

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Galović, Matko Ljulj

NUMERIČKA APROKSIMACIJA
KONTAKTNOG MODELA LJUSKE I
STENTA

Zagreb, 2014.

Ovaj rad izrađen je na Zavodu za primijenjenu matematiku na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, pod vodstvom prof. dr. sc. Josipa Tambače i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2013./2014.

Sadržaj

| | |
|--|------------|
| Sadržaj | iii |
| Uvod | 2 |
| 1 Matematički modeli | 3 |
| 1.1 Model ljuske | 3 |
| 1.2 Model stenta | 7 |
| 2 Model kontakta i numerička metoda | 11 |
| 2.1 Formulacija kontaktnog problema | 11 |
| 2.2 Model jednog ravnog štapa - modifikacija | 17 |
| 2.3 Opis algoritma | 21 |
| 3 Rezultati | 26 |
| 3.1 Ravna ploča | 26 |
| 3.2 Žila i stent | 29 |
| 3.3 Žila i stent - rotacija krajeva | 36 |
| 4 Zaključak | 43 |
| Bibliografija | 45 |

Uvod

U medicini, stent je mrežasta cjevčica koja se umeće u žilu kako bi neutralizirala ili spriječila njeno sužavanje koje nastupa uslijed bolesti. Stentovi su u upotrebi u kardiovaskularnim sustavima, primjerice srčanim i plućnim arterijama te velikim venama, ali također i u drugim organima i tkivima – mokraćovodu, prostati, jednjaku, dvanaesniku, gušterači. Ovdje ćemo proučavati model kontakta žile i postojećih tipova stentova koji se koriste u koronarnim arterijama i koji imaju važnu ulogu u liječenju bolesti koronarnih arterija, koje su jedan od vodećih uzroka smrtnosti u svijetu. Sve do 1985., kada je pateniran prvi koronarni stent, u liječenju tih bolesti korištene su mnogo invazivnije metode. Postupak ugradnje stenta u krvnu žilu odvija se umetanjem balona koji se nalazi unutar stenta i potom se kontrolirano napuhuje kako bi proširio suženo područje. Balon se potom izvlači, a stent ostaje u žili kako bi spriječio njeno ponovno začepljenje. Ovaj postupak naziva se balonska angioplastija. Različita mehanička svojstva raznih vrsta stentova potječu od njihovih različitih geometrijskih svojstava i njihovo poznavanje vrlo je bitno u određivanju sile koju je stent u stanju podnijeti. Stoga su numeričke studije stentova, iako ni približno toliko mnogobrojne kao stručno medicinske, važne za nalaženje načina za poboljšanje njihovog dizajna i izvedbe. Matematička i inženjerska istraživanja u ovom području variraju od ispitivanja velikih deformacija stenta uslijed ekspanzije balona kod njegovog umetanja, pri čemu se uzimaju u obzir nelinearna elastičnost i plastičnost, do malih deformacija kod već umetnutog i proširenog stenta, pri čemu se koristi teorija linearne elastičnosti, kojom ćemo se i mi ovdje poslužiti. U ovome radu, žilu modeliramo dvodimenzionalnim modelom ljuske, dok stent shvaćamo kao strukturu sastavljenu od tankih izduženih elastičnih tijela, koje nazivamo štap i čije ponašanje opisujemo jednodimenzionalnim modelom. Ova-

kav model, koji stent definira upravo kao mrežu jednodimenzionalnih zakrivljenih štapova, može se primjerice pronaći u [13], [5] ili [3]. Polazimo od sustava parcijalnih diferencijalnih jednačbi za ljusku i stent zasebno, točnije od njihovih slabih ili varijacijskih formulacija, danih u [15] (za ljusku) i [3] (za stent), koje numerički rješavamo metodom konačnih elemenata (vidi [7]). Ono što predstavlja glavni rezultat u teorijskom dijelu rada je upravo spajanje tih dvaju modela u jedinstveni koji modelira kontaktni problem ljuske i stenta, pri čemu koristimo princip minimalne energije. U numeričkome dijelu, kao alat prvenstveno koristimo programski paket *FreeFem++* ([6]), napravljen upravo za implementaciju metode konačnih elemenata, dok za pomoćne programe i prikaz rezultata koristimo i druge pakete: *C++*, *Mathematica* ([16]) i *Paraview* ([17]). Poglavlje Rezultati predstavlja vrhunac rada, s numeričkim podacima dobivenima implementacijom postavljenog modela, pri čemu simuliramo silu koja djeluje na spoj naših struktura i opažamo koliko se rezultati razlikuju ovisno o tome je li ljuska dodatno očvrsnuta stentom ili ne. Napomenimo kako model nije primjenjiv samo za kontaktni problem ljuske i stenta, (makar je stent poslužio kao glavna motivacija), već i za druge kombinacije jednodimenzionalnih i dvodimenzionalnih struktura, primjerice betona i armature. Zato kao jednostavniji rezultat najprije donosimo realizaciju na ravnoj ploči s jednim štapom, a potom model uistinu primjenjujemo na različite tipove stentova (*palmaz*, *cypher*, *xience*, *express*), i to za ravnu žilu, te žilu koju zakrivljujemo.

Poglavlje 1

Matematički modeli

U ovom poglavlju definiramo matematičke modele ljuske i stenta koje koristimo i na kojima temeljimo kontaktni problem.

1.1 Model ljuske

Zbog mogućnosti široke primjene, modeliranje elastičnih ljuski je vrlo intenzivno proučavano područje i u upotrebi je mnogo različitih modela (membranski, fleksijski, Koiterov, Budansky-Sandersov i brojni drugi, vidi [2]). U ovome radu koristimo model Naghdijeva tipa opisan u [15]. On je formuliran za nepoznanice (u, ω) u podskupu od $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, gdje je Ω otvoren i povezan skup s Lipschitzovim rubom (pri čemu je egzistencija i jedinstvenost rješenja dokazana u Teoremu 3.3. iz spomenutog rada) te je dobro definiran za središnje plohe parametrizirane s $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Ovaj model uvažava i membranske i fleksijske efekte, ali ne dopušta smicanje poprečnog presjeka s obzirom na deformiranu središnju plohu, odnosno presjek je i dalje približno okomit.

Parametrizacija φ potrebna je za transformaciju ljuske iz početne pravokutne dvodimenzionalne domene u njen pravi oblik, te ju definiramo na sljedeći način:

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kao gore, otvoren i povezan skup s Lipschitzovim rubom. Neka $y = (y_\alpha)$ označava točku u $\overline{\Omega}$ te neka je $\partial_\alpha := \partial/\partial y_\alpha$. Neka je $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektivno

preslikavanje iz $C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ takvo da su vektori

$$a_\alpha(y) = \partial_\alpha \varphi(y), \quad \alpha = 1, 2$$

linearno nezavisni u svim točkama $y \in \overline{\Omega}$. Oni čine kovarijantnu bazu tangencijalne ravnine na 2-plohi

$$S = \varphi(\overline{\Omega})$$

u točki $\varphi(y)$. Kontravarijantna baza iste tangencijalne ravnine dana je vektorima $a^\alpha(y)$, koji su definirani s

$$a^\alpha(y) \cdot a_\beta(y) = \delta_\beta^\alpha,$$

gdje je δ_β^α Kroneckerov simbol. Proširujemo obje baze do baza za cijeli \mathbb{R}^3 dodavanjem vektora

$$a_3(y) = a^3(y) = \frac{a_1(y) \times a_2(y)}{\|a_1(y) \times a_2(y)\|}.$$

Kovarijantni ($A_c = (a_{\alpha\beta})$) i kontravarijantni ($A^c = (a^{\alpha\beta})$), metrički tenzori plohe S , dani su, respektivno, s

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta.$$

Element površine je $\sqrt{a} dy$, gdje je $a := \det A_c$. Nadalje, koristimo oznake:

$$\hat{Q} = [a^1 \quad a^2], \quad Q = [a^1 \quad a^2 \quad a^3].$$

Ljuska se deformira djelovanjem sile, dane površinskom gustoćom $\tilde{f} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i tada zauzima (novi) položaj parametriziran s $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Pritom se točka ljuske $\varphi(y)$ deformacijom preslikava u $\psi(y)$, pa je pomak ljuske opisan s

$$u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad u(y) = \psi(y) - \varphi(y)$$

Model ljuske zadajemo parcijalnim diferencijalnim jednadžbama za u .

Općenito, pri djelovanju sile f na elastično tijelo, ono će se deformirati sukladno svojstvima materijala od kojih je načinjeno. Za homogeni i izotropni materijal ta svojstva definiramo Laméovim konstantama

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

pri čemu su ν i E Poissonov broj, odnosno Youngov modul elastičnosti materijala.

Sada formuliramo model ljuske, koji je definiran za središnju ljusku parametriziranu funkcijom $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Primijetimo da su za tu parametrizaciju vektori kovarijantne i kontravarijantne baze dobro definirani i pripadaju $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

Neka je $\gamma_0 \subset \partial\Omega$ dio ruba pozitivne duljine. Definirajmo funkcijski prostor:

$$V_N(\Omega) = H_{\gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H_{\gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3) = \{(\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)^2 : \tilde{u}|_{\gamma_0} = \tilde{\omega}|_{\gamma_0} = 0\},$$

Ovaj prostor je Hilbertov, s normom

$$\|(\tilde{u}, \tilde{\omega})\|_{V_N(\Omega)} = (\|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 + \|\tilde{\omega}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2)^{1/2}.$$

U notaciji $(\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V_N(\Omega)$, \tilde{u} označava vektor pomaka središnje plohe ljuske, dok je $\tilde{\omega}$ infinitezimalna rotacija poprečnog presjeka. Konačno, formuliramo model: naći $(u, \omega) \in V_N(\Omega)$ takav da vrijedi

$$\begin{aligned} h \int_{\Omega} QC_m Q_T [\partial_1 u + a_1 \times \omega \quad \partial_2 u + a_2 \times \omega] \cdot [\partial_1 \tilde{u} + a_1 \times \tilde{\omega} \quad \partial_2 \tilde{u} + a_2 \times \tilde{\omega}] \sqrt{a} \, dx \\ + \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} QC_f Q^T \nabla \omega \cdot \nabla \tilde{\omega} \sqrt{a} \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot \tilde{u} \sqrt{a} \, dx, \quad (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V_N(\Omega). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ovdje h označava debljinu ljuske, \tilde{f} površinsku gustoću sile koja djeluje na ljusku, a tenzori elastičnosti $C_m, C_f : M_{3,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3,2}(\mathbb{R})$ dani su s

$$C_m \hat{C} \cdot \hat{D} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (I \cdot C)(I \cdot D) + 4\mu A_c C A^c \cdot D + \mathcal{B}_m c \cdot d, \quad (1.2)$$

$$C_f \hat{C} \cdot \hat{D} = a \mathcal{A} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} C \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} D + a \mathcal{B}_f c \cdot d, \quad (1.3)$$

gdje je

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C \\ c^T \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} D \\ d^T \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}), \quad C, D \in M_2(\mathbb{R}), \quad c, d \in \mathbb{R}^2,$$

a $\mathcal{B}_m, \mathcal{B}_f \in M_2(\mathbb{R})$ su pozitivno definitne matrice. Tenzor elastičnosti \mathcal{A} dan je s

$$\mathcal{A}D = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (A^c \cdot D)A^c + 4\mu A^c D A^c, \quad D \in M_2(\mathbb{R}).$$

Za $E, D \in Sym(\mathbb{R}^2)$ tada imamo

$$\mathcal{A}E \cdot D = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(A^c \cdot E)A^c \cdot D + 4\mu A^c E A^c \cdot D. \quad (1.4)$$

Za \mathcal{B}_m iz klasičnog modela Naghdijeva tipa možemo uzeti da ima vrijednost μA^c (vidi [8]). Matricu \mathcal{B}_f postavili smo na jediničnu matricu. Više o njenoj ulozi može se naći u [10].

Ovako postavljen model ima jedinstveno rješenje, što slijedi iz Lax-Milgramove leme (za dokaz pogledati [15]).

U praksi, mi numerički tražimo aproksimaciju rješenja zadatke (1.1) na prostoru V_N , gdje su $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]$ i $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]$ iz prostora konačnih elemenata P_1 (vidi [7]). Pritom koristimo programski paket *FreFem++* ([6]). No zbog lakše implementacije u njegovoj sintaksi, početni zapis modela, osnovnu formulu (1.1) zapisujemo na nešto drukčiji način, pa sad model glasi: naći $(u, \omega) \in V_N(\Omega)$ takav da vrijedi

$$h \int_{\Omega} C_m Q_T [\partial_1 u + a_1 \times \omega \quad \partial_2 u + a_2 \times \omega] \cdot Q^T [\partial_1 \tilde{u} + a_1 \times \tilde{\omega} \quad \partial_2 \tilde{u} + a_2 \times \tilde{\omega}] \sqrt{a} \, dx + \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} C_f Q^T \nabla \omega \cdot Q^T \nabla \tilde{\omega} \sqrt{a} \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot \tilde{u} \sqrt{a} \, dx, \quad (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V_N(\Omega). \quad (1.5)$$

Ovaj oblik odlično se uklapa u definiciju tenzora elastičnosti C_m i C_f . Matricama \hat{C} i \hat{D} iz (1.2) pridružujemo vrijednosti:

$$\hat{C} = Q^T g(u, \omega), \quad \hat{D} = Q^T g(\tilde{u}, \tilde{\omega}),$$

gdje je

$$g(x, y) := [\partial_1 x + a_1 \times y \quad \partial_2 x + a_2 \times y],$$

a matricama \hat{C} i \hat{D} iz (1.3) pridružujemo vrijednosti:

$$\hat{C} = Q^T \nabla \omega, \quad \hat{D} = Q^T \nabla \tilde{\omega}.$$

Lema 1.1.1. *Funkcija $a : V_N \times V_N \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s*

$$a((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) =$$

$$h \int_{\Omega} C_m Q_T [\partial_1 u + a_1 \times \omega \quad \partial_2 u + a_2 \times \omega] \cdot Q^T [\partial_1 \tilde{u} + a_1 \times \tilde{\omega} \quad \partial_2 \tilde{u} + a_2 \times \tilde{\omega}] \sqrt{a} \, dx + \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} C_f Q^T \nabla \omega \cdot Q^T \nabla \tilde{\omega} \sqrt{a} \, dx, \quad (u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V_N(\Omega)$$

je simetrična, pozitivna (tj. $a((\tilde{u}, \tilde{\omega}), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) > 0, \forall (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \neq 0$) i bilinerna forma na V_N .

Dokaz. Iz definicije se jasno vidi da je a simetrična i bilinearna forma. Nadalje, kao što se može vidjeti u [15], ona je i koercitivna pa je posebno i pozitivna., tj. $a((\tilde{u}, \tilde{\omega}), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) > 0, \forall (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \neq 0$. \square

1.2 Model stenta

U ovom odjeljku prikazujemo diferencijalnu pa zatim slabu formulaciju za problem jednog štapa, što dalje poopćujemo do modela cijelog stenta. Kao i kod ljuske, za elastične štapove postoje različiti modeli (vidi [1]), dok se mi odlučujemo za onaj opisan u [3] i [13].

Krećemo od Antman-Cosserat modela za neproduljivi i nesmicljivi štap: naći (u, ω, q, p) takve da

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_s p + f, \\ 0 &= \partial_s q + t \times p + l, \\ 0 &= \partial_s \omega - QH^{-1}Q^T q, \\ 0 &= \partial_s u + t \times \omega. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Ovdje u predstavlja pomak središnje linije, ω infinitezimalnu rotaciju poprečnog presjeka štapa, q kontakti moment, p kontaktnu silu i t tangentu nedeformirane središnje linije. Matrica $Q = \begin{bmatrix} t & n & b \end{bmatrix}$ je Frenetov trobrid za nedeformiranu središnju liniju. Ovdje je n normala nedeformirane središnje linije, a b binormala. Više o Frenetovom trobridu i njegovim primjenama može se vidjeti u [9]. Nadalje, l označava gustoću vanjskog momenta, a f gustoću vanjske sile. Prve dvije jednadžbe opisuju ravnotežu kontaktne sile i kontaktnog momenta, respektivno. Treća predstavlja zakon ponašanja za zakrivljeni, linearno elastični štap, a četvrta opisuje uvjet neproduljivosti i nesmicljivosti štapa.

Matrica H ovisi o geometrijskim i elastičnim svojstvima štapa i dana je s

$$H = \begin{bmatrix} \mu K & 0 & 0 \\ 0 & EI_3 & -EI_{23} \\ 0 & -EI_{23} & EI_2 \end{bmatrix}.$$

Tu je E Youngov modul elastičnosti, a μK krutost torzije. Taj broj vezan je uz funkciju iskrivljenja, o čemu se više može naći u [11]. Nadalje, I_2, I_3, I_{23} su momenti inercije

površinskog presjeka štapa dani s

$$I_{23} = - \int_S z_2 z_3 \, dz_2 dz_3, \quad I_\alpha = \int_S z_\alpha^2 \, dz_2 dz_3, \quad \alpha = 2, 3.$$

Lako se dokazuje da je H pozitivno definitna (vidi [11]).

Cilj nam je sada izvesti varijacijsku formulaciju za gore navedeni sustav uz $l = 0$. Uvedimo prostor funkcija:

$$V = \{(\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in H^1([0, L]; \mathbb{R}^6) : \partial_s \tilde{u} + t \times \tilde{\omega} = 0\}$$

To je prostor test-funkcija koje opisuju pomak središnje linije i infinitezimalnu rotaciju poprečnog presjeka štapa te zadovoljavaju uvjet neproduljivosti i nesmicljivosti.

Iz treće jednadžbe u (1.6) izrazimo q :

$$q = QHQ^{-1} \partial_s \omega.$$

Drugu jednadžbu množimo skalarno s $\tilde{\omega}$ (gdje je $(\tilde{u}, \tilde{\omega})$ proizvoljna funkcija iz V) te integriramo duž domene funkcija:

$$- \int_0^L \partial_s q \cdot \tilde{\omega} \, ds = \int_0^L (t \times p) \cdot \tilde{\omega} \, ds.$$

Lijevu stranu parcijalno integriramo, pa u integral uvrstimo q izražen preko $\partial_s \omega$:

$$\begin{aligned} -q \cdot \tilde{\omega} \Big|_0^L + \int_0^L q \cdot \partial_s \tilde{\omega} \, ds &= \int_0^L (t \times p) \cdot \tilde{\omega} \, ds, \\ \int_0^L QHQ^{-1} \partial_s \omega \cdot \partial_s \tilde{\omega} \, ds &= \int_0^L (t \times p) \cdot \tilde{\omega} \, ds + q \cdot \tilde{\omega} \Big|_0^L. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sada ćemo pojednostaviti integral s desne strane jednadžbe. Prvo iskoristimo svojstvo mješovitog produkta, a zatim da je funkcija $(\tilde{u}, \tilde{\omega})$ iz prostora V :

$$\int_0^L (t \times p) \cdot \tilde{\omega} \, ds = \int_0^L -(t \times \tilde{\omega}) \cdot p \, ds = \int_0^L \partial_s \tilde{u} \cdot p \, ds.$$

Dobiveno parcijalno integriramo, a onda uvrstimo prvu jednadžbu iz (1.6) u podintegralnu funkciju:

$$\int_0^L \partial_s \tilde{u} \cdot p \, ds = \tilde{u} \cdot p \Big|_0^L - \int_0^L \tilde{u} \cdot \partial_s p \, ds = p \cdot \tilde{u} \Big|_0^L + \int_0^L \tilde{u} \cdot f \, ds.$$

Kada zadnju jednakost uvrstimo u (1.7), dobivamo varijacijsku formulaciju kakvu smo htjeli. Dakle, funkciju $(u, \omega) \in V$ nazivamo slabim rješenjem zadaće (1.6) uz $l = 0$ ako

$$\int_0^L QHQ^T \partial_s \omega \cdot \partial_s \tilde{\omega} ds = \int_0^L f \cdot \tilde{u} ds + q \cdot \tilde{\omega} \Big|_0^L + p \cdot \tilde{u} \Big|_0^L \quad (1.8)$$

vrijedi za sve $(\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V$. Za problem jednog štapa, rubni uvjeti $s = 0, L$ trebaju biti prethodno zadani, a za problem stenta, rubni uvjeti dani su **kinematičkim** kontaktnim uvjetima koji pretpostavljaju da su u i ω neprekidne, te **dinamičkim** kontaktnim uvjetima koji zahtijevaju da je za svaki vrh zbroj svih kontaktnih sila, odnosno kontaktnih momenata pripadajućih štapova (koji u tom vrhu imaju zajedničku krajnju točku) jednak 0. Model stenta potom gradimo krećući od (1.8) shvaćajući stent kao strukturu sastavljenu od štapova koji zadovoljavaju jednadžbu (1.8) te gore spomenute rubne uvjete. Ako označimo s $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ skup svih vrhova stenta \mathcal{N} , uvjet neprekidnosti funkcija u i ω u svim vrhovima $V \in \mathcal{V}$ preciznije možemo zapisati definiranjem prostora funkcija

$$H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^k) = \{U = (U^1, \dots, U^{n_E}) \in \prod_{i=1}^{n_E} H^1([0, L_i]; \mathbb{R}^k) : \\ U^i((P^i)^{-1}(V)) = U^j((P^j)^{-1}(V)), \forall V \in \mathcal{V}, V \in e^i \cap e^j\}.$$

Pritom smo s $P^i : [0, L_i] \rightarrow \mathbb{R}^3$ označili parametrizaciju brida e_i stenta, a vektorska funkcija U sastoji se od n_E uređenih parova (u, ω) koji odgovaraju bridovima stenta $e^i, i = 1, \dots, n_E$: $U = (U^1, \dots, U^{n_E}) = (\tilde{u}^1, \tilde{\omega}^1), \dots, (\tilde{u}^{n_E}, \tilde{\omega}^{n_E})$. Analogno definiciji prostora V za jedan štap, definiramo prostor funkcija V_S koje zadovoljavaju uvjet neproduljivosti i **nesmicljivosti** za svaki brid, tj. zakrivljeni štap stenta:

$$V_S = \{U = ((\tilde{u}^1, \tilde{\omega}^1), \dots, (\tilde{u}^{n_E}, \tilde{\omega}^{n_E})) \in H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^6) : \partial_s \tilde{u}^i + t^i \times \tilde{\omega}^i = 0, i = 1, \dots, n_E\},$$

gdje je t^i tangenta središnje linije i -tog brida stenta. Primijetimo da je sad V_S prostor funkcija koje zadovoljavaju kinematičke uvjete za problem stenta. Kako bismo došli do slabe formulacije za mrežu stenta, mrežu stenta definiramo kao uniju jednodimenzionalnih zakrivljenih štapova. To sugerira da bismo slabu formulaciju za mrežu stenta trebali definirati kao sumu slabih formulacija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje modeliraju

svaki zakrivljeni štap stenta. Preostale uvjete - dinamičke, zapisujemo kao

$$\sum_{i=1, V \in e_i}^{n_E} \operatorname{sgn}^i(V) q((P^i)^{-1}(V)) = 0, \quad \sum_{i=1, V \in e_i}^{n_E} \operatorname{sgn}^i(V) p((P^i)^{-1}(V)) = 0, \quad \forall V \in \mathcal{V},$$

gdje se $\operatorname{sgn}^i(V)$ definira ovisno o tome je li vrh V početna ili završna točka brida e_i , tj. je li $(P^i)^{-1}(V)$ jednak nuli ili vrijednosti $L_i \neq 0$:

$$\operatorname{sgn}^i(V) = \begin{cases} -1 & : (P^i)^{-1}(V) = 0, \\ 1 & : (P^i)^{-1}(V) \neq 0. \end{cases}$$

Kako bismo iskoristili ovaj uvjet u slaboj formulaciji za stent, primijetimo da su test funkcije $(U^1, \dots, U^{n_E}) \in V_S$ neprekidne u svakom vrhu, pa će se rubni članovi iz (1.8), sumiranjem po svim vrhovima, upravo zbog dinamičkih uvjeta, pokratiti.

Uzimajući sve navedeno u obzir, slaba formulacija za stent sada glasi: naći $U = ((u^1, \omega^1), \dots, (u^{n_E}, \omega^{n_E})) \in V_S$ takve da

$$\sum_{i=1}^{n_E} \int_0^{L_i} Q^i H^i(Q^i)^T \partial_s \omega^i \cdot \partial_s \tilde{\omega}^i ds = \sum_{i=1}^{n_E} \int_0^{L_i} f^i \cdot \tilde{u}^i ds, \quad (1.9)$$

za sve $\tilde{U} = ((\tilde{u}^1, \tilde{\omega}^1), \dots, (\tilde{u}^{n_E}, \tilde{\omega}^{n_E})) \in V_S$.

Lema 1.2.1. *Funkcija $a : V_S \times V_S \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s*

$$a(U, \tilde{U}) = \sum_{i=1}^{n_E} \int_0^{L_i} Q^i H^i(Q^i)^T \partial_s \omega^i \cdot \partial_s \tilde{\omega}^i ds,$$

gdje su $U = ((u^1, \omega^1), \dots, (u^{n_E}, \omega^{n_E}))$, $\tilde{U} = ((\tilde{u}^1, \tilde{\omega}^1), \dots, (\tilde{u}^{n_E}, \tilde{\omega}^{n_E})) \in V_S$ je simetrična, nenegativna (tj. $a(U, U) \geq 0$, $\forall U \in V_S$) i bilinerna forma na V_S .

Dokaz. Iz definicije se jasno vidi da je a simetrična i bilinerna forma. Nadalje, matrice Q^i su ortogonalne, a H^i simetrične i pozitivno definitne, pa su i $Q^i H^i(Q^i)^T$ pozitivno definitne matrice. Zato postoje (simetrične) pozitivno definitne matrice R^i takve da je $R^i = Q^i H^i(Q^i)^T$. Tako za svaki $U \in V_S$

$$a(U, U) = \sum_{i=1}^{n_E} \int_0^{L_i} R^i \partial_s \omega^i \cdot \partial_s \omega^i ds \geq 0,$$

zato što su sve podintegralne funkcije nenegativne (koristili smo da pozitivno definitne matrice zadovoljavaju $Rx \cdot x \geq 0$, za svaki vektor x). \square

Poglavlje 2

Model kontakta i numerička metoda

U ovom poglavlju donosimo izvod kontaktnog problema iz već postavljenih modela ljuske i stenta, modificiramo model jednog štapa kako bi se uklopio u novoizvedeni kontaktni problem te opisujemo njegovu numeričku implementaciju.

2.1 Formulacija kontaktnog problema

U prethodnom tekstu, ljuska je bila parametrizirana injektivnim preslikavanjem $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dok su štapovi stenta parametrizirani preslikavanjima $P^i : [0, L^i] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Prvo što je prirodno zahtijevati je da se stent nalazi na ljusci, tj. $\bigcup_{i=1}^{n_E} P^i([0, L^i]) \subseteq \varphi(\bar{\Omega})$.

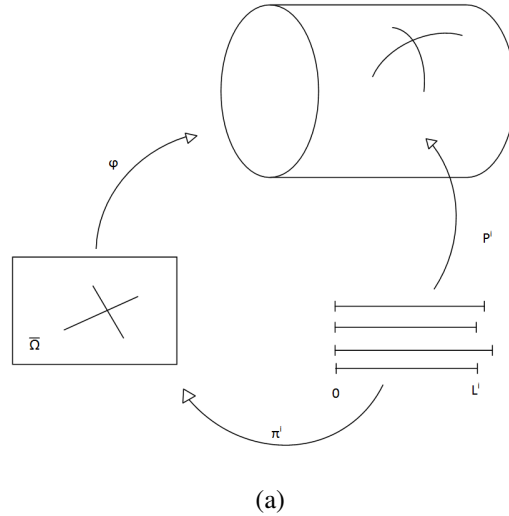
Funkcija φ je injekcija, pa ju smatramo bijekcijom s kodomenom $\varphi(\bar{\Omega})$. U tom smislu definiramo funkcije

$$\pi^i : [0, L^i] \rightarrow \bar{\Omega}, \pi^i = \varphi^{-1} \circ P^i, i = 1, \dots, n_E.$$

Od funkcija π^i zahtijevat ćemo da budu jedinične brzine (budući da one ovise o funkcijama P^i i φ koje su parametrizacije, smijemo to zahtijevati).

Definiramo i sljedeće podskupove od $\bar{\Omega}$:

$$\mathcal{M}_i := \pi^i([0, L^i]), i = 1, \dots, n_E; \mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{n_E} \mathcal{M}_i.$$



Slika 2.1: Grafički prikaz funkcijskih veza.

U poglavljima o modelima ljuske i stenta uveli smo prostore iz kojih dolaze funkcije rješenja problema. Ovdje ih prepisujemo, samo s izmijenjenim indeksima (koji bi trebali biti intuitivni: LJ označava ljusku, S stent):

$$V_{LJ} = \{(u, \omega) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)^2 : u|_{\gamma_0} = \omega|_{\gamma_0} = 0\},$$

$$V_S = \{U = (\tilde{u}^1, \tilde{\omega}^1), \dots, (\tilde{u}^{n_E}, \tilde{\omega}^{n_E}) \in H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^6) : \partial_s \tilde{u}^i + t^i \times \tilde{\omega}^i = 0, i = 1, \dots, n_E\}.$$

Sada možemo definirati prostor funkcija koji će biti temeljni za prostor za zajednički problem:

$$V = \{(u, \omega) \in V_{LJ} : \prod_{i=1}^{n_E} (u, \omega) \circ \pi^i \in V_S\}.$$

Ovako definiran prostor implicira da ćemo promatrati ljusku i stent "zalijepljene", tj. da se deformiraju zajedno. Na tom vektorskom prostoru definiramo prvu bilinearnu formu

$$\begin{aligned} a_{LJ}((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) = & \\ & h \int_{\Omega} C_m Q^T \begin{bmatrix} \partial_1 u + a_1 \times \omega & \partial_2 u + a_2 \times \omega \end{bmatrix} \cdot Q^T \begin{bmatrix} \partial_1 \tilde{u} + a_1 \times \tilde{\omega} & \partial_2 \tilde{u} + a_2 \times \tilde{\omega} \end{bmatrix} \sqrt{a} \, dx \\ & + \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} C_f Q^T \nabla \omega \cdot Q^T \nabla \tilde{\omega} \sqrt{a} \, dx, \quad (u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V_{LJ}. \end{aligned}$$

Ona se poklapa s lijevom stranom jednadžbe (1.5) koja je predstavljala problem ljuške. Da bismo definirali bilinearnu formu za stent, trebamo malo prilagoditi lijevu stranu problema (1.9) koja je predstavljala problem stenta

$$\sum_i^{n_E} \int_0^{L^i} Q^i H(Q^i)^T \partial_s \omega^i \cdot \partial_s \tilde{\omega}^i ds, \quad (2.1)$$

odnosno izraziti je pomoću funkcija iz V .

Definiramo funkcije $\tau^i : [0, L^i] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tau^i = \partial_s \pi^i$, $i = 1, \dots, n_E$. Zatim definiramo dvije funkcije pomoću postojećih:

$$\tilde{Q} : \mathcal{M} \rightarrow M_3(\mathbb{R}), \quad \tilde{Q}(y) = Q^i(s), \text{ za } s \text{ i } i \text{ takve da } y = \pi^i(s),$$

$$\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tau(y) = \tau^i(s), \text{ za } s \text{ i } i \text{ takve da } y = \pi^i(s).$$

Posebno za zadnje dvije vrijedi

$$\tilde{Q} \circ \pi^i = Q^i, \quad \tau \circ \pi^i = \tau^i.$$

Za funkciju $(u, \omega) \in V$ i za svaki i vrijedi $\omega \circ \pi^i = \omega^i$, jer obje označavaju vektor infinitezimalne rotacije strukture. Deriviranjem gornjeg izraza dobivamo

$$\partial_s \omega^i(s) = D(\omega \circ \pi^i)(s) = D\omega(\pi^i(s)) \partial_s \pi^i(s) = D\omega(\pi^i(s)) \tau^i(s).$$

Uvrštavajući dobiveno u (2.1) dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_i^{n_E} \int_0^{L^i} Q^i H(Q^i)^T D\omega \circ \pi^i \tau^i \cdot D\tilde{\omega} \circ \pi^i \tau^i ds &= \sum_i^{n_E} \int_{\mathcal{M}_i} \tilde{Q} H \tilde{Q}^T D\omega \tau \cdot D\tilde{\omega} \tau = \\ &=: \int_{\mathcal{M}} \tilde{Q} H \tilde{Q}^T D\omega \tau \cdot D\tilde{\omega} \tau, \end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti prešli na krivuljne integrale prve vrste parametrizirane s π^i . U drugoj jednakosti definiramo oznaku za sumu svih integrala po \mathcal{M}_i .

Sada konačno možemo definirati drugu bilinearnu formu

$$a_S((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) = \int_{\mathcal{M}} \tilde{Q} H \tilde{Q}^T D\omega \tau \cdot D\tilde{\omega} \tau, \quad (u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V,$$

te bilinearnu formu koja spaja dvije definirane:

$$a((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) = a_{LJ}((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) + a_S((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})), \quad (u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V.$$

Neka na sustav djeluje sila čija je površinska gustoća $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Na ljusku djeluje sila površinske gustoće $f_{LJ} = f$, dok pretpostavljamo da na stent ne djeluje nikakva sila, tj. $f_S = 0$. Kako je omjer ukupnog djelovanja sile na stent i ljusku reda veličine omjera njihovih površina te kako je debljina (tj. promjer presjeka) svakog štapa koji čini stent vrlo mala u odnosu na površinu ljuske, možemo zanemariti učinak površinske sile na stent.

Na V definiramo linearni funkcional $F_{LJ} = F : H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$\langle F, u \rangle = \int_{\Omega} f \cdot \tilde{u} \sqrt{a} \, dx.$$

Ta definicija odgovara desnoj strani formulacije problema za ljusku (1.5). Zbog gornjeg komentara, definiramo funkcional koji odgovara desnoj strani problema za stent F_S , a njegovo djelovanje je jednako nul-funktionalu.

U ovom trenutku navodimo lemu po uzoru na lemu iz [7] koja će nam pomoći dovršiti izvod kontaktnog problema.

Lema 2.1.1. *Neka je V linearni prostor, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simetrična, nenegativna (tj. $a(v, v) \geq 0, \forall v \in V$) i bilinearna forma te $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ linearni funkcional. Tada funkcional*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle \quad (2.2)$$

dostiže minimum na V u točki $u \in V$ ako i samo ako vrijedi

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in V. \quad (2.3)$$

Štoviše, posljednja jednakost ima najviše jedno rješenje.

Ako je forma a još i pozitivna (tj. $a(v, v) > 0, \forall v \in V \setminus \{0\}$), tada je $u \in V$ jedinstvena točka minimuma.

Dokaz. Za $u, v \in V$ i $t \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - \langle F, u + tv \rangle = \\ &= J(u) + t[a(u, v) - \langle F, v \rangle] + \frac{1}{2}t^2a(v, v). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da $u \in V$ zadovoljava da je $a(u, v) = \langle F, v \rangle, \forall v \in V$. Tada imamo

$$J(u + tv) = J(u) + \frac{1}{2}t^2a(v, v).$$

Stoga je za svaku funkciju $v \in V, v \neq u$, uzimajući $t = 1$

$$J(v) = J(u + (v - u)) = J(u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u) \geq J(u), \quad (2.4)$$

pa je zato u jedinstvena točka minimuma. Obratno, neka J ima minimum u točki $u \in V$. Funkcija $t \mapsto J(u + tv)$ je kvadratna, pa njena derivacija u $t = 0$ mora biti jednaka nuli. Zato je

$$0 = \left. \frac{\partial}{\partial t} J(u + tv) \right|_{t=0} = a(u, v) - \langle F, v \rangle,$$

čime smo dokazali i drugu implikaciju. Ako je forma a pozitivna, tada u (2.4) vrijedi stroga nejednakost. \square

Korolar 2.1.2. *Potencijalna energija ljuske*

$$J_{LJ}(u, \omega) = \frac{1}{2}a_{LJ}((u, \omega), (u, \omega)) - \langle F_{LJ}, u \rangle, \quad \forall (u, \omega) \in V_{LJ}$$

dostiže minimum na V_{LJ} u točki $(u, \omega) \in V_{LJ}$ ako i samo ako vrijedi

$$a_{LJ}((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) = \langle F_{LJ}, \tilde{u} \rangle, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V_{LJ}.$$

Štoviše, posljednja jednakost ima najviše jedno rješenje.

Dokaz. Kako je pokazano u Lemi 1.1.1, forma a_{LJ} je simetrična, pozitivna i bilinearna forma, pa zadovoljava uvjete Leme 2.1.1, iz čega tvrdnja direktno slijedi. \square

Korolar 2.1.3. *Ako $(u, \omega) \in V_S$ zadovoljava jednakost*

$$a_S((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) = \langle F_S, \tilde{u} \rangle, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V_S,$$

tada minimizira potencijalnu energiju stenta

$$J_S(u, \omega) = \frac{1}{2}a_S((u, \omega), (u, \omega)) - \langle F_S, u \rangle \quad \forall (u, \omega) \in V_S.$$

Dokaz. Analogno kao u Lemi 1.2.1 pokazuje se da je forma a_S simetrična, nenegativna i bilinearna, pa tvrdnja direktno slijedi iz Leme 2.1.1. \square

Kako je ukupna potencijalna energija sustava jednaka zbroju potencijalnih energija ljuške i stenta, kontaktni problem glasi: naći $(u, \omega) \in V$ takve da minimiziraju potencijalnu energiju sustava, tj. takve da je

$$J(u, \omega) = \min_{(\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V} J(\tilde{u}, \tilde{\omega}), \text{ gdje je } J(u, \omega) = J_{LJ}(u, \omega) + J_S(u, \omega). \quad (2.5)$$

Teorem 2.1.4. *Potencijalna energija sustava*

$$J(u, \omega) = J_{LJ}(u, \omega) + J_S(u, \omega), \quad \forall (u, \omega) \in V$$

dostiže minimum na V u točki $(u, \omega) \in V$ ako i samo ako vrijedi

$$a((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) = \langle F, \tilde{u} \rangle, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V.$$

Dokaz. Uvažavajući definiciju forme a , potencijalnu energiju sustava možemo pisati i na sljedeći način:

$$\begin{aligned} J(u, \omega) &= J_{LJ}(u, \omega) + J_S(u, \omega) = \\ &= \frac{1}{2} a_{LJ}((u, \omega), (u, \omega)) - \langle F_{LJ}, u \rangle + \frac{1}{2} a_S((u, \omega), (u, \omega)) = \\ &= \frac{1}{2} a((u, \omega), (u, \omega)) - \langle F, u \rangle. \end{aligned}$$

Forma a je očito simetrična i bilinearna (kao zbroj dvije takve). Također je pozitivna zato što za svaki $(u, \omega) \neq 0$ vrijedi

$$a((u, \omega), (u, \omega)) = \underbrace{a_{LJ}((u, \omega), (u, \omega))}_{>0} + \underbrace{a_S((u, \omega), (u, \omega))}_{\geq 0} > 0.$$

Gornje nejednakosti vrijede jer je forma a_{LJ} pozitivna, a forma a_S nenegativna. Zato forma a zadovoljava uvjete Leme 2.1.1, iz čega slijedi tvrdnja teorema. \square

Kao posljedicu prethodnog teorema imamo da je problem (2.5) ekvivalentan problemu: naći $(u, \omega) \in V$ takve da

$$a((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) = \langle F, \tilde{u} \rangle, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V. \quad (2.6)$$

Formula (2.6) nam zadaje problem u slaboj formulaciji. Ta formulacija polazna je točka za metodu konačnih elemenata (vidi [7]) kojom ćemo numerički aproksimirati rješenje problema (2.6). Metodu ćemo implementirati na sljedeći način: konstruiramo matricu krutosti i vektor desne strane za problem

$$a_{LJ}((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) = \langle F, \tilde{u} \rangle, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V,$$

dok na odgovarajuća mjesta u matrici pridodajemo elemente forme a_S . Na koji način ćemo ažurirati nove elemente (točnije, koje elementarne matrice treba pridodati u izvornu matricu krutosti na odgovarajuća mjesta), odgovaramo u sljedećem odjeljku.

2.2 Model jednog ravnog štapa - modifikacija

Stent je sastavljen od zakrivljenih štapova. Svaki zakrivljeni štap smijemo aproksimirati po dijelovima ravnim štapovima (kao što je dokazano u [12]). Također, što koristimo više ravnih štapova, to će rješenje dobiveno numeričkim putem biti točnije. Uzimajući to u obzir, stent možemo promatrati i kao strukturu sastavljenu od ravnih štapova koja sada ima više vrhova nego struktura zakrivljenih štapova.

Metoda konačnih elemenata svodi numeričko rješavanje modela na linearni sustav. Matricu tog sustava zovemo matricom krutosti. U slučaju stenta, ona se stvara sumiranjem manjih matrica krutosti za svaki ravni štap zasebno. Te matrice zovemo elementarne matrice. Sada nam je cilj izvesti elementarne matrice za jedan ravni štap.

Sjetimo se da u modelu ravnog štapa tražimo funkciju $(u, \omega) \in V_{1S}$ takvu da je

$$a_{1S}(\omega, \tilde{\omega}) = \langle F_{1S}, \tilde{u} \rangle, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{\omega}), \quad (2.7)$$

gdje smo definirali redom bilinearnu formu, linearni funkcional i prostor funkcija

$$a_{1S}(\omega, \tilde{\omega}) = \int_0^L QHQ^T \partial_s \omega \cdot \partial_s \tilde{\omega} \, ds$$

$$\langle F_{1S}, u \rangle = \int_0^L f \cdot u,$$

$$V_{1S} = \{(\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in H^1(0, L; \mathbb{R}^6) : \partial_s \tilde{u} + t \times \tilde{\omega} = 0\}.$$

Indeks IS trebao bi sugerirati jedan štap. Ovako zadani problem nije trivijalno riješiti zbog definicije skupa V_{1S} . Zato problem reformuliramo na sljedeći način: naći $(u, \omega, \lambda) \in \tilde{V}_{1S} := H^1(0, L; \mathbb{R}^3) \times H^1(0, L; \mathbb{R}^3) \times L^2(0, L; \mathbb{R}^3)$ takav da vrijedi

$$\begin{aligned} a_{1S}(\omega, \tilde{\omega}) + b_{1S}(\lambda, (\tilde{u}, \tilde{\omega})) &= \langle F_{1S}, \tilde{u} \rangle, \quad \tilde{u}, \tilde{\omega} \in H^1(0, L; \mathbb{R}^3) \\ b_{1S}(\tilde{\lambda}, (u, \omega)) &= 0, \quad \tilde{\lambda} \in L^2(0, L; \mathbb{R}^3), \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdje je $b_{1S} : L^2(0, L; \mathbb{R}^3) \times H^1(0, L; \mathbb{R}^6) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcional zadan s

$$b_{1S}(\lambda, (u, \omega)) = \int_0^L \lambda \cdot (u' + t \times \omega) ds.$$

Više o vezi između problema (2.7) i (2.8) može se naći u [4]. Ovako postavljeni problem nalazi se u [3].

Odaberimo potprostor od \tilde{V}_{1S}

$$V_{1S}^h = P_1 \times P_1 \times P_1 \times P_1 \times P_1 \times P_1 \times P_0 \times P_0 \times P_0,$$

gdje P_1 i P_0 označavaju prostor polinoma prvog odnosno nultog stupnja s domenom $[0, L]$. Za te prostore biramo baze sastavljene od funkcija

$$\begin{aligned} \phi_0(s) &= 1, \\ \phi_1(s) &= \frac{L-s}{L}, \\ \phi_2(s) &= \frac{s}{L} \end{aligned}$$

($\{\phi_0\}$ je baza za P_0 , a $\{\phi_1, \phi_2\}$ baza za P_1). Sada zadajemo bazu prostora V kao

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\phi_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \varphi_2 &= (0, \phi_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \varphi_3 &= (0, 0, \phi_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \varphi_4 &= (0, 0, 0, \phi_1, 0, 0, 0, 0, 0), & \varphi_5 &= (0, 0, 0, 0, \phi_1, 0, 0, 0, 0), & \varphi_6 &= (0, 0, 0, 0, 0, \phi_1, 0, 0, 0) \\ \varphi_7 &= (\phi_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \varphi_8 &= (0, \phi_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \varphi_9 &= (0, 0, \phi_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \varphi_{10} &= (0, 0, 0, \phi_2, 0, 0, 0, 0, 0), & \varphi_{11} &= (0, 0, 0, 0, \phi_2, 0, 0, 0, 0), & \varphi_{12} &= (0, 0, 0, 0, 0, \phi_2, 0, 0, 0) \\ \varphi_{13} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, \phi_0, 0, 0), & \varphi_{14} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \phi_0, 0), & \varphi_{15} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \phi_1) \end{aligned}$$

Neka su $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ oznake za projektore s \mathbb{R}^9 na prve tri, druge tri, odnosno treće tri koordinate. Sukladno standardu kod metode konačnih elemenata, promatramo zadaću na V : naći $(u, \omega, \lambda) \in V$ tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} a_{1S}(\omega, \tilde{\omega}) + b_{1S}(\lambda, (\tilde{u}, \tilde{\omega})) &= \langle F_{1S}, \tilde{u} \rangle, \quad \tilde{u} \in \mathbf{P}_1V, \tilde{\omega} \in \mathbf{P}_2V, \\ b_{1S}(\tilde{\lambda}, (u, \omega)) &= 0, \quad \tilde{\lambda} \in \mathbf{P}_3V. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Zato možemo pisati

$$u = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{P}_1 \varphi_i + \sum_{i=7}^9 x_i \mathbf{P}_1 \varphi_i \quad \omega = \sum_{i=4}^6 x_i \mathbf{P}_2 \varphi_i + \sum_{i=10}^{12} x_i \mathbf{P}_2 \varphi_i \quad \lambda = \sum_{i=13}^{15} x_i \mathbf{P}_3 \varphi_i,$$

pa gornju zadaću možemo zapisati kao

$$a_{1S} \left(\sum_{i=4}^6 x_i \mathbf{P}_2 \varphi_i + \sum_{i=10}^{12} x_i \mathbf{P}_2 \varphi_i, \mathbf{P}_2 \varphi_j \right) + b_{1S} \left(\sum_{i=13}^{15} x_i \mathbf{P}_3 \varphi_i, (\mathbf{P}_1 \varphi_j, \mathbf{P}_2 \varphi_j) \right) = \langle F_{1S}, \mathbf{P}_1 \varphi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, 12$$

$$b_{1S}(\mathbf{P}_3 \varphi_j, \left(\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{P}_1 \varphi_i + \sum_{i=7}^9 x_i \mathbf{P}_1 \varphi_i, \sum_{i=4}^6 x_i \mathbf{P}_2 \varphi_i + \sum_{i=10}^{12} x_i \mathbf{P}_2 \varphi_i \right)) = 0, \quad j = 13, 14, 15,$$

Zbog linearnosti to dalje možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} \sum_{i=4}^6 x_i a_{1S}(\mathbf{P}_2 \varphi_i, \mathbf{P}_2 \varphi_j) + \sum_{i=10}^{12} x_i a_{1S}(\mathbf{P}_2 \varphi_i, \mathbf{P}_2 \varphi_j) + \\ + \sum_{i=13}^{15} x_i b_{1S}(\mathbf{P}_3 \varphi_i, (\mathbf{P}_1 \varphi_j, \mathbf{P}_2 \varphi_j)) = \langle F_{1S}, \mathbf{P}_1 \varphi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, 12, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{12} x_i b_{1S}(\mathbf{P}_3 \varphi_j, (\mathbf{P}_1 \varphi_i, \mathbf{P}_2 \varphi_i)) = 0, \quad j = 13, 14, 15,$$

iz čega je vidljivo da je dovoljno izračunati elemente

$$a_{1S}(\mathbf{P}_2 \varphi_i, \mathbf{P}_2 \varphi_j), \quad i, j \in \{4, 5, 6, 10, 11, 12\},$$

$$b_{1S}(\mathbf{P}_3 \varphi_i, (\mathbf{P}_1 \varphi_j, \mathbf{P}_2 \varphi_j)), \quad i \in \{13, 14, 15\}, j = 1, \dots, 12,$$

$$\langle F_{1S}, \mathbf{P}_1 \varphi_j \rangle, \quad j \in \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}.$$

Sada je pripadna matrica za zadaću (2.9) dana s

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & B^1 \\ 0 & A^{11} & 0 & A^{12} & B^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B^3 \\ 0 & A^{21} & 0 & A^{22} & B^4 \\ (B^1)^T & (B^2)^T & (B^3)^T & (B^4)^T & 0 \end{bmatrix},$$

gdje smo koristili oznake

$$A_{j,i}^{\alpha\beta} = a_{1S}(\phi_\alpha e_i, \phi_\beta e_j), \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$B_{j,i}^1 = b_{1S}(\phi_0 e_i, (\phi_1 e_j, 0)), \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$B_{j,i}^2 = b_{1S}(\phi_0 e_i, (0, \phi_1 e_j)), \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$B_{j,i}^3 = b_{1S}(\phi_0 e_i, (\phi_2 e_j, 0)), \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$B_{j,i}^4 = b_{1S}(\phi_0 e_i, (0, \phi_2 e_j)), \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

a $\{e_1, e_2, e_3\}$ je standardna kanonska baza za \mathbb{R}^3 .

Uvrštavanjem definicija formi i funkcija ϕ_i u problem (2.8) i uvažavajući $\phi_1'(s) = -\frac{1}{L}$, $\phi_2'(s) = \frac{1}{L}$ te uzimajući u obzir da je štap ravan s konstantnim poprečnim presjekom (odakle slijedi da su Q i t konstante) dobivamo

$$\begin{aligned} A_{j,i}^{\alpha\beta} &= \int_0^L QHQ^T \phi'_\alpha e_i \cdot \phi'_\beta e_j \, ds = \int_0^L QHQ^T (-1)^\alpha \frac{1}{L} e_i \cdot (-1)^\beta \frac{1}{L} e_j \, ds \\ &= \frac{1}{L} (-1)^{\alpha+\beta} QHQ^T e_i \cdot e_j = \frac{(-1)^{\alpha+\beta}}{L} (QHQ^T)_{j,i}, \\ B_{j,i}^1 &= \int_0^L \phi_0 e_i \cdot \phi_1' e_j \, ds = -\frac{1}{L} \int_0^L e_i \cdot e_j \, ds = -\delta_{i,j}, \\ B_{j,i}^2 &= \int_0^L \phi_0 e_i \cdot t \times \phi_1' e_j \, ds = e_i \cdot t \times e_j \int_0^L \phi_1 \, ds = \frac{L}{2} e_i \cdot A_t e_j \\ &= -\frac{L}{2} A_t e_i \cdot e_j = -\frac{L}{2} (A_t)_{j,i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{j,i}^3 &= \int_0^L \phi_0 e_i \cdot \phi_2' e_j \, ds = \frac{1}{L} \int_0^L e_i \cdot e_j \, ds = \delta_{i,j}, \\
B_{j,i}^4 &= \int_0^L \phi_0 e_i \cdot t \times \phi_2 e_j \, ds = e_i \cdot t \times e_j \int_0^L \phi_2 \, ds = \frac{L}{2} e_i \cdot A_t e_j \\
&= -\frac{L}{2} A_t e_i \cdot e_j = -\frac{L}{2} (A_t)_{j,i}.
\end{aligned}$$

Ovdje je opet $\delta_{i,j}$ Kroneckerov simbol, a A_t oznaka za antisimetričnu matricu opisanu djelovanjem: $A_t x = t \times x$, $x \in \mathbb{R}^3$. Dakle, konačni zapis matrice sustava je

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & \frac{1}{L} QHQ^T & 0 & -\frac{1}{L} QHQ^T & -\frac{L}{2} A_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & -\frac{1}{L} QHQ^T & 0 & \frac{1}{L} QHQ^T & -\frac{L}{2} A_t \\ I & \frac{L}{2} A_t & I & \frac{L}{2} A_t & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

a vektor desne strane je

$$\begin{aligned}
&(\langle F_{1S}, \phi_1 e_1 \rangle, \langle F_{1S}, \phi_1 e_2 \rangle, \langle F_{1S}, \phi_1 e_3 \rangle, 0, 0, 0, \\
&\quad \langle F_{1S}, \phi_2 e_1 \rangle, \langle F_{1S}, \phi_2 e_2 \rangle, \langle F_{1S}, \phi_2 e_3 \rangle, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T.
\end{aligned}$$

U našem slučaju vektor s desne strane popunjen je samo nulama jer smo pretpostavili da na stent ne djeluje nikakva sila.

2.3 Opis algoritma

U ovom potpoglavlju ukratko opisujemo algoritam i poteškoće s kojima smo se susretali pri njegovom razvijanju. Kao što smo najavili, metodu konačnih elemenata za numeričko rješavanje našeg problema implementiramo u programskom paketu *FreeFem++* (vidi [6]).

Ukratko o programskom paketu *FreeFem++*

Programski paket *FreeFem++* besplatni je softver namijenjen numeričkoj aproksimaciji rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi metodom konačnih elemenata. Njegova sintaksa slična je programskom jeziku C++. Nakon što sam stvorio mrežu za bazu funkcijskog

prostora rješenja ili je učitana iz neke datoteke, numerički aproksimira rješenje funkcijom *solve*, koja za argument između ostalog uzima problem u pogodnoj varijacijskoj formaciji. Kako je u našem slučaju model interakcije suma dvostrukog integrala i sume krivuljnih integrala koje odgovaraju drugom modelu, trebamo nadograditi osnovne funkcije *FreeFem++*-a.

Naš pristup

Ideja kako numerički rješavamo kontaktni problem je sljedeća: postaviti matricu sustava (matricu krutosti) za model ljuske te na odgovarajuća mjesta u toj matrici dodati elementarne matrice iz modela stenta (2.10), a nakon toga riješiti sustav s novodobivenom matricom. Za bazu funkcijskog prostora biramo P_1 elemente (vidi [7]) iz dva razloga. Jedan je jednostavnost izvoda elementarnih matrica, a drugi je što matrica krutosti problema u *FreeFem++*-u postane drugačije i na nama nejasan način organizirana drugim slučajevima. Dakle, u *FreeFem++*-u postavljamo problem

$$a_{LJ}((u, \omega), (\tilde{u}, \tilde{\omega})) = \langle F, \tilde{u} \rangle, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{\omega}) \in V,$$

a potom sami ažuriramo elemente u matrici krutosti koji odgovaraju formi a_S . Zato smo u prošlom potpoglavlju izveli elementarne matrice kojima mijenjamo dobivenu matricu krutosti.

Stvaranje mreže

Da bismo mogli mijenjati matrice elemente, stent mora biti kompatibilan s mrežom (tzv. *mesh*) na kojoj je definiran prostor baznih funkcija. Drugim riječima, vrhovi i bridovi koje razapinje stent moraju se nalaziti među vrhovima i bridovima koje razapinje mreža konačnih elemenata. U *FreeFem++*-u postoje funkcije kojima se može stvoriti mreža zadavanjem parametrizacija ruba područja na kojem se ona želi napraviti. No u dokumentaciji nije opisano kako to napraviti u slučaju kada postoje dodatni zahtjevi na mrežu kao u našem problemu, pa smo to morali sami istražiti.

Način zadavanja stenta

Model ljuste definiran je na domeni u \mathbb{R}^2 koja parametrizira ljustu, dok nam je stent zadan kao graf vrhova i bridova u \mathbb{R}^3 . Te dvije formulacije same po sebi nisu kompatibilne. Zato ćemo ljustu i stent morati parametrizirati funkcijom $\varphi : [L, D] \times [0, 2R\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdje su L, D neke konstante takve da sve točke stenta imaju apscisu iz intervala $[L, D]$, dok je R radijus žile. Jedini veći problem koji ovo uzrokuje jest što ćemo prije pokretanja glavnog programa stent zadan kao trodimenzionalni objekt morati prebaciti u dvodimenzionalni objekt čija je slika po preslikavanju φ izvorni stent.

Dodavanje elementarnih matrica

Kada to riješimo, postavlja se pitanje kako znati koje elemente matrice krutosti treba ažurirati. To smo riješili jednim dodatnim programom koji zapisuje zajedničke bridove mreže i stenta kao parove indeksa vrhova koji se poklapaju s indeksima matrice krutosti.

Promjena dimenzija matrice krutosti

Elementarne matrice za štap sadrže i jednadžbe vezane za funkciju λ (odnosno λ^i za svaki ravni štap stenta zasebno), dok matrica krutosti za problem ljuste to ne sadrži. Zbog toga smo toj matrici prilikom dodavanja elementarnih matrica morali povećati dimenzije.

Periodičnost

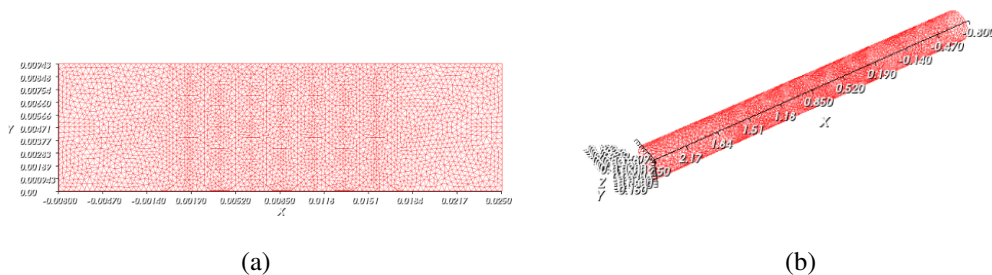
Zadnji veći problem na koji smo naišli je periodičnost. Zbog oblika žile, želimo da rješenje modela ljuste koje dobijemo bude periodično, tj. da se vrijednosti rješenja u točkama oblika $(x, 0)$ i $(x, 2R\pi)$ poklapaju (jer se preslikavaju u istu točku ljuste). Programski paket *FreeFem++* ovaj problem može riješiti jednim dodatnim parametrom *periodic*, no on će promijeniti izgled i dimenzije matrice krutosti, te na taj način gubimo informaciju koje elemente treba ažurirati elementarnim matricama iz modela stenta. Zato problem periodičnosti rješavamo numeričkom penalizacijom: za vrhove i, j čije funkcijske vrijednosti se poklapaju, na mjestima (i, i) i (j, j) matrice krutosti dodajemo neki veliki broj koji zo-

vemo penal, dok na mjestima (i, j) i (j, i) oduzimamo isti taj broj. Primijetimo da u slučaju ravne ploče i štapa ovo nije bio problem.

Koraci algoritma

Uvažavajući sve navedene poteškoće, algoritam vršimo u više koraka.

1. **Priprema za stvaranje mreže:** Prvi kod, napisan u programskom jeziku *C++*, uzima kao ulaz vrhove, *.txt* dokument u kojem je stent zadan kao graf preko vrhova i bridova. Prvo dolaze vrhovi iz \mathbb{R}^3 , a potom bridovi zadani kao uređeni parovi indeksa vrhova. Program „prebacuje” te točke u pravokutnik $[L, D] \times [0, 2R\pi]$, udvostručuje neke točke (primijetimo da se točke pravokutnika $(x, 0)$ i $(x, 2R\pi)$ po parametrizaciji preslikavaju u istu točku), te vraća datoteku ekstenzije *.edp*. To je format programskog paketa *FreeFem++*. U njoj su zapisane naredbe koje će stvoriti mrežu za glavni program.
2. **Stvaranje mreže:** Pokretanje *.edp* datoteke koju smo dobili u prošlom koraku. Programski paket *FreeFem++* mrežu zapisuje u datoteku tipa *.msh*.



Slika 2.2: a) Mreža u domeni parametrizacije, b) Mreža na koju smo djelovali funkcijom parametrizacije

3. **Priprema za numeričko rješavanje kontaktnog problema:** Program napisan u programskom jeziku *C++* uzima kao ulaz datoteku ekstenzije *.msh* koja određuje

mrežu, odnosno bazu prostora. Vraća dvije tekstualne datoteke. U prvoj se zapisuju zajednički bridovi mreže i stenta (tj. bridovi mreže koji leže na stentu). U drugoj datoteci zapisani su parovi vrhova mreže koje parametrizacija cilindra preslikava u istu točku. Obje tekstualne datoteke pomoćne su datoteke za sljedeći korak.

4. **Numeričko rješavanje kontaktnog problema:** Pokretanje glavnog programa *.edp* koji postavlja matricu sustava za ljusku, na odgovarajućim mjestima u matrici dodaje penal za periodičnost i na odgovarajućim mjestima u matrici dodaje podatke iz elementarne matrice za jedan ravni štap za svaki brid stenta (pomoću tekstualnih datoteka iz prošlog koraka). Nakon toga rješava novodobiveni sustav. Osim što programski paket *FreeFem++* nacrtava dobiveno rješenje, on sprema to rješenje u dokument *.vtk* formata, koji je kompatibilan s ostalim grafičkim paketima, kao što je Paraview ([17]).

Ovo je algoritam za slučaj stenta. U slučaju ravne ploče, počinjemo od drugog koraka (zbog jednostavnije sheme sami u programskom paketu *FreeFem++* pišemo program koji stvara mrežu), te ne rješavamo problem vezan uz periodičnost.

Poglavlje 3

Rezultati

U ovom poglavlju u nekoliko primjera numerički aproksimiramo rješenja modela koji smo izveli u prošlom poglavlju.

3.1 Ravna ploča

Kao prvi primjer navodimo jednostavan slučaj ravne ploče kvadratnog oblika koja je učvršćena s jedne strane i jednog ravnog štapa položenog na toj ploči okomito na učvršćenu stranicu. Kada djelujemo silom okomitom na ravninu u kojoj se kvadrat nalazi, štapa bi trebao smanjiti savijanje ploče.

Kvadratna ploča debljine je $0.01m$ i dimenzija $1m \times 1m$. Parametrizirana je funkcijom

$$\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(x, y) = [x, y, 0],$$

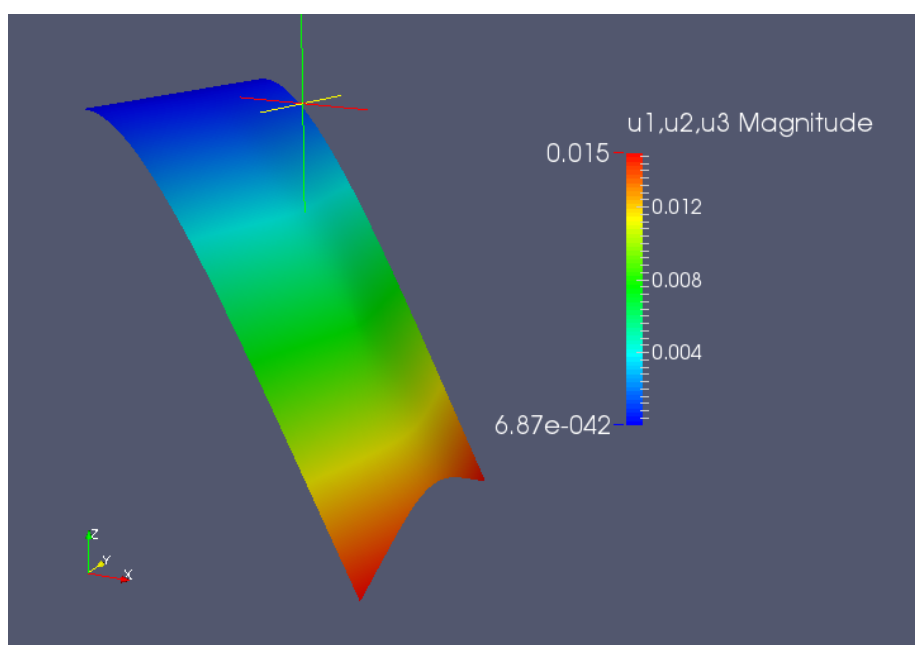
i učvrstili smo je na stranici gdje se nalaze točke oblika $(x, y) = (x, 0)$. Jedan vrh štapa je u polovištu učvršćene stranice, a njegova duljina iznosi je $0.7m$.

Youngov modul štapa je 100 puta veći od Youngovog modula ploče. Sila je odabrana tako da maksimalni pomak bude reda veličine 10^{-2} .

U ovom primjeru varirali smo gustoću mreže i mjerili maksimalni pomak ploče (što je treća komponenta funkcije u) u slučajevima sa i bez štapa.

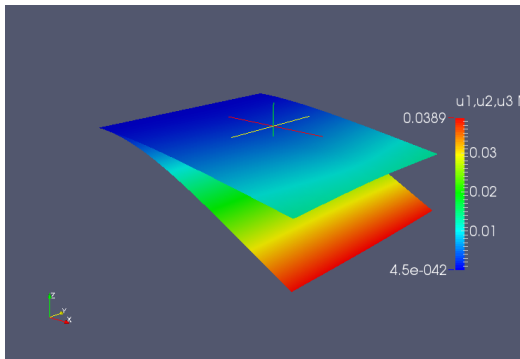
Napomena 3.1.1. U primjerima su deformacije iznimno male pa su skalarno uvećane da bi se pomak jasnije uočio.

Na Slikama 3.1 i 3.2 slijede prikazi deformacije ploče uslijed djelovanja tlaka. Na prvoj je samo ploča sa štapom, pri čemu su deformacije znatno skalarno uvećane kako bi se vidjeli obrisi štapa, dok na drugoj, uz nešto manje skalarno uvećanje, uspoređujemo deformaciju ploče sa štapom, odnosno bez njega na mrežama različitih gustoća. Primijetimo da se na Slici 3.1 utjecaj štapa vidi na središnjem izbočenju i iskrivljenju da donjem rubu ploče.

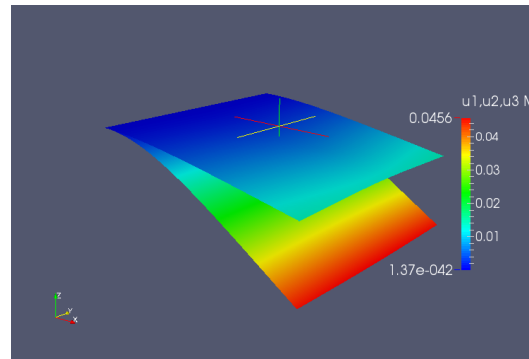


(a)

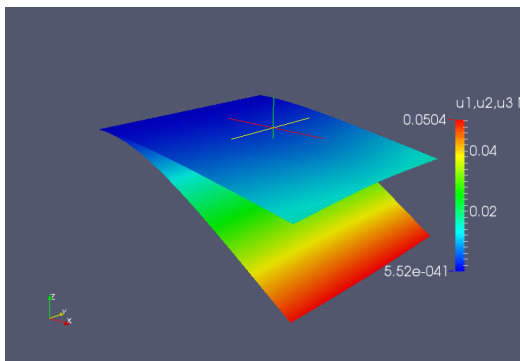
Slika 3.1: Deformacije ploče s jednim štapom.



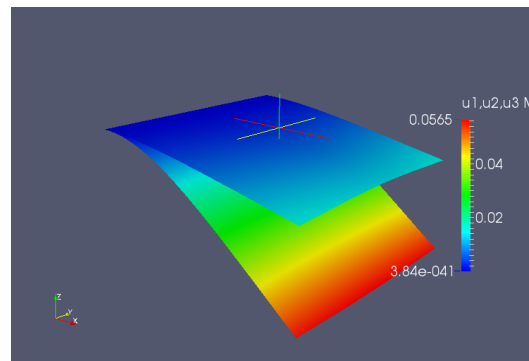
(a)



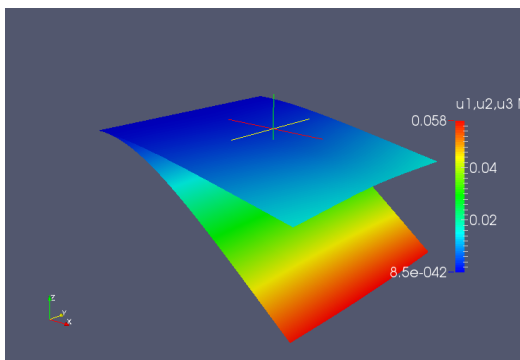
(b)



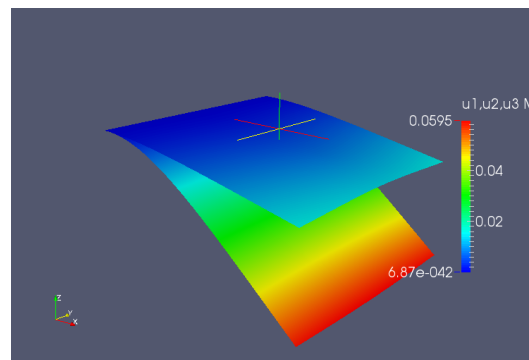
(c)



(d)



(e)



(f)

Slika 3.2: Rezultati za ravnu ploču. Na svakoj slici prikazani su deformacija ploče bez štapa i sa štapom zajedno. Brojevi vrhova na mreži su redom: a) 2383, b) 3719, c) 5341 , d) 9915, e) 11843, f) 14856.

Tablica 3.1: Maksimalni pomaci za ploču sa štapom i bez štapa. U tablici su vrijednosti napisane s negativnim predznakom zato što smo silom djelovali u negativnom smjeru z -osi.

| broj vrhova mreže | $\max u_3$ bez štapa | $\max u_3$ sa štapom |
|-------------------|-------------------------|-------------------------|
| 2383 | $3.88799 \cdot 10^{-2}$ | $1.27171 \cdot 10^{-2}$ |
| 3719 | $4.56053 \cdot 10^{-2}$ | $1.35296 \cdot 10^{-2}$ |
| 5341 | $5.0415 \cdot 10^{-2}$ | $1.40701 \cdot 10^{-2}$ |
| 9915 | $5.6515 \cdot 10^{-2}$ | $1.46931 \cdot 10^{-2}$ |
| 11843 | $5.79957 \cdot 10^{-2}$ | $1.48113 \cdot 10^{-2}$ |
| 14856 | $5.9533 \cdot 10^{-2}$ | $1.49718 \cdot 10^{-2}$ |

Kao što smo mogli i očekivati, rezultati se razlikuju na različitim mrežama, tj. postaju precizniji što je mreža gušća. S druge strane, izgled ploče nakon deformacije (bilo sa štapom, bilo bez njega) ne mijenja se.

3.2 Žila i stent

Kao što smo najavili u uvodu, ali i sugerirali tijekom postavljanja problema, glavna motivacija u ovom radu bio nam je stent i njegov utjecaj na krvnu žilu.

U našim primjerima testirali smo na cilindru radijusa $R = 1.5\text{mm}$ i duljine 32mm koji predstavlja model žile. On je dobiven parametrizacijom

$$\varphi : [-0.008, 0.025] \times [0, 2R\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y) = \left[x, R \cos\left(\frac{y}{R}\right), R \sin\left(\frac{y}{R}\right) \right].$$

Debljina žile je $h = 0.1\text{mm}$. Za Poissonov omjer uzeli smo $\nu_{LJ} = 0.4$, a za Youngov modul elastičnosti $E_{LJ} = 10^6 Pa$.

Stent je dan kao skup vrhova u \mathbb{R}^3 koji se nalaze na cilindru parametriziranom s φ . Njihove x -koordinate nalaze se u intervalu $[0, 0.017]$. Youngov modul elastičnosti je $E_S = 10^{11} Pa$, a Poissonov omjer je $\nu_S = 0.3$, što je blisko podacima za čelik. Radi jednostavnosti, štapove koji razapinju stent uzimamo okruglog presjeka radijusa $r = 0.1\text{mm}$. Zato su

momenti inercije površinskog presjeka štapa jednaki

$$I_2 = I_3 = \frac{r^4\pi}{4}, I_{23} = 0,$$

dok je krutost torzije jednaka $\mu_S \frac{r^4\pi}{2}$ (μ_S je Laméova konstanta koja ovisi o E_S i ν_S).

Gustoću mreže (tzv. *mesha*) pažljivo smo birali zbog zaključaka iz prethodnog poglavlja.

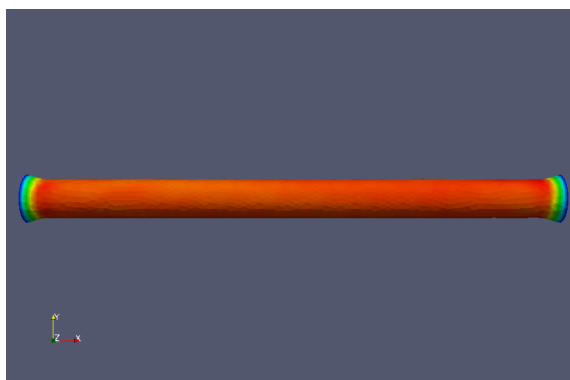
Kao rezultate dajemo tri podatka: po modulu maksimalni radijalni pomak na cijelom cilindru (zovemo ga u_{max}) te po modulu maksimalni i minimalni radijalni pomak na dijelu cilindra gdje se nalazi stent ($u_{max}^{(S)}$, $u_{min}^{(S)}$). Ti rezultati popisani su u Tablici 3.2.

Na stent smo djelovali tlakom, tj. silom konstantne površinske gustoće koja stišće žilu (koja djeluje okomito na ljsku) iznosa $10^4 N/mm^2$, no prikazat ćemo i slike na kojima na žilu djelujemo silom suprotne orijentacije. Lijevi i desni kraj žile smo učvrstili, tj. na krajevima smo zadali rubne uvjete $u = \omega = 0$.

Testirali smo četiri vrste stenta: *palmaz*, *cypher*, *express* i *xience*. Struktura stenta tipa *palmaz* nalikuje nizu povezanih rombova. Spada među krute stentove. Ostala tri stenta fleksibilnija su od navedenog. Stent tipa *express* karakteriziraju *cik-cak* prstenovi duž opsega cilindra međusobno povezani horizontalnom linijom. Stent tipa *cypher* sastoji se od sličnih *cik-cak* prstenova koji su međusobno povezani sinusoidalnom linijom. Stent tipa *xience* sastoji se od *cik-cak* prstenova koji su povezani horizontalnom linijom na kojoj se nalazi jedan zavijutak. Više o svakom stentu može se naći u [14].

Na slikama koje slijede nalazi se grafički prikaz rezultata. Na Slici 3.3 su rezultati za žilu bez stenta. Na Slikama 3.4, 3.5, 3.6 i 3.7 nalaze se četiri grafička prikaza za pojedine stentove. Najgornja prikazuje izgled stenta. Druga i treća prikazuju deformaciju stenta i žile pod utjecajem sile izvana i iznutra, redom. Najdonja slika prikazuje graf radijalnog pomaka točaka na žili.

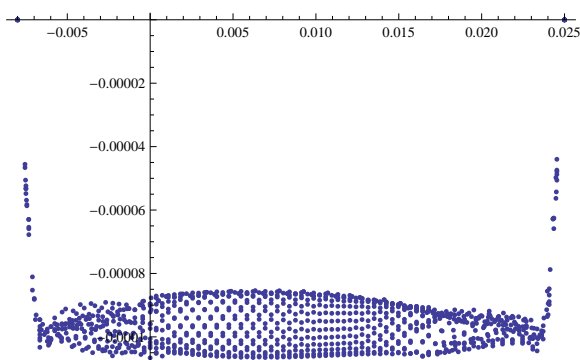
Napomena 3.2.1. *U primjerima su deformacije iznimno male pa su skalarno uvećane da bi se pomak jasnije uočio.*



(a)

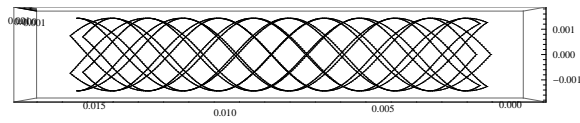


(b)

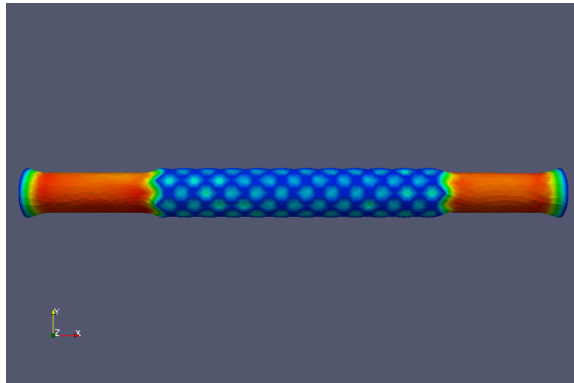


(c)

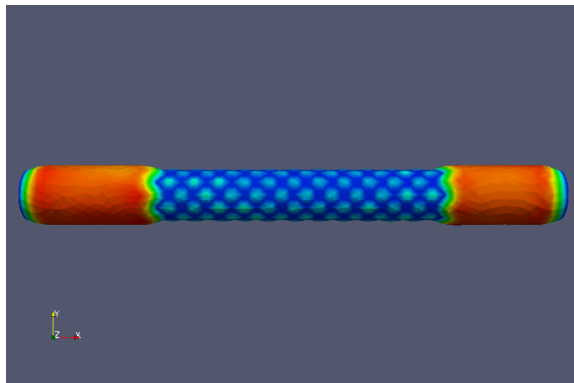
Slika 3.3: Rezultati za žilu bez stenta. Slika a) prikazuje deformaciju žile pod utjecajem vanjskog tlaka, dok slika b) deformaciju pod utjecajem unutarnjeg tlaka. Slika c) prikazuje graf radijalnog pomaka točaka na žili.



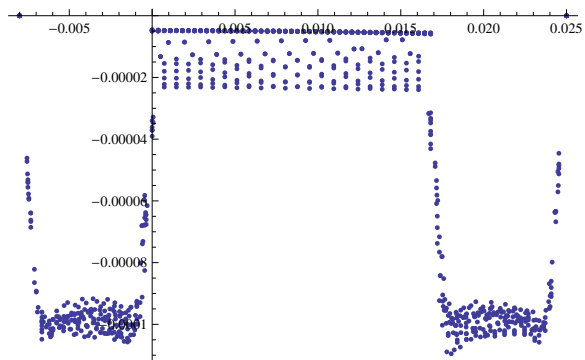
(a)



(b)

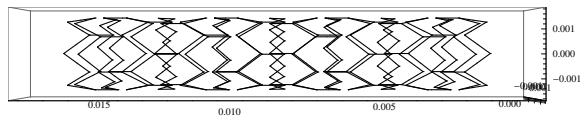


(c)

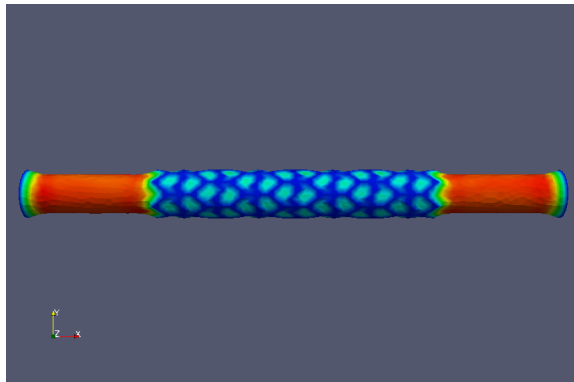


(d)

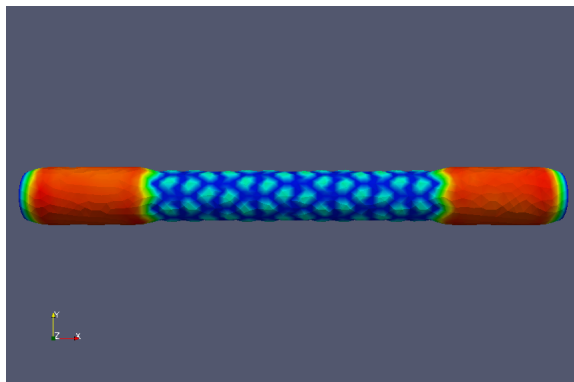
Slika 3.4: Rezultati za *palmaz*.



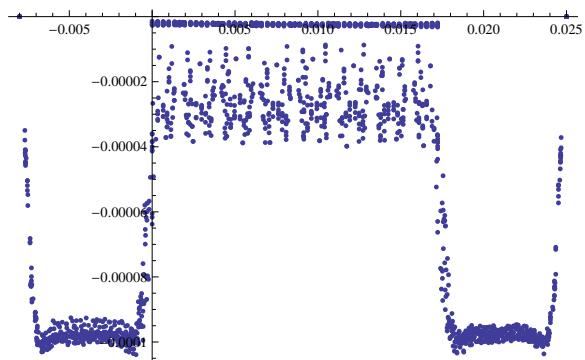
(a)



(b)

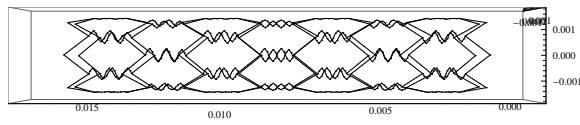


(c)

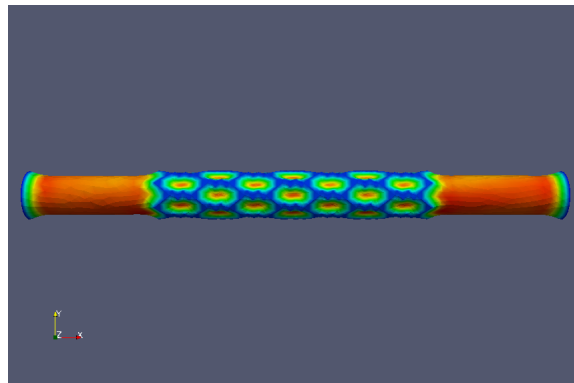


(d)

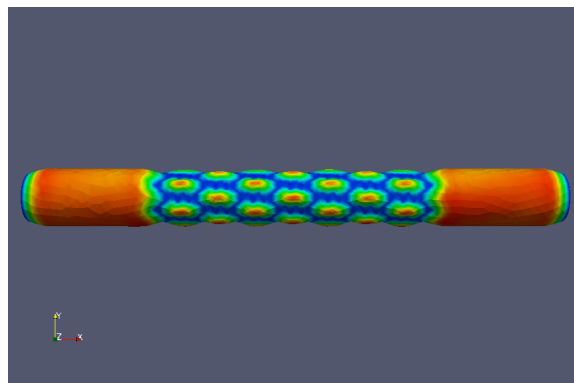
Slika 3.5: Rezultati za *express*.



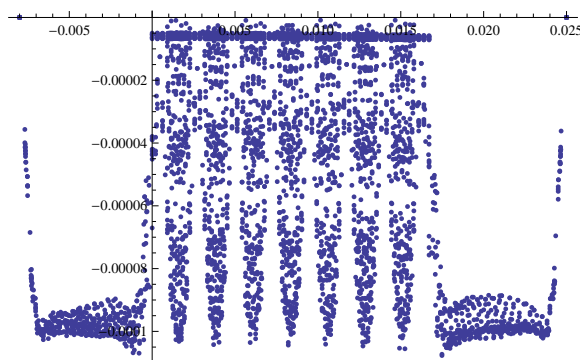
(a)



(b)

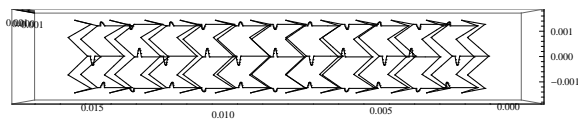


(c)

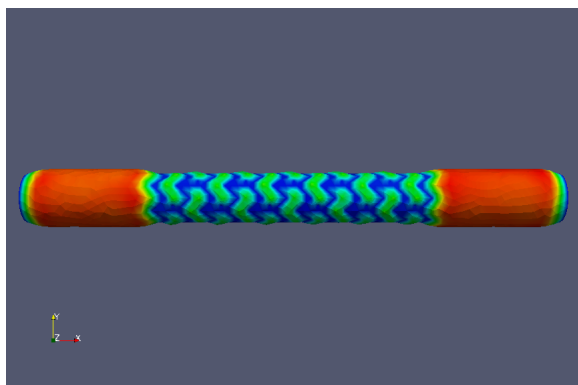


(d)

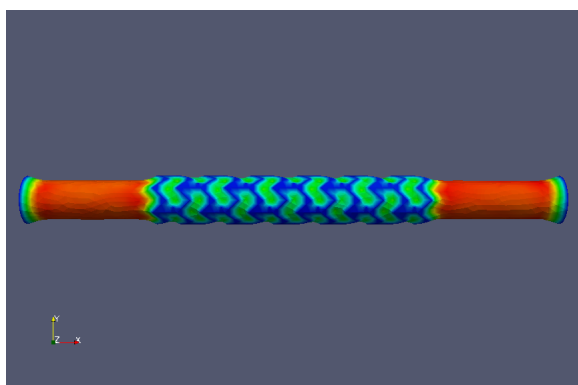
Slika 3.6: Rezultati za *cypher*.



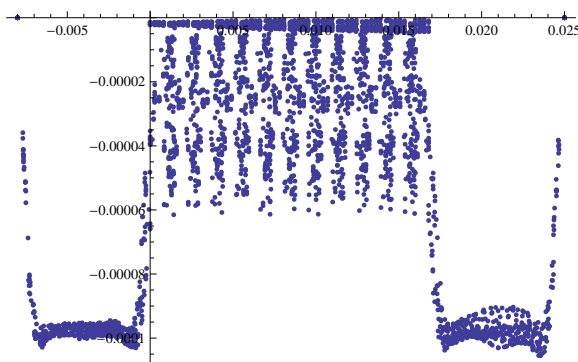
(a)



(b)



(c)



(d)

Slika 3.7: Rezultati za *xience*.

Tablica 3.2: Radijalni pomaci za žilu sa stentom i bez stenta.

| vrsta stenta | u_{max} | $u_{min}^{(S)}$ | $u_{max}^{(S)}$ |
|------------------------|--------------------------|------------------------|--------------------------|
| <i>žila bez stenta</i> | $1.134008 \cdot 10^{-4}$ | – | – |
| <i>palmaz</i> | $1.095257 \cdot 10^{-4}$ | $4.7221 \cdot 10^{-6}$ | $2.39524 \cdot 10^{-5}$ |
| <i>cypher</i> | $1.076880 \cdot 10^{-4}$ | $8.589 \cdot 10^{-7}$ | $1.055421 \cdot 10^{-4}$ |
| <i>express</i> | $1.039037 \cdot 10^{-4}$ | $1.5362 \cdot 10^{-6}$ | $3.98178 \cdot 10^{-5}$ |
| <i>xience</i> | $1.055142 \cdot 10^{-4}$ | $4.307 \cdot 10^{-7}$ | $6.15073 \cdot 10^{-5}$ |

Iz podataka vidimo da su pomaci točaka na žili bez stenta vrlo mali. Zaključujemo da su svi navedeni stentovi kruti na tlak.

3.3 Žila i stent - rotacija krajeva

U ovom odjeljku obrađujemo istu situaciju kao u prošlome, samo što smo zaokrenuli učvršćene krajeve. Točnije, rubni uvjeti za rješenje (u, ω) sada su

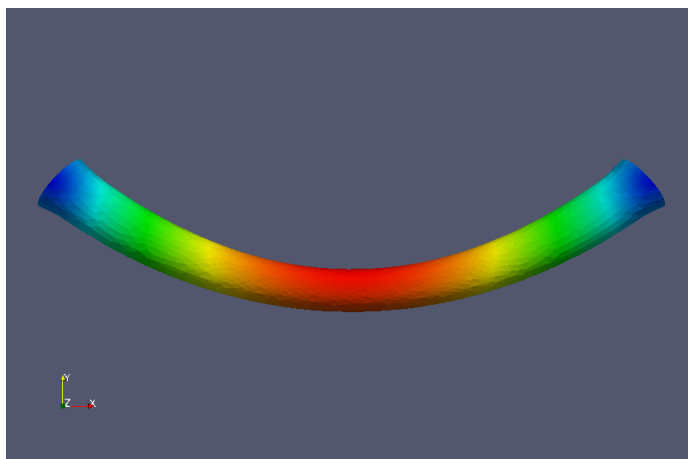
$$u = (\sin(\theta) \cdot R \cos\left(\frac{y}{R}\right), (\cos(\theta) - 1) \cdot R \cos\left(\frac{y}{R}\right), 0), \quad \omega = (0, 0, -\theta) \text{ na lijevom kraju i}$$

$$u = (-\sin(\theta) \cdot R \cos\left(\frac{y}{R}\right), (\cos(\theta) - 1) \cdot R \cos\left(\frac{y}{R}\right), 0), \quad \omega = (0, 0, \theta) \text{ na desnom kraju.}$$

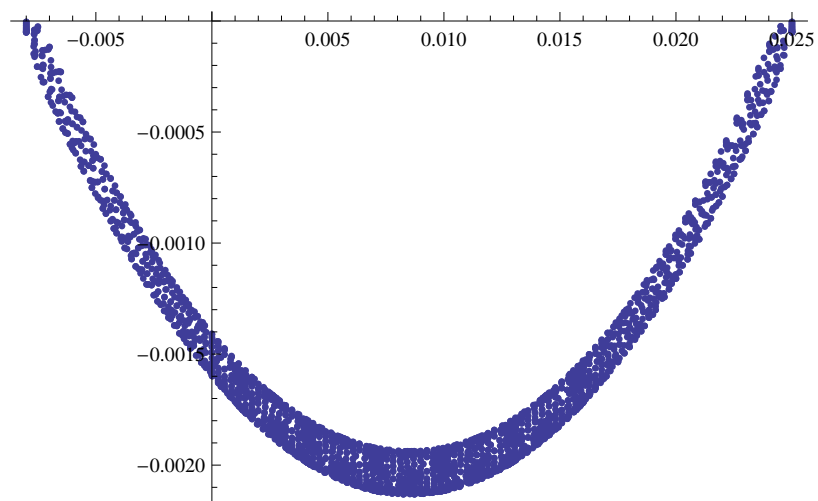
Navedena promjena savit će žilu te ćemo vidjeti utjecaj stenta na savijenoj žili, odnosno koliko je stent fleksibilan na takva savijanja. U primjerima smo krajeve rotirali za $\theta = 15^\circ$. Za svaki stent mjerit ćemo maksimalni radijalni pomak cijele žile. Te podatke zapisujemo u Tablicu 3.3.

Na slikama koje slijede nalazi se grafički prikaz rezultata. Na slici 3.8 su rezultati za žilu bez stenta. Na slikama 3.9, 3.10, 3.11 i 3.12 nalaze se četiri grafička prikaza za pojedine stentove. Kao u prethodnom odjeljku, najgornja prikazuje izgled stenta. Druga prikazuje deformaciju stenta i žile pod utjecajem vanjskog tlaka, a najdonja graf radijalnog pomaka točaka na žili.

Napomena 3.3.1. U primjerima su deformacije iznimno male pa su skalarno uvećane da bi se pomak jasnije uočio.

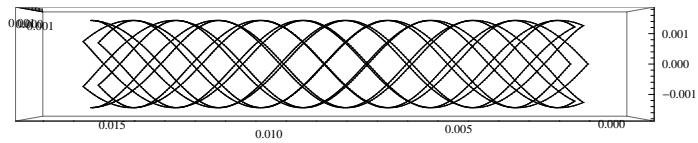


(a)

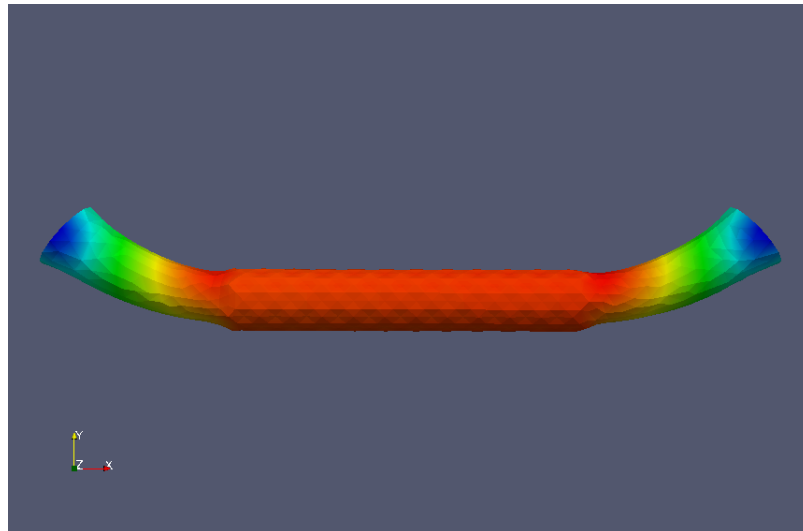


(b)

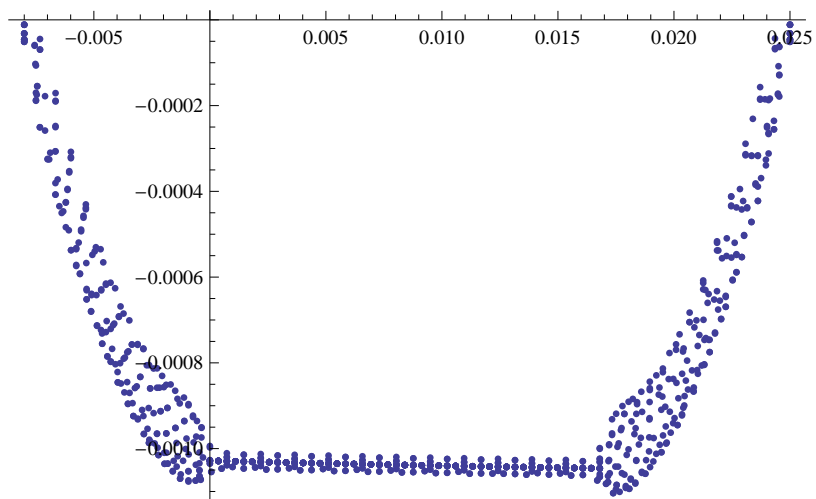
Slika 3.8: Rezultati za žilu bez stenta. Slika a) prikazuje deformaciju žile pod utjecajem vanjskog tlaka, dok slika b) prikazuje graf radijalnog pomaka točaka na žili.



(a)

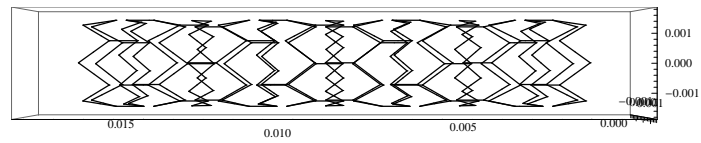


(b)

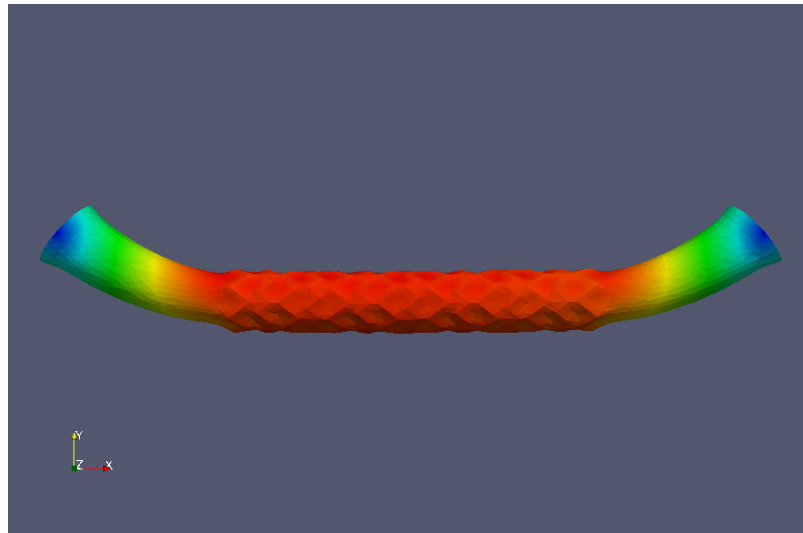


(c)

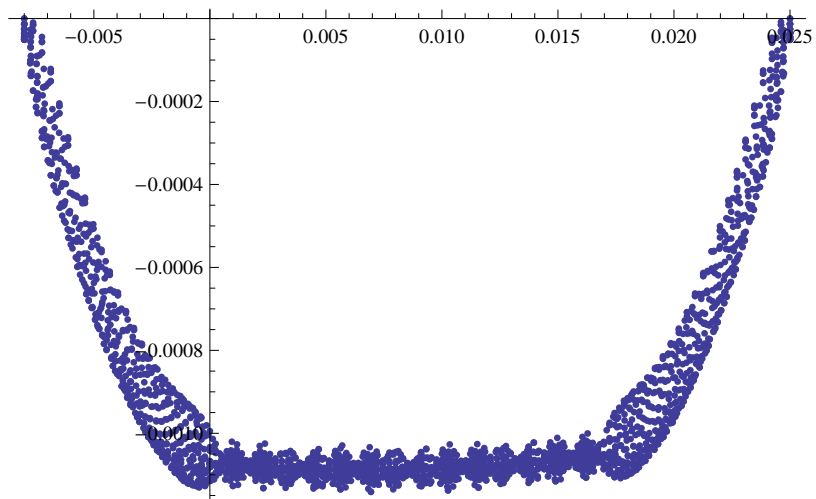
Slika 3.9: Rezultati za *palmaz*.



(a)

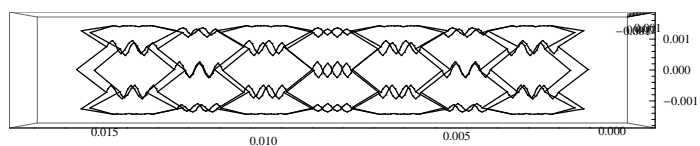


(b)

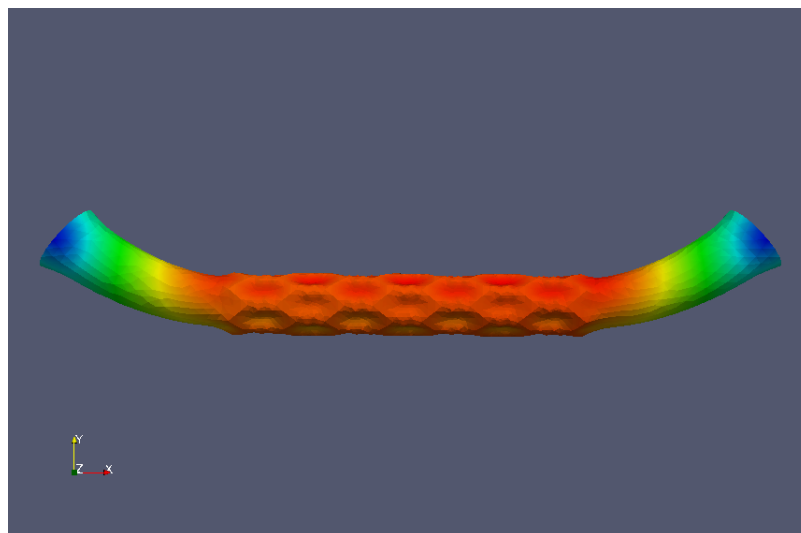


(c)

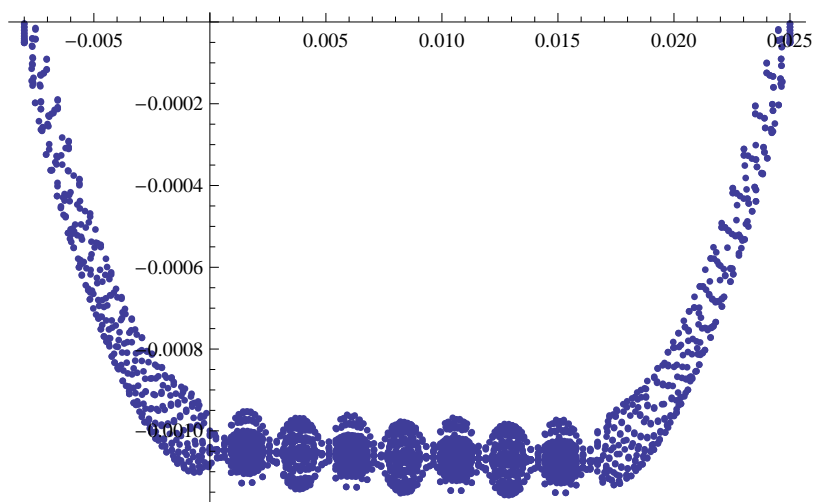
Slika 3.10: Rezultati za *express*.



(a)

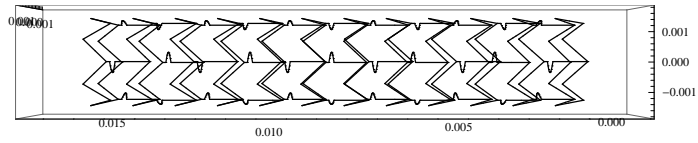


(b)

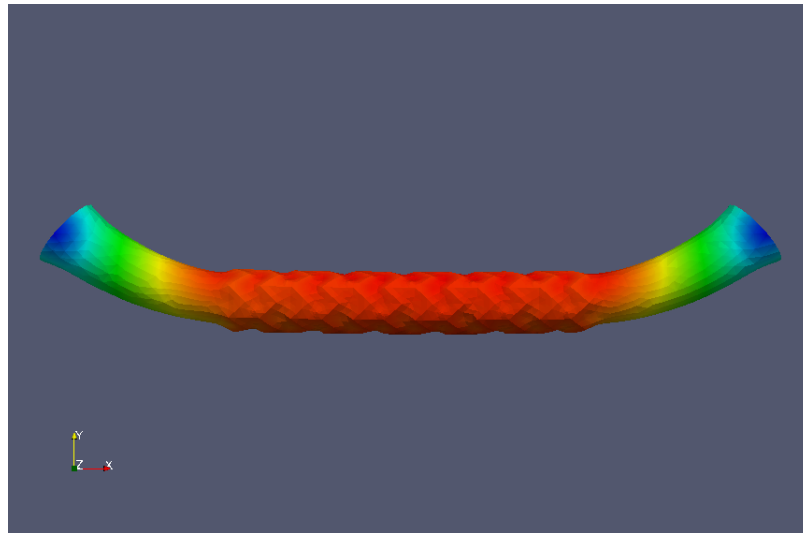


(c)

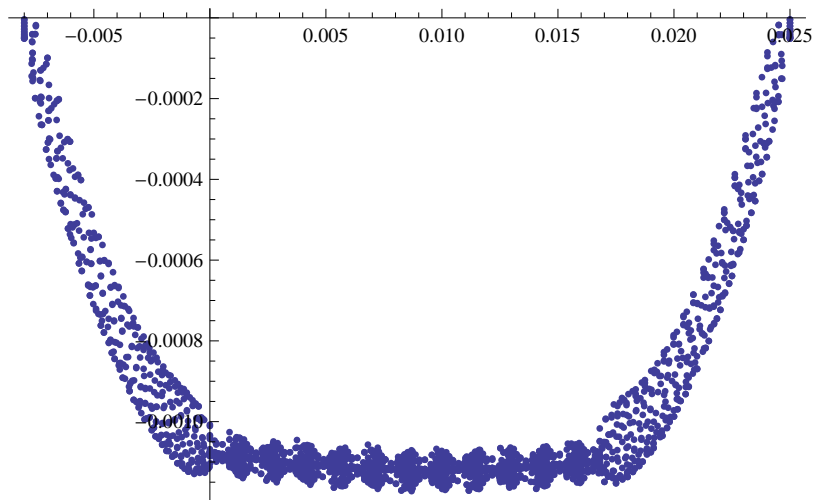
Slika 3.11: Rezultati za *cypher*.



(a)



(b)



(c)

Slika 3.12: Rezultati za *xience*.

Tablica 3.3: Radijalni pomaci za žilu sa stentom i bez stenta.

| vrsta stenta | u_{max} |
|------------------------|---------------------------|
| <i>žila bez stenta</i> | $2.1312912 \cdot 10^{-3}$ |
| <i>palmaz</i> | $1.1038394 \cdot 10^{-3}$ |
| <i>cypher</i> | $1.1575241 \cdot 10^{-3}$ |
| <i>express</i> | $1.1411191 \cdot 10^{-3}$ |
| <i>xience</i> | $1.1721247 \cdot 10^{-3}$ |

Primijetimo da se dodavanjem stenta žila u bitnom ukrutila kod svih stentova, što će potencijalno dovesti do povećanog naprezanja kod zakrivljene žile. U tom kontekstu treba napomenuti da je *xience* najfleksibilniji, a *palmaz* najmanje fleksibilan na savijanje. To je opaženo i u [14].

Poglavlje 4

Zaključak

Nakon prezentacije matematičkog modela ljuske i zakrivljenog štapa (odnosno strukture sastavljene od štapova), izveli smo model za kontaktni problem. Koristeći egzistenciju i jedinstvenost rješenja njihovih problema te usklađenost s problemom minimizacije njihovih potencijalnih energija, zajednički problem ljuske i ravnog štapa izveden je iz principa minimalne energije, uvažavajući činjenicu da je ukupna energija sustava jednaka sumi energija svake komponente. Dokazali smo da je problem minimizacije ukupne energije ekvivalentan rješavanju varijacijske formulacije problema (2.6), koja je temelj za izračunavanje numeričke aproksimacije.

Implementirali smo algoritam koji izvedenu varijacijsku formulaciju numerički rješava metodom konačnih elemenata. Iako smo se služili programskim paketom *FreeFem++*, koji je alat namijenjen rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi metodom konačnih elemenata, zbog atipičnosti našeg problema, putem smo morali riješiti mnoge druge poteškoće.

Jedan od uzroka problema bio je i primjer koji smo htjeli modelirati: model žile i stenta. Nadalje, upravo zbog toga što je jedan od ciljeva rada bio testirati različite vrste stentova, ovaj algoritam ima mnogo veću primjenu od ovog jednog primjera. Naš program je primjenjiv u bilo kojem slučaju iz stvarnog života u kojem mreža jednodimenzionalnih strukutra služi kao potporanj nekoj dvodimenzionalnoj mekšoj strukturi. Kao neke primjere navodimo armirani beton, konstrukciju kišobrana, nadstrešnice, cepelin . . .

Naš algoritam testirali smo na jednom primjeru ravne ploče i štapa koji je pokazao

osjetljivost algoritma pri promjeni gustoće mreže, ponajviše zbog odabira P_1 elemenata kao baze prostora rješenja. Ovaj dio zaslužuje pozornost u daljnjim istraživanjima.

Izvedba programa na nekoliko vrsta stentova, simulirajući stvarne uvjete, potvrdila je naše predznanje o njihovim karakteristikama. Svi su dosta kruti na tlak, a *xience* se pokazao kao najfleksibilniji pri savijanju.

Bibliografija

- [1] S. S. Antman: *Nonlinear problems of Elascity*, Springer, New York, 2005.
- [2] P. G. Ciarlet: *Mathematical elasticity, Volume III: Theory of shells*, North Holland, 2000.
- [3] S. Čanić, J. Tambača: *Cardiovascular Stents as PDE Nets: 1D vs. 3D*, *IMA Journal of Applied Mathematics* 77 (2012), 6, 748-779.
- [4] V. Girault, P.-A. Raviart: *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [5] G. Griso: *Asymptotic behaviour of structures made of curved rods*, *Analysis and Applications* 06 (2008), 1, 11-12.
- [6] F. Hecht: *FreeFem++, Third Edition, Version 3.20*.
- [7] M. Jurak: *Praktikum primjenjene matematike II., Metoda konačnih elemenata, skripta*, PMF Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2006.
- [8] P. M. Naghdi: *The theory of shells and plates*, *Handbuch der Physik*, vol. VIa/2, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [9] A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Springer, London, 2005.
- [10] M. Rogulj: *Numerička aproksimacija linearnog modela elastične ljuske*, diplomski rad, PMF Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2013.

- [11] J. Tambača, Z. Tutek: *Dynamic Curved Rod Model, Proceedings of the Conference on Applied Mathematics and Computation, Dubrovnik 1999*, eds. V. Hari et al., 2000.
- [12] J. Tambača: *A model of irregular curved rods, in Proceedings of the Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing (Dubrovnik, 2001)*, eds. Z. Drmač, V. Hari, L. Sopta, Z. Tutek, K. Veselić, Kluwer, 2003, 289-299.
- [13] J. Tambača, M. Kosor, S. Čanić, D. Paniagua: *Mathematical Modeling of Vascular Stents, SIAM Journal on Applied Mathematics* 70 (2010), 6, 1922-1952.
- [14] J. Tambača, S. Čanić, M. Kosor, R. D. Fish, D. Paniagua: *Mechanical Behavior of Fully Expanded Commercially Available Endovascular Coronary Stents, Texas Heart Institute Journal* 38 (2011), 491-501.
- [15] J. Tambača: *A new linear shell model for shells with little regularity, Journal of Elascity, Springer, 2014.*, DOI: 10.1007/s10659-014-9469-2
- [16] Wolfram: <http://www.wolfram.com/mathematica/>
- [17] *ParaView User's Guide (v3.10)*

Sažetak

Matea Galović, Matko Ljulj

ključne riječi: model elastične ljuske, model elastičnog stenta, metoda konačnih elemenata, model interakcije ljuske i stenta

Glavni cilj ovog rada je izvod kontaktnog problema ljuske i stenta i implementacija numeričke aproksimacije. Drugim riječima, htjeli smo riješiti problem zajedničke deformacije ljuske i stenta pod utjecajem vanjskih sila. Motivacija nam je upravo modeliranje krvnih žila, no problem rješavamo i u generalnom obliku.

Na početku ovog rada uveli smo i objasnili neke matematičke modele za elastični problem ljuske i problem stenta koje koristimo. U nastavku kao glavni teorijski rezultat izvodimo i formuliramo zajednički model u varijacijskoj formulaciji, obliku pogodnom za numeričko rješavanje.

Nakon toga opisujemo implementaciju koda koji numerički rješava izvedeni problem i koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Na kraju napisani program testiramo na problemu ravne ploče i štapa, te na nekoliko vrsta stenta ispitujući njihova mehanička svojstva.

Summary

Matea Galović, Matko Ljulj

key words: elastic shell model, elastic stent model, finite element method, model of shell-stent interaction

The main goal of this paper is the derivation of the interaction model of the shell and a stent, together with implementation of the numerical approximation. In other words, our goal is to solve the problem of mutual deformation of shell and stent, when under influence of external forces. Even though our motivation is blood vessels modelling, we also solve the problem in the general form.

At the beginning of this paper, we introduced and explained some mathematical models for the elastic shell problem and the stent problem, which we used. Later on, as the main theoretical result, we derive and formulate shell-stent interaction problem in the variational formulation, which is adequate for numerical solving.

Afterwards, we describe implementation of the code that numerically solves derived problem and which is based on the finite element method. At the end, we test the derived numerical approximation on the problem of a plain board and a rod, and on a few stent types, exploring their mechanical properties.