

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Vedrana Markučić

**HIDRODINAMIČKI OTPOR TRUPA JEDRILICE  
KLASE OPTMIST**

Zagreb, 2014.

Ovaj rad izradila sam na Katedri za mehaniku fluida Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, pod vodstvom prof. dr. sc. Maria Šavara, dipl. ing. te je predan na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2013./2014.

## SADRŽAJ RADA

POPIS OZNAKA .....	IV
POPIS SLIKA .....	VI
POPIS TABLICA.....	VIII
1. UVOD.....	1
1.1. Općenito .....	1
1.2. Motivacija .....	2
1.3. Cilj i hipoteza rada .....	4
2. TEORIJSKE OSNOVE .....	5
2.1. Numerička metoda rješavanja problema.....	5
2.2. Osnove računalne dinamike fluida.....	7
2.2.1. Osnovne jednačbe dinamike fluida .....	7
2.2.2. Turbulencija .....	9
2.2.2.1. Statističko opisivanje turbulencije .....	11
2.2.2.2. Prijenos fizikalne veličine u turbulentnom strujanju .....	12
2.2.2.3. Disipacija energije .....	13
2.2.2.4. Vremenski osrednjene Navier – Stokesove jednačbe .....	13
2.2.2.5. $k - \epsilon$ model turbulencije .....	14
2.2.2.6. Zidne funkcije .....	17
2.2.3. Metoda konačnih volumena .....	19
2.3. Otpor broda .....	22
2.3.1. Otpor trenja i otpor oblika.....	23
2.3.2. Otpor valova.....	23
3. NUMERIČKE SIMULACIJE .....	28
3.1. Izrada geometrijskog modela jedrilice Optimist .....	28
3.1.1. Slučaj ravnog urona za masu jedriličara od 45 kg u 3D modelu .....	31
3.1.2. Različite dubine urona kobilice u 3D modelu.....	32
3.2. Domena proračuna i geometrijska mreža.....	34
3.2.1. Domena proračuna i geometrijska mreža za varijaciju brzina i dubina urona kobilice.....	34
3.2.2. Domena proračuna i geometrijska mreža za izračun otpora valova .....	42
3.3. Postavke numeričkih simulacija.....	44
3.3.1. Postavke numeričkih simulacija za određivanje ovisnosti hidrodinamičkog otpora o brzini .....	44
3.3.2. Postavke numeričkih simulacija za određivanje ovisnosti hidrodinamičkog otpora o dubini urona kobilice .....	46
3.3.3. Postavke numeričkih simulacija za određivanje otpora valova .....	47
3.4. Numerička simulacija – izračun.....	49
4. EKSPERIMENTALNO MJERENJE .....	51
4.1. Opis eksperimentalnog mjerenja.....	51
4.2. Oprema za mjerenje (mjerna oprema, mjerni instrumenti).....	52
5. PRIKAZ I ANALIZA REZULTATA .....	55

---

5.1. Ovisnost koeficijenta hidrodinamičkog otpora o brzini.....	56
5.2. Ovisnost koeficijenta hidrodinamičkog otpora o dubini urona kobilice.....	58
5.3. Analiza ovisnosti bezdimenzijskih koeficijenata hidrodinamičkog otpora o masi jedričara, uzdužnom nagibu jedrilice, dubini urona kobilice i brzini .....	61
5.4. Otpor valova.....	63
5.5. Rezultati eksperimentalnog mjerenja.....	66
6. ZAKLJUČAK.....	71
ZAHVALE .....	73
POPIS LITERATURE .....	74
SAŽETAK.....	75
SUMMARY .....	76
PRILOZI.....	77

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	[m <sup>2</sup> ]	površina konačnog volumena
$\Delta A$	[m <sup>2</sup> ]	površina stranice konačnog volumena
$A_D$	[m <sup>2</sup> ]	referentna površina za koeficijent otpora
$a_C$	[kg/s]	centralni koeficijent u diferencijskoj jednadžbi
$a_N$	[kg/s]	koeficijent u diferencijskoj jednadžbi
$b$	[-]	slobodni član u diferencijskoj jednadžbi
$c_v$	[J/kg K]	specifični toplinski kapacitet
$C_D$	[-]	koeficijent otpora
$D$	[kg/s]	jačina difuzije
$e$	[J/kg K]	specifična unutarnja i kinetička energija
$F_n$	[kg/s]	jačina konvekcije
$f_i$	[N/kg]	komponente vektora specifične masene sile
$G$	[W/m <sup>3</sup> ]	generacija kinetičke energije turbulencije
$J_j$	[-]	vektor fluksa fizikalnog svojstva
$l_i$	[m]	duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju
$\bar{k}$	[J/kg]	kinetička energija turbulencije
$p$	[N/m <sup>2</sup> ]	tlak
$\bar{p}$	[N/m <sup>2</sup> ]	statistički osrednjeno polje tlaka
$p'$	[N/m <sup>2</sup> ]	pulzirajući dio polja tlaka
$q_H$	[W/m <sup>3</sup> ]	volumenska gustoća toplinskih izvora
$Re$	[-]	Reynoldsov broj
$Re_{kr}$	[-]	kritični Reynoldsov broj
$Re_\lambda$	[-]	turbulentni Reynoldsov broj
$S_\varphi$		izvorski član u općoj konveksijsko – difuzijskoj jednadžbi
$T$	[K]	temperatura
$t$	[s]	vrijeme
$u$	[J/kg]	specifična unutarnja energija
$u_\tau$	[m/s]	brzina trenja
$V$	[m <sup>3</sup> ]	volumen konačnog volumena
$v_i$	[m/s]	komponente vektora brzine strujanja
$\bar{v}_i$	[m/s]	osrednjeni dio vektora brzine strujanja
$v'_i$	[m/s]	pulzirajući dio polja vektora brzine strujanja
$v_n$	[m/s]	projekcija vektora brzine u smjeru vanjske normale

$v_\infty$	[m/s]	brzina neporemećenog strujanja
$v_t$	[m/s]	karakteristična brzina turbulentnih pulsacija
$x_i$	[m]	pravokutne koordinate
$x_{kr}$	[m]	kritična duljina
$y^+$	[-]	bezdimenzijska udaljenost prvog čvora od stijenke
$\delta$	[-]	Kroneckerov simbol
$\Sigma$	[N/m <sup>2</sup> ]	Tenzor viskoznih naprezanja
$\lambda$	[m]	valna duljina turbulentnih pulsacija
$\phi$	[-]	volumenska gustoća fizikalne veličine
$\varphi$	[-]	polje fizikalne veličine
$\Delta n$	[m]	udaljenost između čvorova konačnih volumena
$\Gamma$	[kg/m s]	koeficijent difuzije
$\Gamma_t$	[kg/m s]	koeficijent turbulentne difuzije
$\mu$	[-]	dinamička viskoznost
$\mu_t$	[-]	turbulentna viskoznost
$\bar{\varepsilon}$	[W/kg]	disipacija kinetičke energije turbulencije
$\tau$	[N/m <sup>2</sup> ]	tenzor naprezanja
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	gustoća
$\nu$	[m <sup>2</sup> /s]	kinematička viskoznost

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Bočna skica jedrilice optimist [16].....	3
Slika 2.	Rješavanje inženjerskih problema primjenom numeričkog pristupa [7].....	6
Slika 3.	Prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje pri opstrujavanju ravne ploče [6].	10
Slika 4.	Prijenos fizikalne veličine između konačnih volumena .....	19
Slika 5.	Sustav valova Lorda Kelvina [1].....	24
Slika 6.	Prikaz sustava pramčanih i krmenih valova [1] .....	24
Slika 7.	Sustavi valova tijela parabolične vodne linije [1] .....	26
Slika 8.	Omjer koeficijenata otpora broda [1] .....	27
Slika 9.	Nacrt jedrilice Optimist preuzet iz časopisa Brodogradnja [10] .....	28
Slika 10.	3D model jedrilice Optimist .....	29
Slika 11.	Prikaz dijelova jedrilice Optimist.....	30
Slika 12.	Osnovne dimenzija prikazane na 3D modelu .....	30
Slika 13.	Bokocrt cjelokupnog 3D modela.....	31
Slika 14.	Bokocrt 3D modela za 45 kg ravno uronjeno.....	31
Slika 15.	Bokocrt 3D modela za 45 kg ravno uronjeno s $L_{max}$ .....	33
Slika 16.	Bokocrt 3D modela za 45 kg ravno uronjeno s $L_2$ .....	33
Slika 17.	Bokocrt 3D modela za 45 kg ravno uronjeno s $L_{sr}$ .....	33
Slika 18.	Bokocrt 3D modela za 45 kg ravno uronjeno s $L_1$ .....	34
Slika 19.	Prikaz vertikalne ravnine simetrije.....	34
Slika 20.	Prikaz horizontalne ravnine simetrije koja se poklapa sa slobodnom površinom vode .....	35
Slika 21.	Prikaz dimenzija domene proračuna - bokocrt.....	35
Slika 22.	Prikaz dimenzija domene proračuna - nacrt .....	36
Slika 23.	Geometrijska mreža cijele domene proračuna .....	37
Slika 24.	Geometrijska mreža svih volumena bez volumena neposredno uz trup jedrilice .	38
Slika 25.	Geometrijska mreža za volumen neposredno uz trup jedrilice .....	38
Slika 26.	Mreža trupa jedrilice za slučaj dubine urona kobilice $L_1$ .....	39
Slika 27.	Mreža trupa jedrilice za slučaj dubine urona kobilice $L_{max}$ .....	39
Slika 28.	Uvećani prikaz mreže kobilice za slučaj dubine urona kobilice $L_1$ .....	40
Slika 29.	Uvećani prikaz mreže kormila .....	40
Slika 30.	Diskretizacija sloja uz površinu jedrilice na vertikalnoj ravnini simetrije .....	41
Slika 31.	Diskretizacija sloja uz površinu jedrilice na horizontalnoj ravnini simetrije .....	41
Slika 32.	Prikaz dimenzija domene proračuna za izračun otpora valova - nacrt.....	42
Slika 33.	Geometrijska mreža cijele domene proračuna za izračun otpora valova .....	43
Slika 34.	Prikaz načina rada VOF modela [13] .....	47
Slika 35.	Dijagram umjeravanja dinamometra .....	52
Slika 36.	3D prikaz opstrujavanja uronjenog dijela jedrilice, gdje su strujnice u bojama vrijednosti apsolutne brzine za slučaj 45 kg ravno uronjen .....	55
Slika 37.	Dijagram ovisnosti bezdimenzijskog koeficijenta otpora o brzini .....	57
Slika 38.	Dijagram ovisnosti bezdimenzijskog koeficijenta otpora o dubini urona kobilice	58
Slika 39.	Polje apsolutne brzine s duljinom kobilice $L_{max}$ .....	59
Slika 40.	Polje apsolutne brzine s duljinom kobilice $L_2$ .....	59
Slika 41.	Polje apsolutne brzine s duljinom kobilice $L_{sr}$ .....	60
Slika 42.	Polje apsolutne brzine s duljinom kobilice $L_1$ .....	60
Slika 43.	Sila otpora valova .....	63

Slika 44.	Vrijednosti faze 1 – zraka na ravnini $y=0$ .....	64
Slika 45.	Vrijednosti faze 1 – zraka na ravnini $y=0$ , detalj pramca.....	65
Slika 46.	Vrijednosti faze 1 – zraka na ravnini $y=0$ , detalj krme .....	65
Slika 47.	Dijagram ovisnosti sile otpora o brzini za različite mase.....	66
Slika 48.	Dijagram ovisnosti sile otpora o brzini za različite mase.....	67
Slika 49.	Dijagram ovisnosti sile otpora o brzini za različite mase uz aproksimaciju točaka dobivenih simulacijom s polinomom .....	68
Slika 50.	Dijagram iz kojeg pomoću regresijskih krivulja određujemo iznose za brzinu tri čvora .....	69
Slika 51.	Ovisnosti sile otpora o masi jedriličara, usporedba simulacije i numeričkog rješenja.....	70
Slika 52.	Ovisnost koeficijenta otpora $C_D$ o masi jedriličara .....	80
Slika 53.	Ovisnost koeficijenta otpora $C_D$ o nagibu jedrilice .....	80
Slika 54.	Ovisnost koeficijenta otpora o masi jedriličara .....	82
Slika 55.	Ovisnost koeficijenta otpora o nagibu jedrilice.....	82
Slika 56.	Polje apsolutne brzine za 30 kg ravno uronjeno.....	84
Slika 57.	Polje apsolutne brzine za 45 kg s nagibom 4 stupnja prema nazad .....	84
Slika 58.	Polje apsolutne brzine za 45 kg ravno uronjeno.....	84
Slika 59.	Polje apsolutne brzine za 45 kg s nagibom 2 stupnja prema nazad .....	84
Slika 60.	Polje apsolutne brzine za 60 kg ravno uronjeno.....	84
Slika 61.	Polje apsolutne brzine za 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed.....	84



**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Osnovne dimenzije jedrilice Optimist .....	28
Tablica 2. Broj konačnih volumena .....	42
Tablica 3. Rubni uvjeti .....	44
Tablica 4. Promatrane brzine.....	45
Tablica 5. Rubni uvjeti .....	48
Tablica 6. Koeficijenta otpora i hidrodinamičke sile otpora pri različitim brzinama .....	57
Tablica 7. Koeficijenta otpora i hidrodinamičke sile otpora za različite dubine urona kobilice .....	58
Tablica 8. Usporedni prikaz koeficijenta otpora u ovisnosti o raznim parametrima .....	61
Tablica 9. Usporedni prikaz koeficijenta otpora u ovisnosti o raznim parametrima .....	62
Tablica 10. Koeficijenta otpora i hidrodinamičke sile otpora pri različitim brzinama .....	63
Tablica 11. Eksperimentalno dobivena ovisnost sile otpora o masi jedriličara .....	70
Tablica 12. Usporedba koeficijenata otpora i hidrodinamičke sile otpora za ravno uronjene slučajeve .....	79
Tablica 13. Usporedba koeficijenata otpora i hidrodinamičke sile otpora za slučajeve s nagibom jedrilice .....	79
Tablica 14. Usporedba koeficijenata otpora za slučajeve s ravnim uronom .....	81
Tablica 15. Usporedba koeficijenata otpora za slučajeve s nagibom jedrilice.....	81

## 1. UVOD

### 1.1. Općenito

Gibanje broda proučava posebna grana znanosti koja se zove brodska hidrodinamika ili hidrodinamika broda. Podjele brodova mogu se sistematizirati s obzirom na različite kriterije: prema namjeni, prema vodama kojima plove, prema građevnom materijalu, prema vrsti pogona, itd. S obzirom na namjenu brodovi se dijele na trgovačke (teretni i putnički brodovi), ratne brodove i specijalne brodove koji su namijenjeni za posebne poslove i zadatke - ribarski brodovi, tegljači, ledolomci, trajekti, jahte, jedrilice itd. kako je objašnjeno u literaturi [4].

Začetnik analize otpora je bio Isaac Newton, *Matematička načela prirodnih znanosti*, 1687. god. koji postavlja prve teorijske izraze za određivanje otpora. Leonhard Euler poznat kao osnivač teorijske hidrodinamike objavljuje 1749. god. radove u kojima izlaže znanstvene osnove teorije. Tijekom 18. st. razvija se teorija hidrodinamike i provode prvi pokušaji određivanja otpora broda na osnovi ispitivanja modela (Bird, D'Alambert). Pojavom parnog stapnog stroja u 19. st. brodska hidrodinamika se značajno razvija zbog potrebe određivanja pogonske snage parnog stroja. Prethodna saznanja nisu bila dovoljno pouzdana pa se metoda prognoziranja snage otpora koju je predložio W. Froude 1870. god. dalje razvijala i postala temeljem današnje svakodnevne prakse [1].

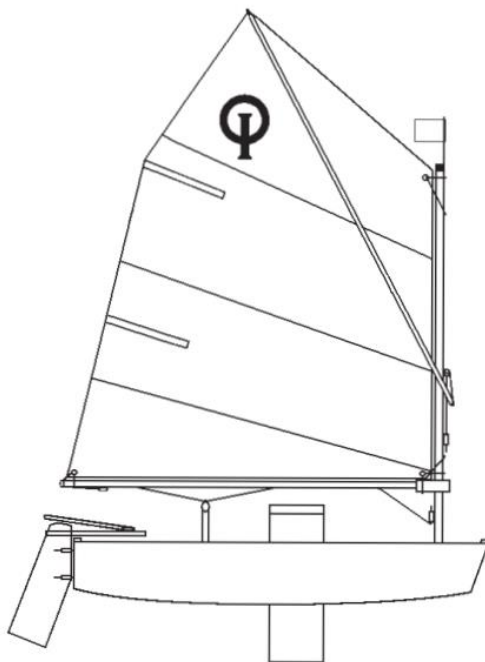
Hidrodinamički problemi poput otpora trupa broda su složene prirode i opisani su kompleksnim jednadžbama koje nije moguće riješiti analitički, zato se u raznim računalnim programima koriste numerički principi računalne dinamike fluida (engl. Computational fluid dynamics, CFD). Vršiti se geometrijska diskretizacija domene strujanja na velikom broju konačnih volumena, a zatim se provodi diskretizacija diferencijalnih jednadžbi koje opisuju prijenos fizikalnih veličina na granicama konačnih volumena. Korištenje numeričkog rješavača sa sobom nužno donosi određenu pogrešku, čiji utjecaj ovisi o kvaliteti matematičkog modela i geometrijske diskretizacije. Točnost ovisi o finoći geometrijske diskretizacije (tj. mreže) što u pravilu povećava broj elemenata te produljuje vremena numeričke simulacije. Stoga je najbolji pristup kombinacija numeričkih simulacija i eksperimentalnih ispitivanja.

## 1.2. Motivacija

U natjecateljskom jedrenju kao i u drugim sportskim natjecanjima bitan je svaki, pa i naizgled nebitan djelić, koji u konačnici može dati razliku u postizanju boljeg odnosno nešto slabijeg rezultata. U jedrenju je mnoštvo utjecaja izvan mogućnosti kontrole, poput smjera i jačine vjetera, a od jedriličara se očekuje da ostvare najbolje moguće rezultate s onim varijablama koje mogu kontrolirati i na koje mogu utjecati. Većina jedriličara od malih nogu uči i razvija "osjećaj" za brod, jedra i vjetar te skoro instinktivno znaju gdje je najbolje sjesti na brodu, kako namjestiti jedro, koliko spustiti kobilicu, koji kurs odabrati itd. U natjecateljskom jedrenju poznati su utjecaji pojedinih faktora na hidrodinamički otpor trupa (utjecaj brzine, mase, kuta nagiba jedrilice, dubine urona kobilice itd), ali su ti utjecaji poznati u relativnom smislu, a ne kvantitativno. Ovim radom sam prvenstveno željela odrediti kvantitativne parametre i međusobne ovisnosti promatranih parametara na ukupni hidrodinamički otpor trupa broda.

Jedrilicu klase Optimist konstruirao je Clark Mills 1947. godine za potrebe učenja mladih jedriličara. Konstrukcija je standardizirana 1960. godine, a 1995. su postavljena stroga pravila konstrukcije. Međunarodni savez klase Optimist (International Optimist Dinghy Association, IODA) osnovan je 1965. godine, a Svjetska jedriličarska federacija (International Sailing Federation, ISAF) klasi je dodijelila međunarodni status 1973. godine. Međunarodni savez klase Optimist (IODA) danas ima preko 60 članica. Jedrilice Optimist su se u početku izrađivale od drveta, a danas se uglavnom rade od stakloplastike, [15] i [16].

Natjecateljska klasa jedrilice Optimist je posebno zanimljiva zbog značajnih razlika masa jedriličarki i jedriličara u dobi od 7 do 15 godina starosti što obuhvaća raspon masa od 20-ak do 70-ak kilograma. U odnosu na najlakše jedriličare takva odstupanja masa unutar klase iznose i više od 100%, a detaljnije se može pročitati u literaturi [18]. Stoga je jedrilica klasa Optimist odabrana kao promatrani brod za sve numeričke simulacije i eksperimentalna mjerenja.



**Slika 1. Bočna skica jedrilice optimist [16]**

Uz nama dostupna računala i njihove mogućnosti nije moguće provesti numerički proračun hidrodinamičkog otpora trupa jedrilice s istovremeno promatranim svim parametrima koji utječu na hidrodinamički otpor. U ovom će se radu primjenom metoda računalne dinamike fluida, odrediti promjena sile otpora u ovisnosti o dubini uronjenosti kobilice i brzini broda pri čemu će se za pojednostavljenje koristiti horizontalne ravnine simetrije umjesto slobodne površine te će se moći promatrati otpor oblika i otpor trenja. Također će se odrediti otpor valova pri konstantnoj brzini od 3 čvora (1,5 m/s).

Dobiveni rezultati će se usporediti s već određenim promjena sile otpora u ovisnost o istisnini i uzdužnom nagibu broda pri gibanju uronjenog dijela trupa broda, iz literature [17] i prikazanih u prilogu (Prilog A), kako bi se dobila potpuna slika hidrodinamičkog koeficijenta otpora. Ukupni rezultati će se usporediti s eksperimentalnim mjerenjima u svrhu potvrde točnosti.

### 1.3. Cilj i hipoteza rada

Glavni cilj ovog rada je numerički i eksperimentalno odrediti hidrodinamički otpor broda tj. jedrilice klase Optimist.

Zadaća numeričke simulacije je pratiti promjene hidrodinamičkog otpora broda u ovisnosti o istisnini, uzdužnom nagibu broda, brzini kretanja broda, dubini urona kobilice i otporu valova, te odrediti kompletnu sliku strujanja i gradijente fizikalnih veličina u čitavoj domeni proračuna (polje brzine, temperature, tlaka itd.). Cilj je odrediti ukupni bezdimenzijski koeficijent hidrodinamičkog otpora trupa jedrilice kao funkciju navedenih parametara:

$$C_D = f(v, L, m, \alpha), \quad (1)$$

gdje je  $v$  brzina kretanja jedrilice,  $L$  dubina urona kobilice,  $m$  masa jedriličara i  $\alpha$  uzdužni nagib jedrilice. Bezdimenzijski koeficijent je odabran radi usporedivosti rezultata.

Očekuje se da će iznos hidrodinamičkog otpora rasti s povećanjem istisnine, s povećanjem brzine kretanja kao i s povećanjem dubine urona kobilice, te pri nagibu broda prema naprijed kada je pramac trupa jedrilice uronjeniji. Također pretpostavljam da će najveći dio otpora broda uzrokovati upravo otpor valova.

Uobičajeno mišljenje je da je težina najviše utječe na iznos hidrodinamičke sile otpora. Hipoteza rada: 'Masa jedriličara nije najutjecajniiji parametar pri porastu ukupnog hidrodinamičkog otpora trupa jedrilice.'

## 2. TEORIJSKE OSNOVE

Poglavlje teorijskih osnova započinje opisom osnova numeričke metode. Zatim prikazuje osnove teorije računalne dinamike fluida gdje su pojašnjene osnovne jednačbe i problemi rješavanja turbulencije te načini diskretizacije pomoću metode konačnih volumena sa shemama diferencije. Te pojašnjava osnove hidrodinamičkog otpora broda.

### 2.1. Numerička metoda rješavanja problema

Numerički pristup je jedan od načina rješavanja inženjerskih problema, uz analitički i eksperimentalni pristup. Numerički pristup daje približna rješenja diferencijalnih jednačbi u konačnom broju točaka koje opisuju zadani model. Odstupanja numeričkog rješenja od egzaktnog su u većini slučajeva prihvatljiva za upotrebu u inženjerskoj praksi. Preduvjet za postizanje pouzdanog numeričkog rješenja je točna formulacija numeričke metode i matematičkog modela. Prednost ovog načina rješavanja problema je jednostavna promjena odgovarajućih parametra u numeričkim simulacijama što omogućuje lakše i brže postizanje optimalnog rješenja [7]. Postupak rješavanja inženjerskih problema primjenom numeričkih metoda sastoji se od tri faze (Slika 2):

- Idealizacija ili matematičko modeliranje

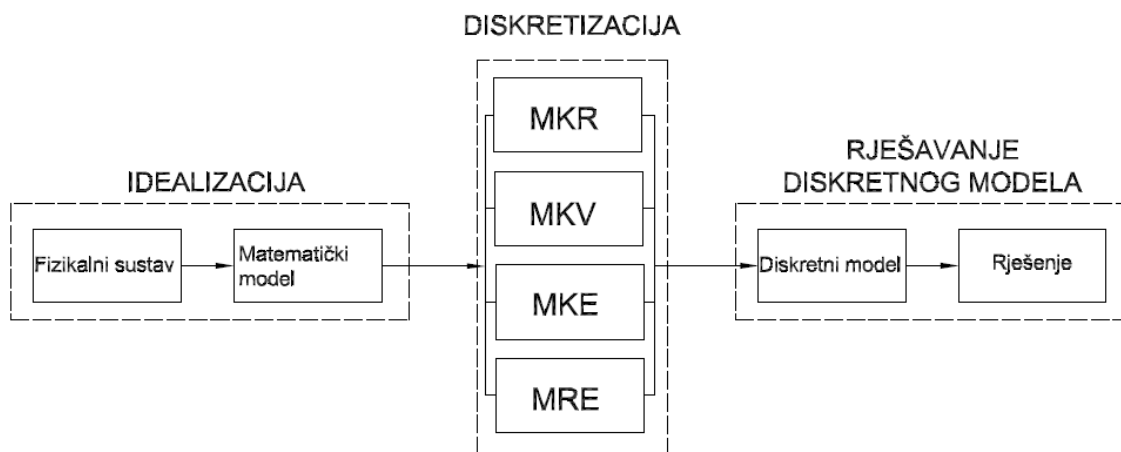
Idealizacija je opisivanje fizikalnog sustava pomoću određenog matematičkog modela. Cilj izrade matematičkog modela je što vjerniji opis problema uz što jednostavniji matematički zapis. Često je nemoguće izraditi apsolutno točan matematički model, pa se tako pristupa određenim aproksimacijama i zanemarivanju određenih parametara [7]. Najčešća pretpostavka koja se koristi pri opisivanju strujanja fluida je da je fluid kontinuum, zamišljena tvar koja bi zadržavala svojstva i za infinitezimalno mali volumen. Također se pretpostavlja homogenost (jednakost fizikalnih svojstava u svim točkama fluida) i izotropnost (jednakost fizikalnih svojstava u svim smjerovima) fluida.

- Diskretizacija matematičkog modela

Diskretizacija je postupak kojim se kontinuirani sustav zamjenjuje diskretnim sustavom koji je opisan s konačnim brojem nepoznatih varijabli. Diskretizacija se dijeli na diskretizaciju područja, diskretizaciju vremena i diskretizaciju jednačbi. Diskretizacija područja predstavlja podjelu područja na konačni broj segmenata (metoda konačnih razlika - MKR, metoda konačnih volumena - MKV, metoda

konačnih elemenata - MKE i metoda rubnih elemenata - MRE), diskretizacija vremena je podjela vremenskog kontinuuma na određeni broj vremenskih koraka dok je diskretizacija jednačbi aproksimacija diferencijalnih jednačbi sustavom algebarskih jednačbi [7].

- Rješavanje sustava diskretiziranih jednačbi



**Slika 2. Rješavanje inženjerskih problema primjenom numeričkog pristupa [7]**

Numerička simulacija se provodi kroz tri cjeline [5]:

- predprocesor
- procesor
- postprocesor

Predprocesor je računalni program ili dio jedinstvenog programskog paketa u kojem se generira geometrijska mreža i definiraju rubni uvjeti proračuna. Pri generiranju mreže treba voditi računa o gustoći mreže, koja s jedne strane mora zadovoljavati računalne resurse, a s druge strane, mora biti dovoljno gusta da bi rezultati bili zadovoljavajući i kako bi se dobro opisale sve promjene polja fizikalnih veličina. Stoga je potrebna gušća diskretizacija u dijelu domene u kojem su veći gradijenti fizikalnih veličina. Budući da ne postoje algoritmi koji automatski generiraju mrežu na temelju geometrije područja i rubnih uvjeta proračuna, na korisniku je da, na temelju iskustva, pretpostavi približnu sliku strujanja i raspodjelu vrijednosti polja fizikalnih veličina, te provede diskretizaciju modela na takav način da zadovolji zahtjeve za točnošću proračuna i istodobno vodi računa o računalnim resursima.

Procesor numerički rješava problem pomoću programa gdje se može odabirati željeni matematički model. Nakon postavljanja svojstava određenog problema (rubnih uvjeta, inicijalizacije početnog rješenja, parametara sustava poput svojstava materijala, određivanja

relevantnih jednadžbi), simulacija se računa dok se ne postigne konvergencija rješenja kroz određen broj iteracija ili vremenskih koraka.

Postprocesor je program koji služi za vizualizaciju rezultata proračuna, prikaz skalarnih, vektorskih i tenzorskih polja, integriranih veličina, te dijagramskog prikaza željenih veličina.

Glavna prednost numeričkih simulacija je mogućnost da se jednostavnom promjenom parametara sustava dobiva uvid u utjecaj pojedinog parametra na rezultate, te mogućnost analiziranja promatrane pojave. Prednost je i količina informacija koju nam pruža numerički način rješavanja, dobiva se kompletna slika strujanja te gradijenti fizikalnih veličina u čitavoj domeni proračuna (polje brzine, temperature, tlaka itd.). Uzimajući u obzir dobivene rezultate, i uspoređujući ih sa željenim rezultatima, moguće je mijenjati geometriju, ponovno provesti proračun, nove rezultate uspoređivati sa starima, te tako brzo razvijati novi proizvod ili nove spoznaje bez potrebe za izradom fizičkog modela.

Primarni nedostatak računalnih simulacija je ograničenost na probleme za koje postoji pouzdan matematički model, što također ograničava modeliranje turbulentnih strujanja [5].

## 2.2. Osnove računalne dinamike fluida

### 2.2.1. Osnovne jednadžbe dinamike fluida

Dinamika fluida temelji se na osnovnim zakonima fizike u koje spadaju zakon očuvanja mase, zakon očuvanja količine gibanja i zakon momenta količine gibanja, te zakon očuvanja energije i drugi zakon termodinamike. Osnovne jednadžbe dinamike fluida se definiraju za materijalni volumen, a primjenjuju za kontrolni volumen ili proizvoljni volumen.

Materijalni volumen se sastoji stalno od jednih te istih čestica fluida te je ekvivalentan tijelu u mehanici i zatvorenom termodinamičkom sustavu u termodinamici, dok se kontrolni volumen definira kao volumen nepromjenjivog položaja, oblika i veličine, a proizvoljni volumen je volumen koji može biti promjenjiv u vremenu.

Zakon očuvanja mase za materijalni volumen glasi: Brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli. Konzervativni oblik zakona očuvanja mase (jednadžbe kontinuiteta):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$



Zakon količine gibanja za materijalni volumen glasi: Brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen.

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ji} + \Sigma_{ji}) + \rho f_i, \quad (3)$$

gdje član  $\Sigma_{ji}$  prema Newtonovom zakonu viskoznosti za stlačivo strujanje uz zanemarenje volumenske viskoznosti fluida glasi

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji}.$$

Zakon momenta količine gibanja za materijalni volumen glasi: Brzina promjene momenta količine gibanja materijalnog volumena, u odnosu na odabrani pol, jednaka je sumi momenata vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen, u odnosu na taj isti odabrani pol. Ako se pretpostavi da u fluidu nema momenata raspodijeljenih po površini materijalnog volumena ili unutar samog volumena, tada se zakon očuvanja momenta količine gibanja svodi na činjenicu simetričnosti tenzora naprezanja  $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$ .

Zakon očuvanja energije za materijalni volumen glasi: Brzina promjene zbroja kinetičke i unutarnje energije materijalnog volumena jednaka je snazi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen, te brzini izmjene topline materijalnog volumena s okolinom:

$$\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_v v_j T)}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \Sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_H, \quad (4)$$

gdje je  $q_H$  volumenska gustoća toplinskih izvora. Jednadžba (4) je izvedena uz primjenu kaloričke jednadžbe stanja i Fourierovog zakona toplinske vodljivosti.

S obzirom da nas ne zanimaju promjene fizikalnih veličina u nekom gibajućem materijalnom volumenu, osnovni fizikalni zakoni definirani za materijalni volumen nisu pogodni za primjenu u praksi. Polaznu osnovu za metodu konačnih volumena čine oblici osnovnih zakona za kontrolni volumen. Stoga se koristi Reynoldsov transportni teorem za preformuliranje osnovnih jednažbi dinamike fluida za materijalni volumen u jednažbe za kontrolni volumen. Za:

- a) slučaj mirujućeg ( $u_j = 0$ ) kontrolnog volumena  $V_{KV}$  koji je ograđen mirujućom kontrolnom površinom  $S_{KV}$ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \phi dV + \int_{S_{KV}} \phi v_j n_j dS, \quad (5)$$

- b) slučaj promjenjivog kontrolnog volumena  $V$  čija se granica  $S$  giba brzinom  $u_j$ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi dV + \int_{S(t)} \phi (v_j - u_j) n_j dS. \quad (6)$$

U gornjim jednažbama (5) i (6) prvi član predstavlja brzinu promjene sadržaja  $\phi$  u materijalnom volumenu  $V_M$ , drugi član predstavlja brzinu promjene sadržaja  $\phi$  u kontrolnom volumenu a treći član predstavlja protok  $\phi$  kroz kontrolnu površinu. Veličina  $\phi$  označava volumensku gustoću fizikalne veličine. Sve jednažbe i definicije iz ovog podpoglavlja su detaljnije objašnjene u literaturama [5] i [6].

### 2.2.2. Turbulencija

Turbulencija (lat. turbulentus = nemiran, uzburkan) je nepravilno vrtložno gibanje fluida. Unatoč velikoj rasprostranjenosti i učestaloj pojavi, problem turbulentnog strujanja i dan danas nema egzaktnog rješenja. Usprkos značajnom proučavanju turbulencije i dalje ne razumijemo detaljno kako i zašto se turbulencija pojavljuje, niti smo u stanju predvidjeti turbulentno ponašanje.

Strujanja se mogu podijeliti na dvije kategorije ovisno o vrijednostima Reynoldsovog broja. Reynoldsov broj je bezdimenzijski broj koji prikazuje omjer inercijskih i viskoznih sila u strujanju fluida:

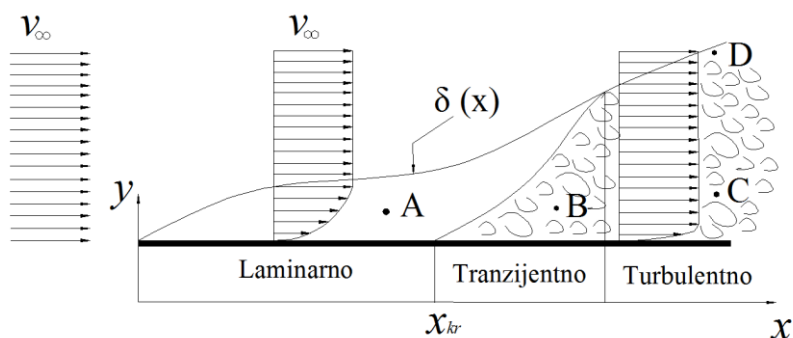
$$Re = \frac{v \cdot x}{\nu}, \quad (7)$$

gdje  $v$  označuje brzinu strujanja fluida,  $x$  karakterističnu duljinu, a  $\nu$  kinematičku viskoznost fluida.

Laminarno strujanje se javlja pri niskim vrijednostima Reynoldsovog broja, kada su viskozne sile dominantne naspram inercijskih, i karakterizira ga uredno gibanje čestica fluida, za razliku od turbulentnog strujanja.

Turbulentno strujanje je izrazito nestacionarno strujanje, koje se javlja pri visokim vrijednostima Reynoldsovog broja, kada su inercijske sile dominantne nad viskoznom, karakteriziraju ga slučajne pulsacije brzine i tlaka, te intenzivno miješanje fluida na razini čestica. Intenzivno miješanje na razini čestica daje turbulentnom strujanju difuzijski karakter čija je posljedica povećana disipacija energije. Za turbulentno strujanje karakteristično je da pored srednje brzine cijelog strujanja, svaka čestica fluida ima još i dodatnu brzinu koja može biti djelomično u smjeru glavnog strujanja, djelomično poprečna na smjer strujanja.

Na slici [Slika 3] prikazano je opstrujavanje ravne ploče. Na samom početku, gdje je Reynoldsov broj manji od donje kritične vrijednosti, vlada laminarno strujanje. U presjeku  $x = x_{kr}$ , kada Reynoldsov broj poprimi kritičnu vrijednost  $Re_{kr} = \frac{v_{\infty} x_{kr}}{\nu}$ , pojavljuju se nestabilnosti. Daljnjim udaljavanjem od tog presjeka u smjeru strujanja pulsacije postaju sve izraženije, te nakon nekog presjeka vlada potpuno turbulentno strujanje.



**Slika 3. Prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje pri opstrujavanju ravne ploče [6]**

I u laminarnom i u turbulentnom strujanju prisutno je područje u neposrednoj blizini tijela, u kojem se brzina fluida mijenja od nule (na samoj površini tijela, zbog viskoznosti fluida koji se lijepi za stijenu), do brzine neporemećenog strujanja. To područje naziva se graničnim slojem, unutar kojeg se niti u turbulentnom strujanju, gdje su inercijalne sile dominantne nad viskoznom, ne mogu zanemariti viskozne sile. Ipak, zbog izraženije difuzije, koja ima tendenciju ujednačavanja profila, u turbulentnom strujanju profil brzine će biti ujednačeniji, pa će, zbog izraženijeg gradijenta brzine na stijenci, biti veće i smično naprezanje. Turbulencija je detaljnije obrađena u literaturi [6].

2.2.2.1. Statističko opisivanje turbulencije

Zbog prirode turbulentnog strujanja, pri numeričkom rješavanju Navier – Stokesovih jednadžbi za slučaj razvijenog turbulentnog strujanja, diskretizacija proračuna bi morala biti tako sitna da se obuhvate sve amplitude pulsacija fizikalnih veličina, a vremenski korak integracija bi morao biti tako mali da se obuhvate sve frekvencije turbulentnih pulsacija. Takva vrsta izračuna dala bi jako veliki broj rezultata što bi bilo problematično sa stajališta brzine računanja i kapaciteta današnjih računala, te takvi proračuni nisu nužni kako bi se riješio problem turbulentnog strujanja.

Iz tog razloga se obično koristi uprosječivanje Navier – Stokesovih jednadžbi po vremenu koje daju integralne veličine poput protoka, naprezanja na nekoj površini itd. čime se značajno olakšava zadaća numeričkog rješavanja tih jednadžbi, bez da se gubi na točnosti rješenja. Danas se najčešće koristi Reynoldsovo osrednjavanje, prema kojem se neka veličina (tlak, brzina) u turbulentnom strujanju može prikazati kao zbroj vremenski osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela. Vremenski osrednjena vrijednost u razdoblju  $T_0$  glasi:

$$\bar{y}(x_i, t) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(x_i, t - \tau) \cdot d\tau, \quad (8)$$

gdje  $T_0$  mora biti odabran tako da vrijedi  $\bar{\bar{y}} = \bar{y}$ . Vremenski osrednjena vrijednost pulsirajućeg dijela bilo koje fizikalne veličine jednaka je nuli.

Primjenom Reynoldsovog osrednjavanja na opći oblik zakona očuvanja za nestlačivo strujanje ( $\rho = \text{konst.}$ ):

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + S_\varphi, \quad (9)$$

gdje  $\varphi$  predstavlja polje fizikalne veličine,  $\Gamma$  koeficijent difuzije (primjer – toplinska provodnost materijala  $\lambda$  kod kondukcijskog prijenosa topline kroz krutinu), a  $S_\varphi$  izvorski član, te uzevši da je koeficijent difuzije konstantan, polje brzine i specifično fizikalno svojstvo se prikazuju kao zbroj vremenski uprosječene vrijednosti i pulsirajućeg dijela, slijedi:

$$\frac{\partial(\rho\bar{\varphi})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_j\bar{\varphi})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} - \rho\bar{v}'_j\bar{\varphi}' \right) + \bar{S}_\varphi, \quad (10)$$

gdje iščezavaju derivacije pulsirajućih dijelova fizikalnih veličina po vremenu, ali ostaje

prisutan član  $\frac{\partial(\rho\bar{v}'_j\bar{\varphi}')}{\partial x_j}$  kao predstavnik pulsirajućeg strujanja. Član  $\rho\bar{v}'_j\bar{\varphi}'$  predstavlja novu

nepoznanicu, što znači da bi nju trebalo definirati ili je modelirati [5].

#### 2.2.2.2. *Prijenos fizikalne veličine u turbulentnom strujanju*

Prijenos fizikalne veličine u strujanju fluida odvija se putem konvekcije, pri čemu čestica fluida koja je nositelj fizikalnog svojstva (npr. količine gibanja, unutarnje energije) svojim premještanjem prenosi fizikalno svojstvo, i putem difuzije.

Difuzija se pojavljuje u slučaju postojanja gradijenta fizikalne veličine i odvija se u smjeru od područja s višom vrijednosti fizikalne veličine prema području s manjom. Za razliku od konvekcije, koja omogućava prijenos fizikalne veličine samo u smjeru strujanja, difuzija omogućava prijenos i okomito na smjer strujanja. Na taj način je omogućen prijenos npr. topline u laminarnom strujanju fluida okomito na strujnicu uz uvjet da je toplinska provodnost fluida veća od nule. Kod turbulentnog strujanja dolazi i do prodiranja čestica fluida s različitim vrijednostima fizikalnog svojstva iz jednog sloja u drugi čime se ostvaruje miješanje.

U realnim strujanjima su prisutne molekularna difuzija, uslijed viskoznosti fluida, i turbulentna difuzija, uslijed turbulentne viskoznosti fluida zbog koje nastaje turbulentno naprezanje. U razvijenom turbulentnom strujanju (pri intenzivnom miješanju čestica fluida) turbulentna difuzija može biti puno jača od molekularne [6].

Turbulentno naprezanje se modelira sljedećom relacijom:

$$-\rho\bar{v}'_j\bar{\varphi}' = \Gamma_t \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_j}. \quad (11)$$

Ako se izraz uvrsti u vremenski osrednjenu jednadžbu općeg zakona očuvanja u nestlačivom strujanju, nastaje relacija:

$$\frac{\partial(\rho\bar{\varphi})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}'_j\bar{\varphi}')}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\Gamma + \Gamma_t) \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_j} \right) + \bar{S}_\varphi. \quad (12)$$

Koeficijent molekularne i turbulentne difuzije zbrojeni tvore koeficijent efektivne difuzije. Koeficijent molekularne difuzije  $\Gamma$  je svojstvo fluida, dok je koeficijent turbulentne difuzije  $\Gamma_t$  funkcija karaktera strujanja, te je u laminarnom strujanju jednak nuli [5].

2.2.2.3. Disipacija energije

Disipacija energije predstavlja pretvorbu mehaničke energije u unutarnju energiju. U turbulentnom strujanju je veći gradijent brzine na stijenci nego u laminarnom strujanju, što za posljedicu ima da će i tangencijalno naprezanje na stijenci u turbulentnom strujanju biti veće nego u laminarnom strujanju. Proporcionalno povećanju tangencijalnog naprezanja raste i disipacija energije što je vidljivo iz Darcy–Weissbachovog izraza za pad tlaka pri strujanju u cijevima, koji glasi:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v_{sr}^2}{2} \quad (13)$$

Kako je u laminarnom strujanju faktor trenja jednak

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64\nu}{v_{sr}D}, \quad (14)$$

pad tlaka će biti linearno razmjernan srednjoj brzini strujanja, što kod turbulentnog strujanja nije slučaj. U režimu potpuno izražene turbulencije faktor trenja je konstantan. Iz toga slijedi da će pad tlaka u režimu potpuno izražene turbulencije biti razmjernan kvadratu srednje brzine. Isti zaključak vrijedi i pri optjecanju tijela, gdje definiramo koeficijent otpora:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S}. \quad (15)$$

Jednadžba (15) govori o sili otpora, odnosno o snazi potrebnoj za gibanje tijela kroz mirujući fluid (to je snaga potrebna za svladavanje sile otpora, koja se predaje fluidu, a u konačnici se pretvara u unutarnju energiju fluida, što nazivamo disipacijom energije). Za slučaj razvijenog turbulentnog strujanja koeficijent otpora je približno konstantan, što znači da je sila otpora razmjerna kvadratu brzine optjecanja, prema literaturi [6].

2.2.2.4. Vremenski osrednjene Navier – Stokesove jednadžbe

Promatrat ćemo nestlačivo turbulentno strujanje gdje ćemo zanemariti utjecaj masenih sila ( $f_i \equiv 0$ ). Fizikalna polja brzine i tlaka ćemo prikazati zbrojem osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela:

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i, \quad p = \bar{p} + p'. \quad (16)$$

Jednadžba kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial(\bar{v}_j + v'_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (17)$$

Osrednjavanjem jednadžbe dobije se jednadžba kontinuiteta za osrednjeno strujanje:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (18)$$

Budući da je jednadžba kontinuiteta linearna, pa za nju vrijedi princip superpozicije, zbroj jednadžbe kontinuiteta za osrednjeno i pulsirajuće strujanje jednak je jednadžbi kontinuiteta za ukupno strujanje. Obzirom da nas zanimaju samo osrednjene vrijednosti fizikalnih veličina nećemo promatrati jednadžbe za pulsirajuće strujanje. Jednadžba količine gibanja za osrednjeno strujanje glasi:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}'_j \bar{v}'_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \bar{v}'_i \bar{v}'_j \right]. \quad (19)$$

Skup vremenski osrednjenih jednadžbi naziva se Reynoldsovim jednadžbama, u kojima se javlja predstavnik pulsirajućeg strujanja  $-\rho \bar{v}'_i \bar{v}'_j$ , kojeg nazivamo turbulentnim ili Reynoldsovim naprezanjem:

$$-\rho \bar{v}'_i \bar{v}'_j = \begin{bmatrix} -\rho \bar{v}'_1 \bar{v}'_1 & -\rho \bar{v}'_1 \bar{v}'_2 & -\rho \bar{v}'_1 \bar{v}'_3 \\ -\rho \bar{v}'_2 \bar{v}'_1 & -\rho \bar{v}'_2 \bar{v}'_2 & -\rho \bar{v}'_2 \bar{v}'_3 \\ -\rho \bar{v}'_3 \bar{v}'_1 & -\rho \bar{v}'_3 \bar{v}'_2 & -\rho \bar{v}'_3 \bar{v}'_3 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Tenzor Reynoldsovog naprezanja se ne opisuje pomoću jednadžbi, već se modelira, čime se gubi dio informacija koje sadrže Navier – Stokesove jednadžbe [5] i [8].

#### 2.2.2.5. k - ε model turbulencije

Modeli turbulencije su potrebni kako bi se uskladio broj jednadžbi i broj nepoznanica koje se javljaju u Navier – Stokesovim jednadžbama, pomoću modeliranja člana pulsirajućeg strujanja preko poznatih parametara sustava. Modeli turbulencije se dijele s obzirom na red korelacije brzina, budući da se svakom novom korelacijom pojavljuje novi član brzine. Modeli turbulencije temelje se na eksperimentalnim rezultatima.

U modelima prvog reda, modelira se dvojna korelacija brzina prema hipotezi Boussinesqa u obliku:

$$-\rho \bar{v}'_i \bar{v}'_j = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (21)$$

gdje je  $\mu_t$  koeficijent turbulentne viskoznosti koji je funkcija uvjeta strujanja, a u laminarnom strujanju jednak je nuli. Modeli koji se temelje na gornjoj pretpostavci nazivaju se Newtonovskim modelima turbulencije, budući da su analogni s Newtonovim zakonom viskoznosti.

Uvrštavanjem hipoteze Boussinesqa u Reynoldsovu jednadžbu za količinu gibanja, dobiva se izraz:

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i) = - \frac{\partial \left( \bar{p} + \frac{2}{3} \rho \bar{k} \right)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (22)$$

Ovim uvrštavanjem izgubile su se informacije o pulsirajućem strujanju, ali se pojavio problem modeliranja koeficijenta turbulentne viskoznosti.

Prema kinetičkoj teoriji plinova, molekularna viskoznost fluida proporcionalna je gustoći fluida, slobodnoj putanji molekula i karakterističnoj brzini gibanja molekula. Boussinesqova je ideja da se turbulentna naprezanja, koja su posljedica kaotičnog gibanja čestica fluida, modeliraju slično viskozim naprezanjima. Slijedi da se turbulentna viskoznost modelira slično molekularnoj viskoznosti fluida:

$$\mu_t = \rho l_t v_t, \quad (23)$$

gdje je  $l_t$  duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju, a  $v_t$  karakteristična brzina turbulentnih pulsacija. Budući da ove dvije veličine nisu svojstvo fluida, već ovise o obliku strujanja, postoje razni modeli koji se razlikuju po definiciji te dvije veličine.

Jedan od najčešće korištenih modela turbulencije je  $k - \varepsilon$  model turbulencije koji s dvije dodatne transportne jednadžbe opisuje turbulentna svojstva strujanja fluida. Prva transportna varijabla je turbulentna kinetička energija  $k$ , a druga označuje disipaciju turbulentne kinetičke energije i definira se izrazom:

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}, \quad (24)$$

Kinetička energija turbulencije  $k$  sadržana je u pulsacijama turbulentnih strujanja, a mjerenja su pokazala da je glavnina kinetičke energije turbulencije sadržana u pulsacijama velikih razmjera. Budući da se disipacija kinetičke energije vrši putem viskoznih sila, definira se Reynoldsov broj turbulentnih pulsacija:

$$\text{Re}_\lambda = \frac{\rho v_\lambda \lambda}{\mu}, \quad (25)$$

gdje je  $\lambda$  valna duljina pulsacija, a  $v_\lambda$  brzina pulsacija. Glavnina disipacije kinetičke energije vrši se kada je Reynoldsov broj pulsacija malen, tj. kada je utjecaj viskoznih sila značajan, a to se događa pri pulsacijama malih geometrijskih razmjera.



Skup jednadžbi koje opisuju  $k - \varepsilon$  model turbulencije za nestlačivo strujanje se sastoji od:

- jednadžbe kontinuiteta

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (26)$$

- jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} = \frac{-\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (27)$$

gdje  $\bar{p}$  označuje efektivni tlak, a  $\mu_t = C_\mu \rho \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon}$  je koeficijent turbulentne viskoznosti

- jednadžbe za kinetičku energiju turbulencije

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{k}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + G - \rho \bar{\varepsilon}, \quad (28)$$

gdje je izraz za generaciju kinetičke energije turbulencije:

$$G = -\overline{\rho v_i' v_j'} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}. \quad (29)$$

- jednadžbe za disipaciju kinetičke energije turbulencije

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + C_1 G \frac{\bar{\varepsilon}}{k} - C_2 \rho \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k}. \quad (30)$$

Kada su koeficijenti u gornjim jednadžbama konstantni, i iznose:

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0,09 \\ \sigma_k &= 1 \\ \sigma_\varepsilon &= 1,3 \\ C_1 &= 1,44 \\ C_2 &= 1,92 \end{aligned} \quad (31)$$

Prikazani model vrijedi za visoke vrijednosti  $Re_t$ , koji označava odnos između turbulentne i molekularne viskoznosti, prema literaturi [5], [8] i [20].

2.2.2.6. Zidne funkcije

Budući da  $k - \varepsilon$  model turbulencije vrijedi za visoke vrijednosti  $Re_t$  tj. u onom području u kojem je koeficijent turbulentne viskoznosti dominantan nad koeficijentom molekularne viskoznosti, taj model neće biti primjenjiv u području u kojem turbulentna viskoznost nije dominantna. Područje na kojem neće biti primjenjiv  $k - \varepsilon$  model turbulencije je u blizini nepropusne stijenke tj. u graničnom sloju.

Spomenuti problem se rješava formulacijom posebnog modela turbulencije u području uz stijenku ili definiranjem rubnih uvjeta na rubu do kojeg još uvijek vrijedi model pri čemu je potrebno definirati rješenja primjenjiva na područje uz nepropusnu stijenku koje nazivamo zidnim funkcijama.

U neposrednoj blizini stijenke strujanje je paralelno sa stijenkom, pa slijedi da su tangencijalna naprezanja od komponente brzine koja je okomita na stijenku jednaka nuli:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad (32)$$

iz čega zaključujemo da je ukupno tangencijalno naprezanje konstantno, u smjeru okomitom na stijenku i jednako naprezanju na stijenci.

U neposrednoj blizini stijenke zanemaruje se turbulentna viskoznost, te slijedi da je u tom području profil brzine linearan:

$$\bar{u} = \frac{\tau}{\mu} y, \quad (33)$$

a uvrštavanjem bezdimenzijskih veličina  $u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$ ,  $y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu}$ , gdje  $u_\tau$  predstavlja brzinu

trenja, dobiva se:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad (34)$$

ili ako bezdimenzijski zapišemo jednadžbu (33), slijedi:

$$u^+ = y^+. \quad (35)$$

Nakon viskoznog podsloja, u kojem je molekularna viskoznost dominantna nad turbulentnom viskoznošću, slijedi prijelazni podsloj, unutar kojeg su ove dvije viskoznosti istog reda veličine, pa ni u njemu ne vrijedi  $k - \varepsilon$  model turbulencije. Nakon prijelaznog podsloja dolazi inercijski podsloj, u kojem dominira turbulentna viskoznost i u kojem vrijedi  $k - \varepsilon$  model turbulencije. Kada se radi o optjecanju tijela, viskozni, prijelazni i inercijalni

podslj čine zajedno unutarnji dio graničnog sloja, koji se proteže do 15% ukupne debljine graničnog sloja.

Da bi se pouzdano mogao koristiti  $k - \varepsilon$  turbulentni model, moramo osigurati da se bezdimenzijska udaljenost prvog čvora mreže od stijenke nalazi u određenom rasponu vrijednosti. Ako je udaljenost prvog čvora od nepropusne stijenke prevelika te se čvor nalazi izvan graničnog sloja, turbulentni model će krivo izračunati veličine strujanja u blizini stijenke, što vodi do krive slike strujanja. S druge strane, ako je udaljenost prvog čvora od nepropusne stijenke premala i on se nalazi u viskoznom podslju, rezultati će također biti pogrešni. Iskustva pokazuju da vrijednost bezdimenzijske udaljenosti prvog čvora od stijenke  $y^+$  u rasponu od 30 do 600 daje dobre rezultate, s tim da je cilj doći što bliže vrijednosti 30. Stoga je jako bitno paziti na položaj prvog čvora do nepropusne stijenke u postupku kreiranja geometrijske mreže.

Smično naprežanje na stijenci se računa prema izrazu:

$$\tau = \rho u_\tau^2 = \rho u_\tau^2 \frac{u^+}{u^+} = \rho \frac{u_\tau}{u^+} \bar{u} = \frac{\rho \kappa C_\mu^{\frac{1}{4}} \sqrt{k}}{\ln(Ey^+)} \bar{u}, \quad (36)$$

gdje se veličine  $\bar{u}$ ,  $\bar{k}$  i  $y^+$  odnose na prvi čvor do stijenke, a  $E$  je konstanta integracije koja se javlja u izrazu za  $u^+$ , prema [8], [9] i [20].

### 2.2.3. Metoda konačnih volumena

U programskim paketima za rješavanje problema računalne dinamike fluida metoda konačnih volumena predstavlja uobičajeni pristup kod turbulentnih strujanja s visokim vrijednostima Reynoldsovog broja [5].

Metoda konačnih volumena (MKV) je diskretizacijska metoda koja dijeli razmatrano područje pomoću konačnih ili kontrolnih volumena, u kojima se računaju vrijednosti polja fizikalnih veličina. Konačni volumeni moraju obuhvatiti domenu strujanja i ne smiju se preklapati. Zakoni očuvanja ostaju zadovoljeni za svaki konačni volumen [7].

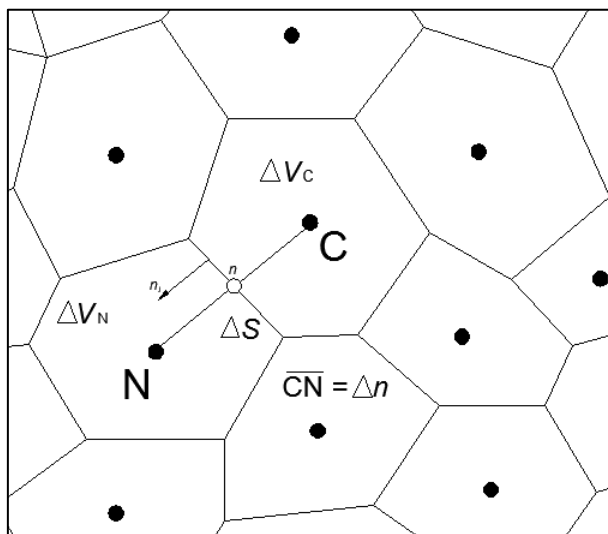
Ako diferencijalni oblik zakona očuvanja fizikalnog svojstva  $\varphi$  integriramo po konačnom volumenu, dobivamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = - \int_{\Sigma \Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Delta V} S_\varphi dV, \quad (37)$$

gdje

- prvi član označava brzinu promjene sadržaja nekog fizikalnog svojstva  $\varphi$  u konačnom volumenu,
- drugi član je zbroj konvekcijskog i difuzijskog protoka sadržaja fizikalnog svojstva  $\varphi$  kroz granice volumena
- treći član označava izvor fizikalnog svojstva  $\varphi$ .

U jednadžbi (37) protok fizikalnog svojstva definiran je kao pozitivan kada se odnosi od konačnog volumena prema okolini, pa je jasno da će se uslijed takvog protoka, zbog minusa ispred integrala, sadržaj fizikalnog svojstva u konačnom volumenu smanjivati [5].



Slika 4. Prijenos fizikalne veličine između konačnih volumena

Prvi član u jednadžbi (37) se pojednostavljuje uz pretpostavku da je konačni volumen dovoljno mali kako bi se fizikalno svojstvo  $\varphi$  aproksimiralo linearnom raspodjelom te uz uvjet da je točka C težište volumena  $\Delta V$  vrijedi:

$$\int_{\Delta V} \rho \varphi dV = \rho_C \Delta V. \quad (38)$$

Treći tj. izvorski član jednadžbe (37) se može aproksimirati na sličan način, uz uvođenje srednje vrijednosti izvorskog člana  $S_C$  unutar volumena  $\Delta V$  čime dobivamo:

$$\int_{\Delta V} S_\varphi dV = S_C \Delta V. \quad (39)$$

U jednadžbi (37) drugi član koji se sastoji od konvekcijskog i difuzijskog protoka sadržaja fizikalnog svojstva  $\varphi$  predstavlja ukupni vektor toka  $J_j$ , pri čemu protoku fizikalnog svojstva doprinosi samo normalna komponenta vektora toka  $J_j \cdot n_j$ . Uz provedeno osrednjavanje vrijednosti difuzijskog i konvekcijskog protoka po površini  $\Delta S$  i uvođenjem bezdimenzijske koordinate  $n = n/\Delta n$ , gdje  $\Delta n$  označava udaljenost između čvorova konačnih volumena (udaljenost CN na slici [Slika 4]), dolazimo do relacije:

$$J_j n_j = \left( \rho \bar{v}_n \Delta S \right)_n \bar{\varphi}_n - \Gamma \frac{\Delta S}{\Delta n} \left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \right|_n = F_n \bar{\varphi}_n - D_n \left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \right|_n. \quad (40)$$

U jednadžbi (40)  $F_n$  je maseni protok, odnosno jačina konvekcije kroz površinu stranice konačnog volumena  $\Delta S$ , a  $D_n$  označava jačinu difuzije [5].

U gornjim jednadžbama koriste se izrazi za srednju vrijednost fizikalne veličine na površini  $\Delta S$ , dok se u samom numeričkom postupku računaju vrijednosti fizikalne veličine u čvorovima volumena. Da bi se pomoću vrijednosti u čvorovima volumena aproksimirale vrijednosti fizikalne veličine i njene usmjerene derivacije na stranicama konačnog volumena, koriste se razne sheme diferencije ili numeričke sheme.

Koristeći shemu diferencije koja koristi samo čvorne vrijednosti  $\varphi_C$  i  $\varphi_N$  aproksimiramo vrijednosti  $\bar{\varphi}_n$  i  $\left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \right|_n$  te se jednadžba (40) može prikazati kao:

$$J_j n_j = F_n \bar{\varphi}_n - D_n \left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \right|_n = F_n \varphi_C + a_N (\varphi_C - \varphi_N) \quad (41)$$

gdje je  $a_N$  koeficijent ovisan o shemi diferencije koja se koristi.

Ako se jednačbe (38), (39) i (41) uvrste u jednačbu očuvanja za konačni volumen prikazanu jednačbom (37), dobiva se sljedeća relacija:

$$\rho \Delta V_C \frac{d\varphi_C}{dt} = -a_C \varphi_C + \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N \varphi_N]^{nb} + S_C \Delta V_C, \quad (42)$$

gdje je centralni koeficijent  $a_C$  suma koeficijenata prema susjednim čvorovima:

$$a_C = \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N]^{nb}. \quad (43)$$

Način prikazivanja izvorskog člana ovisi o metodi rješavanja diferencijalne jednačbe.

Sheme diferencije ili numeričke sheme se međusobno razlikuju po načinu modeliranja konveksijskog transporta. U ovom radu su se koristile sheme diferencije prvog i drugog reda točnosti.

Uzvodna shema prvog reda točnosti (engl. First order upwind scheme) je najjednostavnija numerička shema. Pretpostavlja se da je vrijednost fizikalne veličine na stranici jednaka vrijednosti u čvoru konačnog volumena uzvodno. Difuzijski transport je simetričan, pa se za njegovu diskretizaciju koristi shema centralnih razlika. Osnovna prednost ove sheme je jednostavnost implementacije i stabilna rješenja, i često je najbolja shema za početak proračuna. Nedostatak je što ova shema unosi lažnu difuziju u rješenje.

Uzvodna shema drugog reda točnosti (engl. Second order upwind scheme) određuje vrijednost fizikalne veličine  $\varphi$  na stranici ( $\varphi_n$ ) s linearnom ekstrapolacijom vrijednosti iz dvaju čvorova uzvodno. Difuzijski se transport definira shemom centralnih razlika. U područjima sa značajnim gradijentima fizikalnih veličina sheme drugog reda mogu davati rezultate koji su izvan graničnih vrijednosti u čvorovima, stoga je potrebno postaviti granice vrijednosti fizikalnih veličina na stranicama. Uzvodna shema drugog reda točnosti je numerička shema koja se često koristi zbog zadovoljavajućeg odnosa točnosti i stabilnosti. Više o metodi konačnih volumena i raznim shemama diferencije se može pronaći u literaturama [8] i [9].

### 2.3. Otpor broda

Brod u plovidbi izaziva poremećaje u svom okolišu, vodi i zraku. Mase vode i zraka opiru se njegovu gibanju. Pri gibanju tijela kroz tekućinu na svaki djelić površine djeluju neprekinuto raspoređene površinske sile. U nekoj točki površine tijela to se može predočiti naprezanjem uzrokovanim trenjem u smjeru strujanja i hidrodinamičkim tlakom koji je okomit na površinu, prema [2].

W. Froude, zasnovao je praktično određivanje otpora na podjeli ukupnog otpora vode na dva neovisna dijela: otpor trenja brodu odgovarajuće ploče i preostali otpor. Odgovarajuća ploča je definirana kao tanka ravna ploča koja ima jednaku površinu i duljinu kao vodom oplakani dio brodskog trupa i giba se kroz vodu brzinom jednakom brzini broda, što je detaljnije opisano u literaturi [3]. Taj model određivanja otpora temelj je svih današnjih matematičkih modela za određivanje otpora broda poput Holtropove i Hollenbachove metode [19].

Otpor broda je definiran kao sila potrebna za održavanje jednolike brzine plovidbe bez korištenja propulzora. Ukupni otpor sastoji se od:

- Otpora trenja - nastaje zbog kretanja trupa broda kroz viskozni fluid.
- Otpora oblika - posljedica je razlike tlaka, a većim dijelom nastaje stvaranjem vrtloga na trupu broda. Lokalno vrtloženje javlja se oko isturenih dijelova broda i naglih prijelaza, gdje nije postignuto dobro opstrujavanje trupa.
- Otpora valova - nastaje zbog formiranja sustava valova na površini mirne vode koji su posljedica promjena hidrodinamičkog tlaka uzduž brodskog trupa.
- Otpora zraka - nastaje kretanjem nadvodnog dijela broda zrakom.

Voda ima gustoću oko 800 puta veću od gustoće zraka, pa je i učinak strujanja vode razmjerno toliko puta veći. Ako na podvodnom dijelu trupa nema nikakvih dodataka, onda se govori o otporu golog trupa (engl. bare-hull resistance). U slučaju da je tekućina neviskozna, na tijelo bi djelovao samo hidrostatički tlak te bi strujanje uzduž brodskog trupa bilo pravilno, bez vrtloženja [1].

Pri strujanju oko brodskog trupa mogu se razgraničiti područja s različitim značajkama. Neposredno uz površinu trupa nalazi se granični sloj u kojem se zbiva najveći dio pojava povezanih s viskoznošću vode. Naprezanje trenja između stijenke i vode te između slojeva vode međusobno, uzrokuje naglu promjenu brzina strujanja u graničnom sloju. Prema brzini, veličini i obliku trupa broda strujanje unutar sloja može biti laminarno, tj. slojevito i uredno ili turbulentno, odnosno neuredno s vrtloženjem i miješanjem čestica vode. Naprezanje trenja i

debljina graničnog sloja znatno su veći pri turbulentnom strujanju. Laminarno strujanje ostvaruje se pri sporom gibanju ili uz neke druge, posebne uvjete. Strujanje vode uz brodski trup na pramcu oblikuje laminarni granični sloj koji vrlo brzo prelazi u turbulentni. Idući prema krmi debljina graničnog sloja se povećava. Nakon krmenog dijela nastaje tzv. hidrodinamički trag u kojem je još značajniji utjecaj viskoznosti, a određuje ga promjena brzina strujanja slična promjeni u graničnom sloju. Hidrodinamički trag sadržavat će, uz turbulenciju naslijeđenu iz graničnog sloja, i krupne vrtloge ako krmeni dio trupa nije dobro oblikovan, prema [3].

### **2.3.1. Otpor trenja i otpor oblika**

Otpor trenja i otpor oblika čine zajedno ukupan viskozni otpor trupa koji ovisi o Reynoldsovom broju. Viskozni otpor može biti približno jednak ukupnom otporu trupa ako brod plovi vrlo niskom brzinom. . Udio viskoznog otpora u ukupnom otporu broda smanjuje se s porastom brzine. Viskozni otpor određuje se posebnim modelskim ispitivanjima i proračunom, o čemu se detaljnije može naći u literaturi [1] i [3].

Otpor trenja ovisi o veličini, obliku (zakrivljenost) i hrapavosti površine uronjenog dijela trupa broda te o načinu strujanja unutar graničnoga sloja. Proračun otpora trenja broskog trupa polazi od određivanja koeficijenata otpora trenja za odgovarajuću ravnu glatku ploču [3].

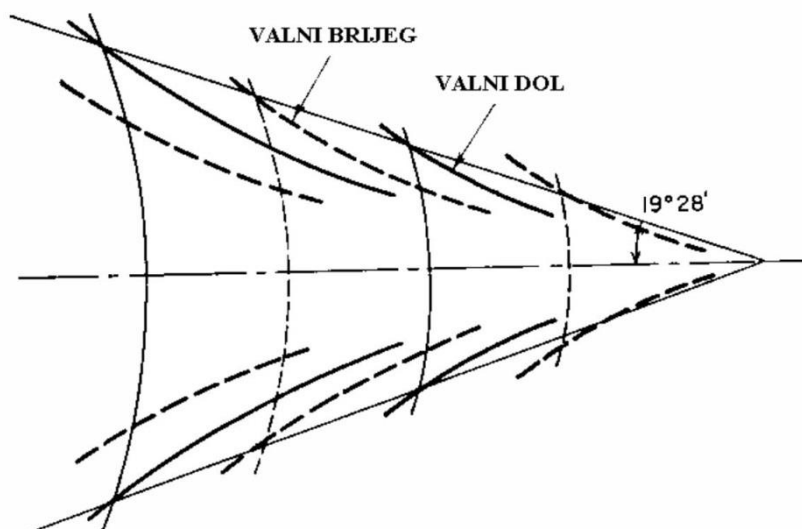
Otpor oblika bitno ovisi o značajkama strujanja u graničnome sloju i o hidrodinamičkome tragu (engl. wake) zbog toga što odvajanje graničnoga sloja značajno povećava vrijednost koeficijenta otpora oblika [3].

### **2.3.2. Otpor valova**

Pri gibanju broda kroz tekućinu, na slobodnoj površini nastaju valovi koji su posljedica varijacije tlakova uzduž oplakane površine broskog trupa. Nastali valovi će nadalje utjecati na izmjenu raspodjele tlakova duž iste površine tako da će postojati razlika rezultantnih sila na prednjem i stražnjem dijelu broskog trupa (pramcu i krmi) koja predstavlja otpor valova [1].

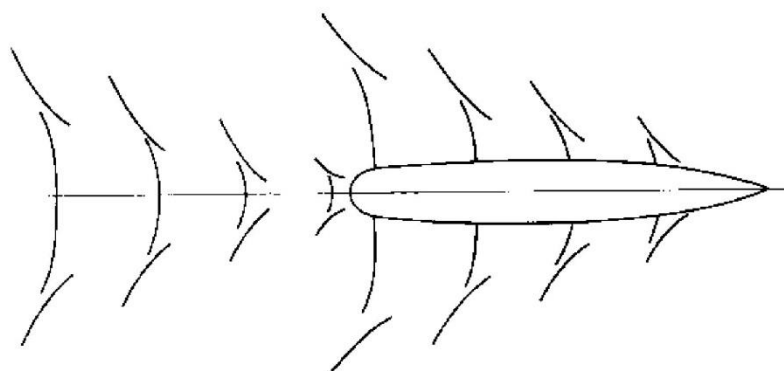
Do prvih spoznaja o sustavu valova koji nastaju pri plovidbi broda i na koji način se formiraju je došao Lord Kelvin. Uočio je da se valovi uvijek šire pod istim kutom prema osi plovidbe, a taj kut iznosi  $19^\circ$  i 28 minuta sa svake strane (Slika 5).





Slika 5. Sustav valova Lorda Kelvina [1]

Na pramcu i krmi broda nastaju razilazni (divergentni) valovi koji se šire iza broda tvoreći pritom oštri kut sa simetralom broda, prikazani na slici (Slika 6). Dok poprečni (transverzalni) valovi relativno brzo zamiru, razilazni (divergentni) valovi veće su visine i znatno su izraženiji na većoj udaljenosti od broda. Kod pramca broda najuočljiviji su razilazni valovi koji se šire tako da na pramcu nastaju veći valovi iza kojih se formiraju ostali valovi zakrivljeni unazad. Isti razilazni valovi nastaju i na krmi broda, međutim oni često nisu dobro uočljivi zbog jasne dominacije pramčanih valova ali i pojave hidrodinamičkog traga [1].



Slika 6. Prikaz sustava pramčanih i krmenih valova [1]

Za razliku od otpora trenja i otpora oblika koji ovise o Reynoldsovom broju, otpor valova uglavnom je ovisan samo o Froudeovu broju, prema literaturi [3].

Froudeov broj se računa prema formuli, preuzetoj iz literature [1]

$$Fn = \frac{v}{\sqrt{L \cdot g}}, \quad (44)$$

gdje je:

- $v$  – brzina kretanja broda [m/s],
- $L$  - duljina broda [m],
- $g$  – ubrzanje Zemljine sile teže [m/s<sup>2</sup>].

Otpor valova značajno se mijenja porastom brzine i promjenom oblika trupa. Jednadžba koeficijenata otpora valova prema literaturi [3] glasi:

$$C_w = \frac{R_w}{\frac{1}{2} \rho v^2 s}, \quad (45)$$

gdje je:

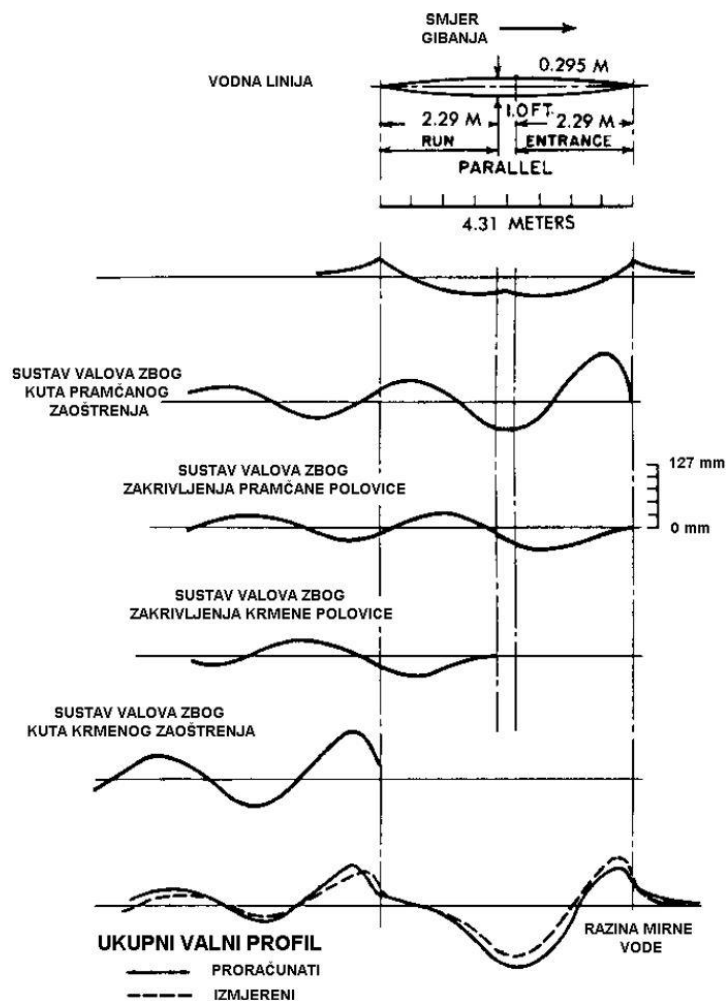
- $R_w$  – sila otpora valova [N],
- $\rho$  – gustoća fluida [kg/m<sup>3</sup>],
- $v$  – brzina kretanja broda [m/s],
- $s$  – oplakana površina broda, [m<sup>2</sup>].

U srednjem području vrijednosti Froudeovih brojeva, na krivulji koeficijenata otpora valova pokazuju se naizmjenični relativni porasti i smanjenja otpora valova kao posljedica je međusobnog djelovanja valova tj. interferencije valova. S porastom vrijednosti Froudeova broja dužine valova se povećavaju te valni brijegovi i dolovi mijenjaju položaj uzduž trupa. Ukoliko se sastanu brijegovi ili dolovi dvaju sistema, učinak je povećani val i povećani otpor valova. Obrnuto, u slučaju kad se sastanu brijeg jednog vala s dolom drugog, oni se međusobno ponište i otpor valova se smanjuje. Oko  $Fn = 0,50$  redovito se nalazi i najveća vrijednost koeficijenta otpora valova, što znači da nema više procesa interferencije valova, što je detaljnije opisano u literaturi [1] i [3].

Primjer efekata interferencije valova je proučavao Wigley eksperimentom koji je napravio 1931. godine. Pokazao je da se valni profil uzduž broda sastoji od pet različitih komponenti koje su prikazane na slici (Slika 7):

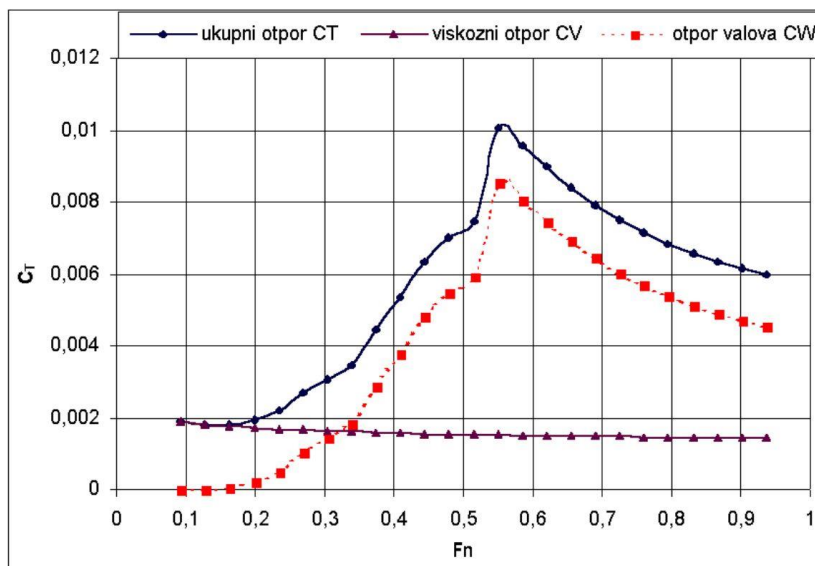
- a) Simetrični poremećaj na slobodnoj površini vode koji ima maksimalnu vrijednost na krajnjim točkama pramca i krme dok mu je najniža vrijednost na paralelnom dijelu. Vrlo blizu pramca i krme ovaj val zamire. Zbog svoje simetrije, pri konstantnoj brzini plovidbe ovaj val ne apsorbira nikakvu energiju.
- b) Pramčani val – započinje valnim brijegom.
- c) Val na pramčanom ramenu (engl. forward shoulder) – započinje valnim dolom.
- d) Val na krmenom ramenu (engl. after shoulder) – započinje valnim dolom.
- e) Krmeni val – započinje valnim dolom.

Navedeni eksperiment i rezultate koje je dobio Wigley su opisani u literaturi [1].



Slika 7. Sustavi valova tijela parabolične vodne linije [1]

Valovi koje formira brodski trup pri malim brzinama su mali te je i time udio otpora valova zanemariv naspram viskoznog otpora broda. Na slici (Slika 8) preuzetoj iz literature [1] vidljivi su utjecaji koeficijenta viskoznog otpora (otpora trenja i otpora oblika) i koeficijenta otpora valova u koeficijentu ukupnog otpora trupa broda bez privjesaka tj. dodatka (kobilice, kormilo i sl.) u ovisnosti o Froudeovom broju.



Slika 8. Omjer koeficijenata otpora broda [1]

Sve navedene teorijske i eksperimentalno određene ovisnosti su bitne pri izradi ali i procjeni vjerodostojnosti numeričke simulacije i eksperimenta prikazanih u ovom radu. Također je potrebno naglasiti da postojanje sustava valova dodatno komplicira problem otpora broda budući da međusobno djelovanje različitih komponenti otpora postaje složenije.

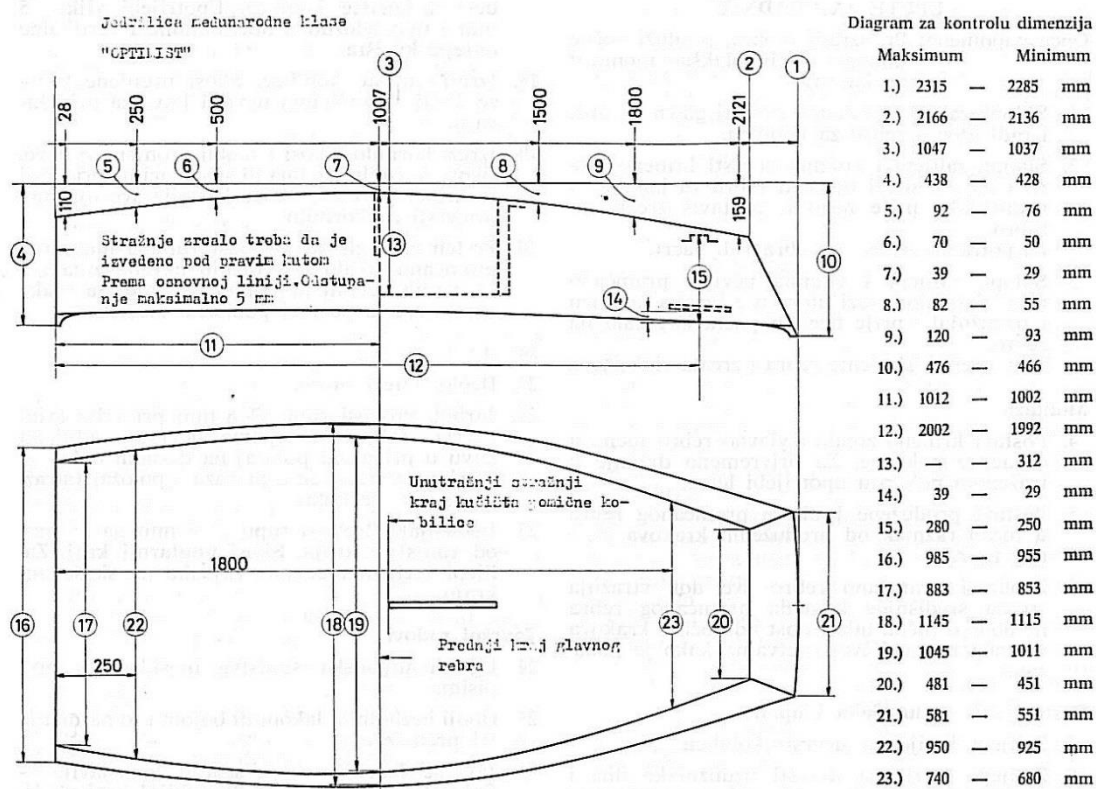
### 3. NUMERIČKE SIMULACIJE

#### 3.1. Izrada geometrijskog modela jedrilice Optimist

Unatoč činjenici da je autor nacrt Clark Mills nacrt 'poklonio Svijetu i ljudima', te postojanju međunarodne mrežne stranice International Sailing Federation (ISAF), gdje je dostupna povećana količina informacija poput pravila i odredbi klasa, sami nacrti jedrilice Optimist nisu dostupni na Internetu. U radu je korišten nacrt preuzet iz literature [10]. Dio nacrt s osnovnim dimenzijama je skeniran i prikazan na slici (Slika 9), dok su u tablici (Tablica 1.) navedene neke od osnovnih dimenzija jedrilice Optimist.

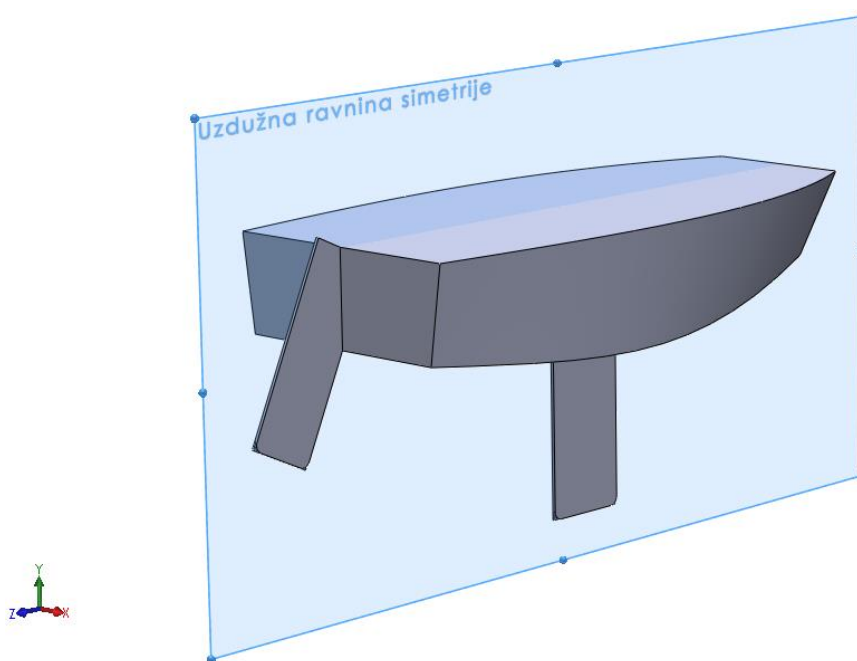
Tablica 1. Osnovne dimenzije jedrilice Optimist

Dužina	2,30 m
Širina	1,13 m
Masa	35,00 kg
Površina jedra	3,25 m <sup>2</sup>



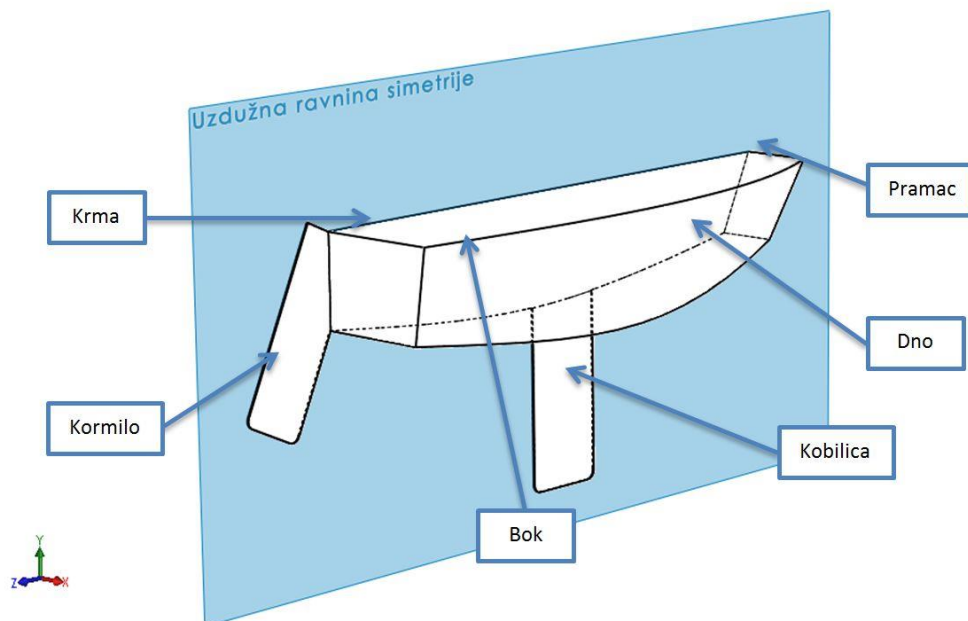
Slika 9. Nacrt jedrilice Optimist preuzet iz časopisa Brodogradnja [10]

Prema nacrtima, u računalnom programu 'Solidworks' izrađen je 3D model jedrilice Optimist. Jedrilica ima uzdužnu vertikalnu ravninu simetrije zbog čega je modelirano samo pola trupa jedrilice, što je prikazano slikom (Slika 11), te će takav model biti geometrijski diskretiziran i simuliran u računalnom programu 'Fluent'. U programima 'Solidworks' i 'Fluent' postoji opcija preslikavanja (mirror) tako da se lako dobije vizualizacija cijelog trupa jedrilice (Slika 10).

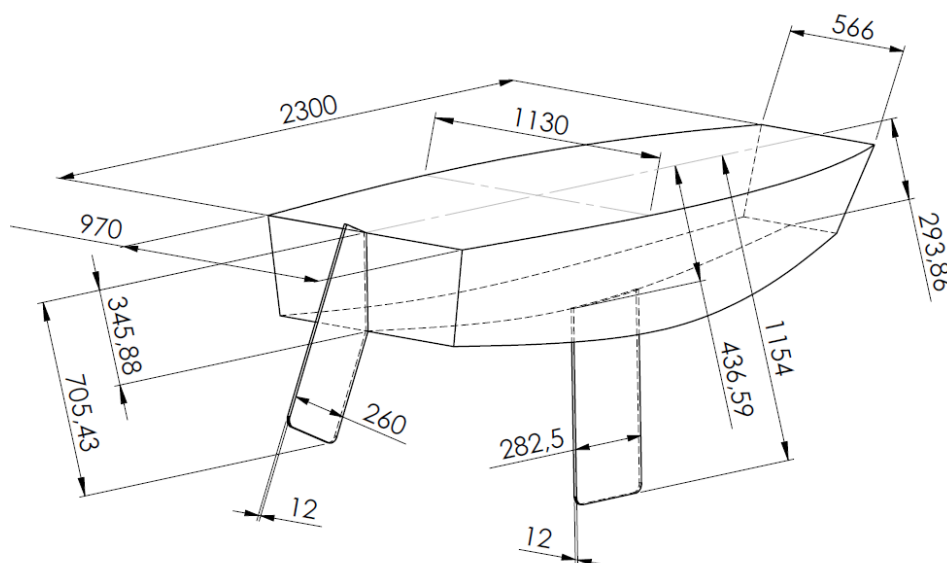


**Slika 10. 3D model jedrilice Optimist**

Imena dijelova jedrilice Optimist prikazane su na slici (Slika 11). Trup jedrilice čine zajedno pramac, krma, dno i bok jedrilice. Osnovne dimenzije 3D modela jedrilice su prikazane na slici (Slika 12).



Slika 11. Prikaz dijelova jedrilice Optimist



Slika 12. Osnovne dimenzija prikazane na 3D modelu

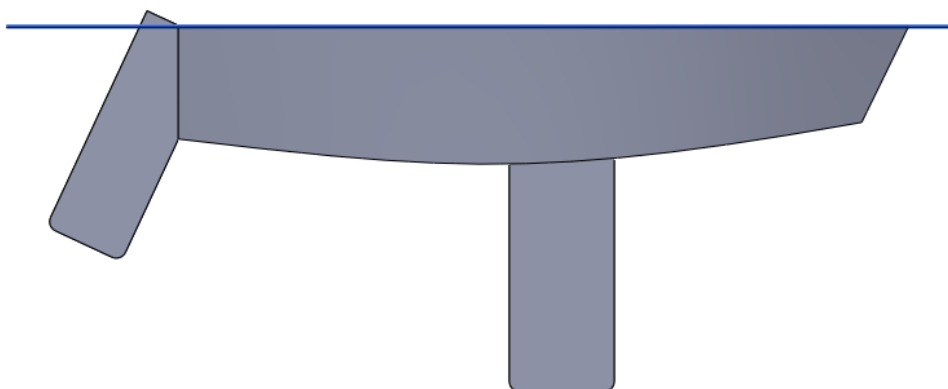
Treba napomenuti da je zbog jednostavnosti proračuna i ograničenih računalnih resursa sam model jedrilice optimist pojednostavljen, te su dijelovi geometrije poput skošenja na kobilici i kormilu izostavljeni. Zbog male debljine kobilice i kormila modeliranje skošenja bi zahtijevalo nerazmjerno veliko povećanje broja konačnih volumena u odnosu na njihov utjecaj na strujanje.

### 3.1.1. Slučaj ravnog urona za masu jedriličara od 45 kg u 3D modelu

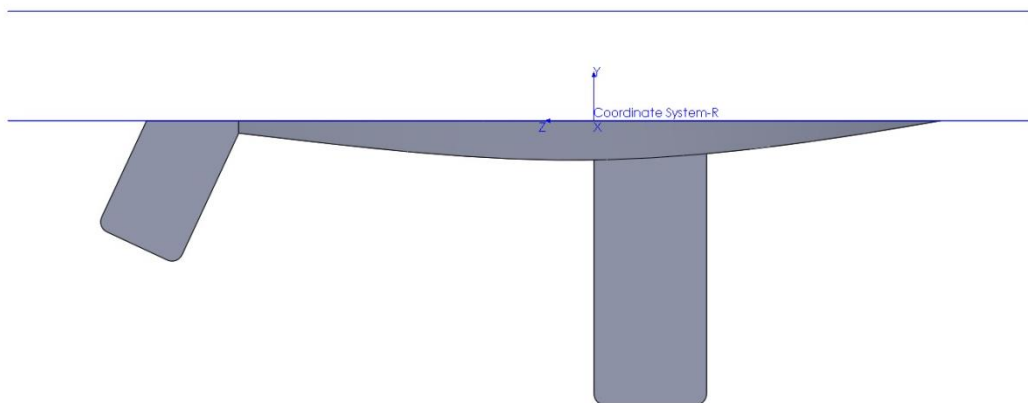
Detaljni opis odabira i modeliranja različitih volumena istisnine i nagiba jedrilice u 3D modelu opisan je detaljnije u literaturi [17].

Bokocrt cjelokupnog 3D modela, prikazan na slici (Slika 13), se modificirao pomoću alata za rezanje s površinom (Cut With Surface) pri modeliranju volumena istisnine, što je detaljnije opisano u literaturi [17]. U ovom radu se za osnovu svih modela koristio slučaj srednjeg volumen istisnine za masu jedriličara od 45 kg pri ravnom uronu trupa jedrilice.

Na slikama (Slika 13 i Slika 14) gornja plava linija predstavlja horizontalnu ravninu (naziva Top plane) koja je referentna za izradu pomoćnih ravnina s kojima se izrezivao osnovni model, dok je donja plava linija na slici (Slika 14) površina koja predstavlja površinu vode tj. vodnu liniju. Za svaki od promatranih slučajeva je napravljen odgovarajući koordinatni sustav kako bi se vodna linija uvijek poklapala s gornjom površinom izrezanog modela.



Slika 13. Bokocrt cjelokupnog 3D modela



Slika 14. Bokocrt 3D modela za 45 kg ravno uronjeno



U ovom radu će biti promatran slučaj za masu jedriličara od 45 kg pri ravnom uronu, taj model ujedno ima i maksimalnu dubinu urona kobilice. Na navedenom modelu će se u numeričkom proračunu promatrati ovisnost hidrodinamičkog otpora o promjeni brzine kretanja jedrilice.

### 3.1.2. *Različite dubine urona kobilice u 3D modelu*

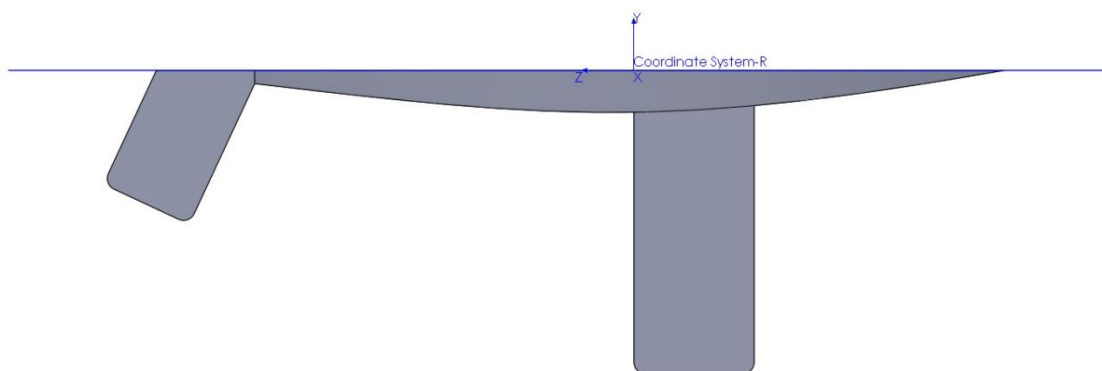
Pretpostavlja se da će različite dubine urona kobilice utjecati na otpor zbog drugačijeg opstrujavanja oko trupa. Kako bi se pratila ovisnost dubine urona kobilice na ukupni hidrodinamički otpor trupa jedrilice odabrane su 4 različite dubine urona kobilice  $L$ :

- $L_{\max} = 717,41$  mm – maksimalna duljina kobilice,
- $L_2 = 478$  mm,
- $L_{\text{sr}} = 268,84$  mm – kobilica završava na istoj dubini kao i kormilo,
- $L_1 = 238$  mm,

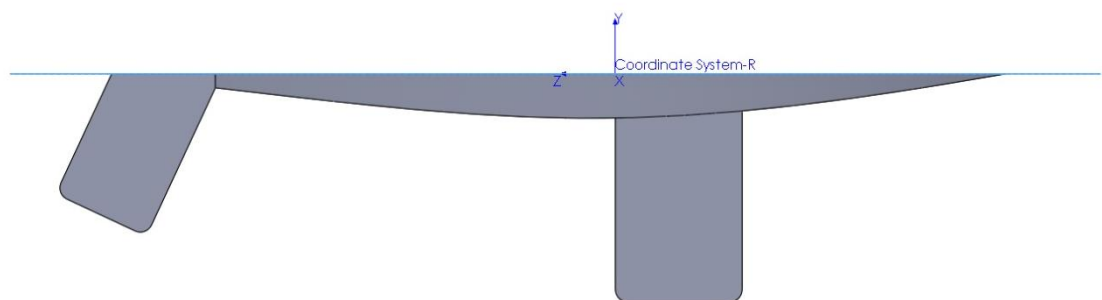
pri čemu je duljina kobilice definirana od dna trupa uronjenog djela broda do vrha kobilice. Slučaj kada kobilice uopće ne bi bilo tj. kada ne bi bila uronjena nije promatran u ovom radu.

Kako bi se analizirala ovisnost hidrodinamičkog otpora samo o različitim dubinama urona kobilice, svaka od dubina kobilice je modelirana na slučaju ravnog urona za masu jedriličara od 45 kg, a bit će simulirana pri konstantnoj brzini od 3 čvora (1,5 m/s). Navedeni parametri će također omogućiti usporedbu s prijašnjim rezultatima iz literature [17]. Pri čemu je 3D model za 45 kg ravno uronjeno s  $L_{\max}$  zapravo jednak 3D modelu za slučaj ravnog urona za masu jedriličara od 45 kg u literaturi [17] gdje je promatrana samo maksimalna dubina urona kobilice.

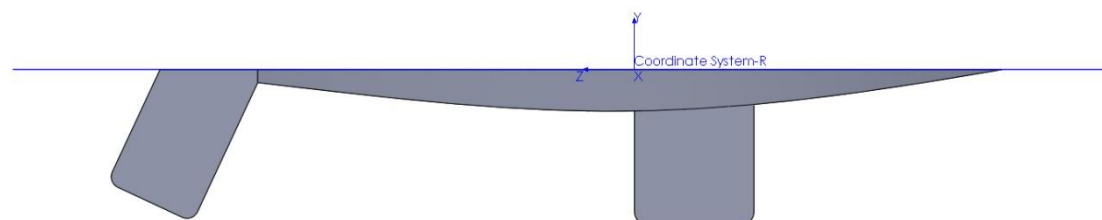
Za svaki od slučajeva je zasebno izrađen 3D model jedrilice u programu 'Solidworks'. Bokocrt 3D modela za 45 kg ravno uronjeno prikazan je na slici (Slika 15). Taj se 3D model modificirao kako bi se modelirale različite dubine urona kobilice. U svim slučajevima se koristio isti koordinatni sustav zbog usporedivosti. Svi 3D modeli za različite dubine urona kobilice su prikazani na slikama ispod (Slika 15 - Slika 18). Na slikama gornja plava linija predstavlja površinu vode tj. vodnu liniju.



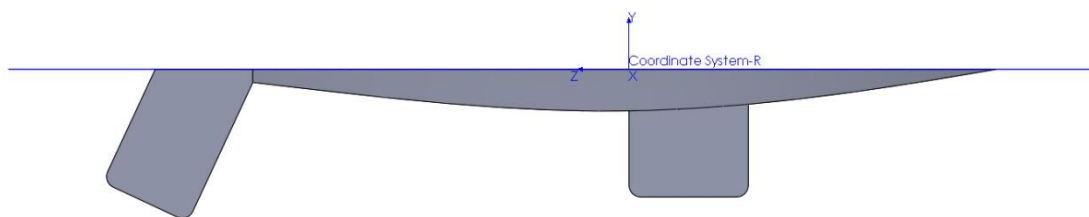
Slika 15. Bokocrt 3D modela za 45 kg ravno uronjeno s  $L_{max}$



Slika 16. Bokocrt 3D modela za 45 kg ravno uronjeno s  $L_2$



Slika 17. Bokocrt 3D modela za 45 kg ravno uronjeno s  $L_{sr}$

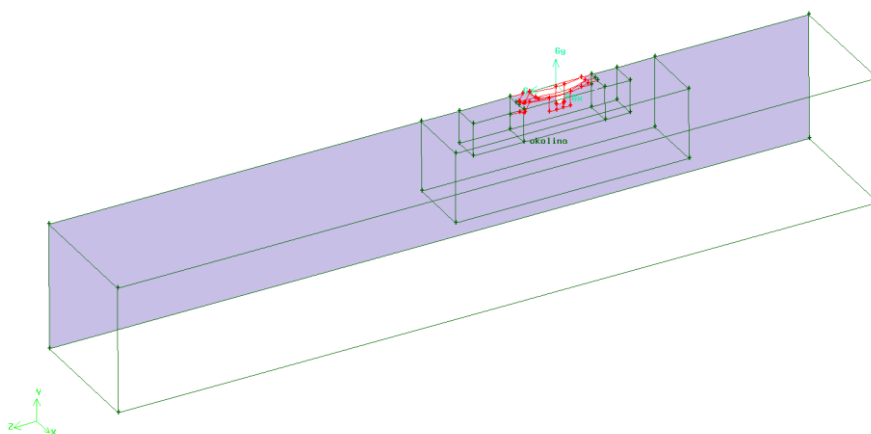


Slika 18. Bokocrt 3D modela za 45 kg ravno uronjeno s  $L_1$

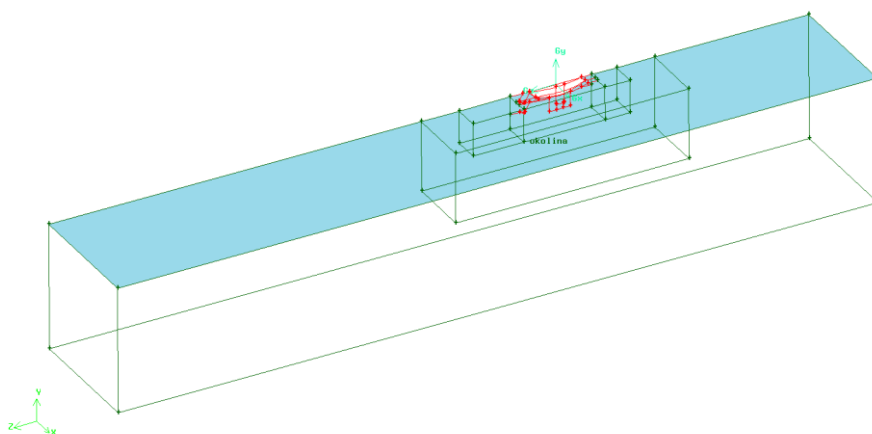
### 3.2. Domena proračuna i geometrijska mreža

#### 3.2.1. *Domena proračuna i geometrijska mreža za varijaciju brzina i dubina urona kobilice*

Kako je već prije navedeno model je pojednostavljen uvođenjem uzdužne vertikalne ravnine simetrije i horizontalnom ravninom simetrije koja predstavlja površinu vode tj. vodnu liniju.

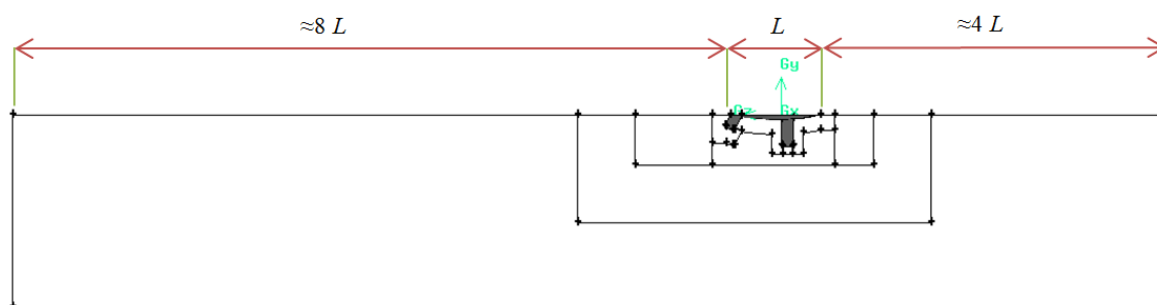


Slika 19. Prikaz vertikalne ravnine simetrije

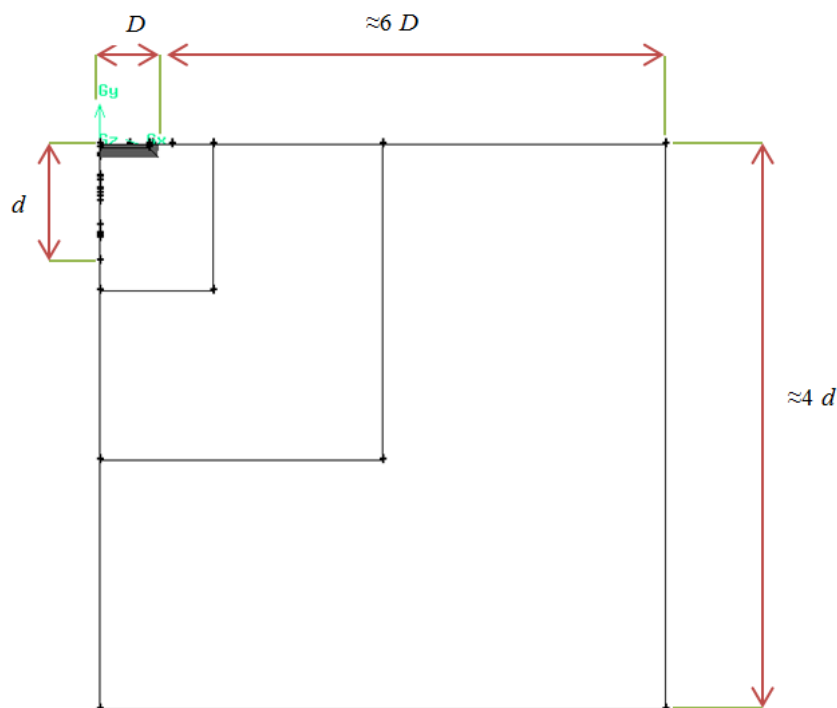


**Slika 20. Prikaz horizontalne ravnine simetrije koja se poklapa sa slobodnom površinom vode**

Kako bi se na granicama domene ostvarili uvjeti što sličniji neporemećenom strujanju definirane su dimenzije domene proračuna koje su višestruko veće od dimenzija jedrilice [8]. Širina domene veća je od šesterostruke vrijednosti najšireg dijela trupa, a dubina je veća od deseterostruke vrijednosti najveće mjere dubine trupa jedrilice bez kobilice. Ako se za najveću mjeru po dubini uzima najdublji dio trupa s potpuno uronjenom kobilicom tada je volumen okoline po dubini približno četiri puta veći. Duljina promatrane domene iznosi trinaest ukupnih duljina jedrilice, na način da su ispred jedrilice četiri duljine, a iza osam duljina trupa jedrilice. Sve su mjere za određivanje veličine promatrane domene uzete s obzirom na ukupne dimenzije jedrilice, a ne dimenzije uronjenog dijela jedrilice.



**Slika 21. Prikaz dimenzija domene proračuna - bokocrt**



Slika 22. Prikaz dimenzija domene proračuna - nacrt

Za referentnu površinu uzima se projekcija naletne površine trupa na ravninu okomitu na smjer kretanja tj. strujanja. Iako je trup promjenjivog poprečnog presjeka, referentna površina je ujedno i najveća površina, te u ovom modelu iznosi  $A_{ref} = 0,25 \text{ m}^2$  za pola promatranog trupa jedrilice.

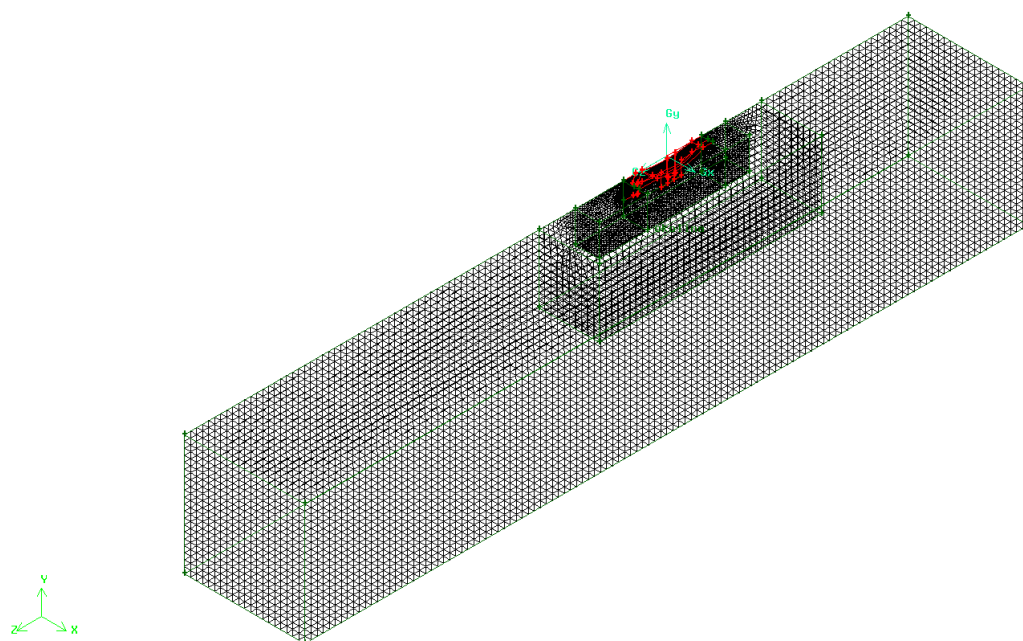
Omjer referentne površine naspram poprečnog presjeka domene proračuna predstavlja stupanj začepljenosti presjeka (engl. blockage factor) za koji je preporučeno [13]:

$$\frac{A_{ref}}{A_{\text{volumen okoline}}} \leq 5\% \quad (46)$$

S obzirom da poprečni presjek promatranog volumena iznosi  $A_{\text{volumen okoline}} = 25 \text{ m}^2$  gornja jednadžba je zadovoljena, što je vidljivo:

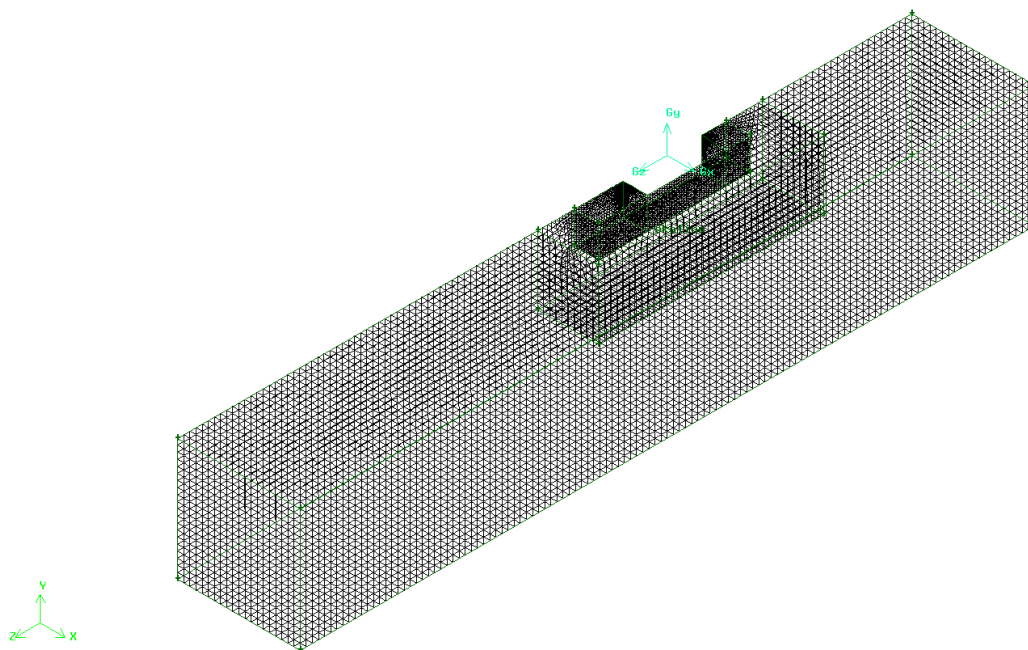
$$\frac{A_{ref}}{A_{\text{volumen okoline}}} = \frac{0,25}{25} = 0,01 = 1\% \leq 5\% . \quad (47)$$

Kako bi se smanjio ukupni broj konačnih volumena pri izradi mreže, područje proračuna ispunjeno vodom u koje je uronjen trup jedrilice, podijeljeno je na više podpodručja. Finija mreža je napravljena u području u kojem se očekuju veći gradijenti polja fizikalnih veličina. U volumenu neposredno uz trup jedrilice, diskretizacija je najfinija te je na tom području mreža najgušća. Mreža postepeno postaje sve rjeđa sa svakim idućim većim volumenom kao što je prikazano na slici (Slika 23). Prostorna diskretizacija provedena je pomoću nestrukturiranih tetraedarskih konačnih volumena (Elements – Tet/Hybrid, Type - TGrid ) i strukturiranih heksaedarskih konačnih volumena (Elements – Hex, Type - Submap), [12].

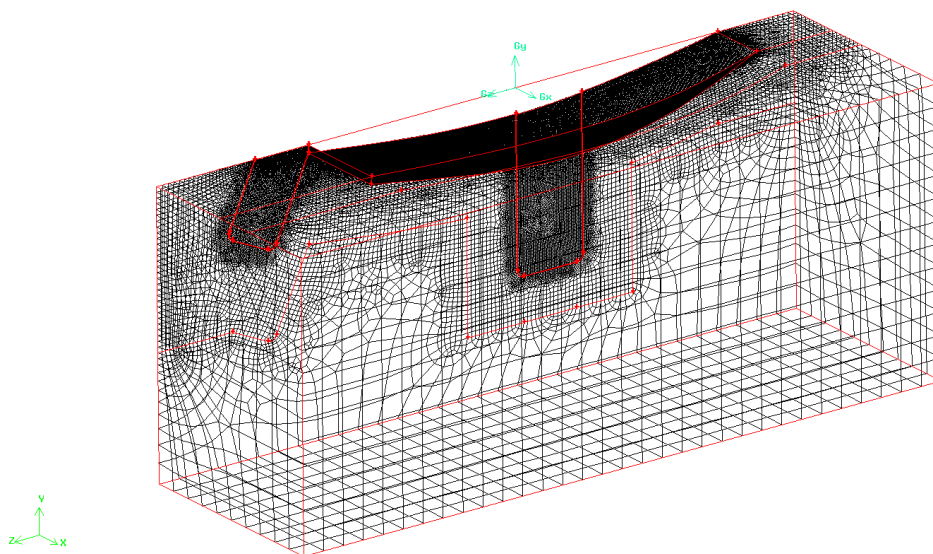


**Slika 23. Geometrijska mreža cijele domene proračuna**

Za svaki od slučajeva potrebno je izraditi novu mrežu. Kako bi se izbjegla potreba da se svaki put izrađuje kompletna nova mreža, svi volumeni domene, osim volumena neposredno uz trup jedrilice (Slika 25), su imali istu diskretizaciju za svaki od slučajeva. Volumeni domene bez volumena koji se nalazi neposredno uz trup jedrilice prikazani su na slici (Slika 24).

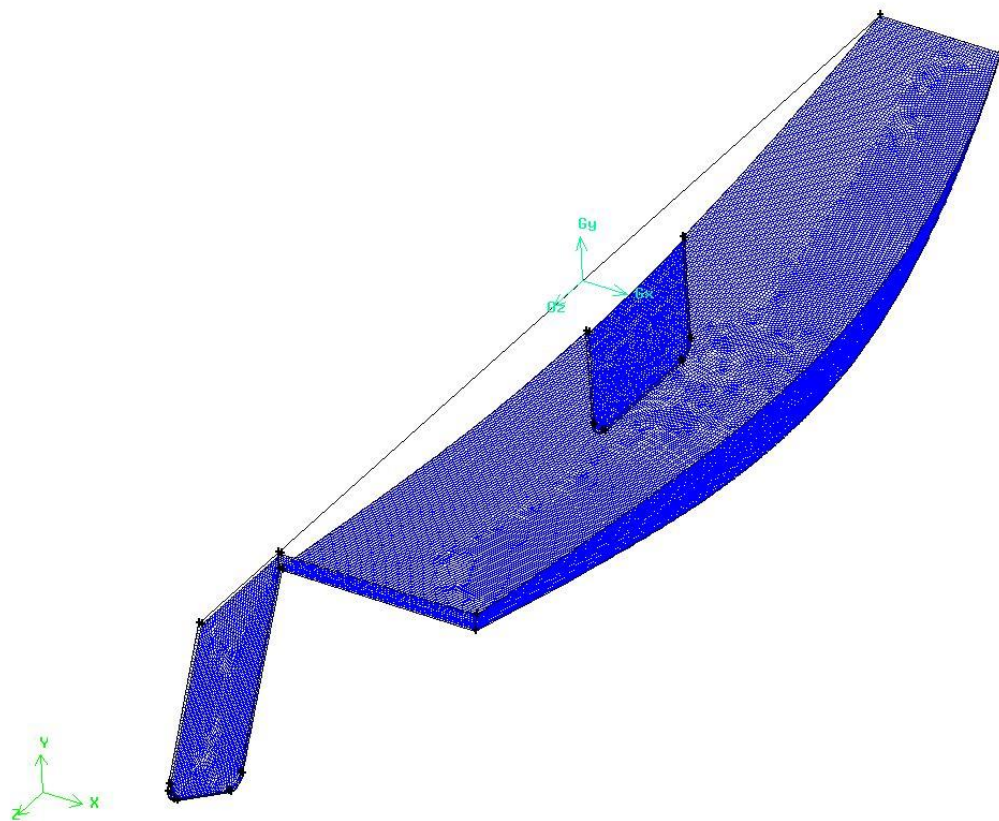


**Slika 24.** Geometrijska mreža svih volumena bez volumena neposredno uz trup jedrilice

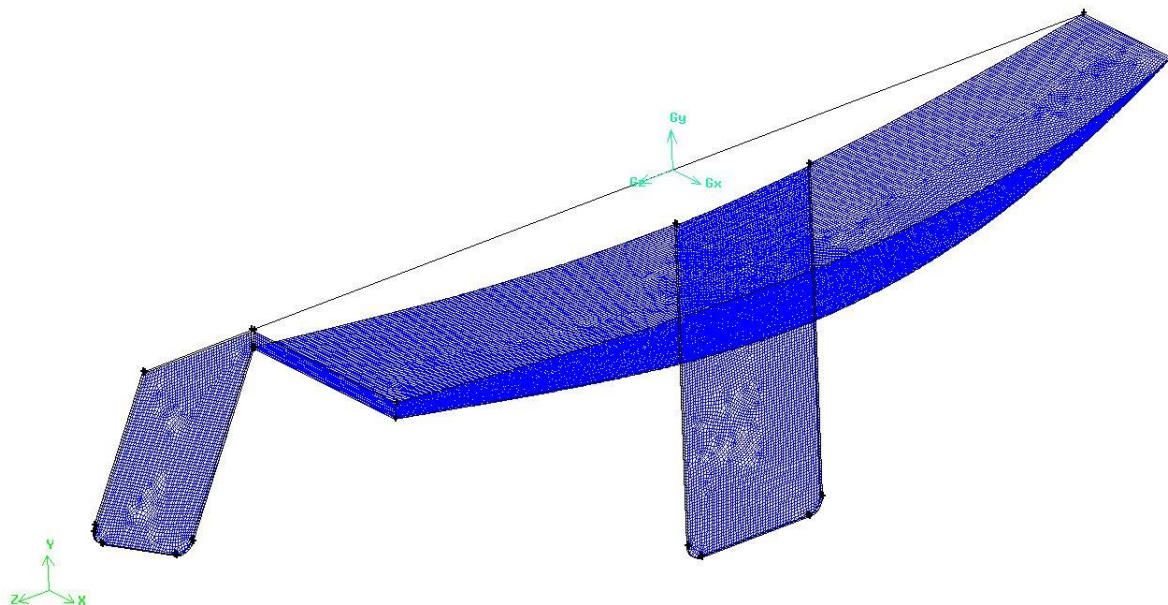


**Slika 25.** Geometrijska mreža za volumen neposredno uz trup jedrilice

Za različite slučajeve se mijenjala diskretizacija trupa te se kao posljedica toga mijenjala i diskretizacija volumena neposredno uz trup jedrilice, što je prikazano na slici (Slika 25).



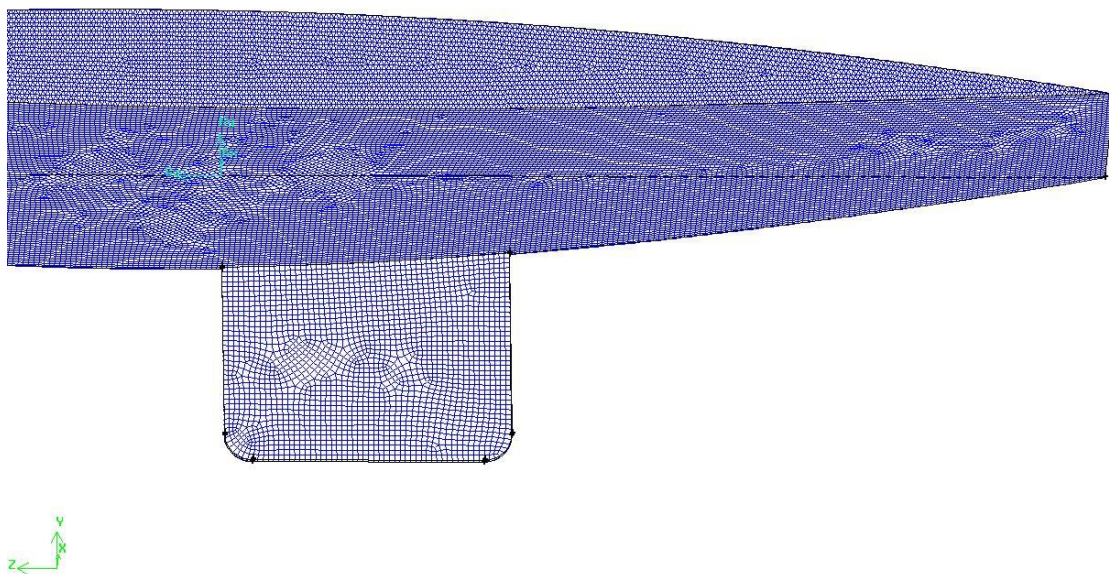
Slika 26. Mreža trupa jedrilice za slučaj dubine urona kobilice  $L_1$



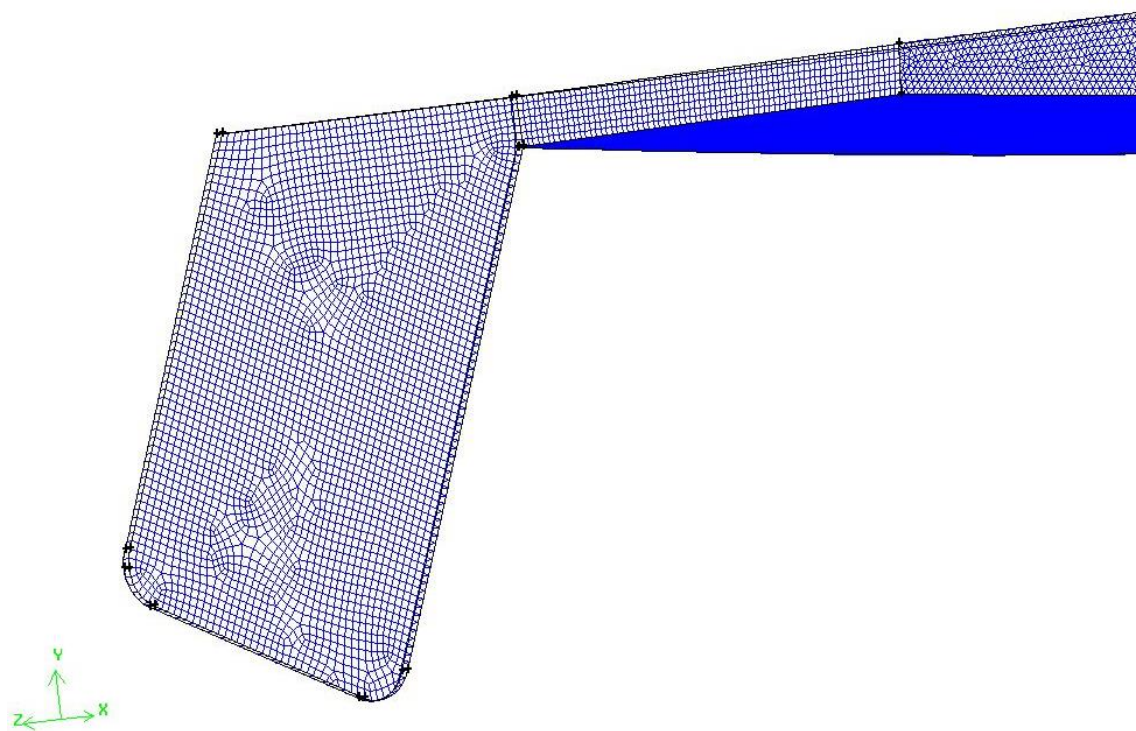
Slika 27. Mreža trupa jedrilice za slučaj dubine urona kobilice  $L_{\max}$



Na idućim slikama su prikazani uvećani prikazi kobilice (Slika 28) i kormila (Slika 29) gdje se vidi finoća geometrijske mreže.



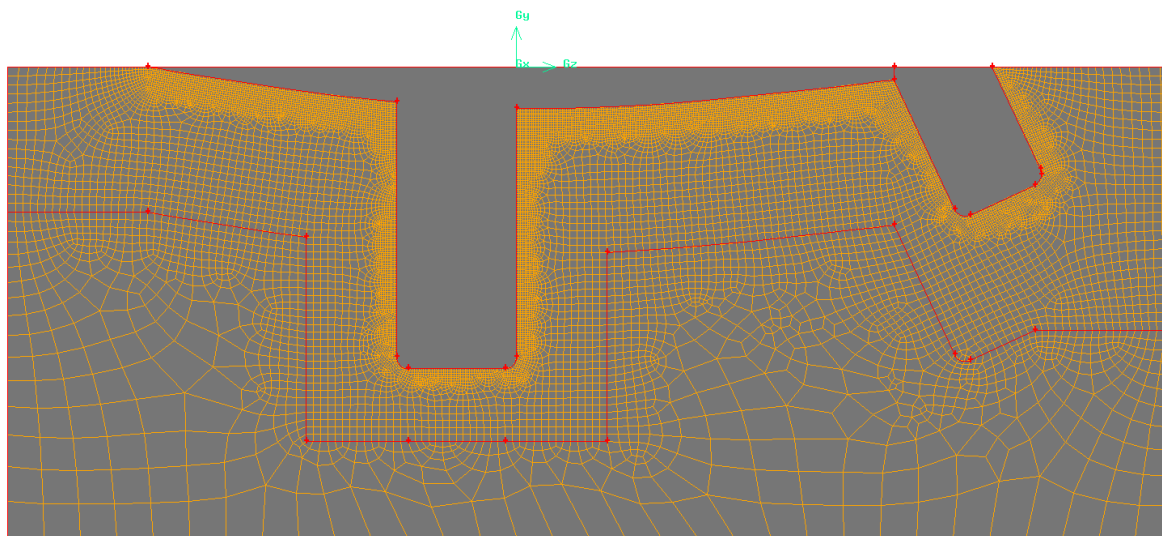
Slika 28. Uvećani prikaz mreže kobilice za slučaj dubine urona kobilice  $L_1$



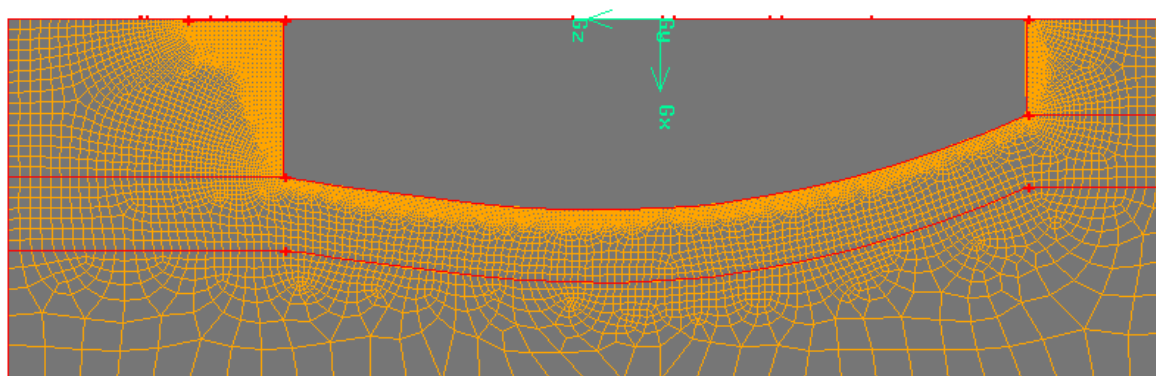
Slika 29. Uvećani prikaz mreže kormila

Nakon dovršene diskretizacije trupa jedrilice i 3D mreže volumena neposredno uz trup jedrilice, taj bi se volumen umetnuo i povezao s nepromjenjivim dijelom geometrijske mreže, te se na taj način dobila kompletna mreža za svaki slučaj.

Na slici (Slika 25) je također vidljivo da je volumen neposredno uz trup jedrilice podijeljen na dijelove. Funkcija tih dijelova je potpunije upravljanje strukturom i finoćom mreže na dijelu neposredno uz trup kako bi se što bolje opisale/prikazale promjene u sloju uz površinu jedrilice. Diskretizacije tih područja prikazane su na slikama (Slika 30 i Slika 31).



**Slika 30. Diskretizacija sloja uz površinu jedrilice na vertikalnoj ravnini simetrije**



**Slika 31. Diskretizacija sloja uz površinu jedrilice na horizontalnoj ravnini simetrije**

Nakon izvršene diskretizacije područja proračuna, potrebno je provjeriti kvalitetu mreže, koja se očituje u distordiranosti volumena. Velik broj distordiranih volumena može uzrokovati sporiju konvergenciju iterativnog postupka. Kod naglih prijelaza i oštih bridova, primjerice prijelazi s trupa jedrilice na kobilicu ili kormilo, potrebna je finija diskretizacija, da

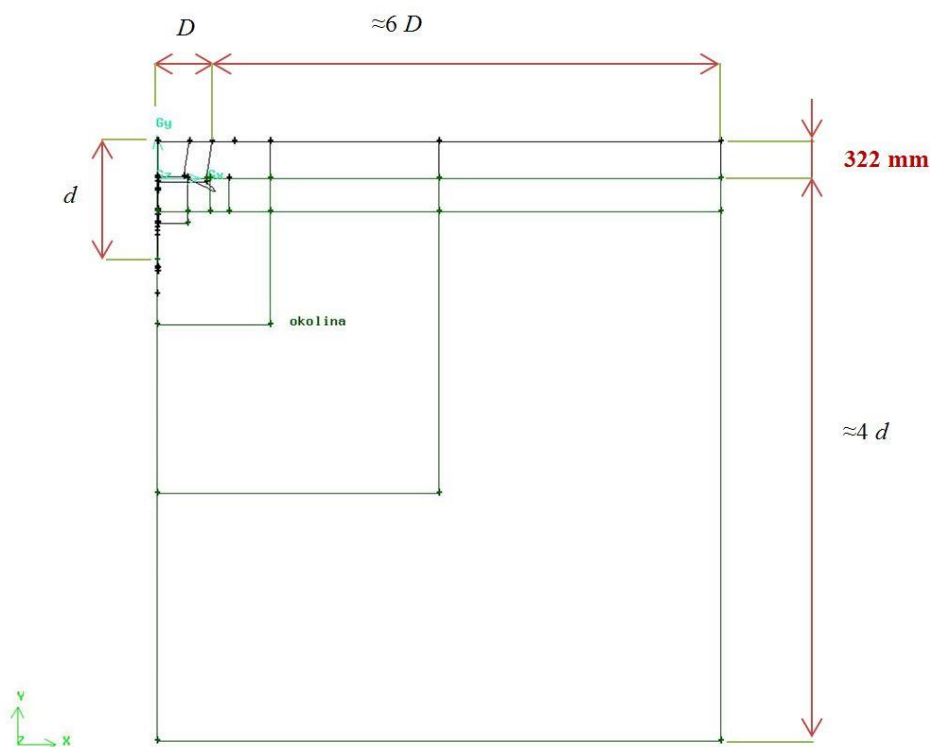
bi se izbjegla pretjerana distordiranost volumena u tom dijelu. Broj konačnih volumena mreža razlikuje se za svaki od slučajeva što je vidljivo u tablici (Tablica 2.).

**Tablica 2. Broj konačnih volumena**

Naziv slučaja	Broj konačnih volumena
45 kg ravno uronjeno uz $L_{\max}$	958 380
45 kg ravno uronjeno uz $L_2$	917 283
45 kg ravno uronjeno uz $L_{sr}$	923 271
45 kg ravno uronjeno uz $L_1$	901 089

### 3.2.2. Domena proračuna i geometrijska mreža za izračun otpora valova

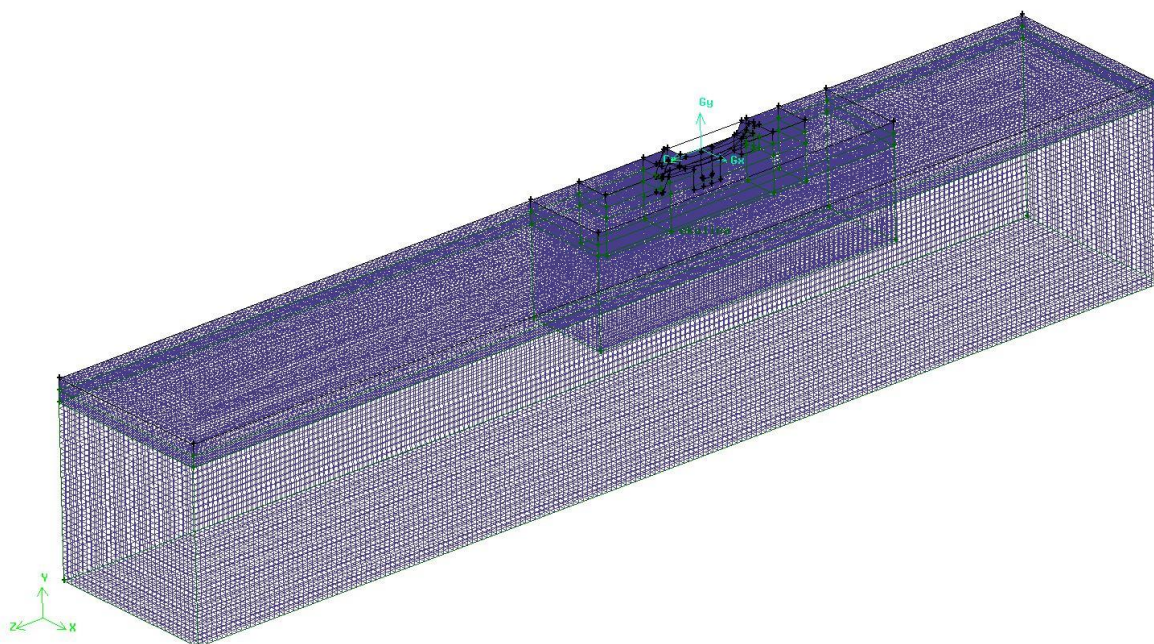
Dimenzije domene su slično određene kao i u prethodnom poglavlju (Poglavlje 3.2.1). Za donji dio domene uzete su iste dimenzije kao i na slikama (Slika 22) te je na taj dio domene dodan gornji dio domene koji diskretizira područje iznad površine vode i služi kako bi se mogli opisati valovi na slobodnoj površini. Dimenzije domene u smjeru strujanja su ostale iste kao i na slici (Slika 21), dok su se dimenzije u smjeru osi  $y$  promjenile te su prikazane na slici (Slika 32).



**Slika 32. Prikaz dimenzija domene proračuna za izračun otpora valova - nacrt**

Pri izradi mreže je također korištena podjela domene u podpodručja kako bi se smanjio ukupni broj konačnih volumena. Finija mreža je napravljena u području u kojem se očekuju veći gradijenti polja fizikalnih veličina. Diskretizacija je najfinija neposredno uz trup jedrilice te u području oko slobodne površine. Fina diskretizacija tj. gušća mreža oko slobodne površine je nužna kako bi se dobro mogle pratiti promjene faza vode i zraka što ustvari prikazuje kretanje vala.

Prostorna diskretizacija provedena je pomoću nestrukturiranih tetraedarskih konačnih volumena (Elements – Tet/Hybrid, Type - TGrid ) i strukturiranih heksaedarskih konačnih volumena (Elements – Hex, Type - Submap). Geometrijska mreža cijele domene proračuna za izračun otpora valova ima 2 231 280 konačnih volumena.



**Slika 33. Geometrijska mreža cijele domene proračuna za izračun otpora valova**

### 3.3. Postavke numeričkih simulacija

Numerički proračun (procesorski dio) započinje učitavanjem mreže u računalni program 'Fluent', te provjerom i skaliranjem mreže.

#### 3.3.1. Postavke numeričkih simulacija za određivanje ovisnosti hidrodinamičkog otpora o brzini

Korišten je model trodimenzijskog nestlačivog turbulentnog strujanja, koji obuhvaća sljedeće jednadžbe: jednadžba kontinuiteta, jednadžba količine gibanja i standardni  $k-\varepsilon$  model turbulencije upotpunjen standardnim zidnim funkcijama.

Proračuni na geometrijskoj mreži za slučaj srednje mase jedrilicara od 45 kg pri ravnom uronu, provedeni su s jednako definiranim rubnim uvjetima, kako prikazuje tablica (Tablica 3.).

**Tablica 3. Rubni uvjeti**

Naziv rubnog uvjeta	Fizikalno svojstvo rubnog uvjeta
Ulaz	Ulazna granica (Velocity inlet)
Izlaz	Izlazna granica (Outflow)
Simetrija	Ravnina simetrije (Symmetry)
Dno_V	Ravnina simetrije (Symmetry)
Bok_V	Ravnina simetrije (Symmetry)
Povrsina_V	Ravnina simetrije (Symmetry)
Kormilo	Nepropusna stijenka (Wall)
Krma	Nepropusna stijenka (Wall)
Bok	Nepropusna stijenka (Wall)
Dno	Nepropusna stijenka (Wall)
Kobilica	Nepropusna stijenka (Wall)

Kada je površina definirana s rubnim uvjetom nepropusne stijenske (Wall) kao što su trup, kobilica i kormilo, pri strujanju fluida se formira granični sloj tj. fluid se zbog trenja lijepi za stijenku. Nasuprot tome rubni uvjet ravnine simetrije (Symmetry) se može tumačiti kao nepropusna stijenka na kojoj nema trenja, te na tako definiranoj stijenci nema stvaranja graničnog sloja [5].

Različite brzine strujanja vode zadaju se na ulaznoj granici (Velocity inlet) kako bi se dobile ovisnosti hidrodinamičkog otpora trupa jedrilice o brzini. Promatrane su brzine prikazane u tablici (Tablica 4.), gdje se za pretvorbu brzine iz čvorova u metre po sekundi koristila jednačba [11]:

$$1 \text{ čvor} = \frac{\text{morska milja}}{\text{h}} \approx 0,514 \text{ m/s.} \quad (48)$$

**Tablica 4. Promatrane brzine**

Brzina $v_\infty$ [čvor]	Brzina $v_\infty$ [m/s]	Odabrana brzina $v_\infty$ [m/s]
0,2	0,1028	0,1
0,5	0,257	0,26
1,5	0,771	0,77
3,0	1,542	1,5
3,5	1,799	1,8
4,0	2,056	2,06

Odabirom vrijednosti brzina osigurano je da se proračun odvija pri visokim vrijednostima Reynoldsovog broja što odgovara turbulentnoj naravi prolaska trupa jedrilice kroz vodu, odnosno uvjetima plovidbe stvarne jedrilice.

Na ulazu su zadane vrijednosti intenziteta turbulencije (engl. Turbulent intensity, TI) i karakteristične duljine vrtloga (engl. Turbulent length scale, TLS):

$$\begin{aligned} TI &= 1\% \\ TLS &= 0,01 \text{ m} \end{aligned} \quad (49)$$

Zadane vrijednosti opisuju slučaj srednje mirne struje fluida [14], a odgovaraju vrijednostima veličina  $k$  i  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} k &= 0.0003375 \text{ m}^2/\text{s}^2, \\ \varepsilon &= 0.0001018808 \text{ m}^2/\text{s}^3 \end{aligned} \quad (50)$$

S obzirom na probleme s konvergencijom pri stacionarnom rješavanju  $k-\varepsilon$  modela turbulencije, problem je rješavan pomoću nestacionarnog rješavača u kojem se lakše kontrolira konvergencija proračunskog postupka odabirom povoljnog vremenskog koraka (tj. smanjivanjem vremenskog koraka). Uz navedeno, ovakvim postupkom rješavanja je utvrđeno da je ovako modeliran problem stacionaran, jer sve fizikalne veličine teže ka konstantnom iznosu.

Broj iteracija unutar jednog vremenskog koraka je ograničen na maksimalno 100 iteracija zbog osiguravanja brzine rješavanja. Za približno određivanje vremena do kojeg je potrebno provoditi proračun korišten je deseterostruki omjer duljine jedrilice i brzine strujanja [13]:

$$t_{\text{uk}} = 10 \frac{L}{v}, \quad (51)$$

koji se mijenjao od slučaja do slučaja.

Početni uvjeti o poljima fizikalnih veličina preuzeti su s ulazne granice. Dakle, na početku proračuna vrijednosti polja fizikalnih veličina su konstantne u cijeloj domeni strujanja, i jednake onima na ulaznoj granici (Velocity Inlet).

Za prvi dio izračuna rješavač je koristio numeričku shemu prvog reda točnosti (First order upwind), do približno 5 dužina jedrilice tj. dok se iznos otpora nije ustalio. Nakon toga je proračun nastavljen numeričkom shemom drugog reda točnosti (Second order upwind). U prvom dijelu proračuna uporabom sheme prvog reda točnosti dolazi se do približnog rješenja, a zatim se približno rješenje poboljšava upotrebom numeričke sheme drugog reda točnosti, te se na taj način dolazi do konačnog rješenja.

Za kriterij dovršenosti proračuna promatrani su reziduali čije vrijednosti su trebale biti manje od:

- $10^{-5}$  – za jednadžbu kontinuiteta
- $10^{-4}$  – komponenta brzine u smjeru osi x
- $10^{-4}$  – komponenta brzine u smjeru osi y
- $10^{-4}$  – komponenta brzine u smjeru osi z
- $10^{-6}$  – turbulentna kinetička energija  $k$
- $10^{-6}$  – disipacija turbulentne kinetičke energije  $\epsilon$
- kada se sila hidrodinamičkog otpora jedrilice ustali u četvrtoj značajnoj znamenici

### 3.3.2. *Postavke numeričkih simulacija za određivanje ovisnosti hidrodinamičkog otpora o dubini urona kobilice*

Korišten je model trodimenzijskog nestlačivog turbulentnog strujanja kao i kod numeričke simulacije za određivanje ovisnosti hidrodinamičkog otpora o brzini (Poglavlje 3.3.1.).

Rubni uvjeti su jednako definirani za svaki slučaj dubine urona kobilice te su isti kao i u tablici (Tablica 3.).

Odabrana je konstantna brzina strujanja od 3 čvora (1,5 m/s) na ulaznoj granici (Velocity inlet) čime se postiže visoka vrijednost Reynoldsovog broja. Na ulazu su zadane iste vrijednosti intenziteta turbulencije (engl. Turbulent intensity, TI) i karakteristične duljine vrtloga (engl. Turbulent length scale, TLS) kao i u Poglavlju 3.3.1. Početni uvjeti o poljima fizikalnih veličina preuzete su s ulazne granice.

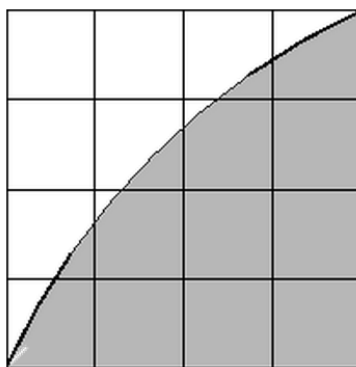
Proračun je proveden dok se ne postigne deseterostruki omjer duljine jedrilice i brzine strujanja kao što je prikazano jednadžbom (51) te iznosi približno 16 sekundi.

Za prvi dio proračuna korištena je numerička shema prvog reda točnosti (First order upwind), a nakon toga numerička shema drugog reda točnosti (Second order upwind) kako bi se dobila konačna rješenja koja zadovoljavaju kriterije dovršenosti proračuna.

### 3.3.3. Postavke numeričkih simulacija za određivanje otpora valova

Za određivanje otpora valova korišten je višefazni model volumena fluida (engl. Volume of fluid model) trodimenzijskog nestlačivog neviskoznog (engl. Inviscid) fluida sa dvije Eulerske faze - vodom i zrakom. Pri čemu je korištena opcija strujanja u otvorenom kanalu (engl. Open Channel Flow).

Višefazni model volumena fluida (engl. Volume of fluid model, VOF) prati volumenski udio faze (engl. Volume fraction of a phase) unutar kontrolnog volumena, prikazano na slici (Slika 34). Volumenski udio je definiran kao omjer volumena promatrane faze i volumena promatranog kontrolnog volumena [13].



Slika 34. Prikaz načina rada VOF modela [13]



Osnovni rubni uvjeti prikazani su u tablici (Tablica 5.). Nakon definiranja modela računalni program 'Fluent' stvara početnu razdjelnu površinu između faza vode i zraka te time nastaje podjela rubnih uvjeta na dio koji je u dodiru s vodom i na dio koji je u dodiru sa zrakom. Iz tog razloga ćemo npr. imati gornji i donji dio rubnog uvjeta zida na kobilici, analogno vrijedi i za ostale djelove koji su u dodiru sa obje faze.

**Tablica 5. Rubni uvjeti**

Naziv rubnog uvjeta	Fizikalno svojstvo rubnog uvjeta
Ulaz	Ulazna granica (Pressure inlet)
Izlaz	Izlazna granica (Pressure outlet)
Simetrija (sami vrh domene)	Ravnina simetrije (Symmetry)
Dno_V	Ravnina simetrije (Symmetry)
Bok_V	Ravnina simetrije (Symmetry)
Povrsina_V	Ravnina simetrije (Symmetry)
Početna slobodna površina	Početna razdjelna površina (Interior)
Kormilo - faza 1	Nepropusna stijenka (Wall)
Kormilo - faza 2	Nepropusna stijenka (Wall)
Krma - faza 1	Nepropusna stijenka (Wall)
Krma - faza 2	Nepropusna stijenka (Wall)
Bok - faza 1	Nepropusna stijenka (Wall)
Bok - faza 2	Nepropusna stijenka (Wall)
Dno - faza 1	Nepropusna stijenka (Wall)
Dno - faza 2	Nepropusna stijenka (Wall)
Kobilica	Nepropusna stijenka (Wall)

Na ulaznoj granici (Pressure inlet) definiran je tlak preko odabrane konstantne brzine strujanja od 3 čvora (1,5 m/s) u smjeru normale na ulaznu granicu i zadavanjem mjesta gdje se nalazi slobodna površina (engl. Free Surface Level). U promatranom slučaju mjesto gdje se nalazi slobodna površina je definirano s  $y = 5m$  što bi na slici (Slika 32) odgovaralo oznaci  $\approx 4d$ . Početni uvjeti o poljima fizikalnih veličina preuzeti su s ulazne granice. Detalje o načinu zadavanja ulaznih i izlaznih granica te početnih uvjeta može se naći u literaturi [14].

Korištena je numerička shema prvog reda točnosti (First order upwind), a nakon toga numerička shema drugog reda točnosti (Second order upwind) kako bi se dobila konačna rješenja. Za kriterij dovršenosti proračuna promatrani su reziduali čije vrijednosti su trebale biti manje od:

- $10^{-5}$  – za jednadžbu kontinuiteta
- $10^{-4}$  – komponenta brzine u smjeru osi x
- $10^{-4}$  – komponenta brzine u smjeru osi y
- $10^{-4}$  – komponenta brzine u smjeru osi z
- $10^{-4}$  – volumenski udio faze (engl. Volume fraction of a phase)
- kada se sila otpora valova počne periodički ponavljati, što bi odgovaralo odvajanju i premještanju vala duž trupa jedrilice

### 3.4. Numerička simulacija – izračun

Pri provođenju numeričke simulacije bitno je pratiti konvergenciju i tok izračuna. Tokom izrade ovog rada pokazalo se poželjnim numeričku simulaciju izračunavati u više djelova zbog mogućnosti kontrole i procjene fizikalnosti rješenja numeričke simulacije te mogućnosti postizanja optimalne brzine računanja. Npr. numerička simulacija je započeta s veličinom vremenskog koraka 0,001 sekundi i brojem vremenskih koraka 100. U principu se cijela numerička simulacija mogla provesti s tom veličinom vremenskog koraka i s brojem vremenskih koraka 8 000, ali u tom slučaju ne bi mogli za vrijeme računanja provjeravati fizikalnost rješenja koje dobivamo, te bi numerička simulacija dugo trajala. Efikasnije je bilo nakon prvih 100 vremenskih koraka promijeniti veličinu vremenskog koraka na 0,005 sekundi i napraviti idućih 100 vremenskih koraka.

U proračunima je bitno kontrolirati iznose bezdimenzijske udaljenosti težišta prvih volumena uz stijenke  $y^+$  kako bi se provjerilo opisuje li mreža dobro promatrano strujanje, iz čega se indirektno može zaključivati i o valjanosti rezultata proračuna.

Području valjane primjene standardnih zidnih funkcija je:

$$30 < y^+ < 600 \text{ do } 1000. \quad (52)$$

Ako je vrijednost izvan navedenog intervala narušena je točnost primjene zidnih funkcija. U slučaju da je iznos tangencijalnih naprezanja mali na područjima gdje je  $y^+$  manja od 30, neće se pojaviti značajnija pogreška pri izračunu otpora (npr. područja odvajanja strujanja).

Vrijeme trajanja numeričkih izračuna variralo je od slučaja do slučaja. Vrijeme trajanja numeričkog izračuna ovisi o broju vremenskih koraka, broju izvršenih iteracija po vremenskom koraku koje su promjenjive u ovisnosti o veličini vremenskog koraka te stvarnom vremenu koje je potrebno računalu kako bi izvršilo iteraciju.

Pri izračunu ovisnosti hidrodinamičkog otpora o brzini i dubinu urona kobilice postavljeno je ograničenje broja iteracija po vremenskom koraku na 100 iteracija, a broj izvršenih iteracija je u prosjeku bio oko 70 iteracija po vremenskom koraku. Prosječan broj vremenskih koraka cijelog proračuna iznosi oko 6 000. Iz čega proizlazi da je po proračunu, za jedan od slučajeva, ukupan broj iteracija iznosio oko 420 000. Takav jedan proračun izvodio se oko 30 sati na stolnom računalu (četverojezgreni procesor 2,4 GHz, 8 GB radne memorije).

Pri izračunu otpora valova, zbog veće računalne zahtjevnosti uslijed korištenja višefaznog modela i velikog broja konačnih volumena proračun je tekao znatno sporije. Za izračun 100 vremenskih koraka veličine 0,0005 sekunde računalu je bilo potrebno oko 8 sati rada. Te je ukupan broj sati rada računala za cijeli proračun bio oko 300 sati.

## 4. EKSPERIMENTALNO MJERENJE

Svaku numeričku simulaciju potrebno je potvrditi eksperimentom. Prvotna želja je bila da se provede eksperiment u bazenima Brodarskog instituta u omjeru 1:1 tj. na stvarnoj jedrilici klase Optimist. Zbog nemogućnosti postizanja dogovora s Brodarskim institutom u Zagrebu i nedostataka mogućnosti da se ispitivanje hidrodinamičkog otpora broda provede unutar Fakulteta, mjerenje je moralo biti napravljeno na drugačiji način.

Jedina preostala opcija bila je da se mjerenja provedu na Jarunu. Unatoč činjenici da u tom okruženju nije moguće kontrolirati sve uvjete kao što bi to bilo moguće u bazenu.

### 4.1. Opis eksperimentalnog mjerenja

Za ispitivanje je korišten trup jedrilice Optimist (bez jedra i jarbola) s kormilom i potpuno uronjenom kobilicom. Kako bi se postigla željena dubina urona i što ravnomjerniji raspored težine po trupu korišteni su balastni utezi poznatih masa. Za postizanje konstantne brzine korišteno je dugo uža za vuču kojim je jedrilica bila vučena gumenim čamcem na motorni pogon. Pri mjerenju je bilo posebno važno postići pravocrtno gibanje trupa jedrilice i prolazak trupa jedrilice kroz relativno mirnu vodu, kako bi uvjeti mjerenja bili što sličniji modelima koje sam numerički ispitivala.

Pravocrtno gibanje je bio parametar koji je bilo najteže kontrolirati. Zbog usmjeravanja trupa jedrilice po pravcu bilo je nužno da se u jedrilici nalazi osoba koja će kormilariti. Jedrilicom je upravljao mladi jedriličar mase 20 kg kojem je zadatak također bio da što mirnije sjedi kako ne bi poremetio raspored ravnomjerno raspoređenih masa po trupu te da dojavu kada kormilo stoji mirno u smjeru pravca. Ukoliko bi došlo do bočnog kretanja trupa jedrilice otpor bi narastao zbog veće naletne površine ponajprije kobilice i kormila, što se na tako malom i laganom brodu može osjetiti kao sila koja želi zakrenuti kormilo. Pri pravocrtnom gibanju sile koje djeluju sa svake strane kormila su u ravnoteži te kormilo teži ka ostajanju u smjeru pravca gibanja jedrilice.

Također je bilo bitno da trup jedrilice prolazi kroz relativno mirnu vodu kako bi se što više smanjio otpor koji nastaje kada jedrilica prolazi kroz valovitu vodu. Valni otpor koji je proučavan u ovom radu je otpor koji rade valovi koji se stvaraju samim prolaskom trupa kroz fluid. Prolazak kroz mirnu vodu je ostvaren korištenjem dovoljno dugog užeta za vuču jer se

tako jedrilica nalazila na dovoljno velikoj udaljenosti od gumenog čamca kako jedrilica ne bi prolazila kroz hidrodinamički trag iza gumenog čamca.

Brzina je mjerena pomoću GPS uređaja pri čemu se vodilo računa da brzina bude konstantna. Hidrodinamički otpor trupa jedrilice se mjerio kao sila kojom se trup jedrilice suprotstavlja gibanju kroz vodu koja se naziva sila tegljenja (engl. tow-rope), što je jedna od definicija otpora prema [1] i [6].

Izmjerene su vrijednosti hidrodinamičke sile otpora u ovisnosti o izmjerenoj istisnini (uzrokuju je ukupna masa jedrilice, utega i kormilara) i izmjerenoj brzini kretanja jedrilice.

#### 4.2. Oprema za mjerenje (mjerna oprema, mjerni instrumenti)

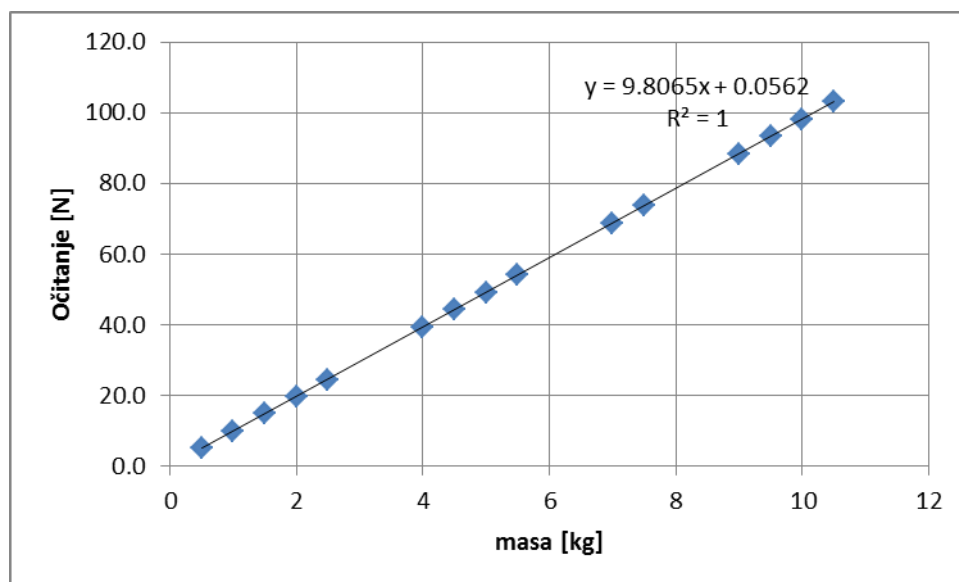
Od eksperimentalne opreme korišteno je:

- Dinamometar Kern & Sons Dynamometer FH 1K (tvorničke točnosti 0.2%)
- Brzinomjer Garmin Fortrex 401
- Vaga Koracell MS8137

Svi uređaji su umjereni u Laboratoriju za hidrodinamiku i hidrauličke strojeve.

##### Dinamometar

Dinamometar Kern & Sons Dynamometer FH 1K je umjeren pomoću utega različitih masa.



Slika 35. Dijagram umjeravanja dinamometra

Pogrešku ocjenjujemo na temelju rezultata umjeravanja kao dvostruku standardnu devijaciju odstupanja očitanih podataka u odnosu na postavljene podatke, literatura [21].

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x - x_p)^2}{n - 1}}, \quad (53)$$

gdje je:

- $\sigma$  – standardna devijacija,
- $x$  – očitana vrijednost (sila u N),
- $x_p$  – postavljena vrijednost (masa utega pomnožena s gravitacijom),
- $n$  – broj izmjerenih točaka.

Procijenjena pogreška sile na temelju umjeravanja iznosi 0,058 N. Najmanje očitavanje uređaja je 0,1 N pa se ta vrijednost usvaja kao procjena pogreške sile  $u_F = 0,1$  N.

### Vaga

Na identičan način kako je umjeren dinamometar umjerena je i vaga Koracell MS8137 te se za procjenu pogreške mase usvojilo dvostruko minimalno očitavanje  $u_m = 0,1$  kg.

### Brzinomjer

Brzinomjer Garmin Fortrex 401 radi na principu mjerenja duljina i vremena. Uređaj mjeri prijedeni put preko GPS satelita te ima unutarnji digitalni sat za određivanje vremena između dva očitavanja. Uređaj je umjeravan na jezeru Jarun. Za duljine su se koristile oznake 500 m, 1000 m, 1500 m i 2000 m, na veslačkoj stazi, a vremena su mjerena štopericom.

Kod umjeravanja je određeni problem predstavljala promjenjiva brzina broda tako da se provodio niz očitavanja između dvije oznake pa se u postupku umjeravanja uzimala osrednjena brzina. Kako se umjeravanjem dobila procjena greške manja nego što preporuča proizvođač usvojena je nepovoljnija varijanta te je procjena greške brzine  $u_v = 0,1$  čvor.

Ukupna relativna pogreška mjerenja

Ukupnu relativnu pogrešku mjerenja izračunava se iz izraza [21]:

$$r_{\text{uk}} = \sqrt{\left(\frac{u_F}{F_{\text{ref}}}\right)^2 + \left(\frac{u_m}{m_{\text{ref}}}\right)^2 + \left(\frac{u_v}{v_{\text{ref}}}\right)^2}, \quad (54)$$

gdje je:

$r_{\text{uk}}$  - relativna pogreška mjerenja,

$F_{\text{ref}}$  – referentna sila, usvaja se sila od 16 N,

$m_{\text{ref}}$  – referentna masa, usvaja se masa od 45 kg,

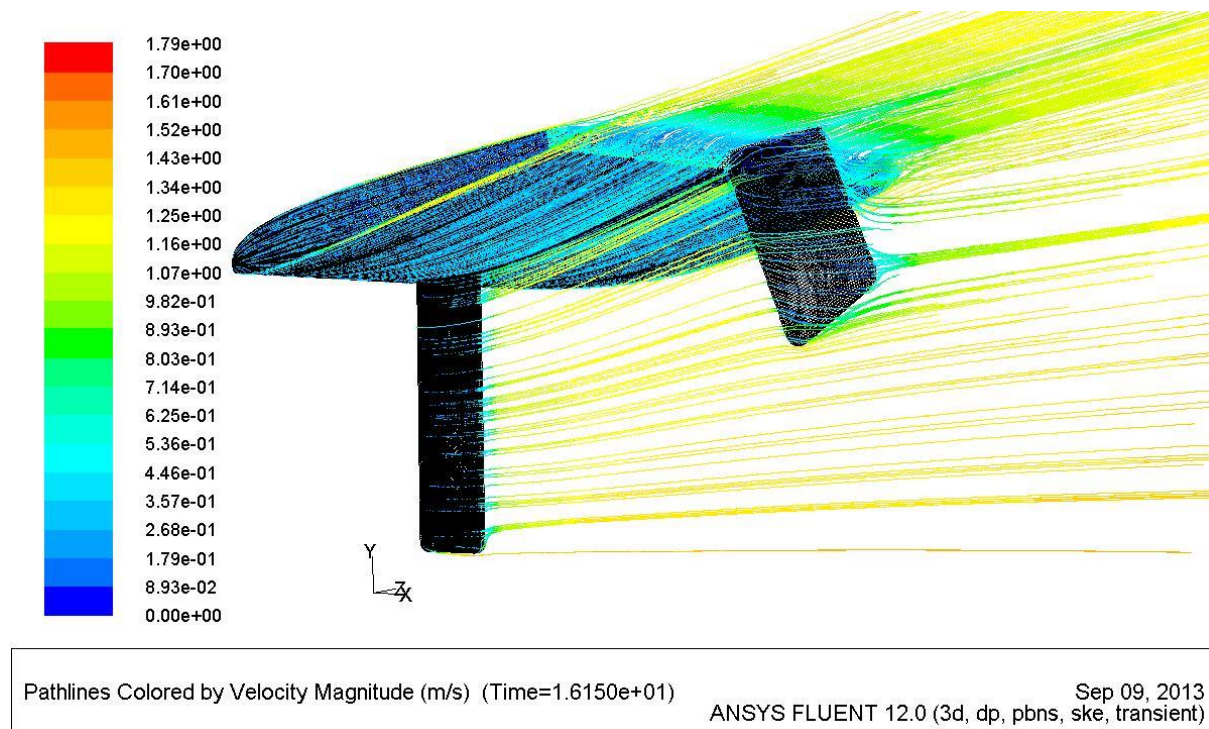
$v_{\text{ref}}$  – referentna brzina, usvaja se brzina od 3 čvora.

Na temelju gore izloženih podataka ukupna relativna pogreška mjerenja iznosi:

$$r_{\text{uk}} = \pm 0,03398 = \pm 3,4\%. \quad (55)$$

## 5. PRIKAZ I ANALIZA REZULTATA

Na slici (Slika 36) su prikazane strujnice koje opisuju način opstrujavanja uronjenog dijela jedrilice. Prikazano je strujanje oko kobilice i kormila te trag koji nastaje nakon krme a posljedica je prolaska trupa kroz vodu.



**Slika 36. 3D prikaz opstrujavanja uronjenog dijela jedrilice, gdje su strujnice u bojama vrijednosti apsolutne brzine za slučaj 45 kg ravno uronjen**

Napomena: Nepravilne linije koje se mogu primijetiti na pojedinim slikama koje prikazuju rezultate, nemaju nikakvo fizikalno značenje. Nastaju kao posljedica računanja na 4 jezgre računala pri čemu se domena dijeli na 4 podpodručja. Računalo automatski vrši spajanje rezultata pri čemu dolazi do djelomičnog preklapanja podpodručja i vizualnog nastanka navedenih linija.



### 5.1. Ovisnost koeficijenta hidrodinamičkog otpora o brzini

Pri određivanju bezdimenzijskog koeficijenta otpora u ovisnosti o brzini korišten je izraz za ukupni bezdimenzijski koeficijent otpora:

$$C_D = \frac{F_D}{A_{\text{ref}} \rho \frac{v_\infty^2}{2}}, \quad (56)$$

gdje je:

- $C_D [-]$  - bezdimenzijski koeficijent otpora, definiran u pozitivnom smjeru osi z,
- $F_D [N]$  - hidrodinamička sila otpora, definirana u pozitivnom smjeru osi z,
- $v_\infty [m^2/s]$  - brzina neporemećenog strujanja,
- $A_{\text{ref}} [m^2]$  - referentna površina uronjenog dijela jedrilice,
- $\rho [kg/m^3]$  - gustoća fluida,

koji iznose:

$$A_{\text{ref}} = 0,25 \text{ m}^2; \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad (57)$$

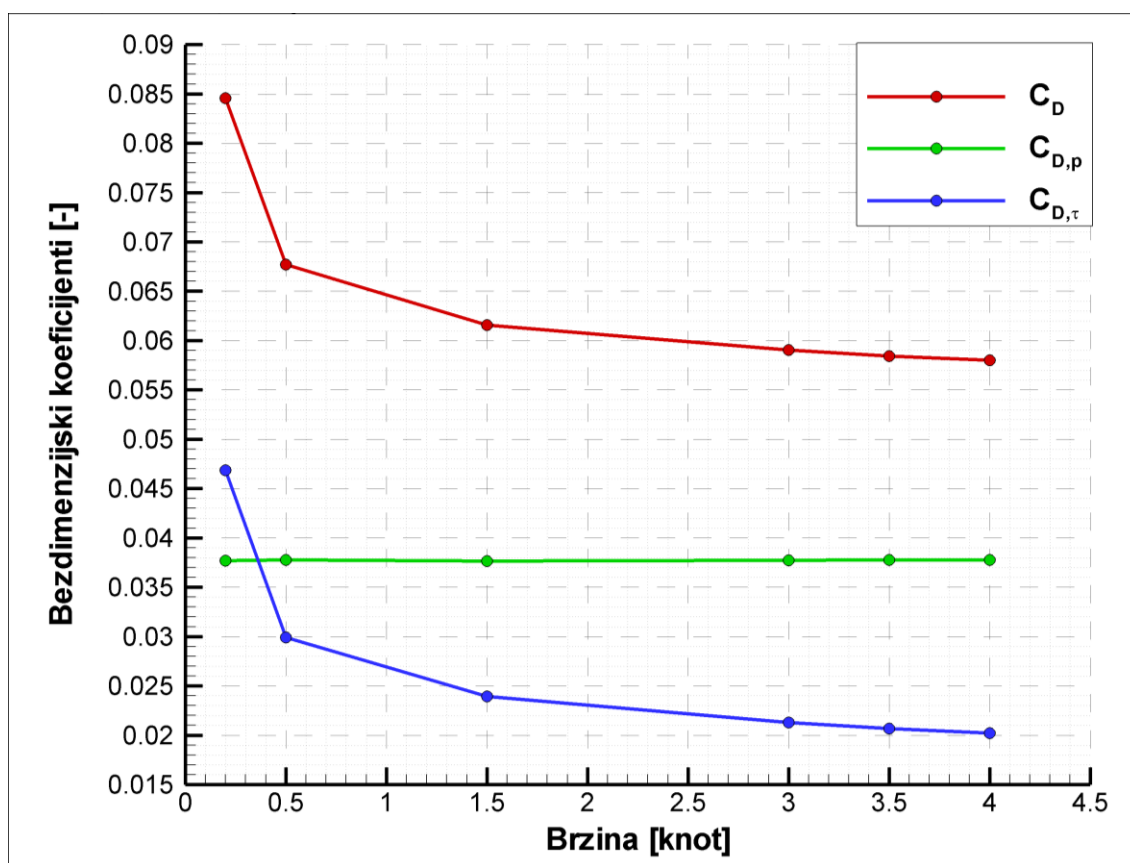
a iznosi brzina su navedeni u tablici (Tablica 4.) u poglavlju 3.3.1.

Bezdimenzijski koeficijent otpora oblika  $C_{D,p}$  i bezdimenzijski koeficijent otpora trenja  $C_{D,\tau}$  se određuju jednadžbom (56).

Iznosi koeficijenta otpora i hidrodinamičke sile otpora uronjenog dijela trupa jedrilice pri različitim brzinama promatrano na slučaju za 45 kg ravno uronjeno prikazani su u tablici (Tablica 6.).

Tablica 6. Koeficijenta otpora i hidrodinamičke sile otpora pri različitim brzinama

$v_\infty$		$F_D$ [N]	$C_D$	$F_{D,p}$ [N]	$C_{D,p}$	$F_{D,\tau}$ [N]	$C_{D,\tau}$
Čvor	[m/s]						
0,2	0,1	0,1057	0,08456	0,04712	0,03770	0,05858	0,04686
0,5	0,25	0,5288	0,06769	0,2951	0,03776	0,2336	0,02990
1,5	0,77	4,564	0,06158	2,790	0,03765	1,774	0,02394
3,0	1,5	16,60	0,05902	10,61	0,03772	5,99	0,02130
3,5	1,8	23,66	0,05842	15,30	0,03778	8,37	0,02067
4,0	2,06	30,77	0,058	20,05	0,03778	10,72	0,02021



Slika 37. Dijagram ovisnosti bezdimenzijskog koeficijenta otpora o brzini

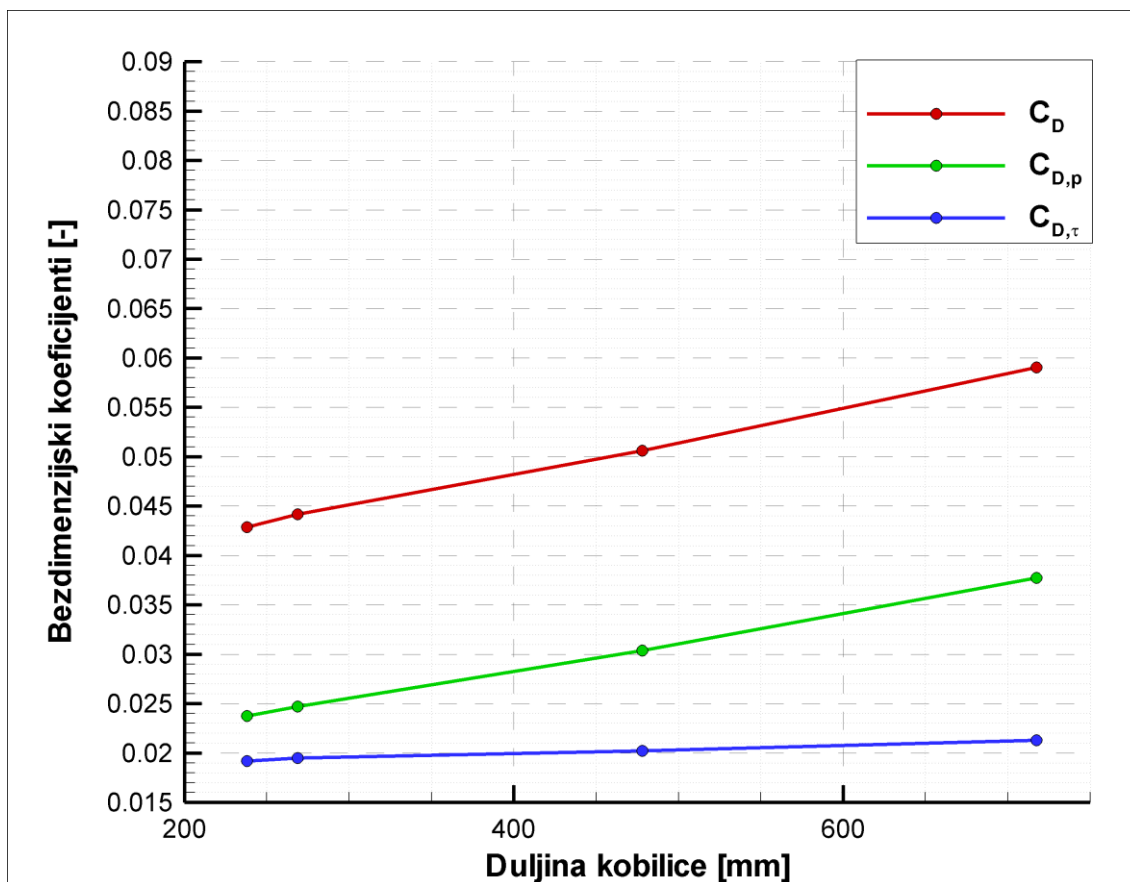
## 5.2. Ovisnost koeficijenta hidrodinamičkog otpora o dubini urona kobilice

Pri računanju koeficijenta hidrodinamičkog otpora korištene su jednadžbe (56) i (57) te vrijednosti duljine kobilice navedene u poglavlju .

Koeficijenti otpora i hidrodinamičke sile za različite duljine kobilice tj. dubine urona kobilice na slučaju 45 kg ravno uronjeno pri konstantnoj brzini od 3 čvora tj. 1,5 m/s, prikazani su u tablici (Tablica 7.) i na slici (Slika 38).

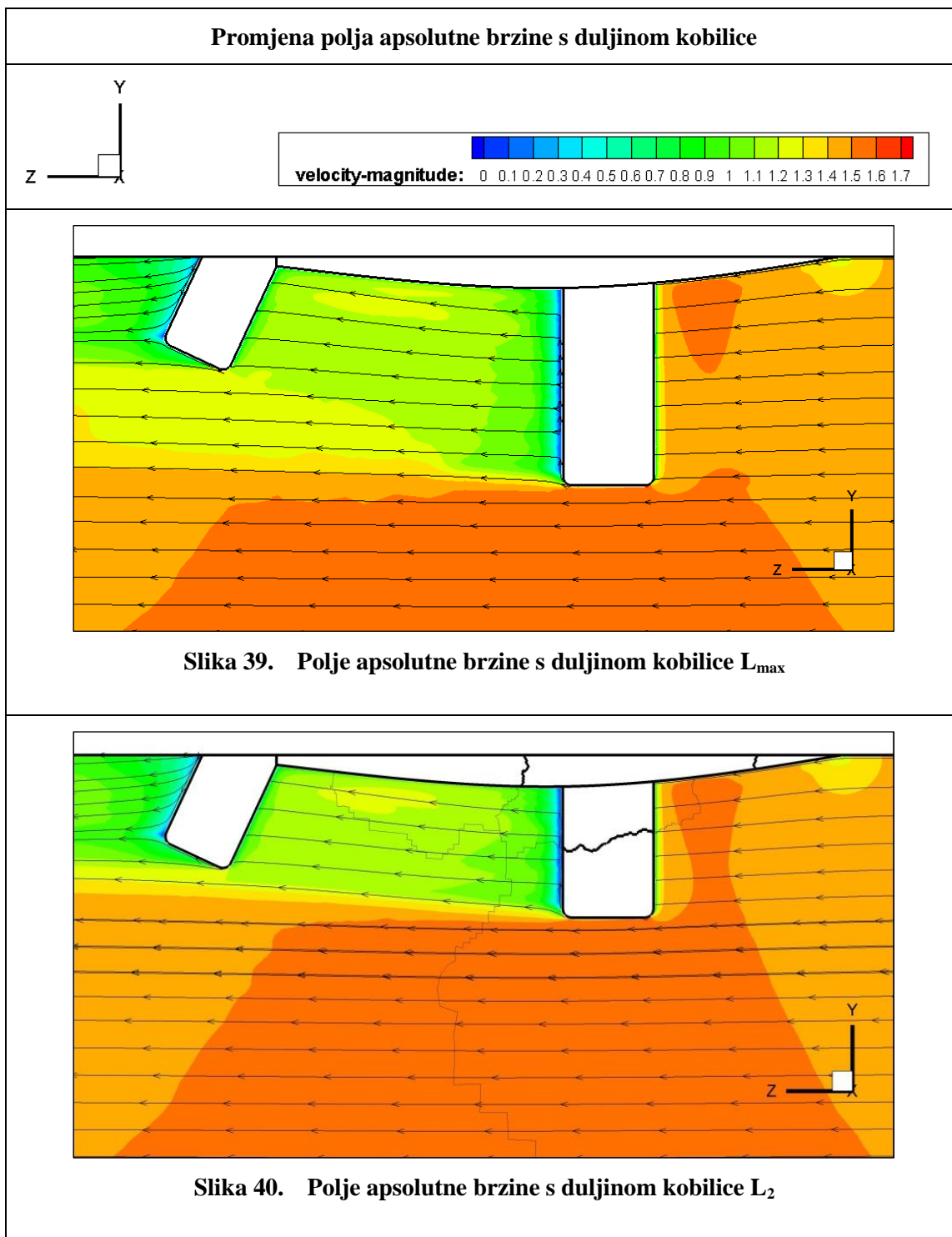
**Tablica 7. Koeficijenta otpora i hidrodinamičke sile otpora za različite dubine urona kobilice**

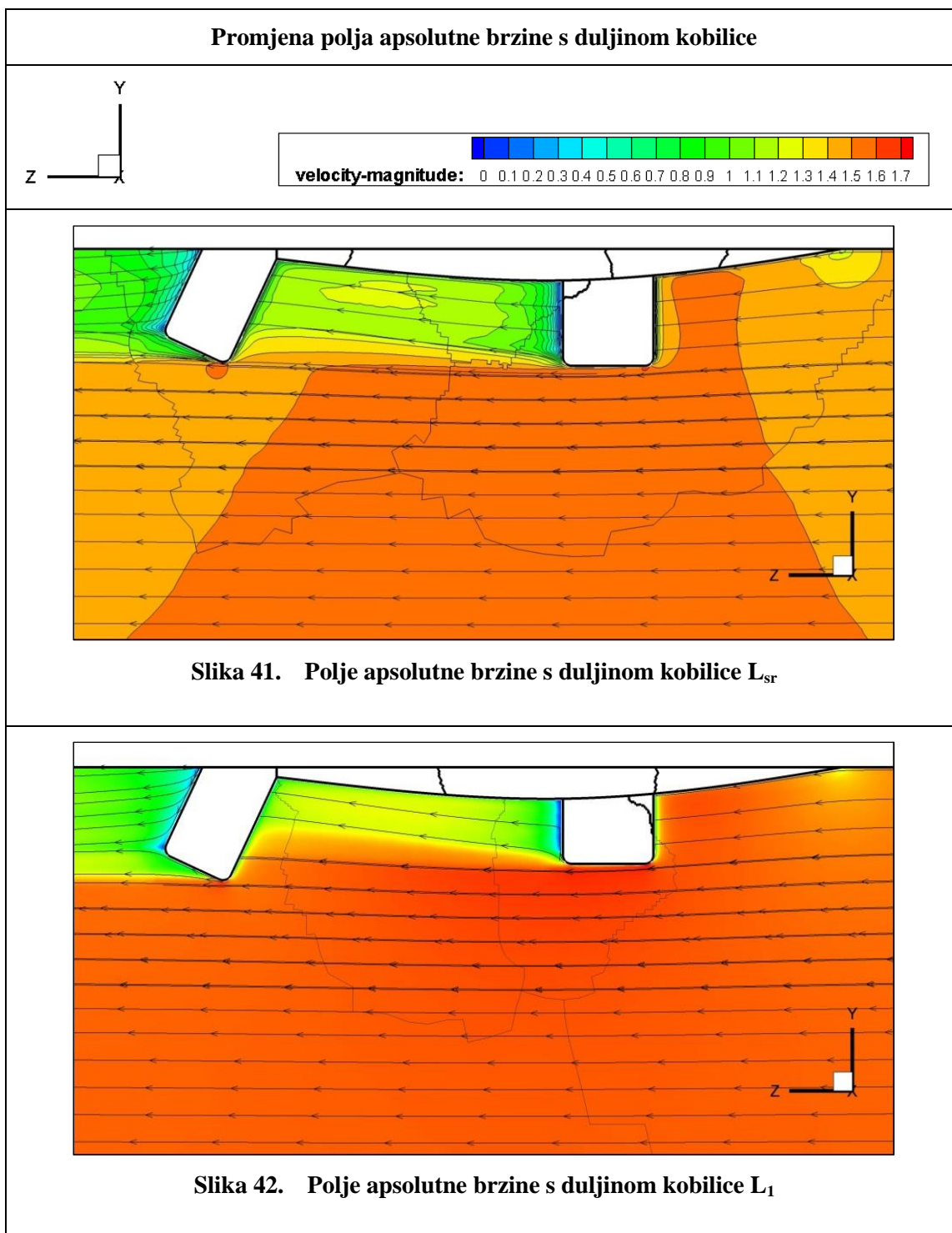
Dužina kobilice L [mm]	$F_D$ [N]	$C_D$	$F_{D,p}$ [N]	$C_{D,p}$	$F_{D,\tau}$ [N]	$C_{D,\tau}$
$L_{max} = 717,41$ mm	16,60	0,05902	10,61	0,03772	5,99	0,02130
$L_2 = 478$ mm	14,23	0,05059	8,54	0,03036	5,69	0,02023
$L_{sr} = 268,84$ mm	12,42	0,04416	6,94	0,02469	5,48	0,01947
$L_1 = 238$ mm	12,06	0,04288	6,67	0,02372	5,39	0,01916



**Slika 38. Dijagram ovisnosti bezdimenzijskog koeficijenta otpora o dubini urona kobilice**

U nastavku su prikazana polja apsolutne brzine na uzdužnoj vertikalnoj ravnini simetrije sa strujnicama (Slika 39 - Slika 42) za sve slučajeve dubine urona kobilice od  $L_{\max}$  do  $L_1$ . Svi prikazi na slikama (Slika 39 - Slika 42) imaju istu skalu kako bi se mogli međusobno uspoređivati.





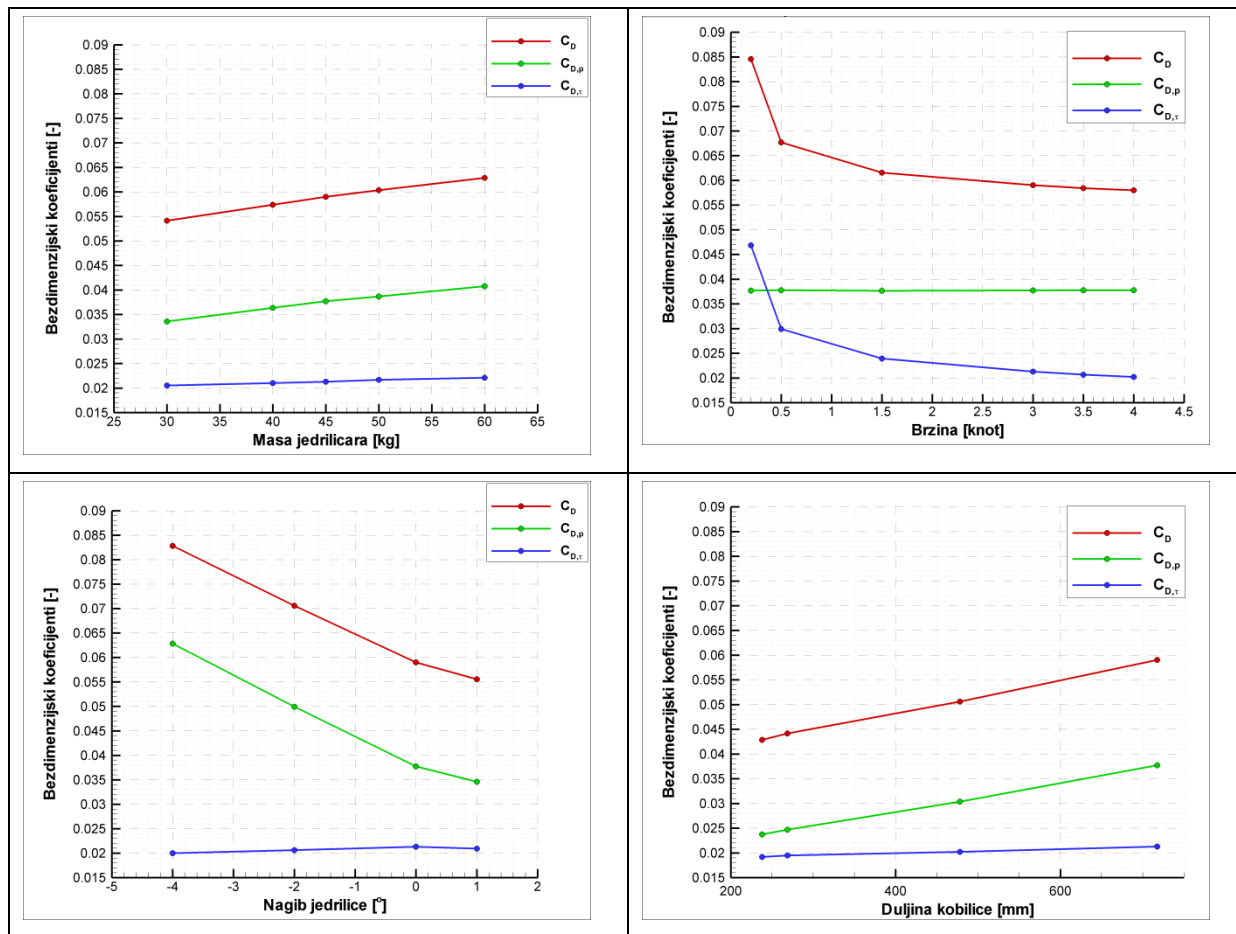
Iz usporednog prikaza slika je vidljivo kako kobilica i kormilo utječu na strujanje fluida. Područja u kojima se promjena apsolutne vrijednosti brzine vide su ispred i iza kobilice. Može se uočiti u kolikoj se mjeri kormilo nalazi u strujanju kojeg je već poremetila kobilica, te su vidljiva područja na kojima je opet porastao iznos apsolutne brzine što govori o ponovnom spajanju strujnica fluida koje su morale obići kobilicu.

### 5.3. Analiza ovisnosti bezdimenzijskih koeficijenata hidrodinamičkog otpora o masi jedriličara, uzdužnom nagibu jedrilice, dubini urona kobilice i brzini

Podatci o bezdimenzijskim koeficijentima hidrodinamičkog otpora o masi jedriličara i o uzdužnom nagibu jedrilice preuzeti su iz literature [17].

Radi lakše usporedbe sva četiri dijagrama koji prikazuju ovisnosti bezdimenzijskih koeficijenata su prikazani u tablici (Tablica 8.):

Tablica 8. Usporedni prikaz koeficijenta otpora u ovisnosti o raznim parametrima



Iz usporednog prikaza dijagrama jasno je vidljivo da su promjene koeficijenta otpora trenja neznatne i relativno konstantnog iznosa, osim u slučaju niskih brzina kad koeficijent otpora značajno utječe na ukupni hidrodinamički koeficijent otpora. U skoro svim slučajevima dominantniji utjecaj na ukupni hidrodinamički otpor ima otpor oblika.

U svrhu analize mogu se promatrati područja krivulje i pretpostaviti linearni odnosi kako bi se odredio red veličine međusobnih odnosa, te slijedi:

- u području 30 do 60 kg bezdimenzijski koeficijent se promjenio za  $\Delta C_D \approx 0,009$ ;
- u području  $-4^\circ$  do  $0^\circ$  bezdimenzijski koeficijent se promjenio za  $\Delta C_D \approx 0,025$ ;
- u području 0,5 do 4 čvora bezdimenzijski koeficijent se promjenio za  $\Delta C_D \approx 0,01$ ;
- u području 300 do 700 mm bezdimenzijski koeficijent se promjenio za  $\Delta C_D \approx 0,014$ .

Ukoliko se navedeni podatci zapišu na način da se vidi koliko je potrebno promjeniti iznos promatranog parametar kako bi se koeficijent otpora promjenio za  $1 \cdot 10^{-2}$  dobivamo podatke prikazane tablicom (Tablica 9.).

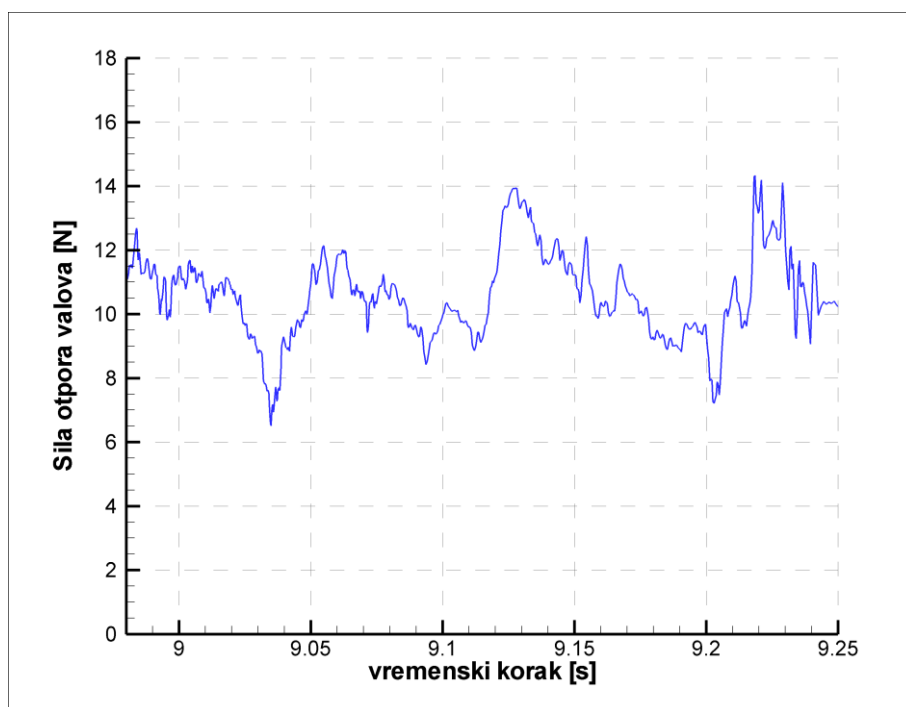
**Tablica 9. Usporedni prikaz koeficijenta otpora u ovisnosti o raznim parametrima**

$\Delta C_D$	potrebna promjena iznosa promatranog parametra
$1 \cdot 10^{-2}$	33,33 kg
$1 \cdot 10^{-2}$	$1,6^\circ$
$1 \cdot 10^{-2}$	3,5 čvor = 1,8 m/s
$1 \cdot 10^{-2}$	286 mm = 2,86 cm

Iz prikazanih podataka je jasno vidljivo da će istu promjenu, odnosno povećanje otpora uzrokovati povećanje mase od 33 kg, povećanje uzdužnog nagiba za 1,6 stupnjeva (nagib prema nazad), povećanje brzine kretanja jedrilice za 3,5 čvora ili povećanje dubine urona kobilice za približno 2,8 cm. Ako se dobiveni redovi veličina primijene na stvarne okolnosti tokom jedrenja nije zaočekivati promjenu mase za 33,33 kg. Nasuprot tome, promjena mjesta sjedenja jedriličara što posljedično mijenja uzdužni nagib jedrilice karakteristična je za samo jedrenje, a time će promjena od svega par stupnjeva uzdužnog nagiba značajnije utjecati na hidrodinamički otpor trupa broda.

#### 5.4. Otpor valova

Periodičko ponavljanje sile otpora valova u vremenu prikazano je na slici (Slika 43). Iz slike je jasno da se ne može govoriti o egzaktnom iznosu sile otpora valova zbog toga što ne teži ka konačnom iznosu. Otpor valova je teško odrediti zbog izrazito nestacionarne prirode vala, te složenih interakcija unutar valnog sistema koje stvara trup broda.



Slika 43. Sila otpora valova

U tablici (Tablica 10.) je prikazana usporedba ukupne hidrodinamičke sile otpora trupa jedrilice za 45 kg ravno uronjeno izračunato pomoću  $k - \varepsilon$  modela turbulencije i hidrodinamičke sile otpora valova u kojoj nema otpora trenja jer je korišten višefazni model za neviskozne faze.

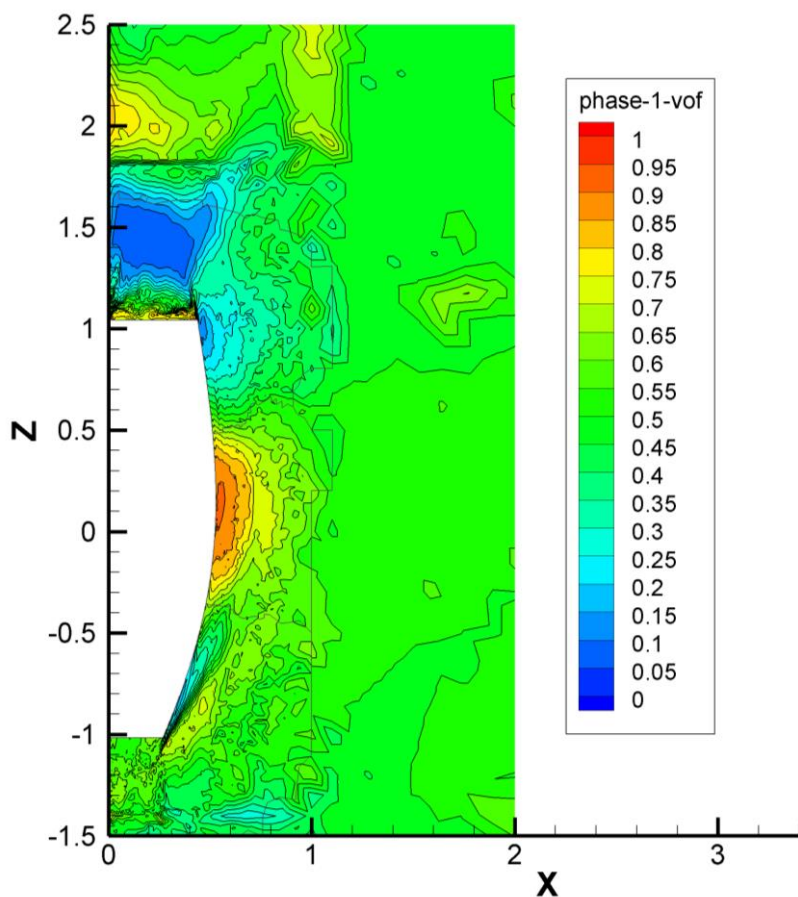
Tablica 10. Koeficijenta otpora i hidrodinamičke sile otpora pri različitim brzinama

Naziv slučaja	$v_\infty$		$F_D$ [N]	$F_{D,p}$ [N]	$F_{D,\tau}$ [N]
	Čvor	[m <sup>2</sup> /s]			
45 kg ravno uronjeno	3,0	1,5	16,60	10,61	5,99
45 kg ravno uronjeno - uz otpora valova	3,0	1,5	6,2 – 14,2	6,2 – 14,2	-



Kako je već prije objašnjeno pomoću višefaznog modela volumena fluida (engl. Volume of fluid model, VOF) prati se volumenski udio faze (engl. Volume fraction of a phase) unutar kontrolnog volumena. Za fazu jedan je odabran zrak, a na slikama (Slika 44 - Slika 46) su prikazani volumenski udjeli zraka na ravnini  $y=0$ . Gdje je vrijednost volumenskog udjela zraka jednaka jedinici (crveno) nalazi se dol vala, dok se na mjestu volumenskog udjela zraka jednakoj nuli (plavo) nalazi brijeg vala. Na slici (Slika 44) je ustvari preko volumenskog udjela zraka prikazan sustav valova koje stvara trup jedrilice pri prolasku kroz vodu.

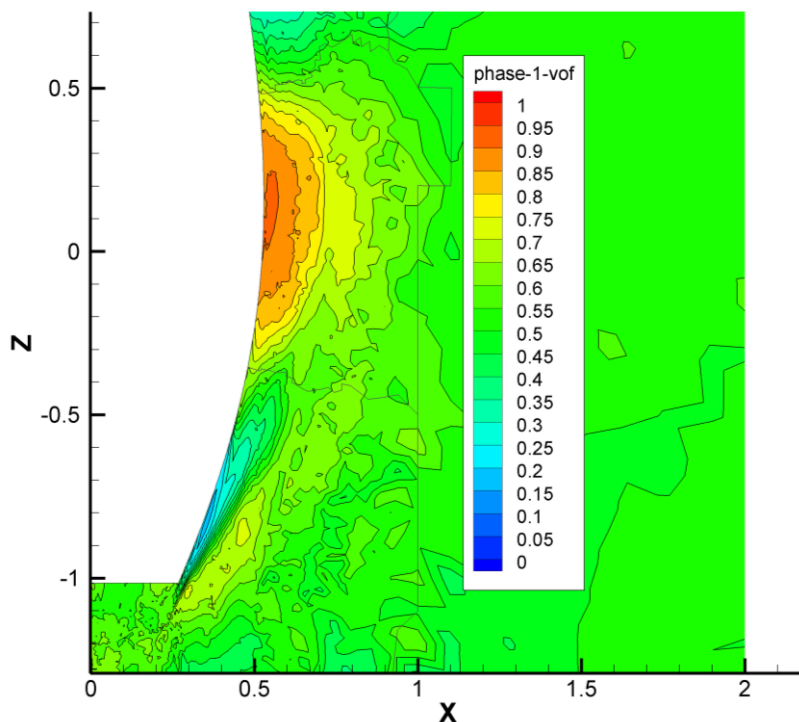
Bitno je naglasiti da će se već u idućem trenutku valovi pomaknuti duž trupa jedrilice, stoga navedene slike vrijede za određeni vremenski trenutak. Nakon nekog vremenskog perioda navedena će se slika ponoviti. Puno bolji način za prikaz valova je format koji je ovisan o vremenu kao i sam val (npr. format video zapisa tj animacije).



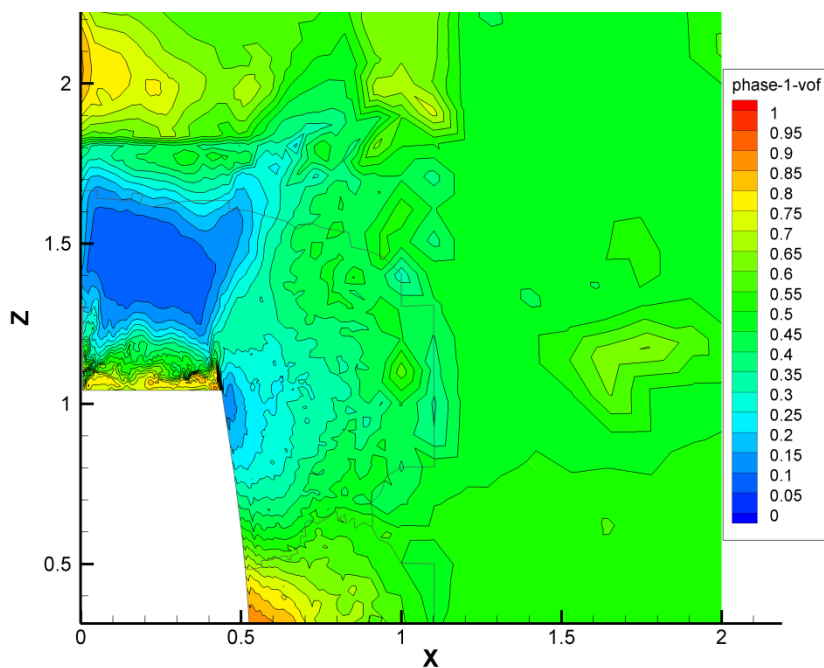
**Slika 44.** Vrijednosti faze 1 – zraka na ravnini  $y=0$

Detalj pramca gdje se vidi divergentni val kojeg stvara pramac i koji pada po boku broda, prikazan je na slici (Slika 45).

Na slici (Slika 46) je prikazan detalj krme gdje se vidi hidrodinamički trag jedrilice. Vidi se da se hidrodinamički val prvo sastoji od dola, zatim brijega pa opet dola, te da se postepeno raspršuje.



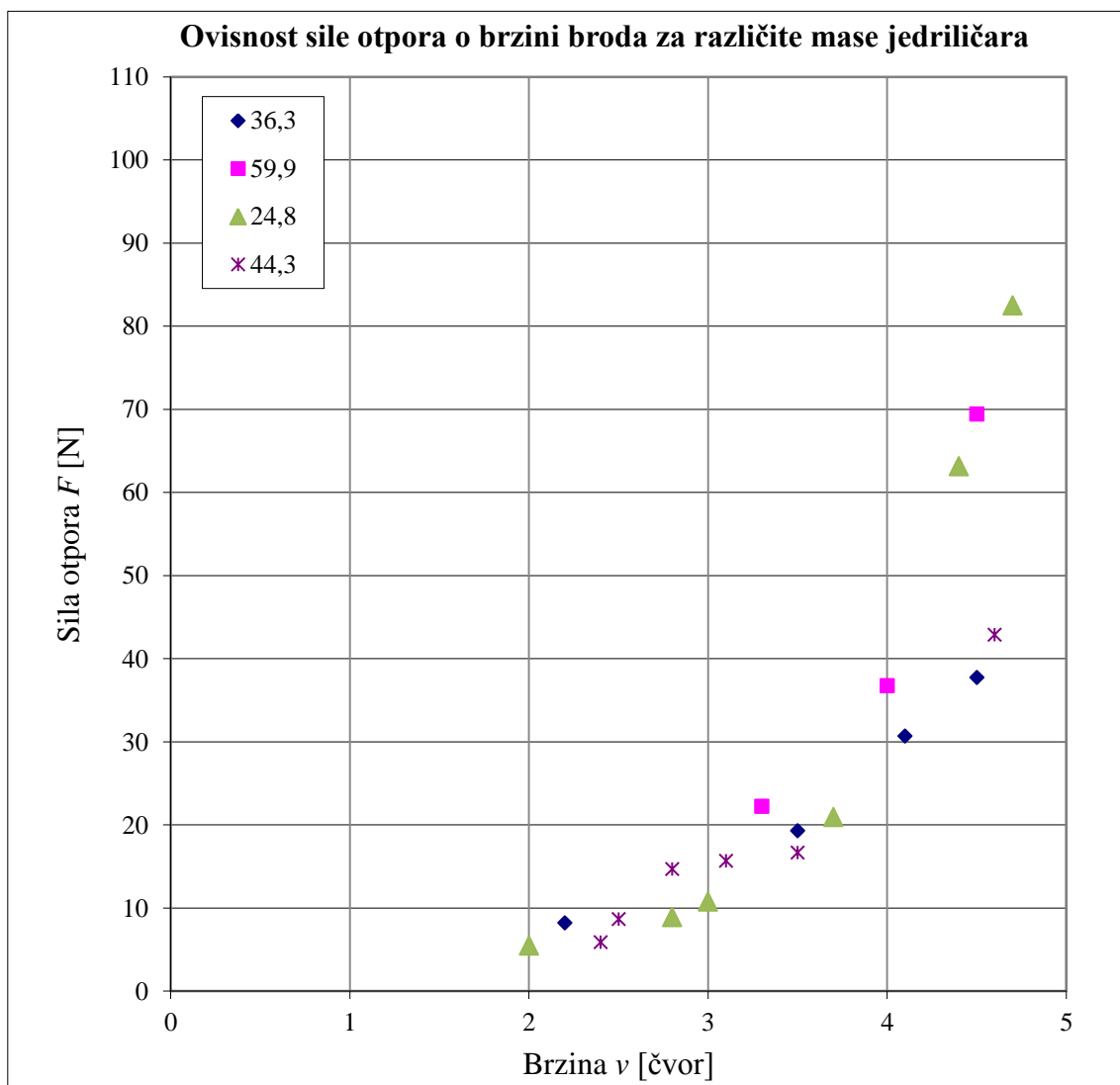
Slika 45. Vrijednosti faze 1 – zraka na ravni  $y=0$ , detalj pramca



Slika 46. Vrijednosti faze 1 – zraka na ravni  $y=0$ , detalj krme

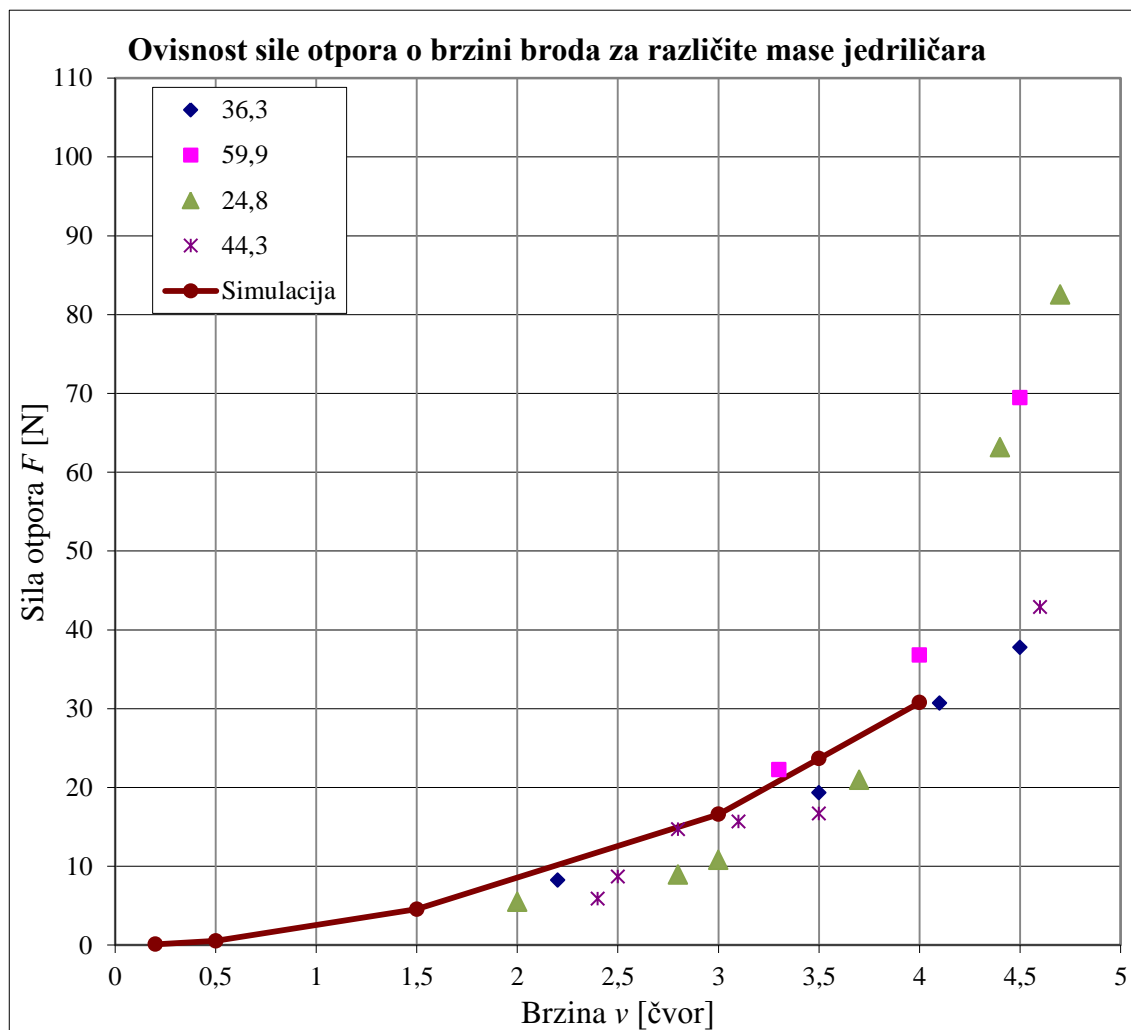
### 5.5. Rezultati eksperimentalnog mjerenja

Napravljene su četiri serije mjerenja s četiri različite mase jedriličara. U svakoj seriji mjerena je ovisnost hidrodinamičkog otpora trupa jedrilice o brzini kretanja jedrilice. Rezultati mjerenja prikazani su dijagramom na slici (Slika 47).



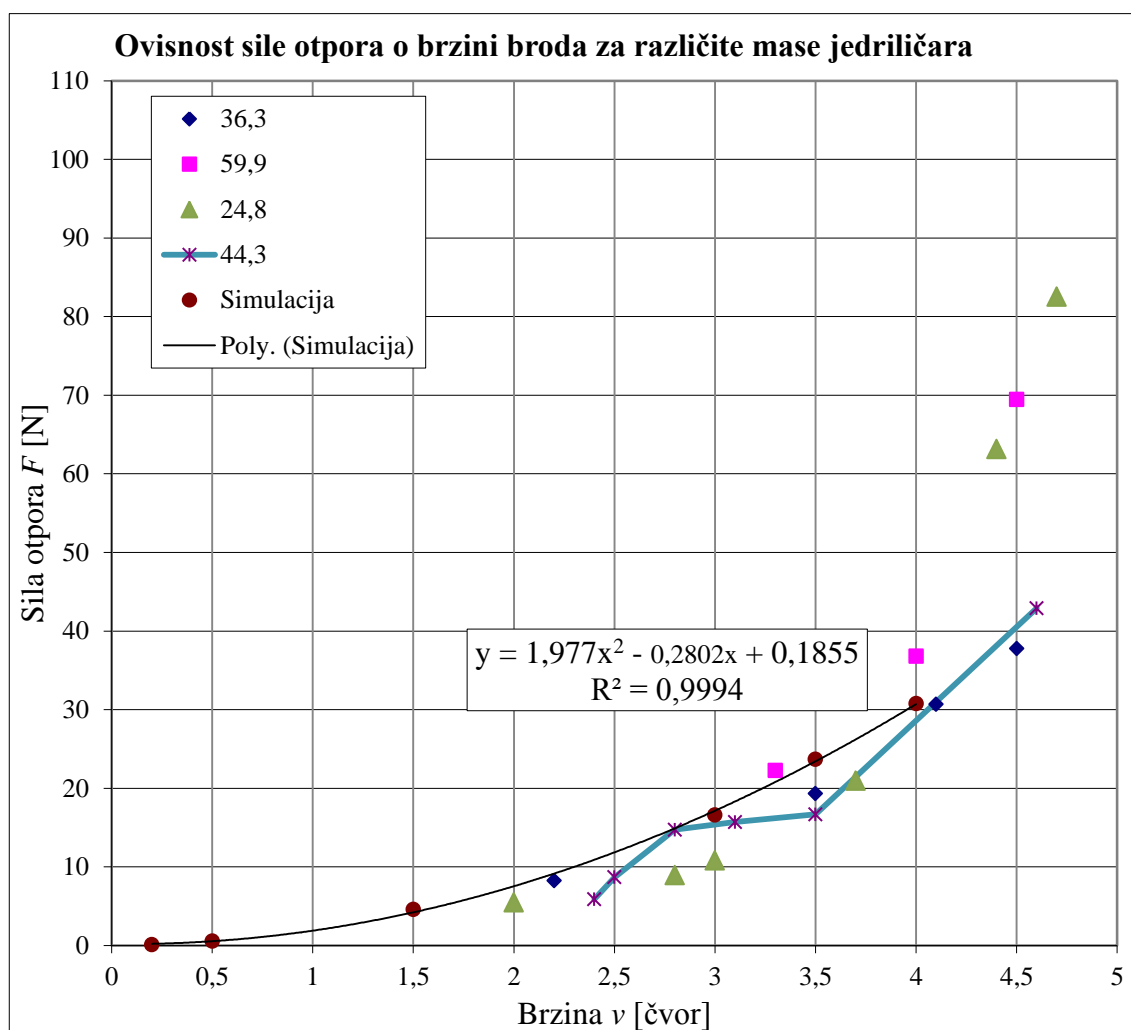
Slika 47. Dijagram ovisnosti sile otpora o brzini za različite mase

Na slici (Slika 47) su prikazani podatci izmjereni eksperimentalnim mjerenjima i rezultati dobiveni simulacijom hidrodinamičke sile otpora u ovisnosti o brzini za slučaj 45 kg ravno uronjeno s uronom kobilice  $L_{max}$ . U dijagramu je lako vidljiv trend porasta ukupne hidrodinamičke sile otpora u ovisnosti o brzini kretanja jedrilice, bez obzira radi li se o numerički dobivenim ili eksperimentalno izmjerenim podacima.



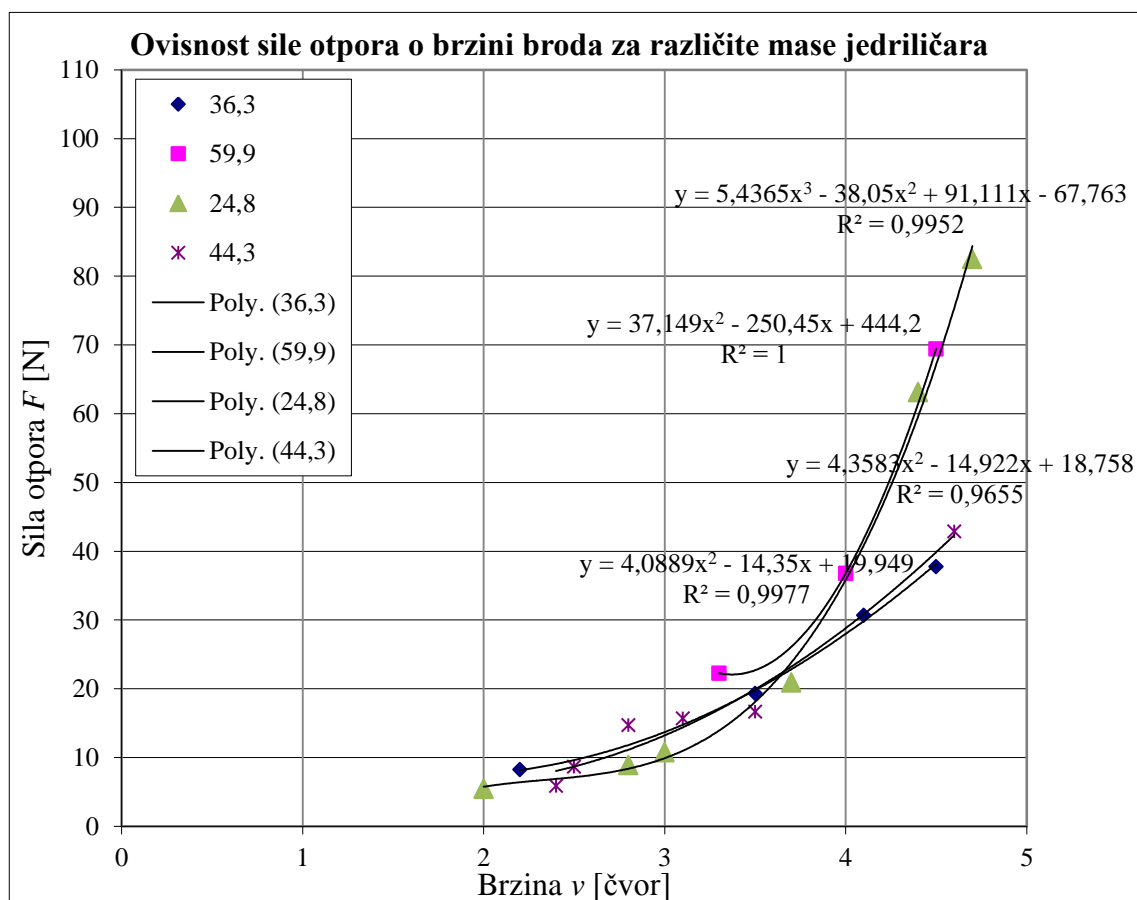
Slika 48. Dijagram ovisnosti sile otpora o brzini za različite mase

Kako bi se provjerilo slaganje eksperimentalnog i numeričkog proračuna korištena je regresijska krivulja provučena kroz numeričke podatke za masu jedriličara 45 kg (crna tanka linija) koja je uspoređena s krivuljom provučenom kroz eksperimentalne podatke (plava linija) za masu jedriličara 44,3 kg, prikazano na slici (Slika 49). Izračunato je prosječno odstupanje izmjerenih podataka od regresijske krivulje numeričkih podataka koje iznosi 2,98 N. S obzirom da su uspoređivani podatci za slične, a ne iste mase proječno odstupanje je relativno malog iznosa.



Slika 49. Dijagram ovisnosti sile otpora o brzini za različite mase uz aproksimaciju točaka dobivenih simulacijom s polinomom

Za ocjenu utjecaja mase jedriličara na otpor jedrilice napravljeno je niz simulacija pri brzini jedrilice od tri čvora, koji su vidljivi u prilogu (Prilog A) i detaljnije objašnjeni u literaturi [17]. Da bi mogli usporediti eksperimentalne s numeričkim podacima kroz svaki set podataka se provlači regresijska krivulja te se očitava vrijednost otpora za brzinu tri čvora. Očitane vrijednosti su prikazane u tablici (Tablica 11.). Jednadžbe regresijskih krivulja su pokazane na kraju svake krivulje na koju se odnose, prikazano slikom (Slika 50).



Slika 50. Dijagram iz kojeg pomoću regresijskih krivulja određujemo iznose za brzinu tri čvora

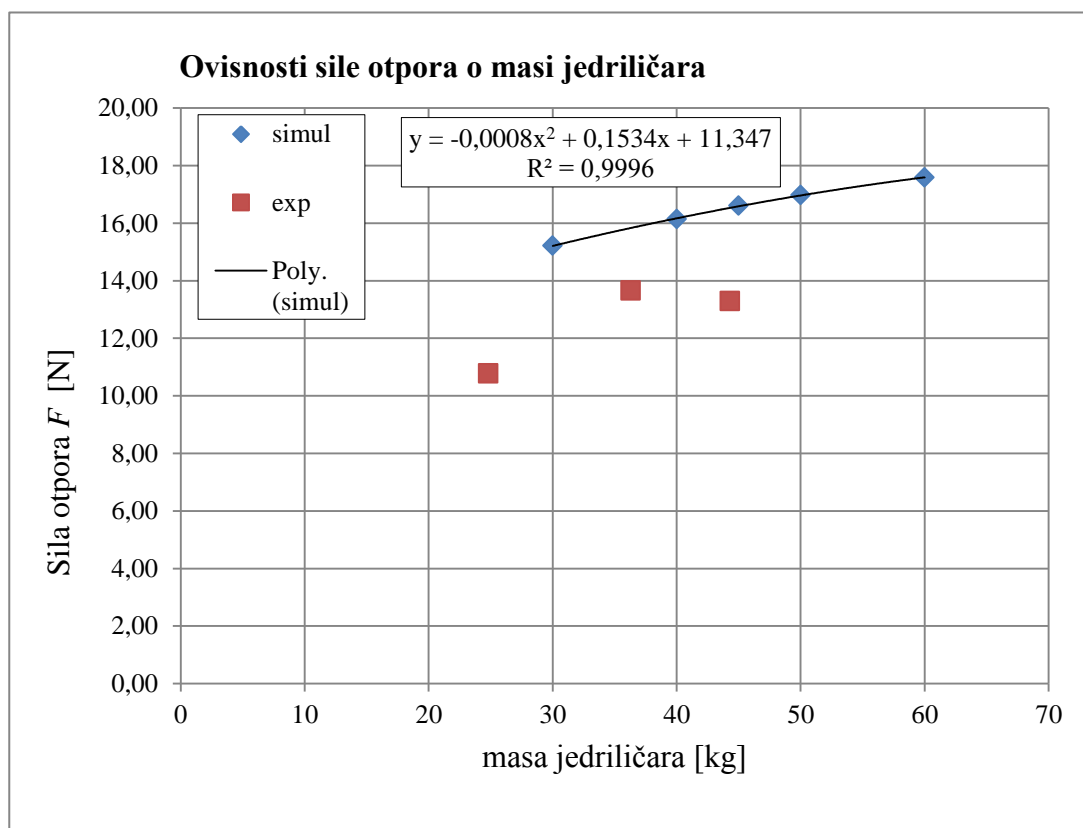
U tablici (Tablica 11.) su prikazane ovisnosti sile otpora o masi jedriličara dobivene analizom eksperimentalnih rezultata.

**Tablica 11. Eksperimentalno dobivena ovisnost sile otpora o masi jedriličara**

Masa jedriličara [kg]	Sila otpora $F$ [N]
36,3	13,66
24,8	10,78
44,3	13,29

Na slici (Slika 51) je prikazana usporedba eksperimentalnog i numeričkog proračuna ovisnosti hidrodinamičke sile otpora o masi jedriličara. Korištena je regresijska krivulja provučena kroz numeričke podatke (puna crta) koja je uspoređena s numeričkim podacima pri brzini jedrilice od tri čvora, navedeni u tablici (Tablica 11.).

Prosječno odstupanje izmjerenih podataka od regresijske krivulje dobivene pomoću podataka simulacije iznosi 3,19 N.



**Slika 51. Ovisnosti sile otpora o masi jedriličara, usporedba simulacije i numeričkog rješenja**

## 6. ZAKLJUČAK

Pri određivanju utjecaja dubine urona kobilice i brzine kretanja jedrilice na hidrodinamičku silu otpora trupa jedrilice, korišten je standardni  $k - \varepsilon$  model turbulencije sa standardnim zidnim funkcijama. Proračuni su pojednostavljeni pomoću uvođenja ravnina simetrije. Odabrani proračunski model rezultirao je stacionarnim rješenjima za svaki od slučajeva.

Za svaki od ispitivanih slučajeva je napravljen model za promatrane parametre za sve razine odabranih vrijednosti promatranog parametra. Određena je domena proračuna te izrađena geometrijska diskretizacija (mreža) pomoću metode konačnih volumena. Izračunate su četiri numeričke simulacije kako bi se odredila ovisnost hidrodinamičke sile otpora trupa jedrilice s obzirom na dubinu urona kobilice. Za određivanje ovisnosti hidrodinamičke sile otpora trupa jedrilice o brzini napravljeno je šest numeričkih simulacija.

Potvrda točnosti dobivenih rezultata provedena je numeričkom simulacijom sa slobodnom površinom i eksperimentalnim mjerenjima.

Ponašanje sile otpora valova je dobiveno pomoću numeričke simulacije valova za slučaj mase jedriličara od 45 kg pri ravnom uronu i uz maksimalnu dubinu urona kobilice. Numerička simulacija je napravljena uz primjenu višefaznog modela volumena fluida (engl. Volume of fluid model - VOF) s dvije Eulerske faze - vodom i zrakom. Uspješno je izračunat otpor valova koji je ovisan o vremenu i karakterizira ga periodičko ponavljanje. Također je dobiven prikaz valova oko trupa jedrilice te je opisan način ponašanja sistema valova koje stvara trup jedrilice pri prolasku kroz vodu.

Provedeno je eksperimentalno mjerenje kojim je dokazana točnost i primjenjivost rezultata numeričkih simulacija u stvarnosti.

Rezultati dobiveni numeričkim simulacijama sastoje se od polja fizikalnih veličina koje opisuju strujanje oko uronjenog dijela trupa jedrilice za više promatranih parametara i za različite vrijednosti parametara. Izračunati su iznosi ukupne hidrodinamičke sile, sile otpora oblika i sile otpora trenja te pripadajući bezdimenzijski koeficijenti otpora. Iz sveukupnih navedenih rezultata moguće je pratiti trendove i međusobne odnose promatranih slučajeva.

U svrhu analize promjene hidrodinamičke sile otpora praćene su promjene iznosa sile otpora trenja i sile otpora oblika. Promjene sile otpora trenja su neznatne i pri promjeni dubine urona kobilice i pri porastu brzine kretanja jedrilice od 0,5 čvorova nadalje. Na području



brzine do 0,5 čvorova sila otpora trenja je izraženija, te je upravo to područje jedino područje gdje je sila otpora trenja dominantnija od sile otpora oblika zbog nepotpuno razvijenog turbulentnog strujanja. U svim ostalim slučajevima i područjima, sila otpora oblika značajnije utječe na ukupnu hidrodinamičku silu za razliku od sile otpora trenja.

Temeljem dobivenih rezultata analiziran je međusobni odnos promatranih parametara te je pokazano da je masa jedriličara nije najutjecajniji faktor čime je potvrđena hipoteza rada. Prethodnom analizom utvrđeno je da je uzdužni nagib broda najutjecajniji faktor.

Uzdužni nagib jedrilice i dubina urona kobilice su faktori na koje jedriličar može utjecati dok je brzina kretanja jedrilice ovisna o jačini vjetra. Zaključujem da bi jedriličari trebali voditi računa upravo o uzdužnom nagibu jedrilice koji je izravna posljedica mjesta sjedenja jedriličara na brodu klase Optimist, a zatim voditi računa i o dubinu urona kobilice.

Daljnjim proračunima i simulacijama mogu se istraživati daljnja međudjelovanja promatranih parametara te odrediti promjene hidrodinamičke sile otpora npr. za različite brzine gibanja jedrilice bez uronjene kobilice, za otpor valova pri uzdužnom nagibu broda te s bočnim nagibima jedrilice, a koji su karakteristični za realne uvjete u jedrenju.

## **ZAHVALE**

Zahvaljujem prof. dr. sc. Mariju Šavaru na pruženoj prilici rada i istraživanja u području i na temi koja me iznimno interesira, te na mentorstvu koje me je uveseljavalo iz dana u dan.

Ovim putem se iskreno zahvaljujem i dr. sc. Severinu Krizmaniću, dipl. ing. koji me je strpljivo usmjeravao kada bih izgubila kompas.

Posebna zahvala "YC Zagreb" i "JK Sveti Nikola" koji su mi izašli u susret stavljanjem na raspolaganje jedrilice klase Optimist, mladog jedriličara i gumenog čamca kako bih mogla provesti eksperimentalna mjerenja.

Iz srca se zahvaljujem mojoj obitelji i najbližima koji su uvijek uz mene i pružaju mi poticaj u teškim trenucima.

## POPIS LITERATURE

- [1] Radan, D.: Uvod u hidrodinamiku broda, Sveučilište u Dubrovniku, Dubrovnik, Siječanj 2004.
- [2] Ljubetić, M.: Otpor i propulzija broda, Pomorski fakultet Dubrovnik, 1989.
- [3] Dvornik, J.; Dvornik, S.: Konstrukcija, otpor i propulzija jahti, Pomorski fakultet u Splitu, Split, 2013.
- [4] Tehnička enciklopedija 2 Beto-C, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb, 1966.
- [5] Džijan, I.: Računalna dinamika fluida, Fakultet strojarstva i brodogranje, Zagreb, 2010.
- [6] Virag, Z.: Mehanika fluida II, Predavanja, Fakultet strojarstva i brodogranje, Zagreb
- [7] Sorić, J.: Uvod u numeričke metode u strojarstvu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.
- [8] Hirsch, C.: Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics, John Wiley & Sons, Great Britain, 2007.
- [9] Ferziger, J.H.; Perić, M.: Computational Methods for Fluid Dynamics 3<sup>rd</sup> edition, Springer; Germany, 2002.
- [10] Brodogradnja, časopis brodogradnje i brodograđevne industrije, Zagreb, Srpanj 1973.
- [11] Kraut, B.: Strojarski priručnik, Sajema d.o.o., Zagreb, 2009.
- [12] Gambit modelling guide, Fluent Inc., Centerra Resouce Park, 2007.
- [13] ANSYS FLUENT 12.0, Theory Guide, ANSYS, Inc. 2009.
- [14] ANSYS FLUENT 12.0, User's Guide, ANSYS, Inc. 2009.
- [15] International Sailing Federation (ISAF), <http://www.sailing.org/about/isaf/index.php>, (preuzeto 1.3.2014.)
- [16] International Optimist Dinghy Association (IODA), <http://www.optiworld.org/technical.php>, (preuzeto 20.3.2014.)
- [17] Markučić, V.: Završni rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2013.
- [18] International Optimist Dinghy Association (IODA) - The basics of Optimist Sailing, Age and Size, <http://www.optiworld.org/basics.html#world>, (preuzeto 20.3.2014.)
- [19] Dejhalla, R.; Matulja, D.: Usporedba otpora broda određenog različitim metodama, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, 2007.
- [20] Wilcox, D. C.: Turbulence Modeling for CFD, DWC Industries, California, 1994.
- [21] Peters, C.A.: Statistics for Analysis of Experimental Data, Princeton University, 2001.

## SAŽETAK

Rad obuhvaća usporedbu utjecaja dubine urona kobilice i brzine gibanja jedrilice na hidrodinamički otpor uronjenog dijela trupa jedrilice. Promatraju se četiri različite dubine urona kobilice i šest različitih brzina na slučaju mase jedriličara od 45 kg pri ravno uronjenom trupu jedrilice. Napravljen je 3D model koji je diskretiziran za svaki od slučajeva te je izrađena odgovarajuća mreža konačnih volumena. Model s pripadajućom mrežom je učitao u računalni program pomoću kojeg je proveden numerički proračun za stacionarne uvjete strujanja uz zanemaren utjecaj valova. Otpor valova je izračunat zasebnim numeričkim proračunom s višefaznim modelom volumena fluida za masu jedriličara 45 kg pri ravnom uronu trupa jedrilice. U radu su prikazana polja različitih fizikalnih veličina te je izvršena analiza i usporedba rezultata.

Ključne riječi: Računalna dinamika fluida; metoda konačnih volumena; hidrodinamička sila otpora broda; brzina; dubina urona kobilice, valovi

## SUMMARY

The paper includes a comparison of influences made by diving depth of the keel and speed on hydrodynamic resistance of the submerged part of the boat hull. Considering four different diving depths of the keel and six different speeds in the case of sailor mass of 45 kg in a straightly submerged hull. A 3D model was made and discretized by the finite volume method for each of the cases and solved with appropriate  $k - \varepsilon$  turbulence model. The model with the corresponding network is loaded into a computer program which calculated the result by using the numerical solver of the steady flow conditions without the effect of waves. The wave resistance is calculated with volume of fluid model for sailor mass of 45 kg in a straightly submerged hull. This paper presents the resulting fields of various physical quantities, analysis and comparison of results.

Key words: Computational fluid dynamics; finite volume method; hydrodynamic drag force of the ship; speed; diving depth of the keel, the waves

## **PRILOZI**

### **I. Prilog A**

Sažetak rezultata iz literature [17] radi lakše usporedbe s rezultatima prikazanim u ovom radu.

**Rezultati proračuna koeficijenta otpora i hidrodinamičke sile otpora uronjenog dijela jedrilice jedrilice za različite slučajeve mase jedriličara i nagiba jedrilice sažeti su u tablici [**

Tablica 12.]. Pri tome su korištene oznake:

- $C_D [-]$  - bezdimenzijski koeficijent otpora, definiran u pozitivnom smjeru osi z
- $F_D [N]$  - hidrodinamička sila otpora, definirana u pozitivnom smjeru osi z

Bezdimenzijski koeficijent otpora je izračunat prema izrazu:

$$C_D = \frac{F_D}{A_{ref} \rho \frac{v_\infty^2}{2}}, \quad (58)$$

gdje  $A_{ref}$  označava referentnu površinu uronjenog dijela jedrilice,  $\rho$  gustoću fluida, a veličina  $v_\infty$  označava brzinu neporemećenog strujanja, te iznose:

$$A_{ref} = 0,25 \text{ m}^2; \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3; \quad v_\infty = 1,5 \text{ m/s}, \quad (59)$$

**Tablica 12. Usporedba koeficijenata otpora i hidrodinamičke sile otpora za ravno uronjene slučajeve**

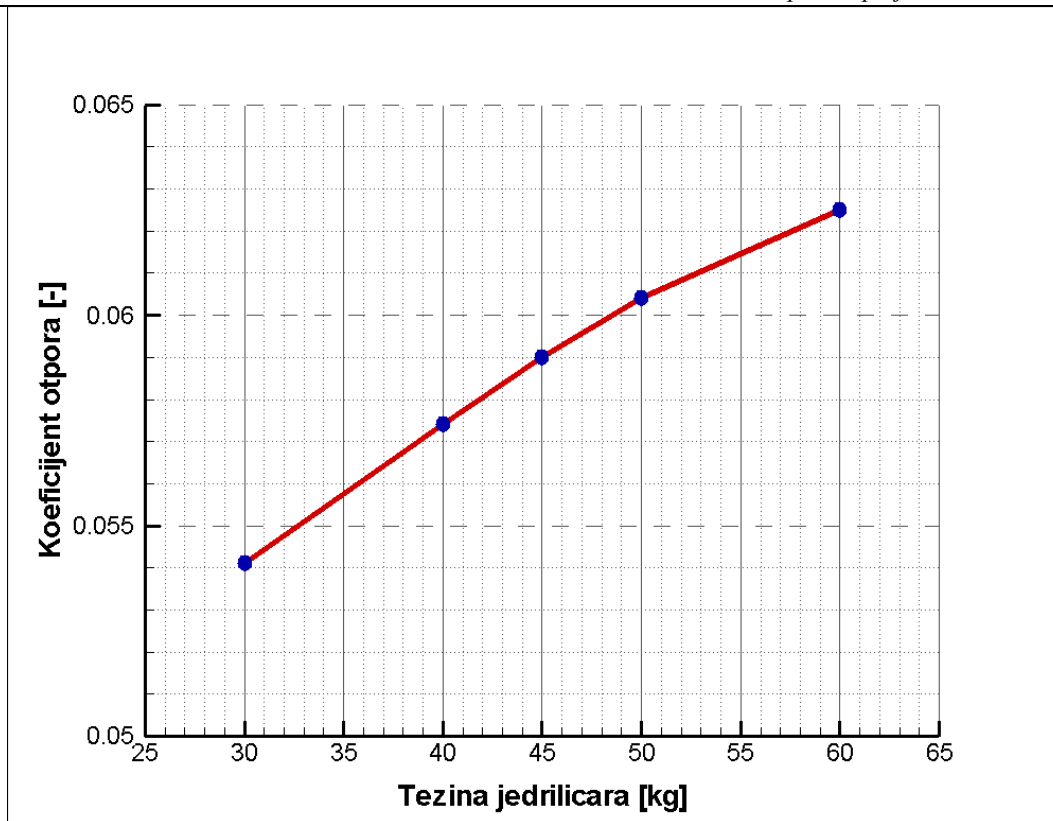
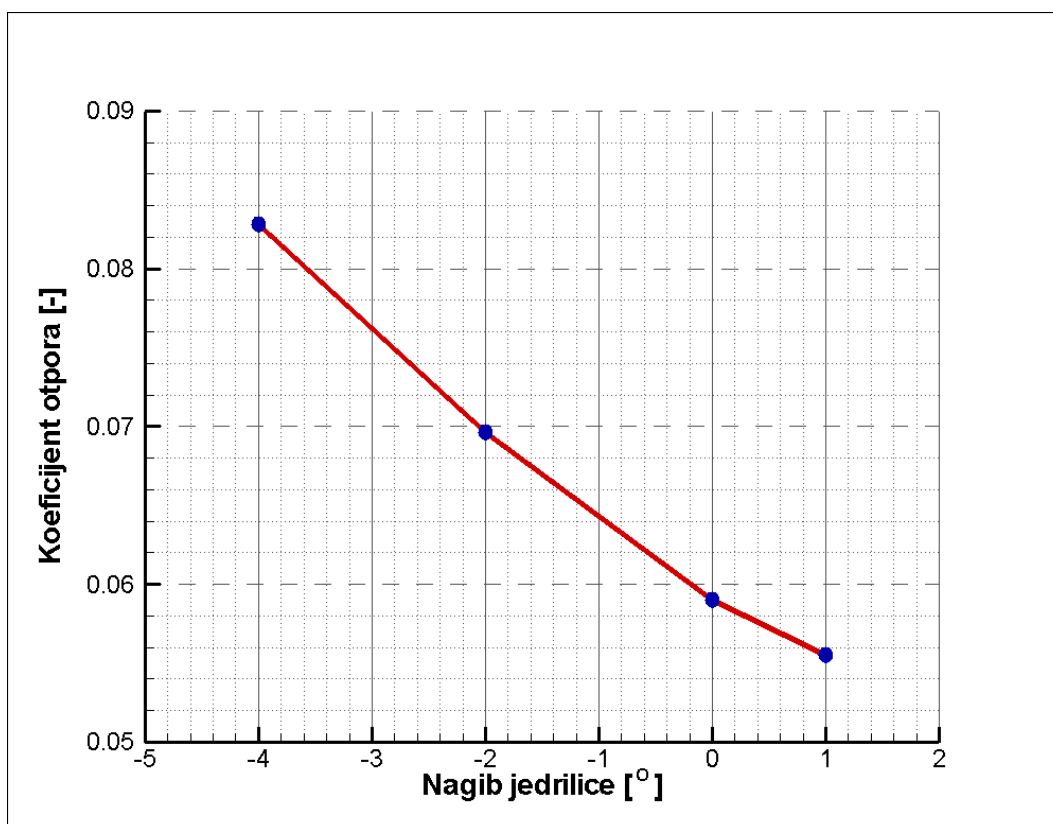
Naziv slučaja	Masa jedriličara [kg]	$F_D$ [N]	$C_D$
30 kg ravno uronjeno	30	15,22	0,05412
40 kg ravno uronjeno	40	16,14	0,05739
45 kg ravno uronjeno	45	16,60	0,05902
50 kg ravno uronjeno	50	16,98	0,06037
60 kg ravno uronjeno	60	17,68	0,06286

**Tablica 13. Usporedba koeficijenata otpora i hidrodinamičke sile otpora za slučajeve s nagibom jedrilice**

Naziv slučaja	Nagib [°]	$F_D$ [N]	$C_D$
45 kg s nagibom 4 stupnja nazad	-4	23,30	0,08284
45 kg s nagibom 2 stupnja nazad	-2	19,85	0,07058
45 kg ravno uronjeno	0	16,60	0,05902
45 kg s nagibom 1 stupanj naprijed	+1	15,62	0,05554

Ovisnost bezdimenzijskog koeficijenta otpora uronjenog dijela jedrilice za različite slučajeve istisnina i nagiba prikazani su na slikama (Slika 52 i Slika 53).



Slika 52. Ovisnost koeficijenta otpora  $C_D$  o masi jedriličaraSlika 53. Ovisnost koeficijenta otpora  $C_D$  o nagibu jedrilice

Bezdimenzijski koeficijenti otpora oblika i trenja, definirani na isti način kao i ukupni koeficijent otpora, prikazani su u tablici (

Tablica 14. i

Tablica 15.) gdje je:

- $C_{D,p}$  [-] - koeficijent otpora oblika,
- $C_{D,\tau}$  [-] - koeficijent otpora trenja.

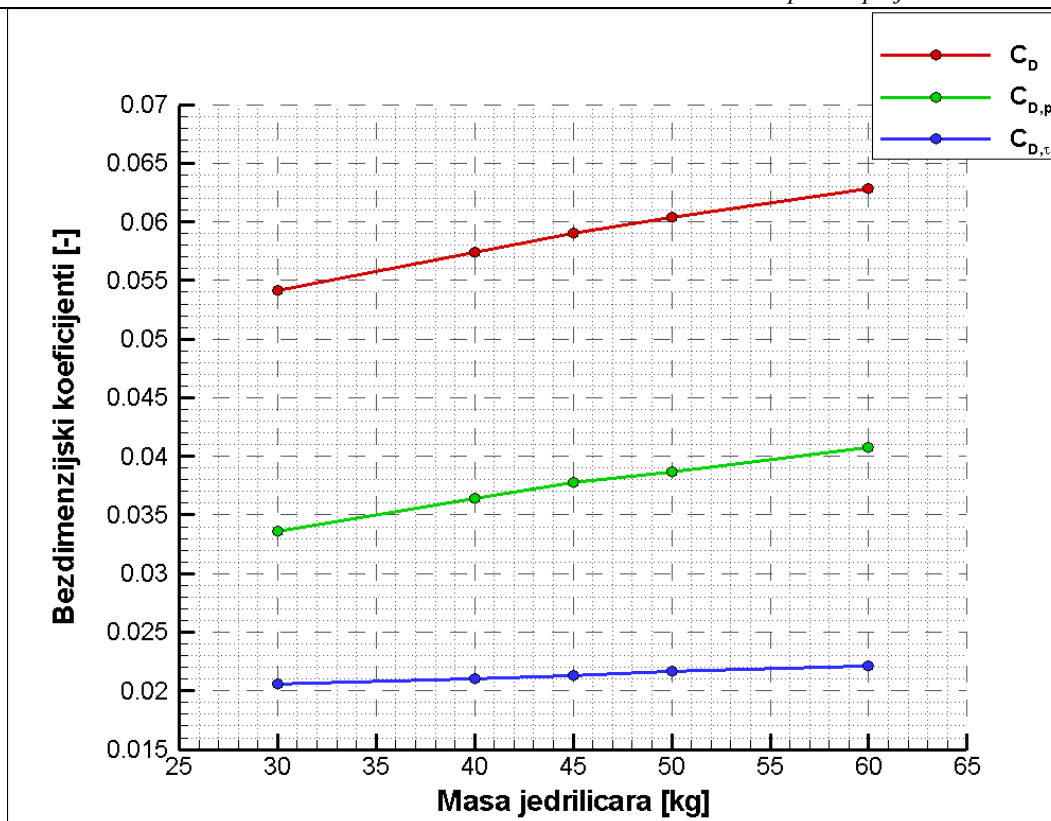
**Tablica 14. Usporedba koeficijenata otpora za slučajeve s ravnim uronom**

Naziv slučaja	$C_{D,p}$	$C_{D,\tau}$	$C_D$
30 kg ravno uronjeno	0,03358	0,02053	0,05412
40 kg ravno uronjeno	0,03637	0,02102	0,05739
45 kg ravno uronjeno	0,03772	0,02130	0,05902
50 kg ravno uronjeno	0,03868	0,02167	0,06037
60 kg ravno uronjeno	0,04075	0,02212	0,06286

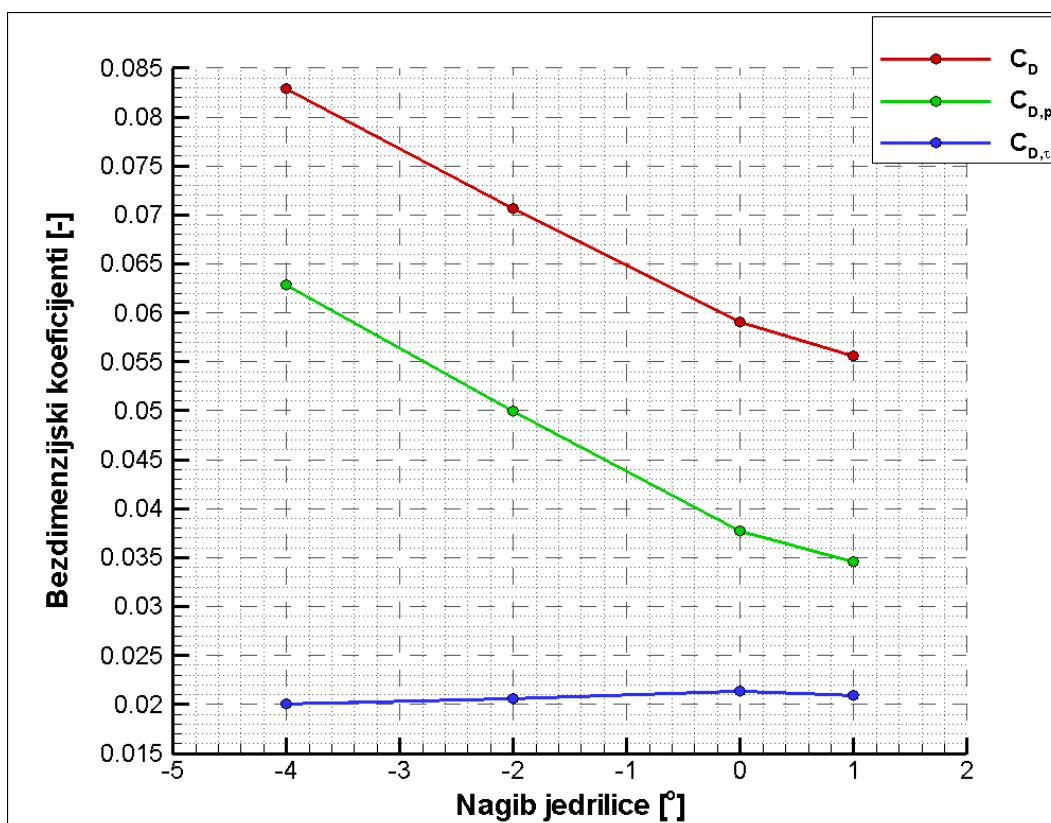
**Tablica 15. Usporedba koeficijenata otpora za slučajeve s nagibom jedrilice**

Naziv slučaja	$C_{D,p}$	$C_{D,\tau}$	$C_D$
45 kg s nagibom 4 stupnja nazad	0,06283	0,02001	0,08284
45 kg s nagibom 2 stupnja nazad	0,04996	0,02063	0,07058
45 kg ravno uronjeno	0,03772	0,02130	0,05902
45 kg s nagibom 1 stupanj naprijed	0,03460	0,02092	0,05554

Na slikama (Slika 54 i Slika 55) su grafički prikazane promjene koeficijenata otpora, pri čemu se vide utjecaji otpora trenja i otpora oblika na ukupni iznos otpora.



Slika 54. Ovisnost koeficijenta otpora o masi jedrilicara



Slika 55. Ovisnost koeficijenta otpora o nagibu jedrilice

Napomena: Kao posljedica izostavljanja valnog otpora u modelu, nepotpunog naližeganja strujanja na prednjem dijelu trupa i manje uronjenosti krme na promatranom slučaju dobiva se manji ukupni otpor za slučaj 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed nego za slučaj 45 kg ravno uronjeno.

U nastavku su dani prikazi polja apsolutne brzine na uzdužnoj vertikalnoj ravnini simetrije sa strujnicama (Slika 56 - Slika 61). Prikazani su slučajevi najmanje (30 kg), najveće (60 kg) i srednje (45 kg) mase jedriličara te sva tri nagiba. Svi slučajevi na slikama (Slika 56 - Slika 61) imaju istu skalu te su svi prikazani u yz ravnini tj. na uzdužnoj vertikalnoj ravnini simetrije.

Iz usporednog prikaza slika je vidljivo kako se utjecaj kobilice i kormila mijenja kroz različite slučajeve. Područja u kojima se promjena apsolutne vrijednosti brzine vide su ispred i iza kobilice te nakon kormila.

