. Obzirom da je ekstreman val izrazito nelinearan, nije ga moguće primjereno modelirati pomoću analitičkih približnih rješenja. Potrebno je dakle rješenje nelinearnog problema, koje predstavlja model valnog polja strujanja. Spektralna metoda viših redova nelinearna je metoda koja omogućuje brzo i efikasno numeričko rješavanje nelinearnog problema površinskih valova. Pomoću te metode moguće je opisati fenomen ekstremnog vala, čime se podrazumijeva definicija strujanja unutar vala te oblika profila slobodne površine. Treba napomenuti da je metoda općenita, odnosno omogućuje proračun proizvoljnog polja valnog površinskog strujanja.

Cilj ovog rada je računalni program koji sadrži spektralnu metodu viših redova, kako bi se pomoću njega mogli rješavati problemi nelinearnih površinskih valova. Osim same implementacije metode u računalni program, potrebno je dokazati valjanost procedure. U ovom radu je provjerena točnost rezultata implementirane procedure na dva testna proračuna.

Programska procedura pisana je u programskom jeziku C++, u okruženju softvera otvorenog koda OpenFOAM. OpenFOAM je softver u prvom redu namjenjen za računalnu dinamiku fluida (eng. *Computational Fluid Dynamics*, skraćeno CFD). OpenFOAM sadrži razne matematičke alate koji su na raspolaganju prilikom implementacije novog modela.

U Naval Hydro OpenFOAM paketu, koji se razvija na Fakultetu strojarstva i brodogradnje [10, 11], postoje alati za inicijalizaciju valova pomoću raznih teorija. Međutim, ne postoji alat za potpuno nelinearnu propagaciju spektra valova. Implementacija spektralne metode viših redova omogućila bi realnu, točnu i brzu inicijalizaciju ekstremnog vala u CFD simulaciji. Na ovaj način implementirana metoda ujedno i ima stvarnu aplikaciju u svjetski poznatom softveru otvorenog koda.

### 3 Matematički model

U ovom poglavlju su opisane matematičke osnove implementirane metode. Najprije su prikazane relacije koje općenito opisuju potencijalno strujanje, te su izvedene osnovne diferencijalne jednadžbe koje opisuju nelinearne rubne uvjete na slobodnoj površini. Matematički model površinskih valova pretpostavlja potencijalno strujanje fluida [4, 12]. Ova pretpostavka je opravdana zbog vrlo malog utjecaja viskoznosti i vrtložnosti na propagaciju valova. Zatim je iznesen matematički model spektralne metode viših redova. Prikazane su i teorije popratnih matematičkih alata koji se koriste u metodi. Među njima su Fourierova transformacija i numerička integracija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Zbog prikladnosti, svi matematički izrazi pisani su u indeksnoj notaciji.

#### 3.1 Potencijalno strujanje

Potencijalnim strujanjem se naziva strujanje čije se polje brzine može u potpunosti opisati funkcijom potencijala brzine [13]. Potencijal brzine je matematički pojam, te predstavlja skalarno polje čiji gradijent predstavlja polje brzine strujanja. Osnovna pretpostavka nužna za opisivanje strujanja potencijalnim strujanjem je svojstvo bezvrtložnosti, neviskoznosti i nestlačivosti.

Da bi se polje brzine strujanja moglo opisati potencijalom brzine strujanja potrebno je zadovoljiti dva uvjeta. Prvi uvjet je jednadžba kontinuiteta koja slijedi iz zakona očuvanja mase. Za nestlačivu tekućinu jednadžba kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

gdje je  $v_i = f(x_i, t)$  vektor brzine strujanja,  $x_i$  je radij vektor, dok  $t$  predstavlja varijablu vremena. Obzirom da se radi o potencijalnom strujanju, vektor brzine strujanja može se izraziti pomoću potencijala brzine strujanja:

$$v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (2)$$

gdje je  $\phi = f(x_i, t)$  potencijal brzine strujanja. Uvrštavanjem jednadžbe (2) u jednadžbu (1) dobiva se izraz:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = 0. \quad (3)$$

Jednadžba (3) naziva se Laplaceova jednadžba [13]. Laplaceova jednadžba mora biti zadovoljena u cijeloj promatranoj domeni, te osigurava solenoidalnost strujanja.

Drugi uvjet koji mora biti zadovoljen je uvjet bezvrtložnosti. Drugim riječima, polje brzine potencijalnog strujanja mora biti bezvrtložno:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = 0, \quad (4)$$

gdje je  $\epsilon_{ijk}$  permutacijski tenzor [14]. Svojtvo bezvrtložnosti može se lako dokazati koristeći svojstvo potencijala brzine. Primjerice za ravninu  $(x, y)$  vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Obzirom da vrijedi:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad (6)$$

može se pomoću jednadžbe (5) dobiti:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Izraz (7) pretstavlja rotaciju polja brzine u ravnini  $(x, y)$ . Isto se može pokazati i za ostale dvije ravnine [4].

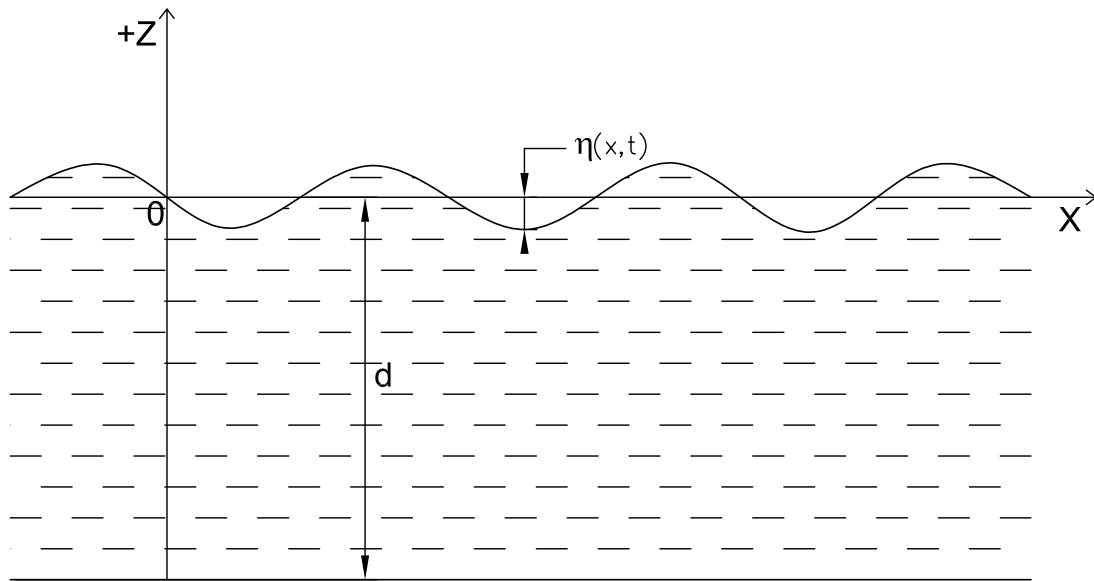
### 3.2 Formulacija problema površinskih valova

Matematičkim modelom valova na slobodnoj površini nastoji se opisati promjena slobodne površine u vremenu, te polje brzine u volumenu tekućine. Fizikalno, površinski valovi nastaju kada vanjski utjecaj poremeti položaj slobodne površine, nakon čega sile gravitacije i površinske napetosti nastoje vratiti slobodnu površinu u prvobitno stanje. Tako nastaje harmonijska pojava titranja slobodne površine [12]. Obzirom na veličinu valova koji su od važnosti u problemima brodogradnje i morske tehnike, utjecaj sila površinske napetosti se zanemaruju. Sile površinske napetosti su značajne za valove čiji je period manji od 0.25 s [15]. Za valove čiji je period veći od 0.25 s, dominantna sila je sila gravitacije. Vjetrovni valovi, koji su tema ovog rada, uobičajeno imaju period od 0.25 s do 30 s.

U ovom razmatranju koristi se Kartezijev pravokutni koordinatni sustav čija  $(x, y)$  ravnina definira horizontalnu plohu. Pozitivna strana osi  $z$  usmjerena je prema gore odnosno od morskog dna prema slobodnoj površini. Ishodište koordinatnog sustava postavljeno je na neporemećenu slobodnu površinu. Na slici 1 prikazan je koordinatni sustav.

Matematički model površinskih valova mora zadovoljiti četiri osnovna uvjeta [4]:

1. Laplaceova jednadžba (3),
2. Rubni uvjet na morskom dnu,



Slika 1: Prikaz koordinatnog sustava.

3. Dinamički rubni uvjet slobodne površine,
4. Kinematički rubni uvjet slobodne površine.

Laplaceova jednadžba predstavljena je u poglavlju 3.1. Ova jednadžba osigurava očuvanje mase te mora biti zadovoljena u cijelom volumenu tekućine.

Rubni uvjet na morskom dnu naziva se i rubnim uvjetom nepromočivosti dna. On propisuje da je brzina u smjeru normale na površinu morskog dna jednaka nuli. Ukoliko je dno horizontalno i ravno, njegova normala ima smjer osi  $z$ . Rubni uvjet na morskom dnu glasi:

$$v_z \Big|_{z=-d} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = 0, \quad (8)$$

gdje je  $d$  dubina, definirana kao vertikalna udaljenost od morskog dna do neporemećene slobodne površine.

Dinamički rubni uvjet slijedi iz pretpostavke da je tlak na slobodnoj površini posvuda jednak atmosferskom tlaku, te da je konstantan. Ovom pretpostavkom zanemaruje se utjecaj površinske napetosti. Na samoj slobodnoj površini postavlja se Bernoullijeva jednadžba:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (v_i v_i) + gz + \frac{p}{\rho} = C(t), \quad (9)$$

gdje je  $g$  gravitacijska konstanta,  $p$  je atmosferski tlak,  $\rho$  je gustoća tekućine, i  $C(t)$  je konstanta Bernoullijeve jednadžbe. Obzirom da se polje brzine računa kao gradijent potencijala  $\phi$ , konstantne vrijednosti u jednadžbi (9) ne utječu na rezultat, te će biti izostavljeni iz daljnjeg razmatranja. Ako se u jednadžbi (9) brzina strujanja izrazi preko potencijala brzine strujanja prema izrazu (2) dobiva se konačni oblik dinamičkog rubnog uvjeta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + gz = 0. \quad (10)$$

Kinematički rubni uvjet propisuje da je vertikalna brzina gibanja čestice koja se nalazi na slobodnoj površini jednaka brzini promjene same slobodne površine. Ovaj uvjet slijedi iz činjenice da ne postoji protok kroz slobodnu površinu, što se može zapisati kao:

$$v_z = \frac{D\eta}{Dt}, \quad (11)$$

gdje je  $\eta = \eta(x, y, t)$  funkcija elevacije slobodne površine.  $D\eta/Dt$  je materijalna derivacija [13]. Materijalna derivacija pretstavlja promjenu veličine polja u Eulerovom referentnom sustavu. Eulerov referentni sustav je sustav koji se ne giba sa česticom, već se čestice tekućine gibaju kroz koordinatni sustav. Kako bi pratili promjenu veličine polja u točki koja se ne giba sa česticama tekućine, moramo osim promjene u vremenu u obzir uzeti i promjenu u prostoru:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}. \quad (12)$$

Obzirom da je  $v_z = dz/dt$  jednadžba (11) prelazi u:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \eta}{\partial z}. \quad (13)$$

Obzirom da vrijedi  $\eta \neq f(z)$ , zadnji član u jednadžbi (13) jednak je nuli. Konačni oblik kinematičkog rubnog uvjeta dobije se primjenom izraza (2):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (14)$$

što se može zapisati i kao:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right). \quad (15)$$

Obzirom da su jednadžbe (10) i (15) rubni uvjeti na slobodnoj površini, potencijal brzine za koji se one rješavaju treba biti evaluiran za  $z = \eta(x, y, t)$ . Potencijal na slobodnoj površini bit će  $\psi(x, y, t) = \phi(x, y, \eta(x, y, t), t)$ . Ako se u jednadžbe (10) i (15) uvrsti potencijal na slobodnoj površini  $\psi$ , one poprimaju sljedeći oblik:



$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) = 0. \quad (17)$$

Jednadžbe (16) i (17) su nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe koje definiraju rubne uvjete na slobodnoj površini. Njihovo rješenje su funkcije potencijala brzine  $\phi(x, y, z, t)$  i elevacije slobodne površine  $\eta(x, y, t)$ . Rješavanje tih dviju jednadžbi je glavni cilj HOS metode. Pomoću tih jednadžbi rješenje napreduje u vremenu. U ovom radu implementirana je metoda za jednu dimenziju Fourierovog prostora, tj. za dvije dimenzije fizičkog prostora. Drugim rječima pretpostavlja se da su sve veličine konstantne u smjeru osi  $y$ . Konačni oblik jednadžbi dinamičkog i kinematičkog rubnog uvjeta tada glasi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} W^2 \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - W \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

gdje je  $W$  vertikalna brzina slobodne površine:

$$W = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta}. \quad (20)$$

### 3.3 Fourierova transformacija

Veličine koje variraju periodično mogu se predstaviti kao superpozicija harmonijskih komponenti [16]. Provođenjem frekvencijske analize signala neke veličine u vremenu dobivaju se amplitude harmonijskih komponenti. Superpozicijom harmonijskih komponenti može se rekonstruirati prvotni signal periodične veličine. Glavna prednost harmonijske analize je potreba za znatno manje informacija za opisivanje neke pojave. Umjesto cijelog vremenskog signala veličine, potrebno je znati samo amplitude pojedinih harmonijskih komponenti. Broj harmonijskih komponenti je proizvoljan, te teoretski može biti beskonačan.

Fourierova transformacija je operacija kojom se veličina opisana u vremenskoj domeni transformira u veličinu opisanu u frekvencijskoj domeni. Općenito, funkcija  $g(t)$  postaje  $G(\omega)$ , gdje je  $t$  vrijeme u sekundama, dok je  $\omega$  kružna frekvencija izražena u radijanima po sekundi.

Za razumijevanje Fourierove transformacije potrebno je razumjeti pojam Fourierovog niza. Fourierov niz je suma harmonijskih funkcija čije su frekvencije cjelobrojni višekratnici osnovne frekvencije. Osnovna frekvencija odgovara osnovnom periodu ponavljanja pojave  $T$ ,

odnosno ona iznosi  $\omega = 2\pi/T$ . Jedan od oblika zapisivanja Fourierovog niza jest:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(n\omega t + \epsilon_n), \quad (21)$$

gdje  $a_0$  predstavlja srednju vrijednost,  $n$  je indeks harmonijske komponente Fourierovog niza, dok su  $a_n$  amplitude pojedinih harmonika.  $\epsilon_n$  je fazni pomak  $n$ -tog harmonika. Za numeričku implementaciju puno je pogodniji eksponencijalni zapis Fourierovog reda pomoću kompleksnih amplituda. U eksponencijalnom obliku izraz (21) glasi:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad (22)$$

gdje su  $c_n$  imaginarne amplitude harmonika. Kod ovakvog oblika zapisivanja, informacija o faznom pomaku sadržana je u kompleksnoj amplitudi.

Fourierova transformacija je postupak računanja amplituda i faznih pomaka pojedinih harmonika iz funkcije koja je definirana u vremenu. Fourierov niz je suma harmonika čije su frekvencije višekratnici osnovne frekvencije. Fourierova transformacija je integral harmonika u beskonačnom rasponu frekvencija. Drugim riječima, Fourierova transformacija je poopćenje Fourierovog niza [16]. Izraz za Fourierovu transformaciju koji odgovara jednadžbi (21) glasi:

$$g(t) = \int_0^{\infty} G(\omega) \sin(\omega t + \epsilon(\omega)) d\omega, \quad (23)$$

gdje je  $G(\omega)$  Fourierov par funkcije  $g(t)$ . Glavni problem Fourierove transformacije je pronalazak funkcije  $G(\omega)$ . Izraz koji odgovara jednadžbi (22) glasi:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (24)$$

Postupak inverzne Fourierove transformacije je postupak računanja funkcije u vremen-skoj domeni  $g(t)$  iz njenog Fourierovog para u frekvencijskoj domeni  $G(\omega)$ . U ovom radu se koristi konvencija predznaka pri kojoj eksponent ima pozitivan predznak za Fourierovu transformaciju (25), te negativan za inverznu Fourierovu transformaciju (24) [17]. Fourierova transformacija tada glasi:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\omega t} dt. \quad (25)$$

Kada nije poznata kontinuirana funkcija u vremenu  $g(t)$ , već samo diskretne vrijednosti funkcije na jednakim vremenskim razmacima, tada se koristi diskretna Fourierova transformacija [16]. U numeričkim proračunima se redovito koristi diskretna Fourierova transformacija obzirom na diskretnu narav računala.

U diskretnoj Fourierovoj transformaciji vrijeme  $t$  i kružna frekvencija  $\omega$  poprimaju diskretne vrijednosti:

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{T}, \quad n = -N/2, \dots, N/2, \quad (26)$$

$$t_k = k \frac{T}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (27)$$

gdje su  $n$  i  $k$  redni brojevi točaka diskretne mreže u frekvencijskoj odnosno u vremenskoj domeni.  $N$  je broj točaka na mreži. Integrali u izrazima (24) i (25) prelaze u sume:

$$g(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} G(\omega_n) e^{-i2\pi nk/N}, \quad (28)$$

$$G(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N/2-1} g(t_k) e^{i2\pi nk/N}. \quad (29)$$

U izrazu (28) raspon sume je do  $N/2 - 1$  kako bi broj sumanata odgovarao broju točaka na mreži. Time se ispustio član  $N/2$ , međutim zbog simetrije on je jednak članu  $-N/2$  [17].

U HOS metodi Fourierova transformacija provodi se kako bi se signal u prostoru prikazao u frekvencijskoj domeni. Dakle umjesto varijable vremena  $t$ , bit će varijabla prostora  $x$ . Kružna frekvencija  $\omega$  prelazi u valni broj  $K$ :

$$K_n = n \frac{2\pi}{L}, \quad n = -N/2, \dots, N/2, \quad (30)$$

$$x_k = k \frac{L}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (31)$$

gdje je  $L$  duljina domene koja se obuhvaća Fourierovom transformacijom, te odgovara osnovnom periodu  $T$ .

Najpoznatija i najšire korištena metoda za računalnu provedbu diskretne Fourierove transformacije je tzv. brza Fourierova transformacija (eng. *Fast Fourier Transform*, skraćeno FFT) [17]. FFT smanjuje broj operacija potrebnih za diskretnu Fourierovu transformaciju sa  $O(N^2)$  na  $O(N \log_2 N)$ . Više detalja o FFT algoritmu može se naći u [17]. U ovom radu se također koristi FFT algoritam za provedbu diskretne Fourierove transformacije.

### 3.4 Spektralna metoda viših redova za nelinearnu propagaciju valova (HOS)

Izravno numeričko rješenje jednadžbe (18) i (19) zahtjeva iterativni postupak zbog nelinearnog karaktera jednadžbi. Za svaki vremenski korak u kojemu se nastoji dobiti rješenje za  $\phi$  i  $\eta$  potrebno je više puta izračunati obje jednadžbe kako bi rješenje konvergiralo do prihvatljivo malog odstupanja u odnosu na prethodnu iteraciju. Ovakav pristup je moguć, međutim iziskuje velik broj računskih operacija. HOS je metoda u kojoj se jednadžbe ne rješavaju iterativno, već se rješenje pretpostavlja kao Fourierov niz te se računa do konačnog reda nelinearnosti. Prvi koji su objavili HOS metodu 1987. godine bili su Dommermuth & Yue [5] i West et al. [6]. Navedeni autori došli su nezavisno do gotovo identične metode za nelinearnu propagaciju valova. Od tada su objavljeni mnogi radovi u kojima je metoda nadopunjavana i modificirana, primjerice Tanaka [8] i Ducrozet et al. [9].

HOS je pseudo-spektralna metoda rješavanja nelinearnih diferencijalnih jednadžbi (16) i (17). Pseudo-spektralne metode koriste se za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi čije je rješenje periodično [18]. Glavna karakteristika pseudo-spektralne metode je da se prostorne derivacije računaju u Fourierovom (spektralnom) prostoru, gdje se mogu izračunati vrlo jednostavno i točno. Međutim vremenska integracija jednadžbe se provodi u fizičkom (vremenskom) prostoru.

Za duboku vodu može se pretpostaviti rješenje potencijala u obliku Fourierovog niza u obliku:

$$\phi(x, z, t) = \sum_k c_k(t) e^{K_k z} e^{iK_k x}, \quad (32)$$

gdje su  $c_k(t)$  Fourierovi koeficijenti, te je  $K_k$  valni broj odgovarajućeg harmonika. Ovdje treba uočiti da indeks  $k$  Fourierovih koeficijenata  $c_k(t)$  određuje valni broj kojemu koeficijent odgovara. Argument  $t$  je naznaka da se koeficijenti mijenjaju u vremenu, za razliku od izraza (28). Valni broj se određuje kao:

$$K_k = \frac{2\pi k}{L}. \quad (33)$$

U jednadžbama (18) i (19) pojavljuju se prostorne derivacije potencijala brzine  $\psi$ . Određivanje horizontalne derivacije potencijala pomoću izraza (32) vrlo je jednostavno u Fourierovom prostoru. Međutim, određivanje vertikalne derivacije potencijala brzine na slobodnoj površini zahtjeva poznavanje funkcije potencijala  $\phi$  u cijelom volumenu. Funkcija potencijala zatim bi se trebala derivirati obzirom na varijablu  $z$ , te evaluirati na točnoj slobodnoj površini  $\eta$ . Dakle, radi se o Dirichletovom problemu gdje je potrebno pronaći funkciju potencijala brzine  $\phi$  u domeni čija granica ima kompliciran oblik  $\eta(x, t)$ . Kako bi se pojednostavnio ovaj problem, funkcija potencijala brzine razvija se u Taylorov red oko  $z_0 = 0$ , uzimajući u obzir da je varijabla  $z$  zamijenjena funkcijom slobodne površine  $z = \eta(x, t)$  [8]. Na ovaj način se Dirichletov problem sveo na granicu jednostavnog oblika za koju vrijedi  $z = 0$ :

$$\phi(x, \eta, t) = \psi(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\eta^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \phi(x, 0, t). \quad (34)$$

Vertikalna brzina se tada može izraziti kao:

$$W(x, t) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\eta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\eta^i}{i!} \frac{\partial^{i+1}}{\partial z^{i+1}} \phi(x, 0, t). \quad (35)$$

Izraz (35) linearizira problem. Kako bi dobili rješenje za više redove nelinearnosti, pretpostavljamo razvoj potencijala brzine  $\phi$  u perturbacijski red obzirom na mjeru nelinearnosti. Pogodna mjera nelinearnosti za površinske valove je nagib vala  $\epsilon = Ka$  [12] gdje je  $K$  valni broj dok je  $a$  amplituda vala. Razvoj potencijala u perturbacijski red glasi:

$$\phi(x, z, t) = \phi_1 + \epsilon \phi_2 + \epsilon^2 \phi_3 + \dots = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}, \quad (36)$$

gdje je  $M$  red nelinearnosti do kojega se vrši proračun. Redovi nelinearnosti veći od  $M$  bit će zanemareni, dok je red nelinearnosti proizvoljan. Razvojem svakog reda potencijala brzine strujanja  $\phi$  u Taylorov red prema izrazu (34) dobije se:

$$\psi(x, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=0}^{M-m} \frac{\eta^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \phi^{(m)}(x, 0, t). \quad (37)$$

Nepoznanice u jednadžbi (37) su pojedini redovi potencijala na slobodnoj površini  $\phi^{(m)}$ . Oni se određuju tako da se u jednadžbi (37) izjednačavaju članovi istog reda nelinearnosti obzirom na  $\epsilon$ , kao što je pokazano u sljedećem izrazu:

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= \psi(x, t), \\ \phi^{(2)} &= -\eta \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(1)}, \\ \phi^{(3)} &= -\eta \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(2)} - \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi^{(1)}, \\ \phi^{(4)} &= -\eta \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(3)} - \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi^{(2)} - \frac{1}{3!} \eta^3 \frac{\partial^3}{\partial z^3} \phi^{(1)}, \\ &\vdots \\ \phi^{(m)} &= -\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\eta^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \phi^{(m-i)}; \quad m = 2, 3, \dots, M. \end{aligned} \quad (38)$$

Redovi se određuju obzirom na red nelinearnosti  $\eta$  i  $\phi^{(m)}$ . Treba primjetiti da se unutarnja suma izraza (37) sumira do reda  $M-m$ , nakon čega se članovi Taylorovog reda (35) odbacuju. Taylorovi članovi iznad reda  $M-m$  izazvali bi gubitak konzistentnosti obzirom na odabrani red nelinearnosti  $M$ . Kada su poznati redovi potencijala brzine  $\phi^{(m)}$  može se izračunati

vertikalna brzina slobodne površine  $W$ . Prema West et al. [6] vertikalna brzina se također razvija u perturbacijski red, te se pojedini redovi računaju koristeći redove potencijala  $\phi^{(m)}$ :

$$\begin{aligned}
W^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(1)}, \\
W^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(2)} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi^{(1)}, \\
W^{(3)} &= \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(3)} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi^{(2)} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^3}{\partial z^3} \phi^{(1)}, \\
W^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(4)} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi^{(3)} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^3}{\partial z^3} \phi^{(2)} + \frac{1}{3!} \eta^3 \frac{\partial^4}{\partial z^4} \phi^{(1)}, \\
&\vdots \\
W^{(m)} &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\eta^i}{i!} \frac{\partial^{(i+1)}}{\partial z^{(i+1)}} \phi^{(m-i)}; \quad m = 1, 2, \dots, M.
\end{aligned} \tag{39}$$

Konačno se vertikalna brzina dobiva sumiranjem pojedinih redova vertikalne brzine:

$$W(x, t) = \sum_{m=1}^M W^{(m)}. \tag{40}$$

Mogućnost odabira reda nelinearnosti  $M$  omogućuje fleksibilnost proračuna ovisno o potrebi. Prednost HOS metode je to što nije potrebno više iteracija po vremenskom koraku, te mogućnost korištenja FFT-a što značajno ubrzava provođenje diskretne Fourierove transformacije i računanje prostornih derivativa.

West et al. [6] predložili su pristup rješavanja jednadžbi (18) i (19) na način da se održi konzistencija redova nelinearnosti. Naime, uslijed množenja pojedinih članova dolazi do povećanja reda nelinearnosti na način da svi članovi u konačnici nisu istog reda nelinearnosti  $\epsilon$ . Kako bi se održala konzistentnost reda nelinearnosti, suma vertikalne brzine u izrazu (40) provodi se do nižeg stupnja nelinearnosti. Red nelinearnosti do kojeg će se suma provesti ovisi o redu nelinearnosti člana s kojim se vertikalna brzina množi. Kvadrat vertikalne brzine se također tretira na sličan način, te se može zapisati kao:

$$W^2(x, t) = \sum_{m=1}^M W^{(m)} W^{(M-m)}, \tag{41}$$

U ovom radu je implementirana konzistencija obzirom na red nelinearnosti, međutim implementiran je i pristup koji su predložili Dommermuth & Yue (1987) [5], u kojemu se sume ne skraćuju. Razlika u tretiranju članova viših redova ujedno je i jedina razlika između pristupa predloženog u [6] i [5]. Mijenjanjem ulaznih parametara proračuna moguće je izabrati između dva pristupa.

## 4 Numerički model

Program OpenFOAM je korišten kao podloga za implementaciju HOS metode. OpenFOAM sadrži algoritme koji su potrebni za provedbu HOS metode, kao što je primjerice algoritam za brzu Fourierovu transformaciju (FFT), te algoritmi za numeričku integraciju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. FFT i algoritmi za numeričku integraciju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u OpenFOAM su implementirani prema [17]. Tema ovog poglavlja je prvenstveno numerička procedura metode te inicijalizacija HOS simulacije. Ukratko je predstavljen i problem alias-efekta te procedura numeričke integracije običnih diferencijalnih jednadžbi.

### 4.1 Numerička procedura

Procedura započinje sa diskretnim potencijalom brzine na površini  $\psi$  i funkcijom elevacije slobodne površine  $\eta$  koji su poznati iz prethodnog vremenskog koraka ili iz početnih uvjeta. Diskretne vrijednosti postavljene su na jednako razmaknute točke u fizičkoj domeni  $n = 1, 2, \dots, N$ . Točke su ekvidistantno postavljene uzduž domene duljine  $L$ . Razmak između točaka je tada  $\Delta x = L/N$ . Kada su  $\psi$  i  $\eta$  na raspolaganju, može se pristupiti sekvencijalnom računanju redova potencijala brzine prema izrazu (38). Pri tome se prostorne derivacije računaju u Fourierovom prostoru. Svaki se red potencijala  $\phi^{(m)}$  brzom Fourierovom transformacijom preslikava u Fourierov prostor. Fourierova transformacija pojedinog reda potencijala  $\phi^{(m)}$  potrebna je kako bi se odredili članovi za izračun sljedećeg reda potencijala  $\phi^{(m+1)}$ . Članovi svakog reda potencijala sadrže vertikalne derivacije prethodnih redova potencijala. Nakon što se proračunaju prostorne derivacije u Fourierovom prostoru, one se inverznom Fourierovom transformacijom preslikavaju u fizikalni prostor te se množe s odgovarajućom potencijom funkcije  $\eta$ . Diskretna Fourierova transformacija je označena sa  $\mathcal{F}(f)$ , dok je inverzna Fourierova transformacija označena sa  $\mathcal{F}^{-1}(f)$ . Koristeći jednadžbu (16), vertikalna derivacija potencijala brzine se općenito može zapisati kao:

$$\frac{\partial^j \phi}{\partial z^j} = \frac{\partial^j}{\partial z^j} \left( \sum_k c_k(t) e^{K_k z} e^{iK_k x} \right) = \sum_k c_k(t) K_k^j e^{K_k z} e^{iK_k x}. \quad (42)$$

Sa stanovišta numeričke implementacije, jednadžba (38) može se zapisati kao:

$$\begin{aligned}
\phi^{(1)} &= \psi(x_n, t), \\
\phi^{(2)} &= -\eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^{(1)}(t) K_k e^{iK_k x_n} \right\}, \\
\phi^{(3)} &= -\eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^{(2)}(t) K_k e^{iK_k x_n} \right\} - \frac{1}{2} \eta^2 \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^{(1)}(t) K_k^2 e^{iK_k x_n} \right\}, \\
&\vdots \\
\phi^{(m)} &= -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\eta^j}{j!} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^{(m-j)}(t) K_k^j e^{iK_k x_n} \right\}; \quad m = 2, 3, \dots, M \quad , \quad (43)
\end{aligned}$$

gdje je  $c_k^{(m-j)}(t)$  Fourierov koeficijent reda potencijala  $m - j$ ,  $k$ -te harmonijske komponente Fourierove sume.  $c_k^{(m-j)}(t)$  dobije se provedbom FFT-a na  $(m - j)$ -tom redu potencijala brzine, čije su vrijednosti poznate na točkama prostorne mreže:

$$c_k^{(m-j)}(t) = \mathcal{F} \{ \phi^{(m-j)}(x_n, t) \}. \quad (44)$$

Redovi potencijala brzine računaju se kako bi se mogao nastaviti proračun redova vertikalne brzine slobodne površine  $W$  prema izrazu (39). Jednadžba (39) može se zapisati kao:

$$\begin{aligned}
W^{(1)} &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^{(1)}(t) K_k e^{iK_k x_n} \right\}, \\
W^{(2)} &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^{(2)}(t) K_k e^{iK_k x_n} \right\} + \eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^{(1)}(t) K_k^2 e^{iK_k x_n} \right\}, \\
W^{(3)} &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^{(3)}(t) K_k e^{iK_k x_n} \right\} + \eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^{(2)}(t) K_k^2 e^{iK_k x_n} \right\}, \\
&\quad + \frac{1}{2} \eta^2 \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^{(1)}(t) K_k^3 e^{iK_k x_n} \right\}, \\
&\vdots \\
W^{(m)} &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\eta^j}{j!} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^{(m-j)}(t) K_k^{(j+1)} e^{iK_k x_n} \right\}; \quad m = 1, 2, \dots, M \quad , \quad (45)
\end{aligned}$$

Inverzne diskretne Fourierove transformacije koje se pojavljuju u izrazu (45) već su provedene u izrazu (43), osim za zadnji red vertikalne brzine  $W^{(M)}$ . Za zadnji red vertikalne brzine potrebno je zasebno provesti Fourierove transformacije. Prilikom provedbe sekvencijalnog postupka prema izrazu (43), pojedine inverzne Fourierove transformacije koje predstavljaju vertikalne derivacije potencijala brzine se spremaju za potrebe proračuna redova vertikalne brzine  $W$ .



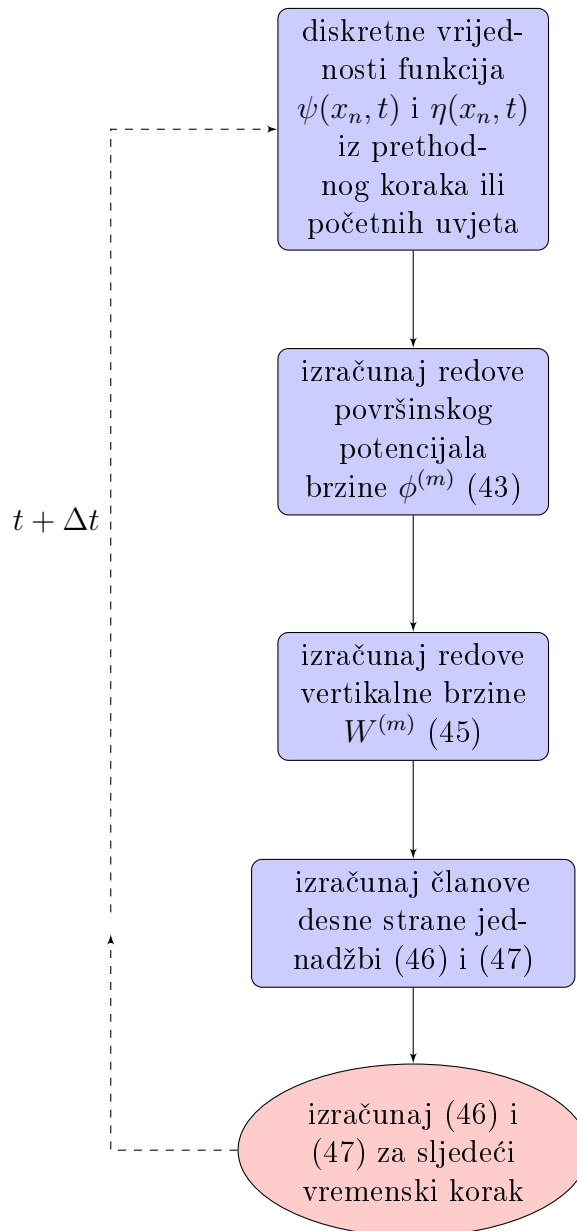
Kada su poznati redovi vertikalne brzine  $W$  može se pristupiti izračunu pojedinih članova diferencijalnih jednadžbi (18) i (19). Prostorne derivacije funkcije slobodne površine  $\eta$  i površinskog potencijala brzine  $\psi$  računaju se u Fourierovom prostoru. Do ove točke proračuna nije bilo potrebno provesti Fourierovu transformaciju funkcije elevacije slobodne površine  $\eta$  zbog čega se ovdje treba provesti. Fourierova transformacija površinskog potencijala slobodne površine  $\psi$  provedena je prije provođenja izraza (43) za potrebe proračuna drugog reda potencijala brzine  $\phi^{(2)}$ . Nakon što su prostorni derivativi izračunati, inverznom Fourierovom transformacijom preslikavaju se u fizički prostor te se množe s odgovarajućim članovima. Dinamički i kinematički rubni uvjet, jednadžbe (18) i (19), mogu se zapisati kao:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x_n, t)}{\partial t} &= -g\eta(x_n, t) - \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^\psi(t) iK_k e^{iK_k x_n} \right\} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{m=1}^M W^{(m)} W^{(M-m)} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{m=1}^{M-2} W^{(m)} W^{(M-m)} \right\} \left( \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^\eta(t) iK_k e^{iK_k x_n} \right\} \right)^2, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(x_n, t)}{\partial t} &= \sum_{m=1}^M W^{(m)} + \left( \sum_{m=1}^{M-2} W^{(m)} \right) \left( \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^\eta(t) iK_k e^{iK_k x_n} \right\} \right)^2 \\ &- \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^\psi(t) iK_k e^{iK_k x_n} \right\} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k c_k^\eta(t) iK_k e^{iK_k x_n} \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

gdje su  $c_k^\psi(t)$  i  $c_k^\eta(t)$  Fourierovi koeficijenti dobiveni Fourierovom transformacijom diskretnih vrijednosti  $\psi(x_n, t)$  i  $\eta(x_n, t)$ . Slika 2 prikazuje dijagram toka implementiranog koda HOS metode za jedan vremenski korak.

Zadnji korak algoritma prikazanog na slici 2 provodi se pomoću jedne od metoda numeričke integracije običnih diferencijalnih jednadžbi.



Slika 2: Dijagram toka algoritma HOS metode.

## 4.2 Inicijalizacija HOS simulacije

Pokretanje proračuna nelinearne propagacije valova pomoću HOS metode zahtjeva početne uvjete traženih funkcija potencijala brzine  $\phi$  i elevacije slobodne površine  $\eta$ . Potrebno je definirati vrijednosti tih funkcija u početnom trenutku na diskretnom broju točaka  $N$ . Drugim riječima, treba poznavati  $\phi(x_n, t = 0)$  i  $\eta(x_n, t = 0)$ , gdje su  $x_n = x_1, x_2, \dots, x_N$  diskretizacijske točke fizičke domene. Vrijednosti  $\phi(x_n, t = 0)$  i  $\eta(x_n, t = 0)$  moraju biti takve da također zadovoljavaju rubne uvjete (18) i (19), zbog čega ovaj problem nije trivijalan. Najjednostavnije rješenje koje se može postaviti kao početni uvjet je linearno rješenje rubnih uvjeta slobodne površine. Obzirom da se radi o rješenju lineariziranog problema rubnih uvjeta slobodne površine [12], u općem slučaju takvo rješenje ne zadovoljava jednadžbe (18) i (19). Prema Dommermuthu [7], linearno rješenje kao početni uvjet uzrokuje nestabilnosti

proračuna, koje su veće što se linearno rješenje više razlikuje od nelinearnog. Nestabilnosti uzrokuju visokofrekventni parazitski harmonici koji se u tom slučaju razvijaju prije prirodnog razvoja nelinearnih harmonika [7]. Kako bi izbjegao taj problem, Dommermuth [7] je predložio vremensku relaksaciju jednadžbi (18) i (19), koja omogućuje stabilnu konvergenciju do nelinearnog rješenja. Zahvaljujući vremenskoj relaksaciji moguće je koristiti linearno rješenje kao početni uvjet. Vremenskom relaksacijom utjecaj nelinearnih članova jednadžbi (18) i (19) na ukupno rješenje postepeno se povećava na početku proračuna. Na taj način nelinearni harmonici rastu postepeno i stabilno. Relaksacija se provodi na način da se svi nelinearni članovi u rubnim uvjetima na slobodnoj površini (18) i (19) množe sa eksponencijalnom funkcijom vremena:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + g\eta = G \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T_a}\right)^{n_a}}\right), \quad (48)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - W^{(1)} = F \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T_a}\right)^n}\right), \quad (49)$$

gdje je  $T_a$  relaksacijsko vrijeme, dok je  $n_a$  relaksacijski eksponent. Prema preporuci Dommermutha [7], relaksacijsko vrijeme  $T_a$  treba biti barem jednako periodu vala najvećeg perioda u simulaciji, kako bi se izbjegle nestabilnosti viših frekvencija tj. valnih brojeva.  $G$  i  $F$  su nelinearni dijelovi jednadžbi (18) i (19):

$$G = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^M W^{(m)} W^{(M-m)}\right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{M-2} W^{(m)} W^{(M-m)}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2, \quad (50)$$

$$F = -W^{(1)} - \sum_{m=1}^M W^{(m)} + \left(\sum_{m=1}^{M-2} W^{(m)}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (51)$$

Postoji cijeli niz analitičkih rješenja rubnih uvjeta na slobodnoj površini za monokromatske valove [12]. Najjednostavnija rješenja su linearna, međutim postoje i slabo nelinearna rješenja kao što su Stokesovi valovi. Rješenja koja uključuju više valnih komponenti redovito su linearna, obzirom da je potrebna superpozicija harmonika. Najčešće se radi o tzv. valnim energetske spektrima [2], koji se skraćeno nazivaju valnim spektrima. Valni spektar je funkcija koja opisuje gustoću raspodjele energije vala u ovisnosti o frekvenciju vala [4]. Općenita diskretizacija valnog spektra glasi:

$$S_{\eta\eta}(\omega_n) \cdot \Delta\omega = \sum_{\omega_n}^{\omega_n+\Delta\omega} \frac{1}{2} \eta_{a_n}^2(\omega), \quad (52)$$

gdje je  $S_{\eta\eta}(\omega_n)$  iznos valnog spektra za frekvenciju  $\omega_n$ , koja predstavlja diskretnu vrijednost frekvencije za koju se određuje valni spektar.  $\Delta\omega$  je frekvencijski korak koji ovisi o broju frekvencija  $\omega_n$  i frekvencijskom rasponu spektra.  $\eta_{a_n}$  je amplituda harmonika. Pomoću jednadžbe (52) moguće je, uz poznatu funkciju spektra  $S_{\eta\eta}(\omega_n)$  izračunati amplitude pojedinih harmonika za proizvoljnu finoću diskretizacije frekvencijskog prostora. Fazni pomak pojedinih harmonika računa se uz pretpostavku jednolike distribucije vjerojatnosti faznog pomaka [4]. Elevacija slobodne površine računa se kao superpozicija pojedinih harmonika:

$$\eta(x, t) = \sum_{i=1}^n \eta_{ai} \cos(k_i x - \omega_i t + \epsilon_i), \quad (53)$$

gdje je  $k_i$  valni broj  $i$ -tog harmonika,  $\omega_i$  je frekvencija te je  $\epsilon_i$  fazni pomak. Postoji cijeli niz analitičkih funkcija koje opisuju spektre valova [4]. Takve funkcije dobivene su mjerenjima signala elevacije slobodne površine u naravi. Pomoću funkcije spektra valova može se dobiti linearno rješenje koje odgovara realnom stanju valova na moru, te se takvo rješenje može koristiti kao početni uvjet HOS simulacije.

### 4.3 Uklanjanje alias–efekta

Alias–efekt je poznata pojava koja se javlja prilikom diskretne Fourierove transformacije [16]. Uslijed diskretizacije dolazi do ograničenja minimalne i maksimalne frekvencije harmonika koje su raspoznatljive na diskretnoj mreži. Analitički izraz za Fourierovu transformaciju (25) definiran je kontinuirano za cijelu domenu transformacije. Obzirom da se uzorkovanjem postiže konačna rezolucija točaka u fizikalnoj domeni, postoji granična frekvencija iznad koje nije moguće postići razlučivost. Granična frekvencija naziva se Nyquistova frekvencija [17] te je određena izrazom:

$$\omega_c = \frac{\pi}{\Delta}, \quad (54)$$

gdje je  $\Delta$  razmak između uzoraka. Svaka periodična pojava koja ima frekvenciju višu od kritične uzrokovati će alias–efekt. Ukoliko postoje pojave koje imaju frekvenciju višu od kritične, one će mijenjati vrijednosti nižih frekvencija čiji su višekratnik:

$$G(\omega_n) = \hat{G}(\omega_n) + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \hat{G}(\omega_n + Nm), \quad (55)$$

gdje je  $G(\omega_n)$  definiran u izrazu (28), dok je  $\hat{G}(\omega_n)$  rezultat beskonačne sume Fourierovog niza:

$$\hat{G}(\omega_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(t_k) e^{i2\pi nk/N}. \quad (56)$$

U HOS metodi pojavljuju se umnošci funkcija u nelinearnim rubnim uvjetima (18) i (19), te u sekvencijalnom proračunu redova potencijala brzine (38) i vertikalne brzine slobodne površine (39). Kada se množe trigonometrijske funkcije jednake frekvencije, nastaju harmonici čija je frekvencija dvostruko veća od njihove. Prema izrazu (55), harmonici koji su višekratnici frekvencije harmonika koji su unutar područja koje je razlučeno diskretnom mrežom u frekvencijskoj prostoru, uzrokovat će alias–efekt na harmonicima nižih frekvencija čiji su višekratnik. Dakle, množenjem dvaju harmonijskih funkcija neizbježno dolazi do alias–efekta ukoliko se provodi Fourierova transformacija umnoška. Ista pojava se javlja kod potenciranja harmonijskih funkcija.

Postoje razne metode sprječavanja alias–efekta. Jedna od najraširenijih metoda je "zero–padding" metoda. U "zero–padding" metodi se frekvencijska domena proširuje u odnosu na potrebnu frekvencijsku domenu. Domena se proširuje toliko da se se relevantni harmonici višekratnih frekvencija nađu unutar proširene domene. Fourierovi koeficijenti za prošireni dio domene se uvijek prisilno postavlja na nulu. Na ovaj način postižu se dva učinka: sprječava se alias–efekt na relevantne frekvencije obzirom da su harmonici višekratnih frekvencija razlučeni diskretnom mrežom, te se sprječava utjecaj alias–efekta harmonika izvan frekvencijske domene na harmonike višekratnih frekvencija. Ovaj pristup je moguć zahvaljujući činjenici da je moguće, obzirom na matematičke operacije koje se provode, unaprijed odrediti područje frekvencija koje će imati alias–efekt na relevantne harmonike. U HOS metodi se prilikom sekvencijalnog računanja redova potencijala brzine (38) i vertikalne brzine slobodne površine (39) u zadnjem redu pojavljuje član  $\eta^{M-1}$  koji množi višestruku derivaciju potencijala brzine. Radi se dakle o  $M$  umnožaka, te se obzirom na to postavlja uvjet za odstranjivanje alias–efekta:

$$N = \frac{M+1}{2} N_{\mathcal{F}}, \quad (57)$$

gdje je  $N_{\mathcal{F}}$  broj harmonika u Fourierovom prostoru s kojih se želi odstraniti greška alias–efekta, te je  $N$  broj točaka mreže u fizičkoj domeni. Frekvencijska domena se stoga proširi na  $N$  točaka, te se Fourierovi koeficijenti za koje vrijedi  $|n| > N_{\mathcal{F}}$  postavljaju na nulu. Ovo pravilo naziva se polovično pravilo [18].

#### 4.4 Numerička integracija običnih diferencijalnih jednadžbi

Obične diferencijalne jednadžbe proizvoljnog reda uvijek se mogu svesti na više diferencijalnih jednadžbi prvog reda [17]. Obzirom da se u slučaju HOS metode javlja upravo obična diferencijalna jednadžba prvog reda u vremenu, ovdje će biti pokazana integracija jednadžbe prvog reda. Iako su jednadžbe (18) i (19) parcijalne diferencijalne jednadžbe viših redova zavisne o više varijabli, one postaju obična diferencijalna jednadžba ovisna o vremenu nakon postupka računanja ostalih članova. Postupak računanja prostornih derivacija i njihovih umnožaka objašnjen je u prethodnim potpoglavljima. Ako sve poznate članove jednadžbi (18) i (19) stavimo na desnu stranu jednadžbi te označimo zajedničkom kraticom dobije se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = DSJ_{\psi}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = DSJ_{\eta}, \quad (59)$$

gdje su  $DSJ_{\psi}$  i  $DSJ_{\eta}$  kratice za desnu stranu jednadžbi (18) i (19). Desne strane jednadžbe su u trenutku vremenske integracije poznate veličine, te su nepoznanice u gornjim izrazima funkcija potencijala brzine na površini  $\psi$  i funkcija elevacije slobodne površine  $\eta$ . Općenito, običnu diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati kao:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (60)$$

gdje je  $f(x, y)$  desna strana jednadžbe koja predstavlja derivaciju funkcije  $y(x)$ . Najjednostavnija metoda numeričke integracije jednadžbi je Eulerova metoda [17]. Umjesto infinitezimalnih diferencijalnih operatora  $d$  uvode se konačni diferencijalni operatori  $\Delta$ :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = f(x_n, y_n), \quad (61)$$

odnosno:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n). \quad (62)$$

Izraz (62) predstavlja osnovnu Eulerovu formulu numeričke integracije običnih diferencijalnih jednadžbi. Eulerova formula je nesimetrična, tj. rješenje se nalazi za korak  $\Delta x$  sa informacijom o derivaciji samo na početku tog intervala. Greška koja se pritom pojavljuje je drugog reda  $O(\Delta x^2)$ , međutim, greška koja se nagomila tokom uzastopnih integracija je reda  $O(\Delta x)$ . Eulerova metoda je najjednostavnija te je time i najnetočnija. Naprednije metode znatno

su stabilnije i točnije. Jedna od najpoznatijih metoda numeričke integracije je Runge-Kutta metoda. Runge-Kutta metoda može biti drugog ili višeg reda, gdje se broj reda određuje u odnosu na grešku. Metoda drugog reda zasniva se na dva koraka evaluacije prirasta funkcije  $y(x)$ . U prvom koraku se određuje prirast funkcije metodom prvog reda kao u izrazu (62), dok se u drugom koraku računa prirast funkcije obzirom na derivaciju funkcije u točki koja je na pola prirasta dobivenog u prvom koraku. Zbog toga se ova metoda naziva još i metoda srednje točke [17]. Zapisano jednačinama, postupak glasi:

$$\begin{aligned}k_1 &= \Delta x f(x_n, y_n), \\k_2 &= \Delta x f\left(x_n + \frac{1}{2}\Delta x, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\y_{n+1} &= y_n + k_2.\end{aligned}\tag{63}$$

Najčešće se koristi Runge-Kutta četvrtog reda, međutim postoje i metode viših redova. Kako bi se poboljšala efikasnost metode, uvode se razna poboljšanja. Cilj je metoda numeričke integracije koja uz što manje računskih operacija postiže što veću preciznost. Osnovna modifikacija omogućuje prilagodbu veličine koraka  $\Delta x$ . Korak se tako prilagođava ovisno o brzini promjene rezultata. Kada je promjena funkcije manja, dovoljan je veći korak i obrnuto [17]. U ovom radu se za vremensku integraciju jednačbi (61) i (62) koristi Runge-Kutta petog reda s prilagodljivim korakom, pri čemu se koriste Cash-Karpovi parametri za procjenu greške. Čitatelj se upućuje na [17] za više detalja o naprednim metodama numeričke integracije.

## 5 Validacija implementiranog algoritma

U ovom poglavlju je potvrđena točnost i preciznost implementirane HOS metode. U svrhu validacije implementirane metode, napravljene su dva testna proračuna. U prvom testnom proračunu ispitana je točnost algoritma na monokromatskom propagirajućem valu. Proračun je iniciran linearnim rješenjem te su rezultati uspoređeni s Dommermuthom [7]. U drugom proračunu provjerena je točnost pri propagaciji spektra valova. Rezultati su uspoređeni s viskoznim rezultatima koje su objavili Lupieri et al. [1].

### 5.1 Propagacija monokromatskog vala

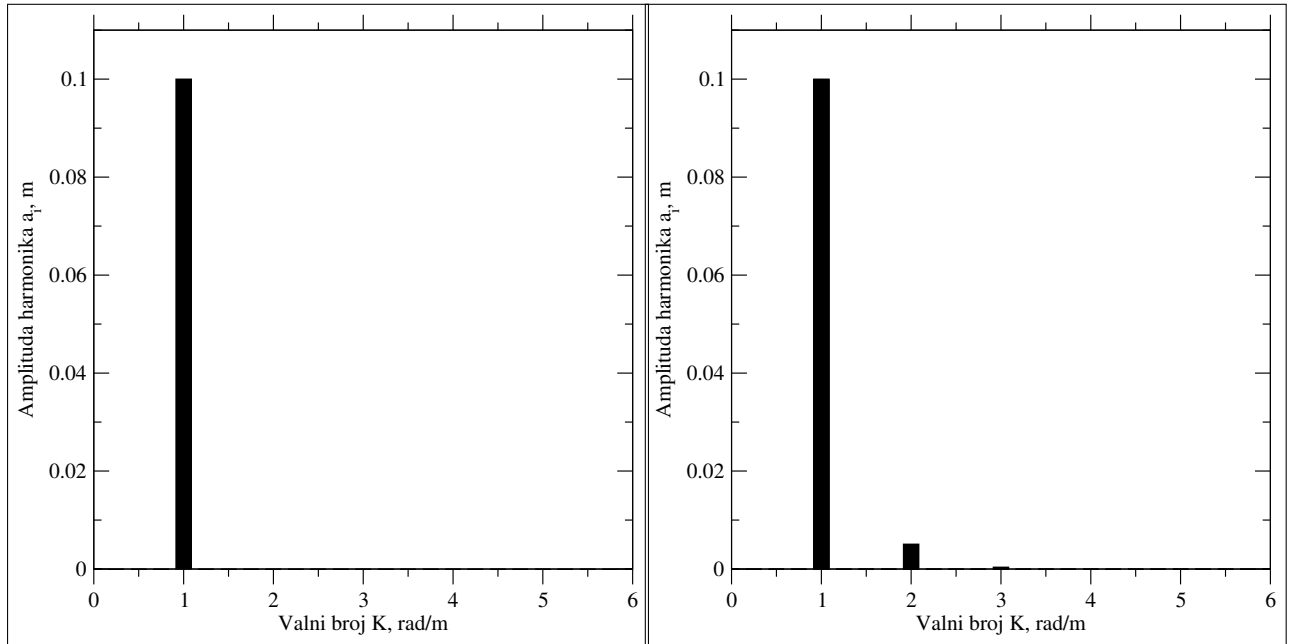
Izvršena je propagacija monokromatskog površinskog vala te je razvoj nelinearnosti uspoređen s nelinearnim Stokesovim rješenjem za monokromatski val [19]. Istu usporedbu proveo je Dommermuth [7] čime je potvrdio valjanost sheme vremenske relaksacije pokazane u poglavlju 4.2.

Kao početni uvjet korišteno je linearno rješenje monokromatskog propagirajućeg vala poznato kao Airyev val, ili Stokesov val prvog reda [12]. Linearno rješenje dobiveno je linearizacijom rubnih uvjeta na slobodnoj površini (18) i (19). Linearno rješenje se nelinearnom propagacijom pomoću HOS-a razvija do reda nelinearnosti  $M$ . Razvijaju se nelinearni viši harmonici te su uspoređeni do osmog reda. Trend konvergencije pojedinih harmonika je također provjeren te uspoređen s rezultatom Dommermutha [7].

Dommermuth je svoje ispitivanje proveo na valu strmine  $Ka = 0.1$  i valnog broja  $K = 1$  što daje amplitudu vala  $a = 0.1$  m. Promatrao je brzinu konvergencije viših harmonika uz različite relaksacijske parametre. Korišteni relaksacijski parametri su: relaksacijsko vrijeme  $T_a = 8\lambda$ , relaksacijski eksponent  $n_a = 4$ .  $\lambda$  je duljina Airyevog vala. Za provedbu ovog proračuna korištena je formulacija koju su predložili Dommermuth & Yue [5] gdje se ne koristi konzistentnost reda nelinearnosti 3.4.

Val je propagiran tokom 100 valnih perioda, odnosno 200 s. Na slici 3 prikazan je razvoj viših harmonika. Slika 3a prikazuje amplitude harmonika u početnom trenutku simulacije, gdje još nije došlo do razvoja viših harmonika. Vidljiv je samo jedan harmonik propisan linearnom valnom teorijom. Slika 3b prikazuje razvijene više harmonike koji su rezultat nelinearne propagacije vala tokom 100 perioda. Vidljiva su još dva viša harmonika dok ostali nisu vidljivi zbog male vrijednosti. U Tablici 1 prikazane su vrijednosti amplitude pojedinih harmonika te su uspoređeni sa Stokesovim rješenjem. Premda greška raste za veće harmonika, ona ostaje prihvatljivo mala. Relativna greška definirana je kao  $\epsilon = (\eta_{iA} - \eta_{iHOS})/\eta_{iA}$ , gdje je  $\eta_{iA}$  amplituda  $i$ -tog analitički dobivena amplituda harmonika, dok je  $\eta_{iHOS}$  amplituda harmonika dobivena HOS metodom. Najveća relativna greška za osmi harmonik iznosi 0.109%. Na slici 4 prikazana je konvergencija pojedinih harmonika. Slika 4a prikazuje konvergenciju objavljenju u [7], dok slika 4b prikazuje konvergenciju dobivenu implementiranim HOS algoritmom.

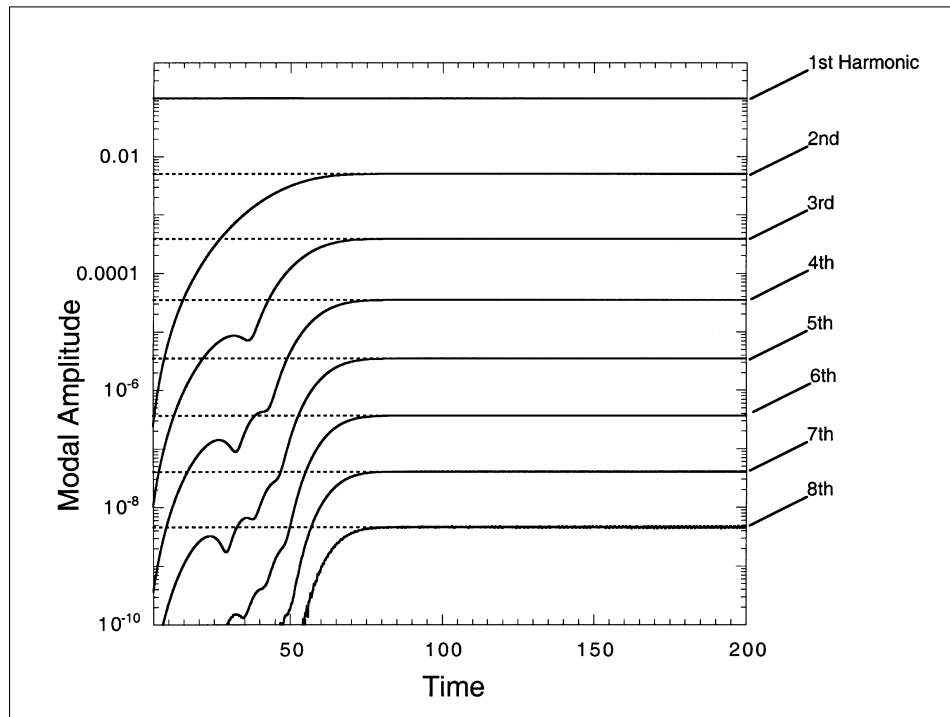


(a) Spektar u trenutku  $t = 0$  s.(b) Spektar u trenutku  $t = 200$  s.

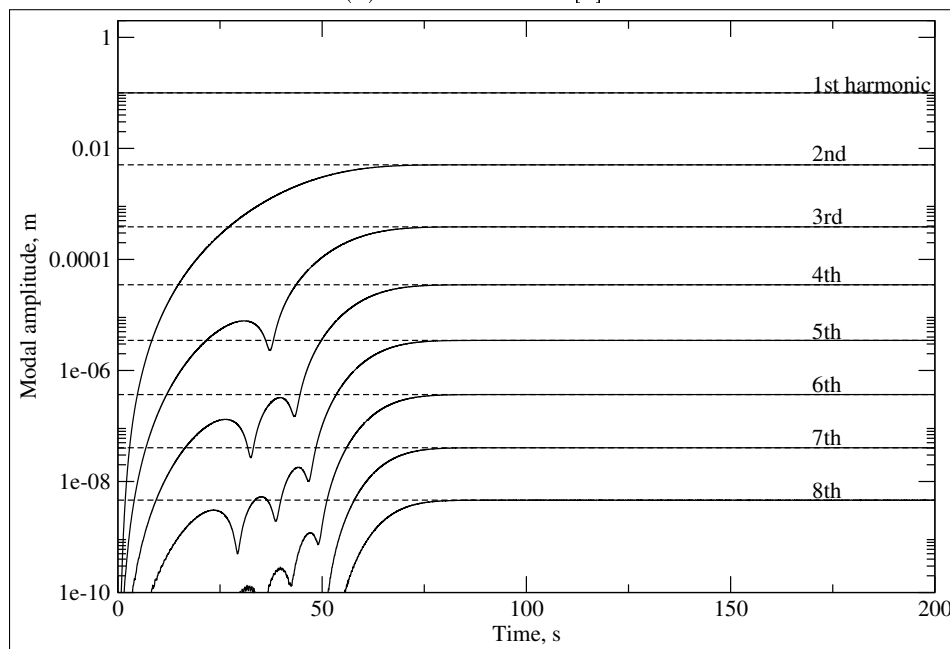
Slika 3: Razvoj viših harmonika.

Tablica 1: Usporedba HOS rezultata i nelinearog Stokesovog rješenja.

| Red | Amplituda harmonika, m     |                            | Relativna greška, %    |
|-----|----------------------------|----------------------------|------------------------|
|     | Stokesovo rješenje         | HOS rezultat               |                        |
| 1   | $9.9870520 \times 10^{-2}$ | $9.9870524 \times 10^{-2}$ | $4.34 \times 10^{-6}$  |
| 2   | $5.0594125 \times 10^{-3}$ | $5.0594197 \times 10^{-3}$ | $1.43 \times 10^{-4}$  |
| 3   | $3.8584235 \times 10^{-4}$ | $3.8584342 \times 10^{-4}$ | $2.78 \times 10^{-4}$  |
| 4   | $3.4929691 \times 10^{-5}$ | $3.4929838 \times 10^{-5}$ | $4.20 \times 10^{-4}$  |
| 5   | $3.4769679 \times 10^{-6}$ | $3.4769678 \times 10^{-6}$ | $-3.26 \times 10^{-6}$ |
| 6   | $3.6763951 \times 10^{-7}$ | $3.6763189 \times 10^{-7}$ | $-2.07 \times 10^{-3}$ |
| 7   | $4.0531740 \times 10^{-8}$ | $4.0530830 \times 10^{-8}$ | $-2.24 \times 10^{-3}$ |
| 8   | $4.6076934 \times 10^{-9}$ | $4.6026818 \times 10^{-9}$ | $-1.09 \times 10^{-1}$ |



(a) Dommermuth [7].



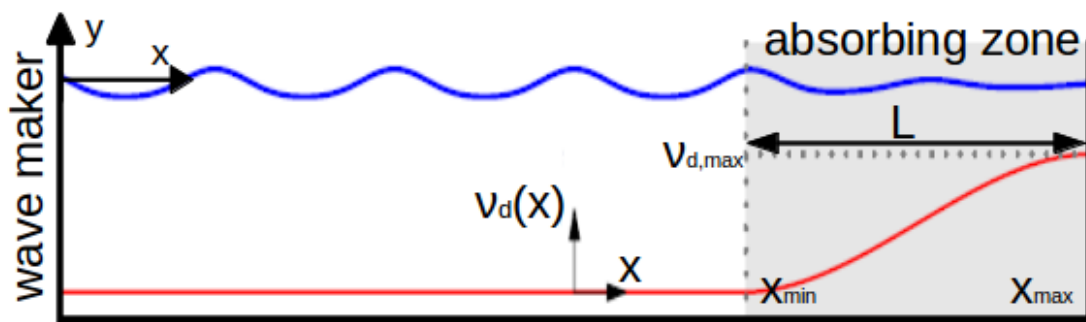
(b) HOS rezultat.

Slika 4: Konvergencija pojedinih harmonika.

Greške u Tablici 1 dokazuju valjanost implementiranog HOS algoritma. Usporedba na Slici 4 pokazuje vrlo sličan trend konvergencije pojedinih harmonika. Iz ovog se testnog proračuna može zaključiti da je implementirana metoda valjana i dovoljno točna.

## 5.2 Propagacija valnog spektra

Lupieri et al. [1] proveli su istraživanje u kojem su promatrali promjene spektra valova uslijed propagacije u viskoznom proračunskom modelu. Valove su propagirali u softveru za računalnu dinamiku fluida (CFD) OpenFOAM. Valni spektar koji su zadali na početku domene ima komponente jednakih valnih strmina  $Ka$ , stoga se radi o linearnom jednoliko strmom valnom spektru. Linearno rješenje koje je korišteno kao početni uvjet dobije se izrazom (53). Fazni pomak  $\epsilon_i$  određen je na način da se ostvari pozitivna superpozicija svih komponenti na željenoj lokaciji CFD domene. Luperi et al. ispitali su četiri različita slučaja u kojima su mijenjali strminu valnih komponenti spektra. Dva slučaja u kojima je strmina veća, na mjestu superpozicije odnosno fokusiranja valova, postižu strminu koja je veća od kritične strmine. Kritična strmina iznosi približno  $H/\lambda = 1/7$  [19], te za nju nastupa lom valnog brijega. Lupieri et al. [1] mjerili su spektar valova Fourierovom transformacijom signala elevacije slobodne površine koji su mjerili na više mjesta uzduž domene. Na Slici 5 prikazana je shema CFD domene u kojoj je provedena simulacija u [1]. Oznaka "wave maker" označava generator valova. U ovom slučaju generator valova je simuliran kao pomičan zid koji periodičnim gibanjem izaziva generaciju valova. Oznaka "absorbing zone" predstavlja tzv. relaksacijsku zonu u kojoj se postepeno prigušuju valovi. Prigušivanje valova se provodi da bi se spriječila refleksija valova o stražnji zid domene, što bi nepovoljno djelovalo na rezultate.



Slika 5: Domena CFD simulacije korištena u [1].

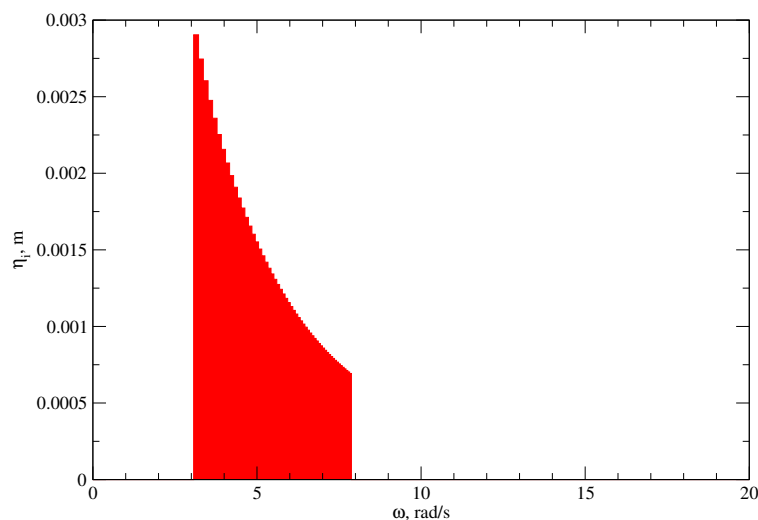
Lupeiri et al. [1] su provodili Fourierovu transformaciju signala u vremenu, zbog čega je dobiveni spektar valova izražen u odnosu na kružnu frekvenciju. U proračunu HOS metodom provodi se Fourierova transformacija kojom se preslikava signal u prostoru u domenu valnih brojeva. U CFD simulaciji propagacije valova, kao i u eksperimentu u bazenu, nelinearnosti se u valovima razvijaju propagacijom valova kroz prostor. Međutim u HOS proračunu nelinearnosti se razvijaju u cijeloj prostornoj domeni u vremenu. Iz tog razloga nije moguće napraviti kvantitativnu usporedbu dobivenih rezultata. Valni spektar koji je rezultat HOS proračuna predstavljen je u prostoru valnih brojeva  $K$  u rad/m, dok je spektar dobiven

preslikavanjem signala iz vremenske u frekvencijsku domenu predstavljen u prostoru kružne frekvencije  $\omega$  u rad/s. Iako je moguće provesti Fourierovu transformaciju vremenskog signala dobivenog HOS proračunom mjereći signal elevacije slobodne površine u jednoj točki, niti takav rezultat ne bi bio usporediv. Naime, relaksacijsko vrijeme potrebno da se stabilno razviju nelinearnosti u HOS proračunu znatno je veće od vremena koje je bilo potrebno da valovi koji su generirani na početku CFD domene dosegnu točku mjerenja. Drugim riječima, mjerenje spektra nije moguće provesti u istim uvjetima. Iz navedenih razloga provedena je kvalitativna usporedba. Rezultati dobiveni HOS simulacijom prevedeni su iz domene valnih brojeva u domenu kružne frekvencije pomoću disperzijske jednadžbe dobivene iz linearnog modela. Disperzijska jednadžba je jednadžba koja povezuje valni broj i frekvenciju vala [4]. Za linearno rješenje disperzijska jednadžba glasi:

$$\omega^2 = Kg \tanh(Kd), \quad (64)$$

gdje je  $\omega$  kružna frekvencija vala,  $K$  valni broj,  $g$  gravitacijska konstanta i  $d$  dubina domene. Korištenjem disperzijske jednadžbe linearnog rješenja na nelinearno rješenje HOS simulacije izlazi se iz područja valjanosti disperzijske jednadžbe (64). Međutim, obzirom da se radi o kvalitativnoj usporedbi, smatra se da će disperzijska jednadžba linearnog rješenja dati dovoljno točan rezultat.

Valni spektri koji se koriste kao početni uvjet generirani su tako da im sve harmonijske komponente imaju jednake strmine  $H_i/\lambda_i$ , gdje su  $H_i$  i  $\lambda_i$  valna visina te valna duljina pojedine komponente  $i$ . Četiri su slučaja strmine komponenata ispitana:  $H_i/\lambda_i = 1/715, 1/400, 1/300$  i  $1/210$ . Valne komponente su ekvidistantno postavljene u prostoru valnih brojeva obzirom da se u HOS metodi fizički i Fourierov prostor diskretiziraju ekvidistantnim točkama. Spektar valova sastoji se od 57 komponenti, što je u skladu s [1]. Na Slici 6 prikazan je primjer spektra koji je korišten kao početni uvjet.

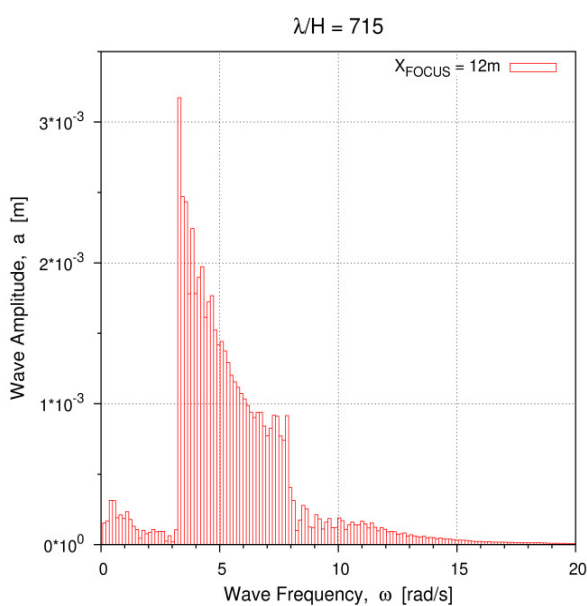


Slika 6: Primjer spektra za strmine vala  $H_i/\lambda_i = 1/715$ .

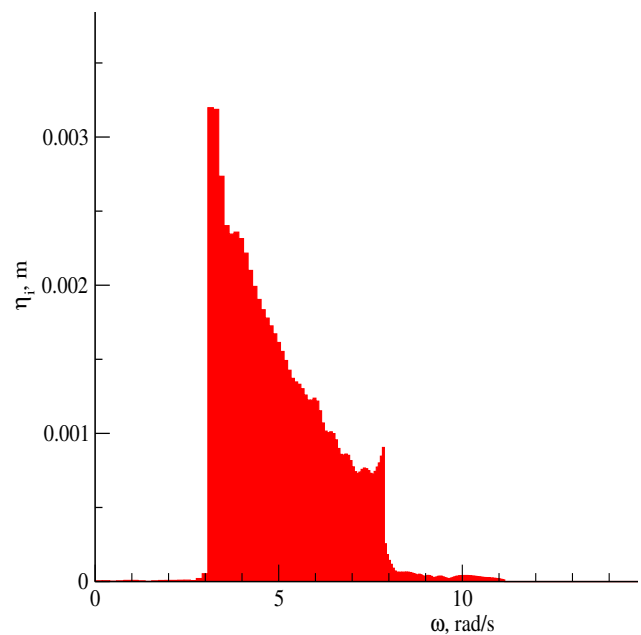
Parametri vremenske relaksacije HOS simulacija postavljeni su ovisno o slučaju strmine. Općenito, što su očekivane nelinearnosti valnog polja koje se simulira veće, to je potrebno dulje vrijeme relaksacije. Razlog tomu je veća razlika linearnog rješenja koje se koristi kao početni uvjet u odnosu na konačno nelinearno rješenje. Drugim riječima, potrebno je više vremena da se stabilno razviju nelinearnosti jer one imaju veći utjecaj [7]. Kao što je spomenuto u Poglavlju 3.4, mjera nelinearnosti je strmina vala  $\epsilon = Ka$ . Iz tog razloga može se pretpostaviti da je za strmiji valni spektar potrebno dulje vrijeme relaksacije. U Tablici 2 su prikazani glavni HOS parametri za sve četiri provedene simulacije.  $N_x$  je broj točaka diskretizacije u fizičkom prostoru,  $M$  je red nelinearnosti HOS proračuna,  $T_a$  je vrijeme relaksacije, dok je  $T_f$  vrijeme fokusiranja. Iz tablice je vidljivo da je za zadnji slučaj strmine bilo potrebno znatno produljiti vrijeme relaksacije, te je shodno bilo potrebno i pomaknuti vrijeme fokusiranja. Naime, vrijeme fokusiranja mora se odvititi nakon relaksacije kako ne bi došlo do gubitka nelinearnih utjecaja. Duljina domene korištena u svim simulacijama je 72.3 m, što odgovara duljini od 18 valnih duljina najdužeg vala. Usporedba rezultata je prikazana na Slikama 7 do 10.

Tablica 2: Parametri HOS simulacije.

| $H_i/\lambda_i$ | 1/715 | 1/400 | 1/300 | 1/210 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| $N_x$           | 1024  | 1024  | 1024  | 2048  |
| $M$             | 6     | 6     | 6     | 10    |
| $T_a$ , s       | 25    | 25    | 25    | 60    |
| $T_f$ , s       | 35    | 35    | 35    | 80    |

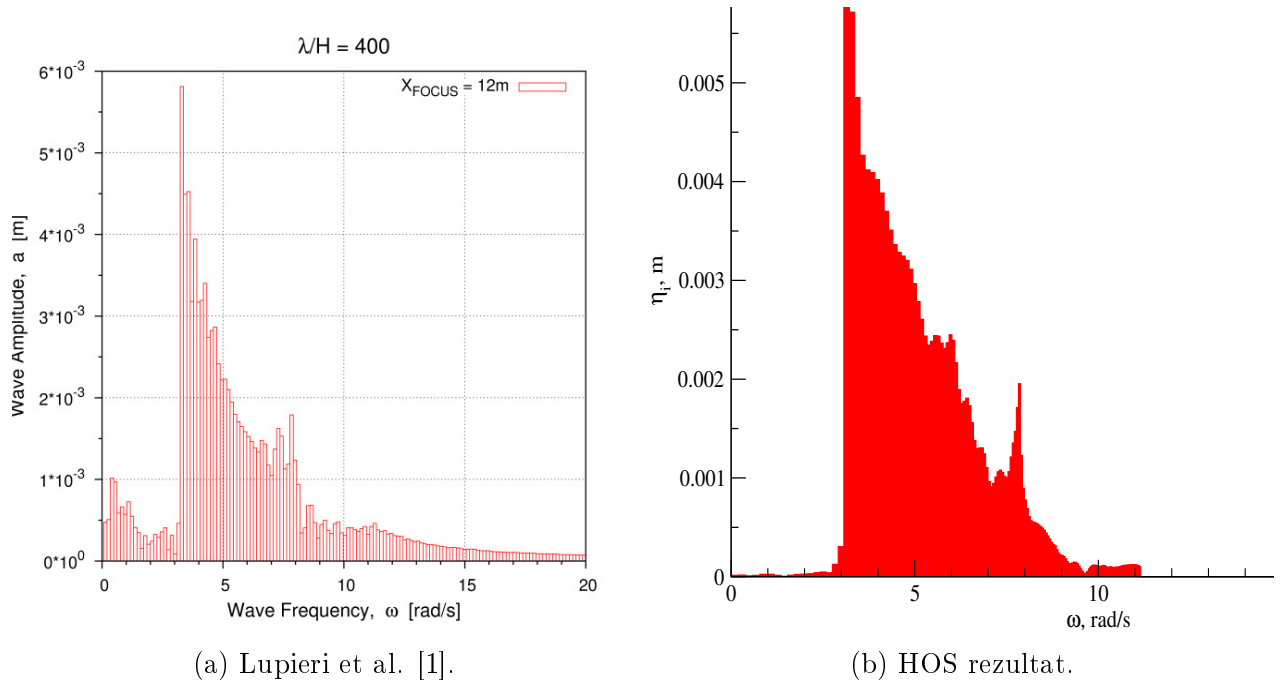
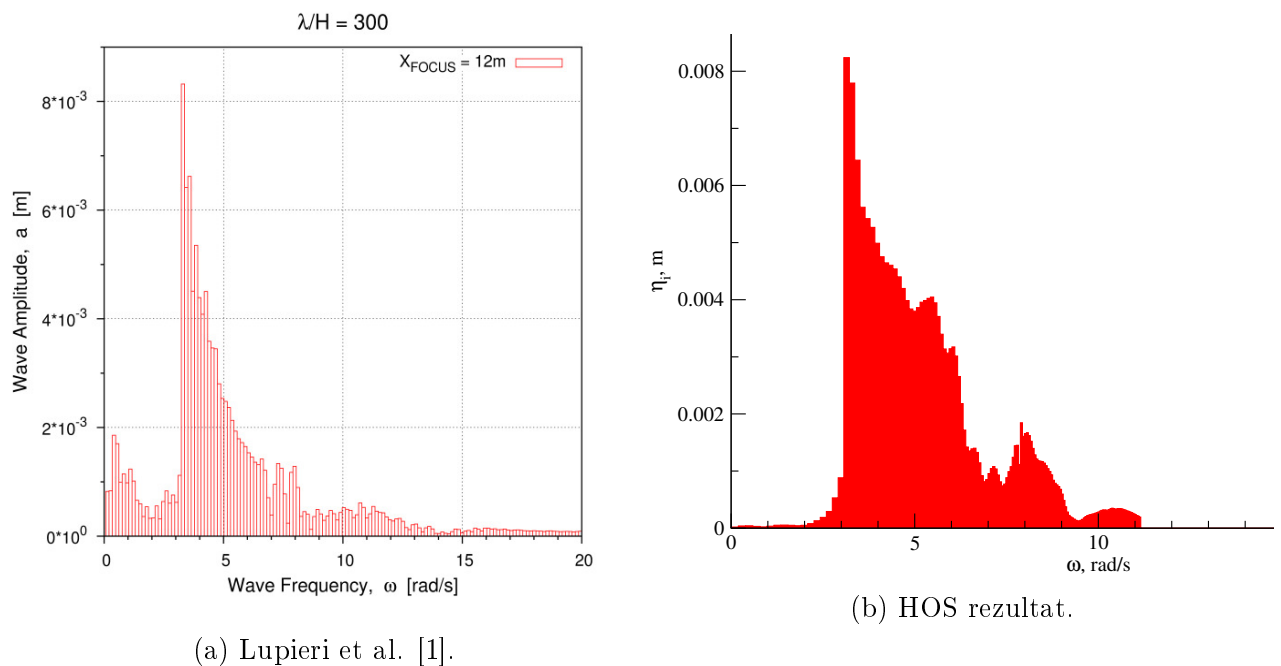


(a) Lupieri et al. [1].

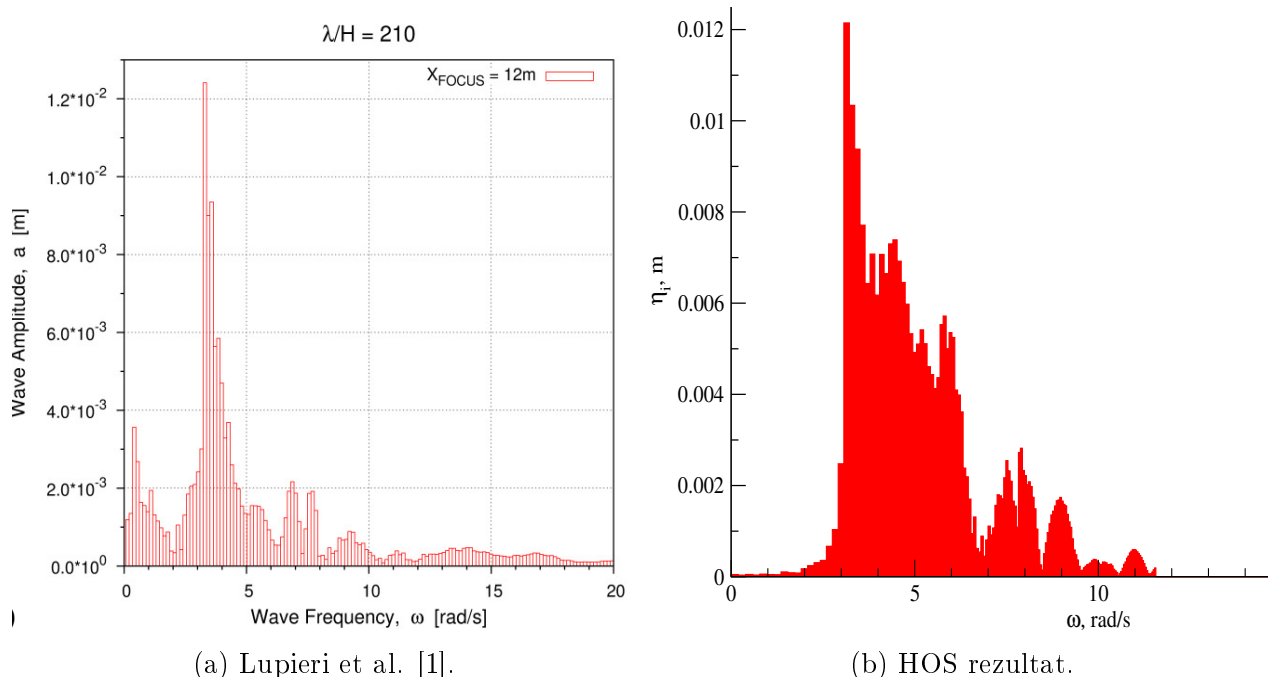


(b) HOS rezultat.

Slika 7: Usporedba valnog spektra, slučaj  $H_i/\lambda_i = 1/715$ ,  $t = 37$  s.

Slika 8: Usporedba valnog spektra, slučaj  $H_i/\lambda_i = 1/400, t = 37$  s.Slika 9: Usporedba valnog spektra, slučaj  $H_i/\lambda_i = 1/300, t = 37$  s.

Obzirom da se radi o usporedbi simulacija neviskoznog i viskoznog modela strujanja, usporedba rezultata je zadovoljavajuća. Za slučaj strmine  $H_i/\lambda_i = 1/715$  i  $1/400$  valni spektri su vrlo slični. U svim slučajevima HOS simulacija javlja se izražene komponente viših frekvencija što se podudara s rezultatima Lupieri et al. [1]. Prema Lupieri et al. nisko-frekvencijske komponente koje se pojavljuju u viskoznim simulacijama odgovaraju drugoj vlastitoj frekvenciji numeričkog bazena u kojem je provedeno ispitivanje. Vlastita frekvencija bazena je frekvencija vala za kojeg dolazi do rezonantne pojave osciliranja slobodne površine



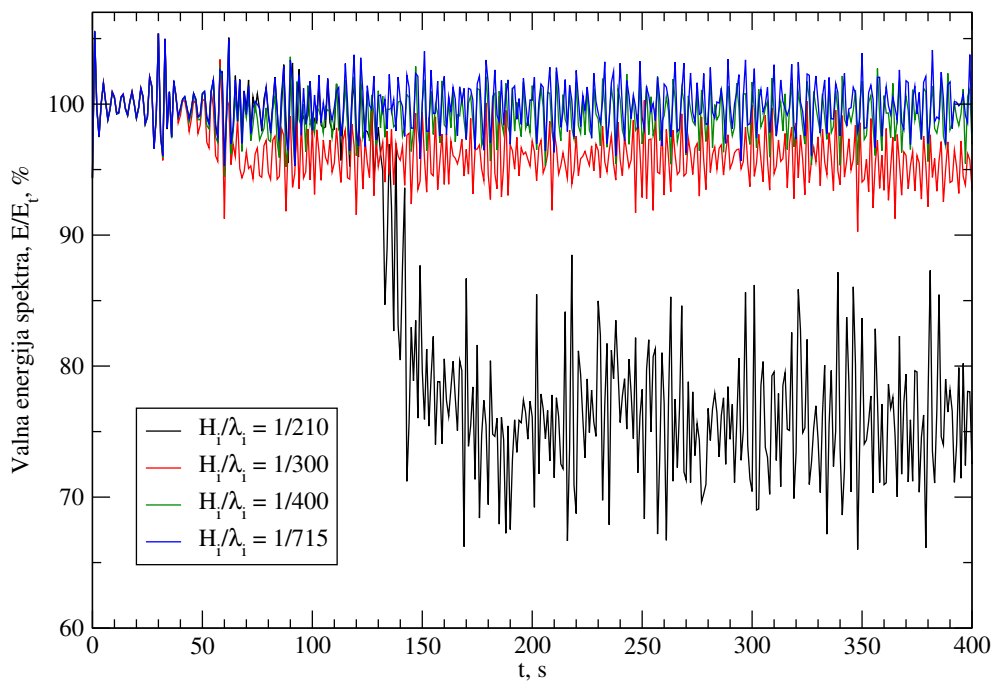
Slika 10: Usporedba valnog spektra, slučaj  $H_i/\lambda_i = 1/210, t = 84$  s.

u bazenu. Obzirom da u HOS simulaciji ne postoje kruti krajevi domene, u HOS simulacijama ne dolazi do pojave nisko-frekventnih harmonika. Ovakav rezultat je očekivan. Strmina vala, koja se javlja na mjestu fokusiranja za spektre strmine komponenti  $H_i/\lambda_i = 1/300$  i  $1/210$ , odgovara strmini koja prelazi kritičnu strminu. U tim se simulacijama očekuje pojava loma valnog brijega. Razlike rezultata u ta dva slučaja strmine nešto su veće, kao što se može vidjeti na Slikama 9 i 10. Najizraženija valna komponenta i kvantitativno dobro odgovara rezultatima viskoznih simulacija kod oba slučaja, kao i visoko-frekventne komponente. Međutim, u HOS simulacijama se pojavljuju i izražene srednje-frekventne komponente, koje nisu prisutne u viskoznim simulacijama. Većem odstupanju rezultata zasigurno doprinosi lom brijega vala koji se pojavljuje u dva strmija slučaja. Naime, HOS metodom nije moguće opisati lom valnog brijega iz razloga što funkcija elevacije slobodne površine  $\eta(x, t)$  prestaje biti jednoznačna. U CFD simulaciji, kao i u naravi, prilikom loma valova dolazi do disipacije energije uslijed izraženih viskoznih pojava [20]. Takav utjecaj lomljenja valova nije zastupljen u HOS simulaciji obzirom da se HOS zasniva na idealiziranom modelu neviskoznog strujanja. Kada se tokom HOS proračuna pojavi lom valnog brijega tada dolazi do divergencije rješenja. Prema Dommermuth & Yue [5], divergenciju uzrokuju visokofrekventni valovi čiji je rast esponencijalni. Filtriranjem visokih frekvencija tokom Fourierove transformacije moguće je provesti HOS simulaciju unatoč lomu valnog brijega. Filtriranjem se u svakom vremenskom koraku amplitude visokofrekventnih valnih komponenti postavljaju na nulu, čime se sprječava njihov daljnji rast. Na ovaj način HOS simulacija također gubi dio valne energije, jer se uklanja dio energije koji tijekom simulacije prelazi u komponente visokih frekvencija. Zahvaljujući filtriranju, oponaša se gubitak energije koji postoji u stvarnosti tokom loma valova. Gubitak energije prikazan je na Slici 11, gdje je prikazan omjer valne energije mjerene tokom vremena u pojedinim simulacijama  $E$  i teoretske valne energije

$E_t$ . Teoretska valna energija je energija početnog valnog spektra. Valna energija određena je na temelju linearnog modela, prema kojemu je ukupna valna energija svedena na jediničnu površinu jednaka [4]:

$$E = \frac{1}{2} \eta_a^2 \rho g, \quad (65)$$

gdje je  $\eta_a$  amplituda vala,  $\rho$  gustoća fluida te  $g$  gravitacijska konstanta. Na Slici 11 može se vidjeti da veći gubitak energije nastupa za valne spektre sa većom strminom valnih komponenta. Ovakav rezultat je očekivan obzirom da povećanjem strmine vala dolazi do intenzivnijeg lomljenja valnog brijega.



Slika 11: Promjena valne energije u HOS simulaciji.



## 6 Primjer CFD simulacije s inicijalizacijom vala pomoću HOS metode

U ovom poglavlju provedena je pokazna CFD simulacija ekstremnog vala koji nailazi na horizontalan kvadar. Ekstremni val koji je simuliran inicijaliziran je pomoću HOS metode. Pomoću HOS modela pronađen je događaj ekstremnog vala gdje je kao početni uvjet korišten realan spektar valova.

### 6.1 Pronalaženje ekstremnog vala

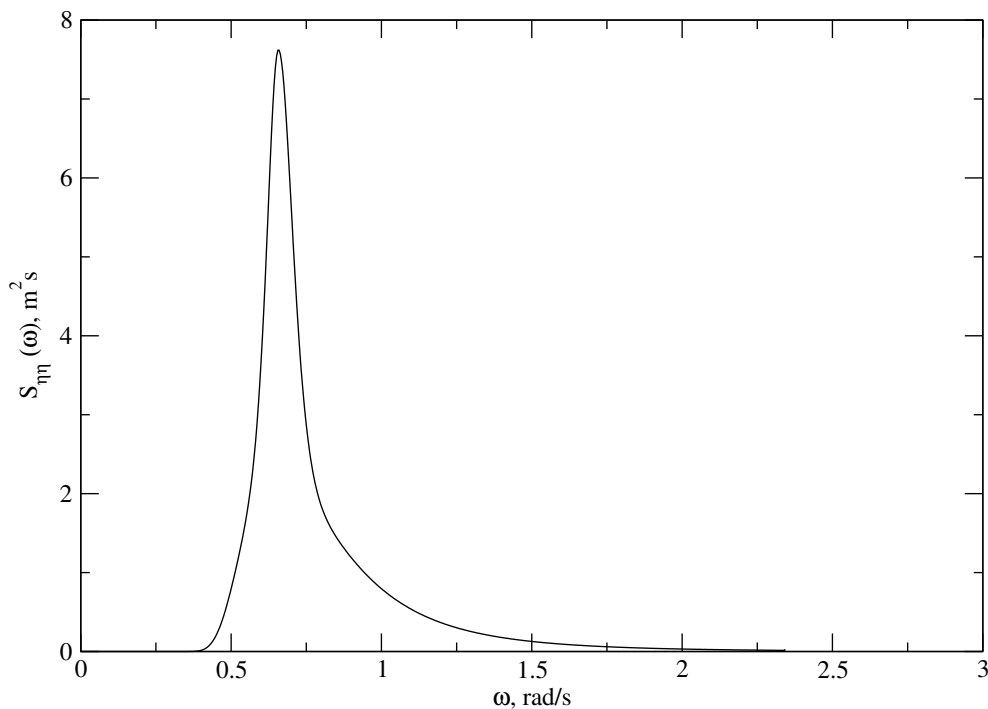
Ekstremni valovi su slučajne pojave te na njihov nastanak utječe puno raznovrsnih uzroka [3], kao što su morske struje, batimetrija (konfiguracija dna), atmosferski tlak, brzina vjetera i drugo. Vjerojatnost pojave ekstremnog vala iznosi oko  $10^{-8}$  [3]. Sve okolnosti pod kojima nastaju ekstremni valovi nisu u potpunosti razjašnjene. Najizraženiji uzrok njihovog nastanka je pozitivna superpozicija velikog broja valnih komponenti prema izrazu (53). Propagacijom spektra valova HOS metodom na pojavu ekstremnog vala u obzir se uzimaju i nelinearne interakcije valnih harmonika, koje su zanemarene u linearnom modelu kojeg predstavlja izraz (53). Najšire prihvaćena definicija ekstremnog vala definira ekstreman val kao val čija visina premašuje značajnu valnu visinu pripadnog spektra valova za najmanje dva puta. Značajna valna visina  $H_s$  je statistička veličina kojom se opisuje stanje mora, ona predstavlja srednju vrijednost visine trećine najviših valova nekog stanja mora [2]. Kao što je spomenuto u Poglavlju 4.2, energetske spektri valova predstavljaju raspodjelu valne energije u odnosu na kružnu frekvenciju vala. Energetskim spektrom stanje mora je u potpunosti definirano. Na temelju dugoročnih mjerenja valova razvijeni su mnogi analitički izrazi koji opisuju energetske spektar valova. Jedan od takvih modela spektra valova je JONSWAP spektar [4]. JONSWAP spektar prilagođen je području sjevernog mora. Karakteristika JONSWAP spektra je relativno strmi vrh, odnosno izražena dominantnost uskog frekventijskog raspona. JONSWAP spektar je određen pomoću dvije varijable, značajne valne visine  $H_s$  i vršne perioda vala  $T_p$ .  $T_p$  je period vala za koji valni spektar  $S_{\eta\eta}(\omega)$  poprima najveću vrijednost. Izraz za JONSWAP spektar glasi:

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{320 H_s^2}{T_p^4} \omega^{-5} \exp\left(\frac{-1950}{T_p^4} \omega^{-4}\right) \gamma^A, \quad (66)$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
\gamma &= 3.3, \text{ koeficijent vršnosti,} \\
A &= \exp \left( - \left( \frac{\omega - 1}{\sigma \sqrt{2}} \right)^2 \right), \\
\omega_p &= \frac{2\pi}{T_p}, \text{ vršna kružna frekvencija,} \\
\sigma &= \begin{cases} 0.07 & \text{za } \omega < \omega_p, \\ 0.09 & \text{za } \omega > \omega_p. \end{cases} \quad (67)
\end{aligned}$$

Kako bi se definirao ekstreman val potrebno je provesti dugi HOS proračun. Tokom HOS proračuna traže se valovi čija visina premašuje značajnu valnu visinu za dva puta. Drugim riječima, HOS proračun provodi se dovoljno dugo i na dovoljno velikoj domeni da postoji velika vjerojatnost pojave ekstremnog vala. HOS proračun je inicijaliziran pomoću linearnog rješenja dobivenog JONSWAP spektrom. Odabrani parametri  $H_s$  i  $T_p$  korišteni za JONSWAP spektar odgovaraju parametrima koje su koristili Ducrozet et al. [9]. Vrijednosti parametara su:  $H_s = 5.1$  m i  $T_p = 9.1$  s. Dijagram spektra valova koji je korišten za inicijalizaciju HOS proračuna prikazan je na Slici 12. Parametri koji su korišteni u HOS proračunu također su određeni u skladu s proračunom provedenim u [9], te su navedeni u Tablici 3.  $T_s$  je oznaka za vrijeme koje je simulirano u HOS proračunu, te je  $T_r$  potrebno vrijeme proračuna. Dugačka simulacija je nužna kako bi u njoj došlo do pojave ekstremnog vala, koji ima relativno malu vjerojatnost pojavljivanja.

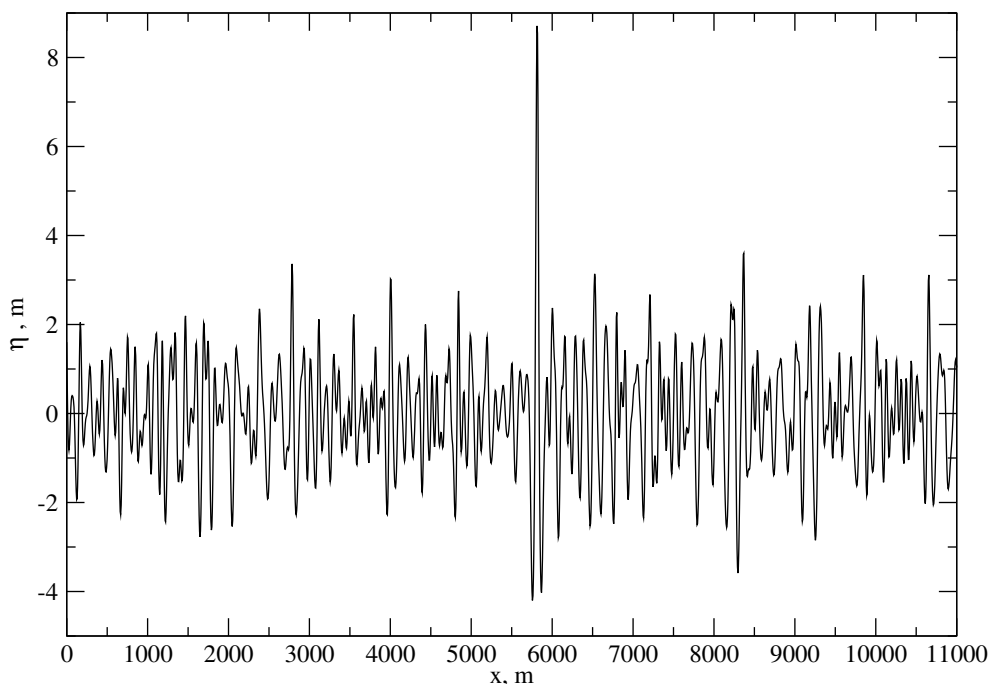


Slika 12: Dijagram početne spektralne gustoće valova.

Tablica 3: Parametri HOS simulacije ekstremnog vala.

| $L_x$   | $N_x$ | $M$ | $T_s$   | $T_r$  |
|---------|-------|-----|---------|--------|
| 11480 m | 2048  | 8   | 10000 s | 3000 s |

Tokom HOS simulacije pojavilo se više ekstremnih valova. Na Slici 13 prikazan je primjer pojave ekstremnog vala u prostornom signalu elevacije slobodne površine. Obzirom da je značajna valna visina  $H_s = 5.1$  m, val prikazan na Slici 13 može se smatrati ekstremnim, pošto visina prikazanog vala iznosi oko 13 m. Visina je definirana kao razlika uzastopnog valnog brijega i valnog dola. Ovaj val je odabran za inicijalizaciju CFD simulacije.

Slika 13: Pojava ekstremnog vala u HOS domeni, vrijeme  $t = 3120$  s.

## 6.2 CFD simulacija

U prethodnom poglavlju pomoću HOS metode pronađen je događaj ekstremnog vala. Da bi se pomoću tog rješenja inicijalizirala CFD simulacija potrebna je funkcija elevacije slobodne površine  $\eta(x, t)$  i polje brzine strujanja  $v_x(x, z, t)$  i  $v_z(x, z, t)$ . Polje brzine računa se pomoću potencijala brzine  $\phi$  kao što je objašnjeno u Poglavlju 3.1. Rješenje HOS metode je elevacija slobodne površine  $\eta(x_n, t)$  i površinski potencijal brzine strujanja  $\psi(x_n, t)$ . Kako bi se dobilo polje brzine strujanja u cijelom volumenu tekućine, potrebno je izračunati potencijal brzine strujanja  $\phi(x, z, t)$  u cijelom volumenu tekućine. Za tekućinu konačne dubine pretpostavljeno rješenje potencijala slično je izrazu (32) te glasi [12]:

$$\phi(x, z, t) = \sum_k c_k(t) \frac{\cosh(K_k(z+d))}{\cosh(K_k d)} e^{iK_k x}, \quad (68)$$

obzirom da je površinski potencijal  $\psi(x, t) = \phi(x, z = \eta(x, t), t)$  gdje je  $z = \eta(x, t)$  zamijenjen sa  $z = 0$ , pošto se proveo razvoj u red oko  $z = 0$ . Dakle  $\psi(x, t) = \phi(x, 0, t)$ , odnosno:

$$\psi(x, t) = \sum_k c_k(t) e^{iK_k x}, \quad (69)$$

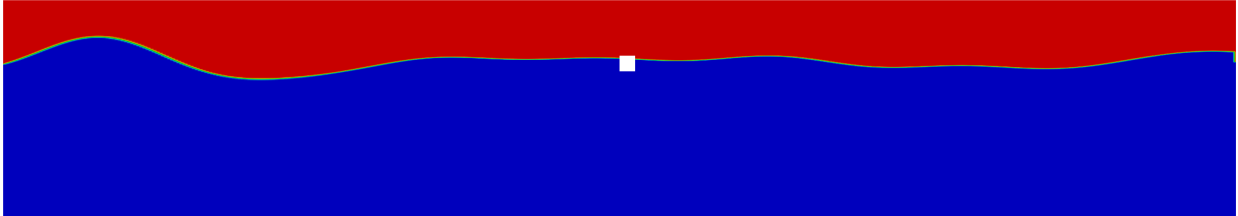
Gledajući izraze (68) i (69) očito je da se koriste isti Fourierovi koeficijenti  $c_k(t)$ . Fourierovi koeficijenti  $c_k(t)$  su poznati, te se mogu koristiti kako bi se došlo do potpunog polja potencijala brzine strujanja  $\phi(x, z, t)$ . Kako bi se od rješenja  $\psi(x, t)$  došlo do rješenja u volumenu  $\phi(x, z, t)$  potrebno je pojedine Fourierove harmonike pomnožiti s razlomkom u izrazu (68). Komponente brzine  $v_x(x, z, t)$  i  $v_z(x, z, t)$  računaju se deriviranjem potencijala brzine:

$$\begin{aligned} v_x(x, z, t) &= \sum_k c_k(t) iK_k \frac{\cosh(K_k(z+d))}{\cosh(K_k d)} e^{iK_k x}, \\ v_z(x, z, t) &= \sum_k c_k(t) K_k \frac{\sinh(K_k(z+d))}{\cosh(K_k d)} e^{iK_k x}. \end{aligned} \quad (70)$$

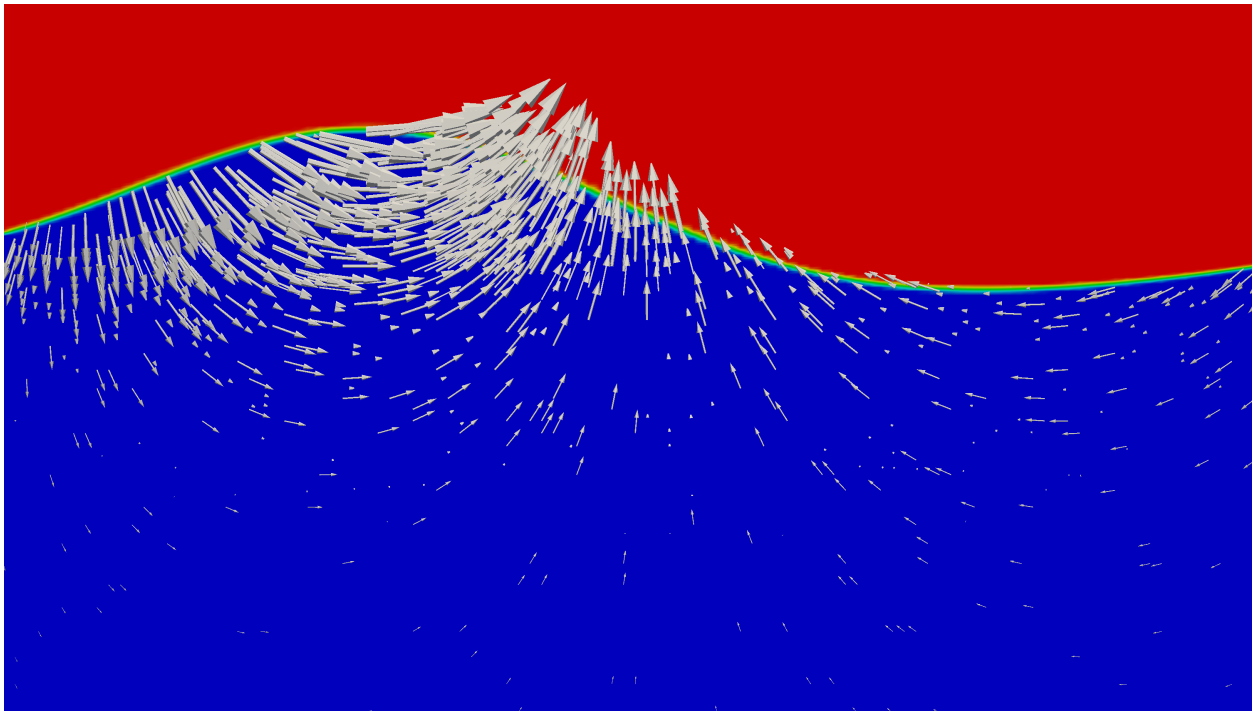
Polje brzine koje je potrebno za inicijalizaciju vala u CFD simulaciji potpuno je definirano izrazima (70). Pomoću rješenja HOS proračuna u bilo kojem trenutku može se inicijalizirati CFD proračun. Korišteni Naval Hydro paket u programu OpenFOAM koristi model dvo-faznog, viskozno strujanja sa mogućnošću modeliranja turbulencije. Polje brzine i elevacija slobodne površine se iz valne teorije nameće u CFD simulaciju u djelovima domene koji se nazivaju relaksacijskim zonama. Ulazna relaksacijska zona postavlja se na početak domene, te se u njoj postepeno prelazi sa nametnutog rješenja iz valne teorije na rješenje koje nudi CFD proračun. Više detalja o CFD simulacijama valova koristeći relaksacijske zone, te primjer takve simulacije može se naći u [21]. U CFD simulaciji može se doći do nelinearnog rješenja strmijih valova linearnom inicijalizacijom, međutim takav pristup je vrlo skup obzirom na potrebno vrijeme proračuna. HOS nudi rješenje valnog polja strujanja koje je nelinearno, te je stoga potrebna puno manja numerička domena za CFD simulaciju, te kraće simulirano vrijeme. To značajno smanjuje potrebno vrijeme proračuna. Spregom HOS metode i CFD simulacije otklanjaju se nedostaci obje metode, te se objedinjuju njihove prednosti. Nedostatak HOS metode je nemogućnost potpunog opisa slamanja vala. Dakle, nelinearno rješenje HOS metode može se koristiti za inicijalizaciju CFD simulacije, u kojoj se može nastaviti nelinearna propagacija sa utjecajem vrtložnosti i viskoznosti, te se može opisati lom vrha vala.

Kako bi se vrijeme CFD simulacije svelo na minimum, započeta je u trenutku neposredno prije nailaska ekstremnog vala na horizontalni kvadar. Iz istog razloga veličina CFD domene svedena je na minimum, te iznosi svega 300 m u odnosu na duljinu domene od 11480 m u HOS proračunu. Na Slici 14 prikazan je izgled domene u početnom trenutku simulacije. Domena predstavlja vertikalnu ravninu koja je definirana sa osi  $x$  i  $y$ , kako je prikazano na slici 1. Plavom bojom označeno je područje domene u kojemu se nalazi voda, dok je crvenom bojom označen zrak. Provedena je dvodimenzionalna simulacija, uz pretpostavku da su sve

promjene u smjeru osi koja je okomita na vertikalnu ravninu zanemarive. Dvodimenzionalna simulacija znatno je manje zahtjevna obzirom na vrijeme proračuna, što je pogodno obzirom na ograničene računalne resurse koji su bili na raspolaganju za izradu ovog rada. Na desnoj strani domene vidljiv je ekstremni val, čiji je smjer propagacije s lijeva na desno. Slika 15 prikazuje polje brzine ekstremnog vala u početnom trenutku simulacije. Polje brzine zadano je pomoću jednadžbi (70).



Slika 14: Domena CFD simulacije u početnom trenutku.

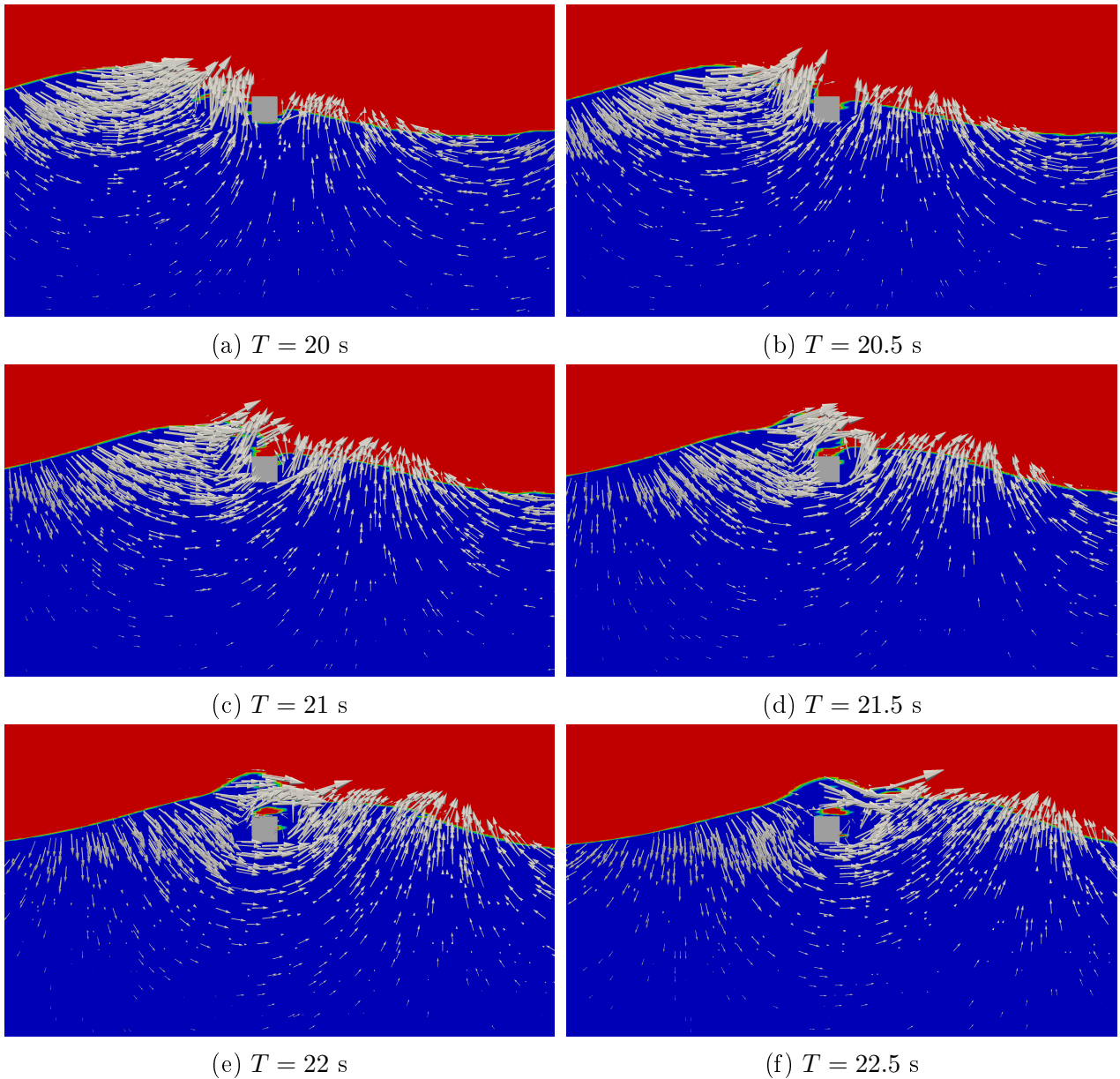


Slika 15: Polje brzine ekstremnog vala u početnom trenutku.

U CFD simulaciji je simulirano 40 sekundi fizikalnog vremena. Ekstremni val na kvadar nailazi oko dvadesete sekunde simuliranog vremena. Profil vala i polje brzine prilikom nailaska vala na kvadar i prelaska vala preko istog prikazano je na Slikama 16. Slike su vremenski razmaknute 0.5 s.

Ova simulacija demonstrira mogućnost aplikacije HOS metode za inicijalizaciju valova u CFD-u. Kao što je prije napomenuto, osobito područje interesa je inicijalizacija ekstremnog vala u CFD simulaciji, obzirom da ova metoda pruža znatno skraćanje potrebne CFD simulacije. Druge metode iniciranja ekstremnog vala zahtijevaju veću proračunsku domenu zbog

potrebe razvoja nelinearnosti valnih komponenti kojima se ekstremni val inicira. Pomoću HOS metode ekstremni val u CFD simulaciji inicira se rješenjem koje je rezultat nelinearne interakcije valnih komponenta i njihove nelinearne propagacije. Ovom simulacijom je potvrđena valjanost načina evaluacije polja brzine pomoću HOS rješenja. Sama pravilna propagacija vala potvrđuje valjanost polja brzina i elevacije slobodne površine.



Slika 16: Prikaz prelaska ekstremnog vala preko prepreke.

## 7 Zaključak

U ovom radu prikazana je implementacija numeričke metode za nelinearnu propagaciju površinskih gravitacijskih valova. Radi se o spektralnoj metodi viših redova koja koristi pseudo-spektralni pristup rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Algoritam numeričke procedure napisan je u programskom jeziku C++, u softveru slobodnog koda OpenFOAM. OpenFOAM je specijalizirani softver za računalnu dinamiku fluida (eng. "*Computational Fluid Dynamics*", CFD).

Pokazan je osnovni matematički model idealnog strujanja na kojem se temelji matematički model propagirajućih površinskih valova. Problem površinskih valova definiran je dinamičkim i kinematičkim rubnim uvjetima na slobodnoj površini. Kinematički i dinamički rubni uvjet na slobodnoj površini su nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe i predstavljaju predmet rješavanja spektralne metode za nelinearnu propagaciju valova. Ukratko su prikazane osnove Fourierove transformacije te je detaljno opisan matematički model spektralne metode viših redova za nelinearnu propagaciju površinskih valova.

Numerička implementacija matematičkog modela spektralne metode viših redova detaljno je prikazana. Inicijalizacija HOS proračuna provodi se pomoću linearnog rješenja dinamičkog i kinematičkog rubnog uvjeta, pri čemu se postepeno prelazi na nelinearno rješenje pomoću relaksacijske sheme. Problem alias-efekta uklatko je objašnjen te je predstavljen način odstranjivanja njegovih nepovoljnih utjecaja na rezultat proračuna. Ukratko su objašnjene osnove numeričke integracije običnih diferencijalnih jednačbi.

Točnost implementiranog algoritma dokazana je na dva testna proračuna. U prvom proračunu provedena je propagacija monokromatskog vala te je prikazan razvoj nelinearnosti. Nelinearne komponente uspoređene su s egzaktnim rješenjem. Poklapanje rezultata je vrlo dobro, što potvrđuje ispravnost algoritma. U drugom proračunu prikazana je usporedba propagacije spektra valova s HOS metodom i CFD simulacije. Provedena je kvalitativna usporedba te je pokazano da dolazi do istog grupiranja valnih harmonijskih komponenti. Ovime je pokazano da HOS metoda točno propagira spektar valova, tj. da dolazi do odgovarajuće nelinearne interakcije među harmonicima.

Obzirom da je glavna svrha implementacije nelinearne metode propagacije valova mogućnost inicijalizacije realističnog polja valova u CFD simulaciji, na kraju rada prikazan je primjer takve simulacije. Najprije je pomoću realističnog valnog spektra iniciran HOS proračun u kojem je pronađen događaj ekstremnog vala. Pomoću rješenja događaja ekstremnog vala inicirana je CFD simulacija. Simuliran je udar vala u horizontalan kvadar uz lom vala. Ovom simulacijom predstavljena je mogućnost aplikacije implementiranog nelinearnog valnog modela za probleme u brodogradnji i pomorskoj tehnici.

Konačno se može zaključiti da je implementacija spektralne metode viših redova za nelinearnu propagaciju valova uspješan. Rezultati predstavljeni u ovom radu dokazuju valjanost algoritma. U daljnjem radu vršit će se nadogradnja implementirane metode na dvije dimenzije Fourierovog prostora. Dvodimenzionalni Fourierov prostor omogućuje opisivanje trodimenzionalnog polja valova. Ekstremni valovi su u stvarnosti trodimenzionalne pojave

te na njih utječe prostorna superpozicija valnih komponenti. Ovaj rad tako predstavlja osnovu za daljnju nadogradnju nelinearnog modela valova.



## Literatura

- [1] G. Lupieri, T. Puzzer, G. Contento, Numerical study of the wave-wave interaction by viscous flow simulations with OpenFOAM, in: XXI. Symposium Sorta, 2014.
- [2] J. Prpić-Oršić, V. Čorić, Pomorstvenost plovnih objekata, Zigo, Rijeka, 2006.
- [3] C. Kharif, E. Pelinovsky, Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 22 (2003) 603–634.
- [4] J. M. J. Journeé, W. Massie, *Offshore Hydromechanics*, Delft University of Technology, Cambridge University Press, 2001.
- [5] D. G. Dommermuth, D. K. P. Yue, A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, *J. Fluid Mech.* 184 (1987) 267–288.
- [6] B. J. West, K. A. Brueckner, R. S. Janda, A New Numerical Method for Surface Hydrodynamics, *Journal of Geophysical Research* 92 (C11) (1987) 11803–11824.
- [7] D. G. Dommermuth, The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme, *Wave Motion* 32 (2000) 307–317.
- [8] M. Tanaka, A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation, *Fluid Dynamics Research* 28 (2001) 41–60.
- [9] G. Ducrozet, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant, 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 7 (2007) 109–122.
- [10] V. Vukčević, H. Jasak, Decomposition Model for Naval Hydrodynamic Applications, Part I: Computational Method, *Ocean Engineering* (submitted 2015).
- [11] V. Vukčević, H. Jasak, Decomposition Model for Naval Hydrodynamic Applications, Part II: Verification and Validation, *Ocean Engineering* (submitted 2015).
- [12] R. Dean, R. Dalrymple, *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, World Scientific, 1984.
- [13] G. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge university press, 1967.
- [14] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 2000.
- [15] L. H. Holthuijsen, *Waves in Oceanic and Coastal Waters*, Delft University of Technology and UNESCO-IHE, 2007.
- [16] D. Champeney, *Fourier Transforms and Their Physical Applications*, Academic press, 1973.
- [17] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 2002.

- [18] C. Canuto, M. Hussaini, A. Quarteroni, T. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer, 1988.
- [19] L. Schwartz, Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves, *J. Fluid Mech.* 62 (1974) 553–578.
- [20] M. Banner, Wave Breaking in Deep Water, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 25 (1993) 373–397.
- [21] H. Jasak, I. Gatin, V. Vukčević, Numerical Simulation of Wave Loading on Static Offshore Structures, in: 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI), 2014.

## Sažetak

Provedena je numerička implementacija nelinearne spektralne metode viših redova (eng. "*Higher Order Spectrum*", HOS) za propagaciju površinskih valova. Prikazana je matematička pozadina metode i prateći matematički alati. Numerička procedura na temelju koje je metoda implementirana je detaljno predstavljena. Razlog implementacije metode je prvenstveno inicijalizacijai realističnog valnog polja u simulacijama računalne dinamike fluida (eng. "*Computational Fluid Dynamics*", CFD). Točnost metode provjerena je na dva testna proračuna. U prvom proračunu provedena je usporedba nelinearne propagacije monokromatskog vala s analitičkim rezultatima. U drugom proračunu uspoređena je propagacija spektra valova s rezultatima viskoznog proračuna. Obje usporedbe pokazuju da je implementirani algoritam dovoljno precizan za inženjersku upotrebu. Na posljétku je prikazana simulacija računalne dinamike fluida u kojoj je simuliran ekstremán val za čiju se inicijalizaciju koristila implementirana HOS metoda.

Ključne riječi: Spektralna metoda viših redova, nelinearni površinski valovi, računalna dinamika fluida.

## Summary

Numerical implementation of nonlinear Higher Order Spectral method (HOS) for propagation of surface waves is presented in this work. Mathematical background and accompanying mathematical tools are presented. Numerical procedure on which the implementation is based is explained in detail. The purpose of this work is efficient coupling with Computational Fluid Dynamics (CFD) tools. The validity of the implemented method is tested on two cases. The first case presents the comparison of nonlinear monochromatic wave train propagation with analytical results. In the second test case, wave spectrum is propagated with HOS. The modification of the spectrum is compared to results obtained by fully nonlinear viscous flow solver. Both test cases show good agreement and prove the validity and accuracy of the implemented model. Finally, a CFD simulation of freak wave impact on a fixed structure is carried out. The freak wave is initialized using HOS solution.

Key words: Higher order spectral method, nonlinear surface waves, computational fluid dynamics.