

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Fizički odsjek

Petar Pavlović i Marko Sossich
Crvotočine u gravitaciji tipa $f(R)$ i očuvanje slabog energijskog uvjeta

Zagreb, 2013.

Ovaj rad izrađen je u Zavodu za primijenjenu fiziku - FER pod vodstvom prof. dr. sc. Dubravka Horvata i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2012./2013.

Sadržaj

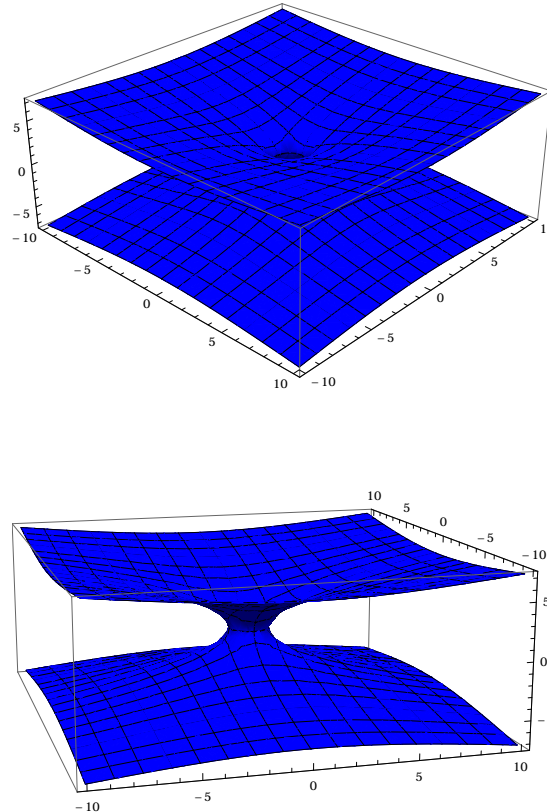
1	Uvod	1
2	Geometrija crvotočine	3
3	Energijski uvjeti	6
4	Crvotočine u gravitaciji tipa $f(R)$	8
5	Rješenja i diskusija rezultata	12
5.1	MJW model	12
5.1.1	$b(r) = \sqrt{r_0/r}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$	13
5.1.2	$b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$	14
5.1.3	$b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi = \sqrt{r_0/r}$	15
5.2	Model Starobinskog	16
5.2.1	$b(r) = \ln(r/r_0) + 1$, $\varphi = \sqrt{r_0/r}$	16
5.2.2	$b(r) = \ln(r/r_0) + 1$, $\varphi = (r_0/r)^{1/4}$	17
5.2.3	$b(r) = \sqrt{r/r_0}$, $\varphi = \ln(\sqrt{r_0/r} + 1)$	18
5.3	Model Eksponencijalne gravitacije	19
5.3.1	$b(r) = \sqrt{r_0/r}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$	20
5.3.2	$b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$	21
5.3.3	$b(r) = \frac{1}{2}e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{r/r_0}$	22
5.3.4	Usporedba $\varphi(r) = \textit{konstanta}$ i $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$	23
6	Zaključak	24
7	Zahvale	25
8	Literatura	26
9	Dodatak : Varijacijski postupak za gravitaciju tipa $f(R)$	27
10	Sažetak	30
11	Summary	30

1 Uvod

U Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti prostor i vrijeme dobivaju potpuno novo značenje postajući dinamički entiteti teorije, te se ne pojavljuju više kao pozornica na kojoj se odvijaju događaji, već se i sami zakrivljuju. Njihova dinamika je potpuno određena raspodjelom mase i energije u nekom sustavu, te stoga možemo reći da masa i energija zakrivljuju prostor i vrijeme (prostorno-vremenski kontinuum). Jednadžba koja opisuje navedeno je Einsteinova jednadžba polja [1]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Jedna od najintragantnijih posljedica opće teorije relativnosti su rješenja koja opisuju postojanje tzv. crvotočina. Crvotočina ili Einstein-Rosenov most je takvo rješenje čija geometrija grotlom povezuje dvije asimptotski ravne regije prostor-vremena [2], dakle topološko svojstvo prostor-vremena čije rješenje predstavlja prečicu između potencijalno dvije vrlo udaljene prostorno-vremenske točke. Hipotetski možemo zakriviti prostor tj. stvoriti tunel (prečicu) oko Zemlje tako da nam npr. galaksija Andromede koja je udaljena 2.5 milijuna svjetlosnih godina bude udaljena na svega nekoliko kilometara. Pretpostavimo da postoji 2D prostor i česticu koja se može kretati samo po plohi, te ga zamišljamo uronjenog u 3D prostor. Uzmimo sada geometriju crvotočine, te odaberemo jedan vremenski trenutak i azimutalni kut $\theta = \pi/2$, tada možemo vizualizirati crvotočinu kao plohu koja omeđuje tunel u 3D kao što je prikazano na Slici 1.



Slika 1: Crvotočina $b(r) = \text{konstanta}$

U teoriji javljaju se dvije vrste crvotočina [3]:

1. Crvotočine koje povezuju dvije nezavisne asimptotski ravne regije
2. Crvotočine koje povezuju dva dijela iste asimptotski ravne regije

Za prvu vrstu se često kaže da povezuje dva svemira, dok druga povezuje dva dijela istog asimptotski ravnog područja. Ovakva terminologija definira svemir jednostavno kao relativno velik asimptotski ravan prostorno-vremenski kontinuum [3].

Do danas još nije opažanjima potvrđeno postojanje crvotočine iako je njezina geometrija dobro definirana. U Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti crvotočina može biti stvorena jedino egzotičnom materijom [2], tj. materijom koja ne poštuje standardne energijske uvjete. Niti jedna poznata materija u makroskopskim uvjetima ne pokazuje narušenja tog tipa. Takvi efekti mogu se postići običnom materijom ali samo na mikroskopskoj razini gdje kvantni efekti podupiru takve pojave [4] [5] [6].

Međutim, pokazuje se da ako se jednačbe Einsteinove opće teorije relativnosti modificiraju, kao što je slučaj u teorijama gravitacije tipa $f(R)$, uvjet potrebe egzotične materije za crvotočinu se u određenim situacijama može izbjeći. To pitanje je zanimljivo stoga što su prijedlozi modificiranja Einsteinove opće teorije relativnosti motivirani sasvim nezavisnim problemom potrebe objašnjenja ubrzane ekspanzije svemira.

U ovom radu promatrat ćemo crvotočine i problem zadovoljenja slabog energijskog uvjeta (WEC) [7] u teoriji gravitacije tipa $f(R)$. Pri tome nećemo uzimati dodatne pretpostavke koje ograničavaju općenitost, a u literaturi se standardno koriste radi pojednostavljivanja jednačbi. Također rješenja ćemo promatrati u kontekstu relevantnih kozmoloških modela tipa $f(R)$, a ne uzimajući za $f(R)$ proizvoljne funkcije prilagođene problemu koji se promatra, što je uglavnom bio pristup većine autora.

U poglavlju (2) prikazujemo geometriju crvotočine koja je jednaka u općoj teoriji relativnosti i gravitaciji tipa $f(R)$, u poglavlju (3) definiramo energijske uvjete, u (4) prikazujemo crvotočine u gravitaciji tipa $f(R)$ i izvodimo odgovarajuće jednačbe, te diskutiramo odabir određenih modela za funkciju $f(R)$, te u (5) prikazujemo i analiziramo dobivena rješenja za različite modele i izbore parametara.

2 Geometrija crvotočine

Geometrija nekog prostor-vremena dana je metrikom, a ona za crvotočinu ima oblik:

$$ds^2 = -e^{2\varphi(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2)$$

ili u tenzorskom obliku zadana preko metričkog tenzora:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\varphi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

gdje je $\varphi(r)$ funkcija crvenog pomaka, a $b(r)$ funkcija oblika [2]. Funkcije $\varphi(r)$ i $b(r)$ su proizvoljne funkcije radijalne koordinate r koja nemonotono ide od beskonačnosti do minimalne vrijednosti r_0 u grotlu pa nastavlja do beskonačnosti. Za $r = r_0 \Rightarrow b(r_0) = r_0$ što je koordinata grotla koja je singularna u metrici, tj. metrika poprima beskonačnu vrijednost. Bez obzira što metrika divergira u grotlu, svojstvena udaljenost mora biti asimptotski ravna iz čega slijedi da integral mora biti realan i ne divergirati izvan grotla [2]:

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - b(r)/r}}, \quad (3)$$

taj je uvjet dan s:

$$1 - b(r)/r \geq 0. \quad (4)$$

Nadalje, daleko od grotla u oba radijalna smjera metrika mora biti asimptotski ravna pa slijedi uvjet $b(r)/r \rightarrow 0$ kako $l \rightarrow \pm\infty$ [2].

Jedno od fundamentalnih svojstava metrike crvotočine jest to što po definiciji mora imati minimum u r , taj uvjet dan je $(b(r) - b(r)'r)/b^2 > 0$ [2], gdje je $b(r)' = db/dr$, (u daljnjem tekstu crtica iznad funkcije označava derivaciju po njezinom argumentu). Drugi zahtjev koji namećemo jest praktične prirode, tj. zahtijevamo da crvotočina bude prohodna što znači da nema horizonta. Tada treba biti zadovoljen uvjet da $\varphi(r)$ bude konačan po cijelom prostoru.

Kako bismo imali sva geometrijska svojstva crvotočine, potrebno je izračunati Riccijev tenzor i Riccijev skalar, te iz njih izračunati Einsteinov tenzor koji povezuje masu i energiju (tenzor energije i impulsa) s geometrijom takve tvari. Potrebno je definirati afinu konekciju ili Christoffelov simbol $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ da bismo izračunali Riccijev tenzor:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (g_{\sigma\mu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,\sigma}). \quad (5)$$

Za metriku crvotočine jedini neiščezavajući Christoffelovi simboli jesu:

$$\Gamma_{tt}^r = \varphi(r)' e^{2\varphi(r)} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right), \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)} \left(\frac{b(r)'}{r} - \frac{b(r)}{r^2}\right), \quad \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r = -r \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right),$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2\vartheta \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right), \quad \Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = \varphi(r)', \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} = -\sin\vartheta \cos\vartheta,$$

$$\Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} = \Gamma_{\vartheta r}^{\vartheta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\vartheta}^{\varphi} = \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Iz danih Christoffelovih simbola možemo izračunati Riccijev tenzor definiran na sljedeći način:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\kappa}^{\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa,\nu}^{\kappa} + \Gamma_{\rho\kappa}^{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\kappa}\Gamma_{\mu\kappa}^{\rho}. \quad (6)$$

Slijede komponente Riccijevog tenzora:

$$R_{tt} = e^{2\varphi(r)}\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)\left[\varphi(r)'' + \varphi(r)'^2 - \frac{\varphi(r)'}{2r}(b(r)' - \frac{b(r)}{r})\frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} + \frac{2\varphi(r)'}{r}\right], \quad (7)$$

$$R_{rr} = -\varphi(r)'' - \varphi(r)'^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}}\left(\frac{b(r)'}{r} - \frac{b(r)}{r^2}\right)\left[\frac{\varphi(r)'}{2} + \frac{1}{r}\right], \quad (8)$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\frac{b(r)}{r} + b(r)'\right) + \varphi(r)'(b(r) - r), \quad (9)$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\vartheta\vartheta} \sin^2\vartheta. \quad (10)$$

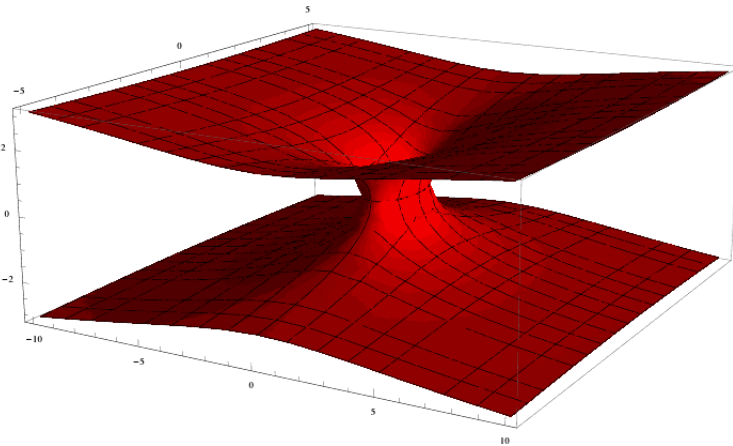
Potreban nam je Riccijev skalar koji je definiran na sljedeći način:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (11)$$

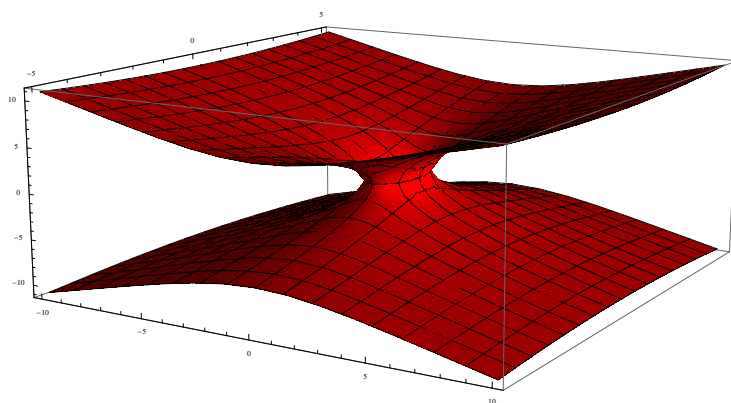
pa slijedi:

$$R = -\frac{2}{r}\left[\left(\varphi(r)''r^2 + 2\varphi(r)'^2r^2\right)\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - \frac{\varphi(r)'}{2}(b(r)'r - b(r)) - \varphi(r)'^2r^2\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + 2\varphi(r)'r\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - r\left(\frac{b(r)'}{r} - \frac{b(r)}{r^2}\right) - \frac{b(r)}{r}\right]. \quad (12)$$

Na slikama 2. i 3. prikazujemo dva primjera geometrija crvotočina koje ćemo istraživati u gravitaciji tipa $f(R)$.



Slika 2: Crvotočina $b(r) = \frac{r_0}{r}$



Slika 3: Crvotočina $b(r) = \sqrt{\frac{r}{r_0}}$

3 Energijski uvjeti

U rješavanju jednadžbi moguća su dva pristupa: iz Einsteinovih diferencijalnih jednadžbi uz prisutnost materije $T^{\mu\nu}$ (tenzor energije i impulsa) izračunaju se komponente metrike $g_{\mu\nu}$, ili se iz zadane metrike $g_{\mu\nu}$ izračuna materija koja podržava njezin odabir. No bez obzira na valjanost takve procedure materija mora ipak zadovoljiti neke fizikalne uvjete poznate iz iskustva. Takve zahtjeve na materiju nazivamo energijskim uvjetima. U ovom radu riječ je o tenzoru energije-impulsa za anizotropni sfernosimetrični idealni fluid koji je oblika [15]:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_t \end{pmatrix}$$

gdje je ρ gustoća energije, p_r radijalni tlak, a p_t transverzalna komponenta tlaka. Sferna simetrija zahtijeva jednakost dviju neradijalnih komponenti tenzora energije i impulsa. Energijske uvjete koje možemo zahtijevati za takav tenzor jesu [8]:

1. Null energijski uvjet (NEC)

Za bilo koji vektor sa svojstvom $k_\mu k^\mu = 0$,

$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (13)$$

Slijedi da za tenzor energije-impulsa anizotropnog sfernosimetričnog idealnog fluida vrijedi:

$$\forall i, \rho + p_i \geq 0. \quad (14)$$

2. Slabi energijski uvjet (WEC)

Za bilo koji vektor sa svojstvom $U_\mu U^\mu < 0$,

$$T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \geq 0. \quad (15)$$

Fizikalno gledano $T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$ je gustoća energije mjerena od strane bilo kojeg promatrača koji se giba sporije od brzine svjetlosti s četvero-brzinom U^μ , u terminima tenzora energije-impulsa anizotropnog sfernosimetričnog idealnog fluida imamo:

$$\rho \geq 0 \quad \forall i, \rho + p_i \geq 0. \quad (16)$$

3. Jaki energijski uvjet (SEC)

Za bilo koji vektor sa svojstvom $U_\mu U^\mu < 0$ vrijedi nejednakost,

$$(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu}) U^\mu U^\nu \geq 0. \quad (17)$$

Gdje je T trag tenzora energije-impulsa. Za tenzor energije-impulsa anizotropnog sfernosimetričnog idealnog fluida vrijedi,

$$\forall i, \rho + p_i \geq 0, \rho + \sum p_i \geq 0. \quad (18)$$

Za geometriju crvotočine ovi energijski uvjeti bivaju svi narušeni [2], međutim to nije slučaj za modificiranu teoriju gravitacije tipa $f(R)$.

4 Crvotočine u gravitaciji tipa $f(R)$

U ovom radu crvotočine nećemo analizirati polazeći od standardne opće teorije relativnosti, već u kontekstu tzv. gravitacije tipa $f(R)$. To pitanje je zanimljivo iz potrebe da se modeli koji su poznati iz opće teorije relativnosti prouče u kontekstu alternativne teorije gravitacije radi usporedbe rezultata. No, to pitanje je također zanimljivo i zbog mogućnosti da nova teorija izbjegne narušavanje slabog energijskog uvjeta (WEC) koje prati crvotočine u općoj teoriji relativnosti. Odnosno, moguće je da upravo modifikacije jednadžbi ostvare preduvjet za nastanak crvotočine koja bi bila u skladu s uvjetom kojega zadovoljava poznata materija.

Kod gravitacije tipa $f(R)$ riječ je o skupu modela na čijem se istraživanju veoma intenzivno radi nakon otkrića ubrzane ekspanzije svemira 1998. godine, a koje je uslijedilo nakon proučavanja supernova tipa Ia [9] [10]. Ti modeli predstavljaju alternativnu teoriju standardnom kozmološkom modelu i njegovim pretpostavkama. Osnovne pretpostavke standardnog kozmološkog modela su točnost jednadžbi opće teorije relativnosti, opis tvari pomoću idealnog fluida i uvođenje tzv. kozmološke konstante, odnosno tamne energije, kako bi se dodatnim matematičkim članom objasnila ubrzana ekspanzija (gravitacijsko privlačenje mase u svemiru samo po sebi bi vodilo na usporenu ekspanziju svemira) [11]. Jedan je od glavnih konceptualnih problema tog pristupa, odnosno standardnog kozmološkog modela u cjelini, što kozmološka konstanta predstavlja član koji je dodan naknadno bez zadovoljavajuće teorijske motivacije, isključivo u cilju podudaranja teorije s eksperimentalnim podacima. Pokušaji razjašnjavanja predloženog mehanizma na temelju kvantne teorije polje doveli su do poznatog nepodudaranja od 120 redova veličina [12]. To pitanje postaje utoliko problematičnije ako uzmemo u obzir udjele sastava svemira prema standardnom kozmološkom modelu : 4% odgovara običnoj barionskoj materiji, 20% tamnoj materiji, te 76% tamnoj energiji [13]. Dakle 96% građe svemira je postulirano samo na temelju nepodudaranja ranije teorije, koja je uključivala samo barionsku tvar, s rezultatima opažanja. Gravitacija tipa $f(R)$ nastoji objasniti ubranu ekspanziju svemira bez uvođenja ikakvih dodatnih članova, mijenjajući jednadžbe gibanja za gravitaciju. To se postiže modificiranjem integrala djelovanja za gravitacijsko polje, nad kojim se onda provodi varijacijski postupak i izvode modificirane jednadžbe teorije. Standardni integral djelovanja za doprinos gravitacijskog polja u općoj teoriji relativnosti ima oblik [14] :

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (19)$$

pri čemu je R Riccijev skalar, $k = 8\pi G$, a g je determinanta metričkog tenzora. U gravitaciji tipa $f(R)$ taj se integral djelovanja modificira na sljedeći način :

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x, \quad (20)$$

pri čemu je $f(R)$ neka proizvoljna funkcija Riccijevog skalara. Vidljivo je da navedena modifikacija ima prednost što je općenitija, odnosno što uključuje standarni oblik kao svoj posebni slučaj, no s druge strane u praksi on dovodi do znatnog kompliciranja jednadžbi. Provedbom varijacijskog postupka ¹ polazeći od jednadžbe (20), te dodajući integral djelovanja doprinosa materije, koji ostaje jednak kao i u općoj teoriji relativnosti, dobivamo sljedeće jednadžbe:

$$R_{\mu\nu} \frac{df(R)}{dR} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma) \frac{df}{dR} = k T_{\mu\nu}. \quad (21)$$

Uvodimo oznake $f_R \equiv df/dR$ i ekvivalentno za više derivacije po Riccijevom skalaru, te promatramo čemu je

¹vidjeti dodatak

jednako djelovanje kovarijantnih derivacija i kovarijantnog d'Alembertovog operatora $\nabla^\sigma \nabla_\sigma$ na $f(R)$:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f_R = \nabla_\mu (f_{RR} \nabla_\nu R) = f_{RRR} (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R) + f_{RR} \nabla_\mu \nabla_\nu R \quad (22)$$

$$\nabla^\sigma \nabla_\sigma f_R = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu f_R = g^{\mu\nu} f_{RRR} (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R) + f_{RR} \nabla^\sigma \nabla_\sigma R. \quad (23)$$

Tako dobivamo :

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} + 3 f_{RRR} (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R) - f_{RR} \nabla_\mu \nabla_\nu R + g_{\mu\nu} f_{RR} \nabla^\sigma \nabla_\sigma R = k T_{\mu\nu}. \quad (24)$$

Kontrahiranjem čitave jednadžbe s metričkim tenzorom dobivamo jednadžbu:

$$\nabla^\sigma \nabla_\sigma R = \frac{1}{3 f_{RR}} \{ kT - f_{RR} R + 2f - 3 f_{RRR} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R) \}. \quad (25)$$

Sada želimo odrediti jednadžbu za Einsteinov tenzor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ koja će nam biti od ključne važnosti u našoj analizi crvotočina. U tu svrhu (24) Riccijevog tenzora izražavamo preko Einsteinovog tenzora i Riccijevog skalara prema navedenoj jednadžbi i dobivamo:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f_R} (k T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f_R R g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma f_R). \quad (26)$$

Ponovno koristimo izraze (22) i (23), te kovarijantni d'Alembertov operator Riccijevog skalara izražavamo preko jednadžbe (25). Tako dobivamo jednadžbu za Einsteinov tenzor:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f_R} \{ f_{RR} \nabla_\mu \nabla_\nu R + f_{RRR} (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R) - \frac{g_{\mu\nu}}{6} (R f_R + f + 2kT) + T_{\mu\nu} \}. \quad (27)$$

Na temelju posljednje jednadžbe za modificirani Einsteinov tenzor pristupit ćemo analizi crvotočine.

Prilikom proučavanja crvotočina u gravitaciji tipa $f(R)$ uobičajeno je zbog znatnog pojednostavljivanja jednadžbi postaviti dodatan uvjet da je funkcija crvenog pomaka $\varphi(r)$ konstantna [15] [16]. Takav uvjet na $\varphi(r)$, koji se bez dodatnih opravdanja pretpostavlja unaprijed, nije opravdan, te da se temeljni parametri crvotočine ne bi na ovakav način smjeli umjetno ograničavati. Kao što je vidljivo u poglavlju 5.3.4 karakter $\varphi(r)$ uvelike utječe na oblik rješenja i ne može se zanemariti. Također, budući da o njemu ovisi rješenje modificiranih Einsteinovih jednadžbi crvotočine, o $\varphi(r)$ ovisi i zadovoljenje slabog energijskog uvjeta u određenom slučaju, o čemu će više riječi biti kasnije.

Izrazi za Einsteinove tenzore crvotočine, kao i za Christoffelove simbole i Riccijev skalar, koji su izvedeni ranije, karakteriziraju samo metriku problema čiji se opis nije promijenio, te oni stoga ostaju jednaki. Uvrštavajući ih u (27) dobivamo četiri vezane diferencijalne jednadžbe crvotočine u gravitaciji tipa $f(R)$, pri čemu su zbog sferne simetrije problema jednadžbe za kutne doprinose jednake. Materiju opisujemo tenzorom energije-impulsa anizotropnog idealnog fluida :

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p_t) U_\mu U_\nu + p_t g_{\mu\nu} + (p_r - p_t) \chi_\mu \chi_\nu, \quad (28)$$

gdje je U četverovektor brzine, ρ gustoća energije, p_t i p_r tlakovi, a $\chi^\mu = \sqrt{1 - b(r)/r} \delta_r^\mu$. Moramo odrediti kovarijantne derivacije Riccijevog skalara u odgovarajućim jednadžbama, na temelju osnovne definicije kovarijantne derivacije:

$$\nabla_t \nabla_t R(r) = \nabla_t \partial_t R(r) = \partial_t \partial_t R(r) - \Gamma_{tt}^\lambda \partial_\lambda R(r) = -\Gamma_{tt}^r \partial_r R(r), \quad (29)$$

te ekvivalentno za ostale jednadžbe:

$$\nabla_r \nabla_r R(r) = R''(r) - \Gamma_{rr}^r \partial_r R(r) \quad (30)$$

$$\nabla_\theta \nabla_\theta R(r) = -\Gamma_{\theta\theta}^r \partial_r R(r). \quad (31)$$

Uvrštavajući navedene izraze, kao i komponente Einsteinovog tenzora i Christoffelovih simbola u jednadžbe (27) uz odabir $k = 1$, te sređivanjem izraza, konačno dolazimo do modificiranih Einsteinovih jednadžbi za metriku crvotočine :

$$\frac{b'(r)f_R}{r^2} = -f_{RR}(1 - \frac{b(r)}{r})R'(r)\varphi'(r) + \frac{1}{6}(R(r)f_R + f) + \frac{1}{3}(2\rho + 2p_t + p_r), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{-b(r) + 2r^2\varphi'(r)(1 - b(r)/r)}{r^3} f_R &= f_{RR}[R''(r)(1 - \frac{b(r)}{r}) + \frac{R'(r)}{2}(\frac{b(r)}{r^2} - \frac{b'(r)}{r})] \\ &+ f_{RRR}R'(r)^2(1 - \frac{b(r)}{r}) - \frac{1}{6}(R(r)f_R + f) + \frac{1}{3}(\rho + 2p_r - 2p_t), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} (1 - \frac{b(r)}{r})(\varphi''(r) - \frac{b'(r)r - b}{2r(r-b)}\varphi'(r) + \varphi'(r)^2 + \frac{\varphi'(r)}{r} - \frac{b'(r)r - b}{2r(r-b)}f_R) \\ = -\frac{f_{RR}}{r}(1 - \frac{b(r)}{r})R'(r) - \frac{1}{6}(R(r)f_R + f) + \frac{1}{3}(\rho - p_r + p_t). \end{aligned} \quad (34)$$

Primijetimo da se u $R(r)$ zapravo nalaze $\varphi(r)$ i $b(r)$ u skladu s izrazom (12). Time jednadžbe (32 - 34) predstavljaju nelinearne vezane diferencijalne jednadžbe četvrtog stupnja za $\varphi(r)$ i $b(r)$. Međutim, za komponente tenzora energije-impulsa jednadžbe (32 - 34) predstavljaju sustav algebarskih jednadžbi koje, usprkos svojoj složenosti, imaju analitičko rješenje. U našem radu u određenim modelima gravitacije tipa $f(R)$ promatramo rješenja za komponente tenzora energije i impulsa istražujući različite funkcije koje opisuju parametar crvenog pomaka φ i oblika crvotočine $b(r)$. To je zapravo jednako odgovoru na problem - polazeći od toga kako crvotočina mora izgledati odrediti od kakve materije mora biti izgrađena.

U ranijim radovima koji se bave crvotočinama u gravitaciji tipa $f(R)$ [15] [16] funkcija $f(R)$ se nerijetko tretira kao nepoznanica za koju se rješava diferencijalna jednadžba, odnosno traži se takav njezin oblik koji bi zadovoljavao određene uvjete, ili se pak za nju uzimaju neke jednostavne proizvoljne funkcije, prilagođene problemu koji se promatra. Takav pristup nije zadovoljavajući jer konkretni oblik $f(R)$ predstavlja karakteristiku same teorije i ne može se koristiti kao arbitraran parametar u analizi konkretnog problema unutar teorije. To vrijedi utoliko više ukoliko se radi o analizi crvotočine, daleko od bilo kakve mogućnosti eksperimentalne provjere na temelju koje bi se eventualno mogli postaviti neki uvjeti na $f(R)$. Stoga smatramo da se u odnosu na problem crvotočine oblik $f(R)$ mora zadati nezavisno i unaprijed, te na način da obećava podudaranje s eksperimentalnim podacima na razini sunčevog sustava i kozmološke evolucije. Stoga crvotočine promatramo u nekoliko $f(R)$ modela koje daju zadovoljavajuća rješenja na standardne testove koje mora ispunjavati alternativna teorija gravitacije [17] [18] [19] [20]:

- MJW model [21]

$$f(R) = R - \beta R_* \ln(1 + \frac{R}{R_*}), \quad (35)$$

pri čemu su β i R_* slobodni pozitivni parametri teorije

- model Starobinskog [22]

$$f(R) = R + \lambda R_* [(1 + (\frac{R^2}{R_*^2})^{-q} - 1)], \quad (36)$$

kao i u [17] za parametre odabiremo vrijednosti $\lambda = 1$ i $q = 2$, a R_* variramo oko vrijednosti 4.17 (radimo u jedinicama u kojima je Hubbleov parametar $H_0 = 1$)

- Eksponencijalna gravitacija [23]

$$f(R) = R - R_*[\tilde{R} - \lambda(1 - e^{-\tilde{R}})], \quad (37)$$

$\tilde{R} = R/R_*$, a ostali parametri su ekvivalentni onima u ranije navedenim modelima

Posebno će nas zanimati zadovoljavanje slabog energijskog uvjeta u konkretnim $f(R)$ modelima, te za određeni izbor funkcija $\varphi(r)$ i $b(r)$. Potrebno je posebno istaknuti kako to pitanje nije više toliko jednostavno kao u općoj teoriji relativnosti gdje je $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$ iz čega $G_{\mu\nu}k^\mu k^\nu < 0$ direktno vodi na narušavanje slabog energijskog uvjeta, odnosno na : $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu < 0$; pri čemu su k^μ, k^ν proizvoljni vektori sa svojstvom $k^\mu k_\mu < 0$. Uvjet $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu < 0$ se može ekvivalentno napisati u obliku $\rho < 0$ i $\rho + p_r < 0$, uzimajući u obzir (28). U modelima tipa $f(R)$ izraz za Einsteinov tenzor se modificira i ima oblik (27). Sada dodatni članovi koji se pojavljuju omogućavaju da bude zadovoljeno $G_{\mu\nu}k^\mu k^\nu < 0$, ali i da bude očuvan slabi energijski uvjet : $\rho \geq 0$ i $\rho + p_r \geq 0$. Takva rješenja predstavljaju crvotočinu za čije postojanje nije potreban nikakav egzotični materijal, već je ona ostvarena upravo na temelju članova u odnosu na koje se gravitacija tipa $f(R)$ razlikuje od $f(R) = R$, tj. opće teorije relativnosti. Naravno, navedeni uvjeti neće biti zadovoljeni općenito, već samo za određeni izbor funkcija $\varphi(r)$ i $b(r)$ u pojedinim varijantama $f(R)$ modela.

5 Rješenja i diskusija rezultata

U ovom, glavnom poglavlju rada istražujemo tri relevantne grupe modela koji uz odgovarajući izbor parametara i $\varphi(r)$ (crveni pomak), $b(r)$ (funkcija oblika) vode na mogućnost postajanja crvotočine bez egzotične materije.

5.1 MJW model

Za MJW model uzete su sljedeće geometrijske konfiguracije crvotočine:

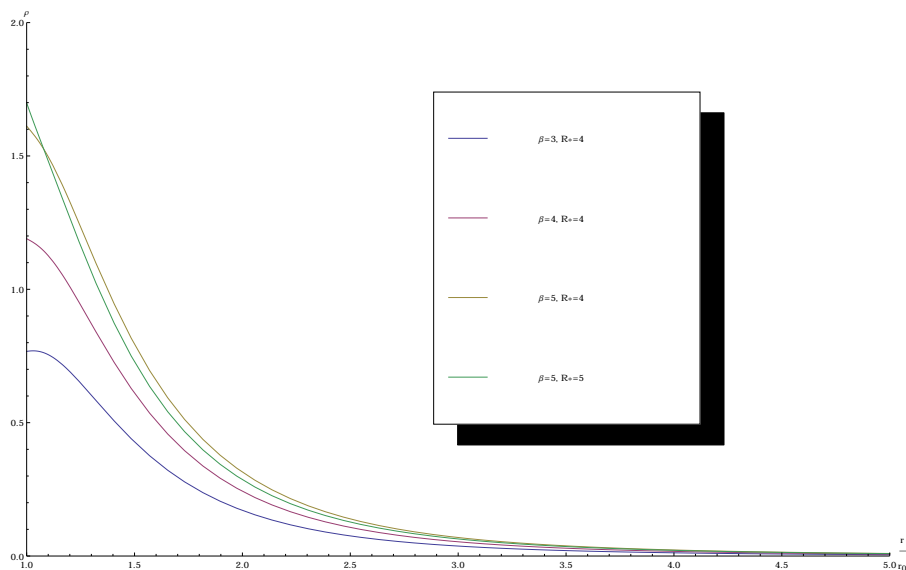
1. $b(r) = \sqrt{r_0/r}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$
2. $b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$
3. $b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi(r) = \sqrt{r_0/r}$

Funkcija Riccijevog skalara u MJW modelu dana je:

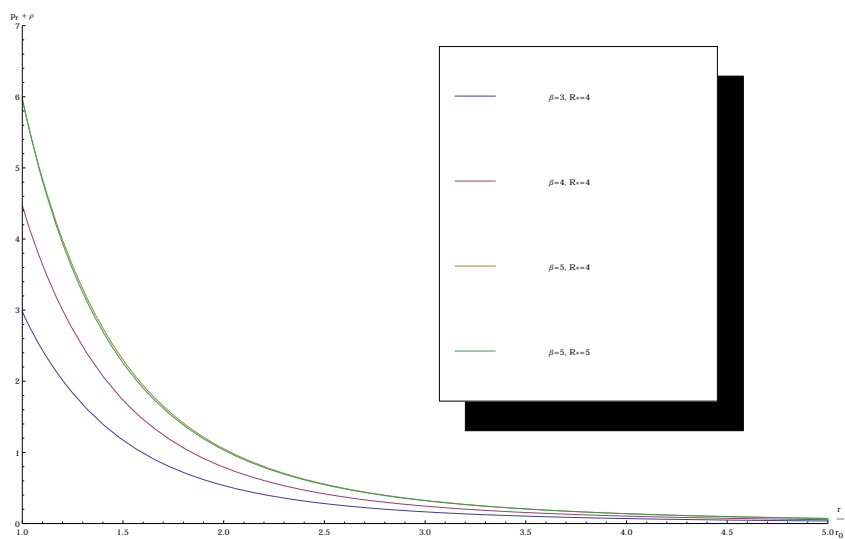
$$f(R) = R - \beta R_* \ln\left(1 + \frac{R}{R_*}\right), \quad (38)$$

gdje su, kao što je navedeno, β i R_* slobodni parametri teorije. Uzete su sljedeće vrijednosti za navedene parametre $\beta = 3$, $\beta = 4$, $\beta = 5$, i $R_* = 4$, $R_* = 5$, te je pokazano ponašanje gustoće (Slika 4), (Slika 6), (Slika 8), te slabi energijski uvjet (Slika 5), (Slika 7), (Slika 9) za kombinacije tih parametara. Iz dobivenih rezultata vidljivo je da za sve tri konfiguracije crvotočine, te za sve odabrane parametre teorije, dobivamo gustoću energije pozitivnu po cijelom prostoru (Slika 4), (Slika 6), (Slika 8), te zadovoljenje je slabog energijskog uvjeta (WEC) (Slika 5), (Slika 7), (Slika 9). Zaključujemo da MJW model podupire egzistenciju odabranih crvotočina za navedene slobodne parametre teorije.

5.1.1 $b(r) = \sqrt{r_0/r}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$

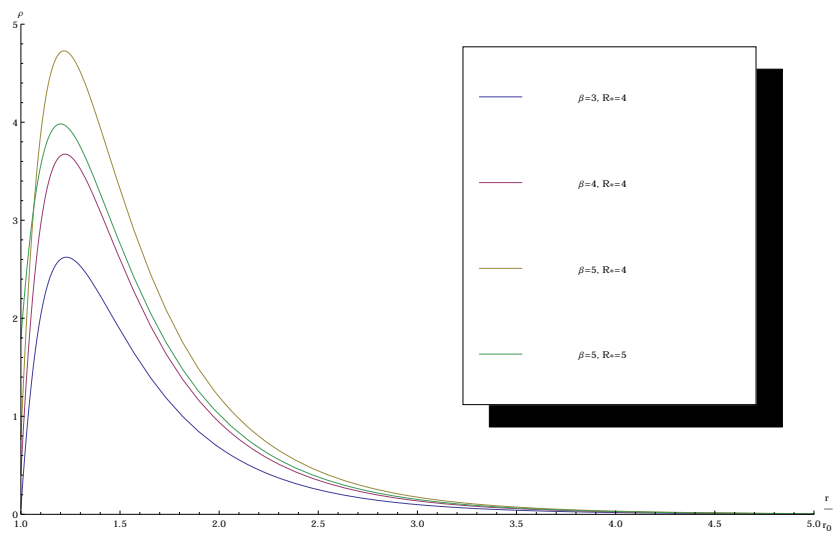


Slika 4: Ponašanje gustoće energije (prvi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \sqrt{r_0/r}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$

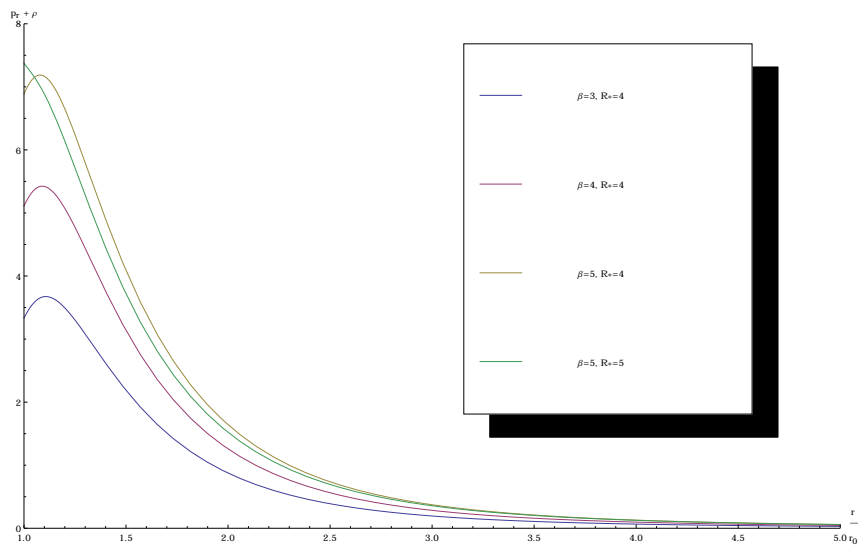


Slika 5: Ponašanje $\rho + p_r$ (drugi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \sqrt{r_0/r}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$

5.1.2 $b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$

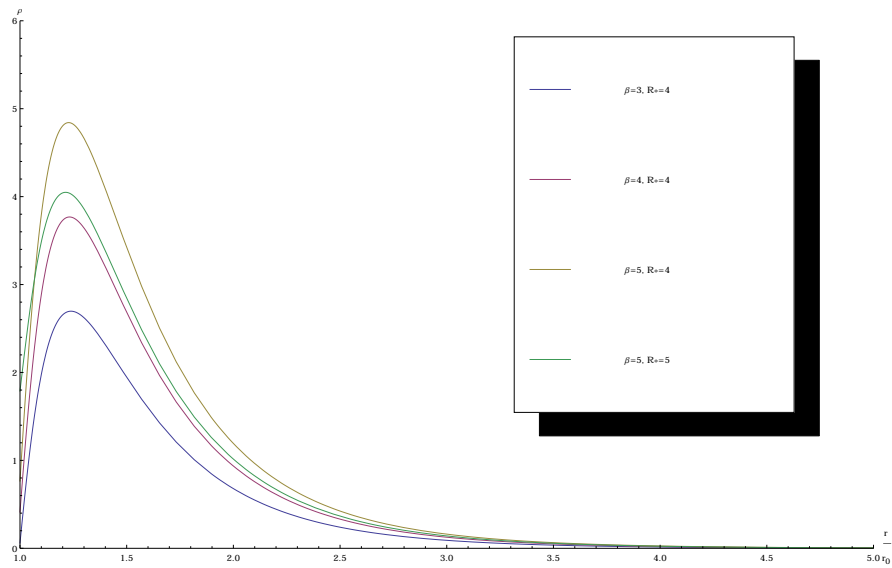


Slika 6: Ponašanje gustoće energije (prvi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$

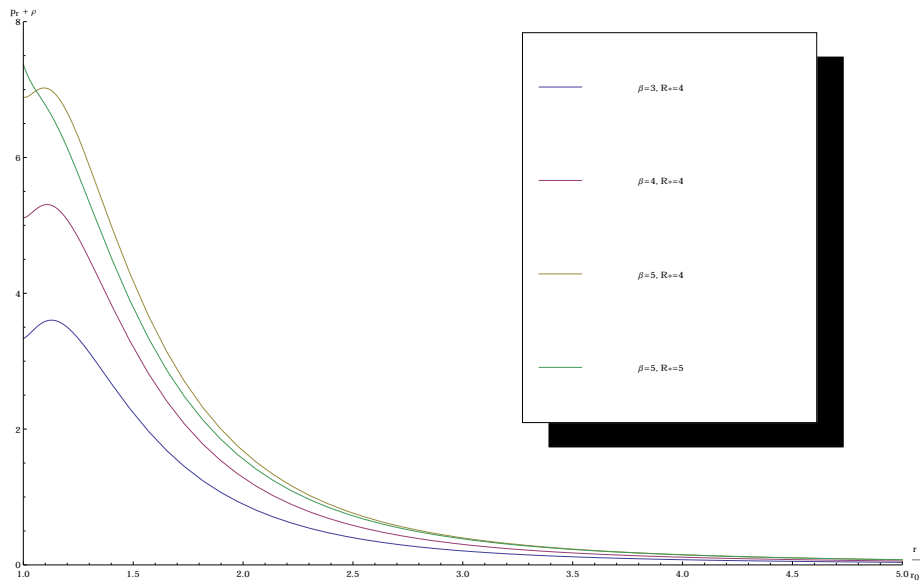


Slika 7: Ponašanje $\rho + p_r$ (drugi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$

5.1.3 $b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}, \varphi = \sqrt{r_0/r}$



Slika 8: Ponašanje gustoće energije (prvi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}, \varphi(r) = \sqrt{r_0/r}$



Slika 9: Ponašanje $\rho + p_r$ (drugi dio Slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}, \varphi = \sqrt{r_0/r}$

5.2 Model Starobinskog

Za model Starobinskog uzete su crvotočine oblika:

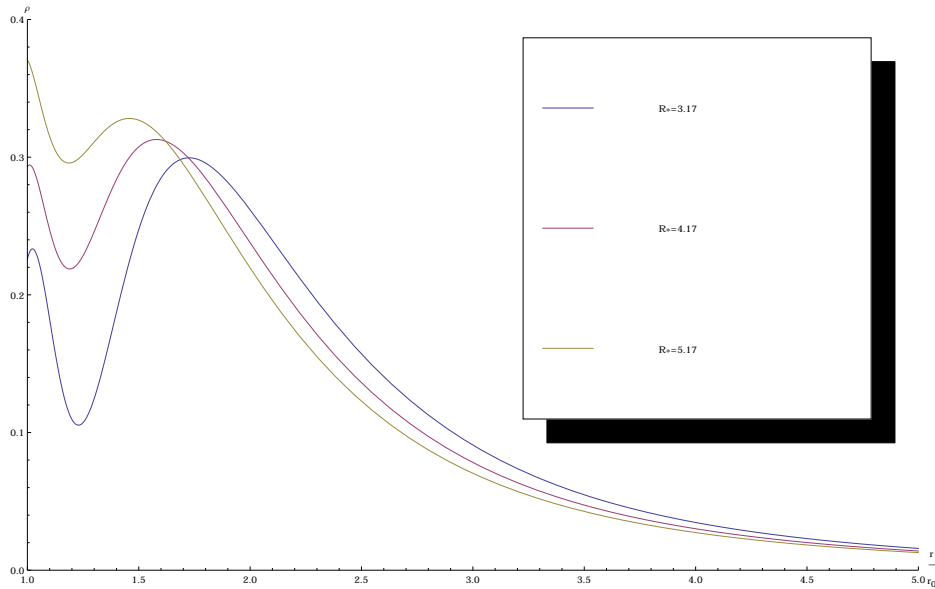
1. $b(r) = \ln(r/r_0) + 1$, $\varphi(r) = \sqrt{r_0/r}$
2. $b(r) = \ln(r/r_0) + 1$, $\varphi(r) = (r_0/r)^{1/4}$
3. $b(r) = \sqrt{r/r_0}$, $\varphi(r) = \ln(\sqrt{r_0/r} + 1)$

Funkcija Riccijevog skalara u modelu Starobinskog ima oblik:

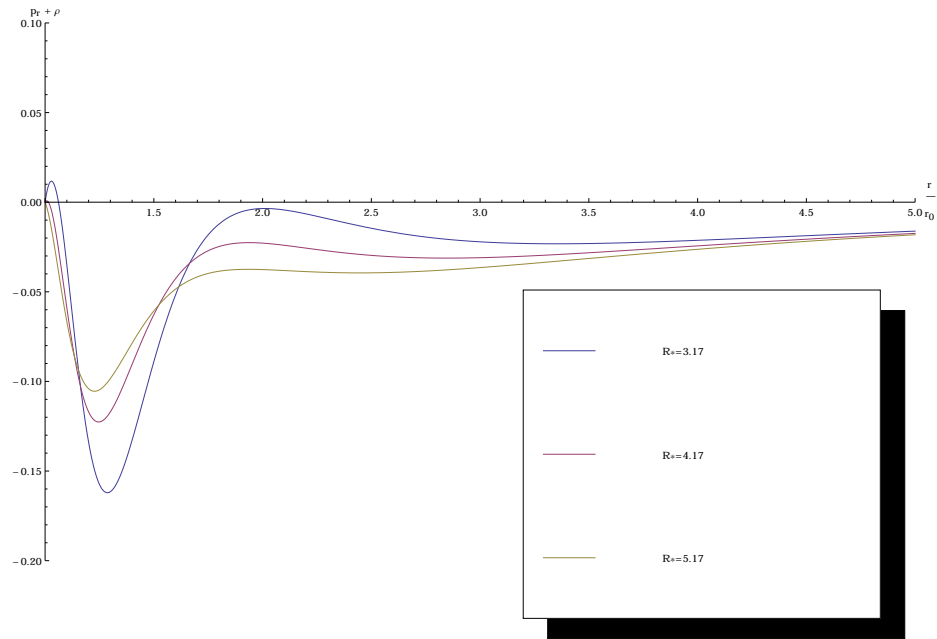
$$f(R) = R + \lambda R_* \left[\left(1 + \left(\frac{R^2}{R_*^2} \right)^{-q} - 1 \right) \right]. \quad (39)$$

Ovdje su kao i u [17] odabrane vrijednosti za parametre $\lambda = 1$ i $q = 2$, a R_* variramo oko vrijednosti 4.17 (radimo u jedinicama u kojima je Hubbleov parametar $H_0 = 1$). Konkretno, uzete su vrijednosti $R_* = 3.17$, $R_* = 4.17$ i $R_* = 5.17$. Na slikama (Slika 10), (Slika 12), (Slika 14) pokazano je ponašanje gustoće energije za razne vrijednosti parametra R_* . Vidljivo je kako je gustoća energije pozitivna po cijelom prostoru. Slučaj u kojem promatramo slabi energijski uvjet (Slika 11), (Slika 13), (Slika 15) pokazuje da taj uvjet nije zadovoljen za takve crvotočine uz taj izbor slobodnih parametara teorije i sve funkcije oblika i crvenog pomaka koje smo promatrali. Ovaj model i dalje zahtijeva pretpostavku o egzotičnoj materiji koja bi podupirala postojanje crvotočine ili jednostavno treba odbaciti egzistenciju tako odabranih crvotočina za model Starobinskog, osim eventualno za vrlo specifičan izbor funkcija oblika i crvenog pomaka, no koje nismo razmatrali.

5.2.1 $b(r) = \ln(r/r_0) + 1$, $\varphi = \sqrt{r_0/r}$

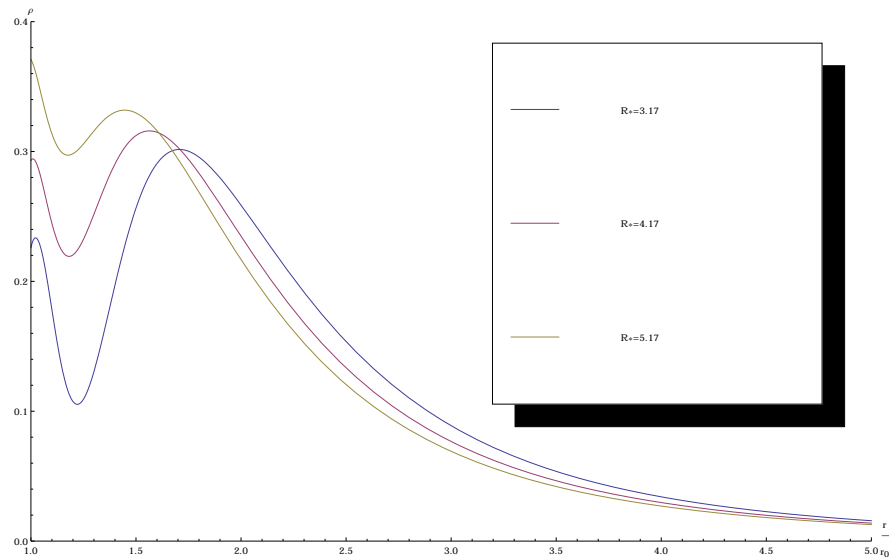


Slika 10: Ponašanje gustoće energije (prvi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \ln(r/r_0) + 1$, $\varphi(r) = \sqrt{r_0/r}$

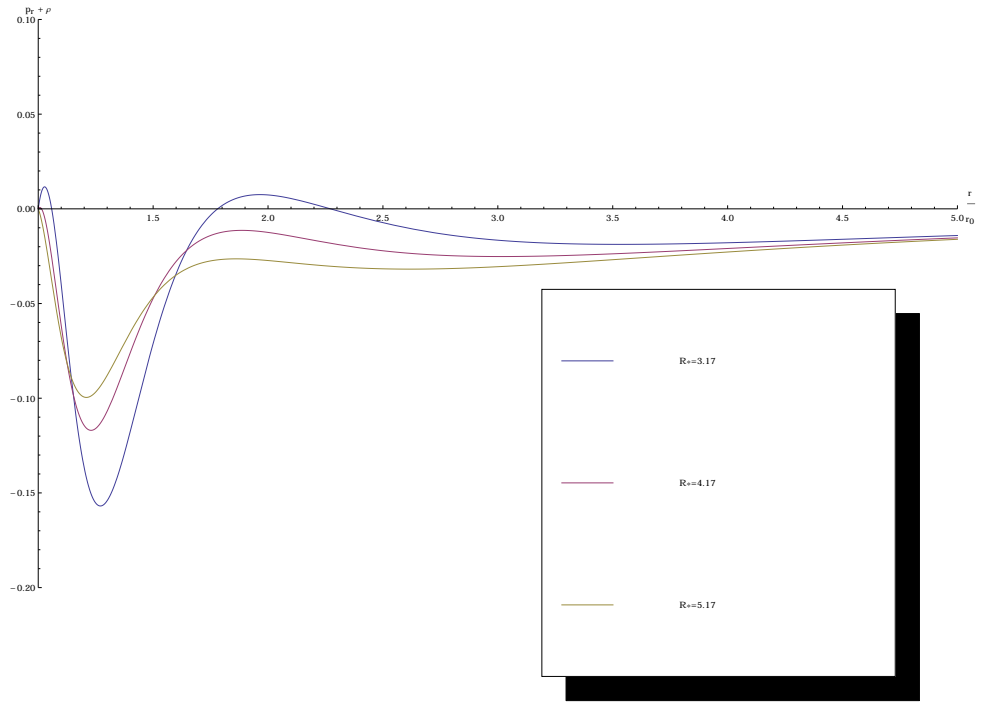


Slika 11: Ponašanje $\rho + p_r$ (drugi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \ln(r/r_0) + 1$, $\varphi(r) = \sqrt{r_0/r}$

5.2.2 $b(r) = \ln(r/r_0) + 1$, $\varphi = (r_0/r)^{1/4}$

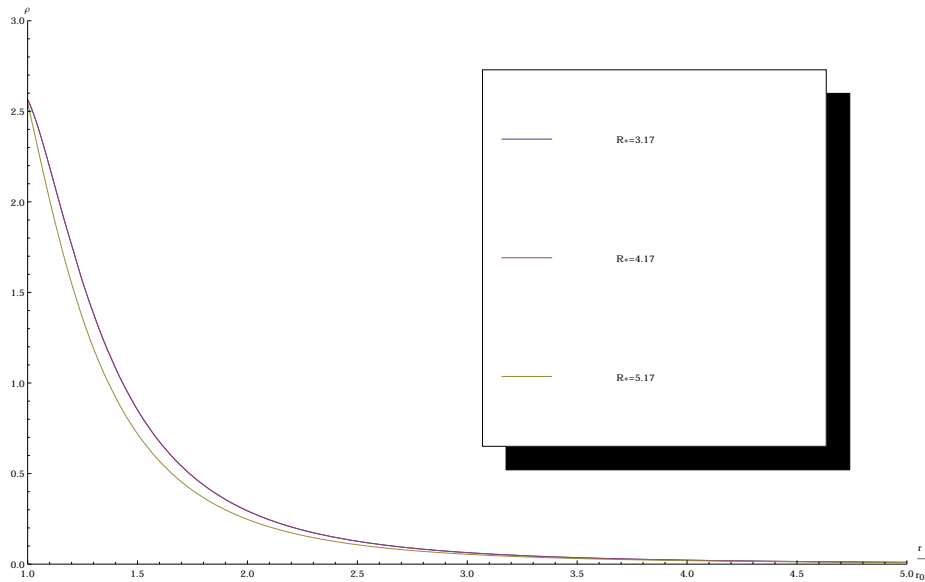


Slika 12: Ponašanje gustoće energije (prvi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \ln(r/r_0) + 1$, $\varphi(r) = (r_0/r)^{1/4}$

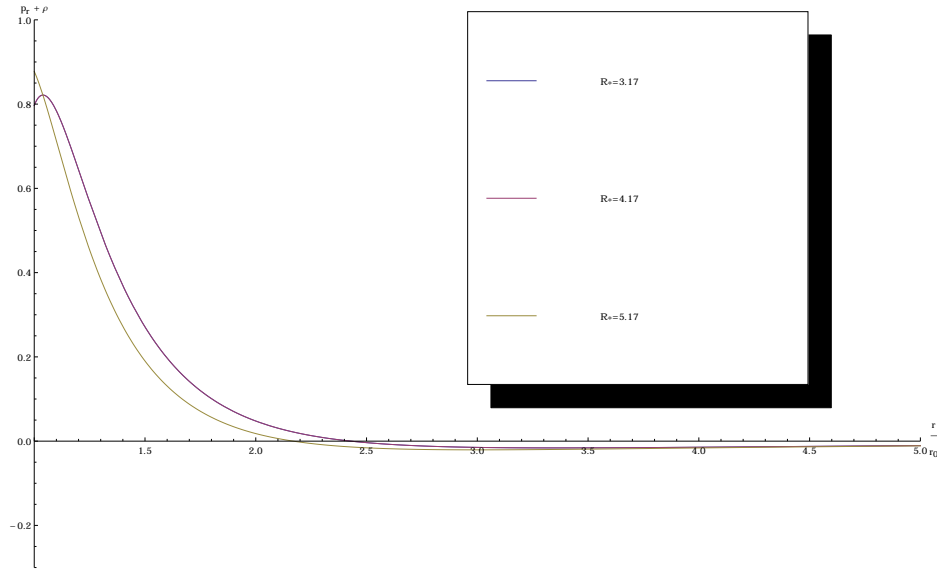


Slika 13: Ponašanje $\rho + p_r$ (drugi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \ln(r/r_0) + 1$, $\varphi(r) = (r_0/r)^{1/4}$

5.2.3 $b(r) = \sqrt{r/r_0}$, $\varphi = \ln(\sqrt{r_0/r} + 1)$



Slika 14: Ponašanje gustoće energije (prvi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \sqrt{r/r_0}$, $\varphi(r) = \ln(\sqrt{r_0/r} + 1)$



Slika 15: Ponašanje $\rho + p_r$ (drugi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \sqrt{r/r_0}$, $\varphi(r) = \ln(\sqrt{r_0/r} + 1)$

5.3 Model Eksponecijalne gravitacije

U modelu Eksponecijalne gravitacije uzete su crvotočine oblika:

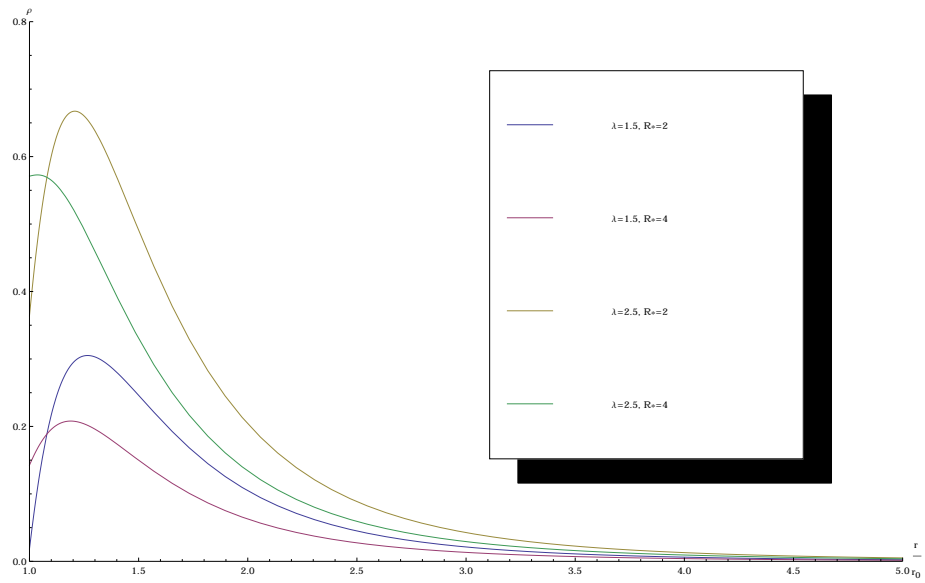
1. $b(r) = \sqrt{r_0/r}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$
2. $b(r) = e^{1 - \frac{r}{r_0}}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$
3. $b(r) = \frac{1}{2}e^{1 - \frac{r}{r_0}}$, $\varphi(r) = \frac{1}{2}\sqrt{r/r_0}$

Za model Eksponecijalne gravitacije funkcija Riccijevog skalara dana je:

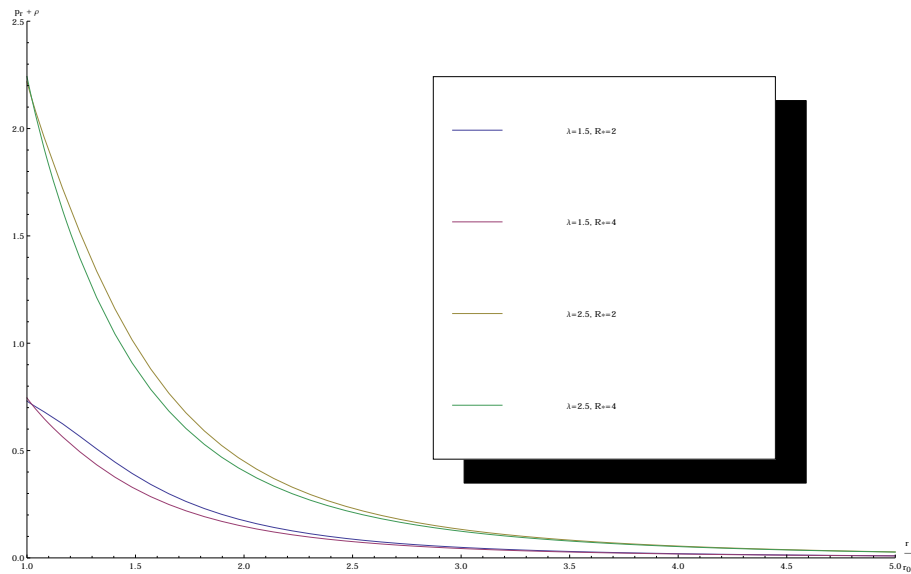
$$f(R) = R - R_*[\tilde{R} - \lambda(1 - e^{-\tilde{R}})], \quad (40)$$

gdje je $\tilde{R} = R/R_*$, a λ i R_* su slobodni parametri teorije. Promatrali smo ponašanje gustoće energije i slabi energijski uvjet za kombinacije parametara $\lambda = 1.5$, $\lambda = 2.5$, $R_* = 2$, $R_* = 4$. Rezultati su zanimljivi s obzirom da za prvu crvotočinu tipa $b(r) = \sqrt{r_0/r}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$ i treću crvotočinu tipa $b(r) = \frac{1}{2}e^{1 - \frac{r}{r_0}}$, $\varphi(r) = \frac{1}{2}\sqrt{r/r_0}$ dobivamo zadovoljenje oba uvjeta, dakle gustoća energije i slabi energijski uvjet je zadovoljen za sve odabrane parametre teorije (Slika 16), (Slika 17), (Slika 20), (Slika 21) dok u slučaju druge crvotočine $b(r) = e^{1 - \frac{r}{r_0}}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$ moguća je samo u slučaju kad je $\lambda = 2.5$ i $R_* = 4$ (Slika 18), iako je za sve ostale parametre $\rho + p_r > 0$ zadovoljen (Slika 19).

5.3.1 $b(r) = \sqrt{r_0/r}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$

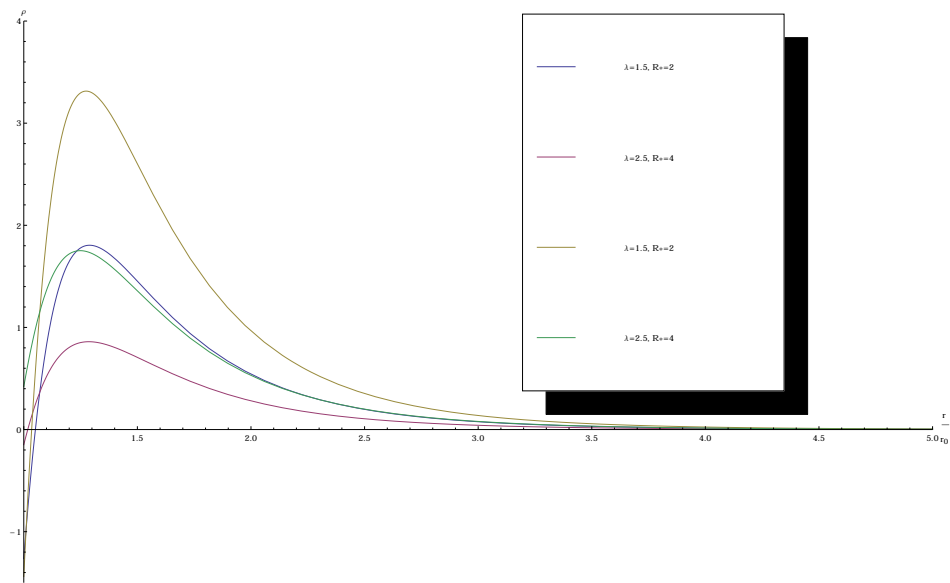


Slika 16: Ponašanje gustoće energije (prvi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \sqrt{r_0/r}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$

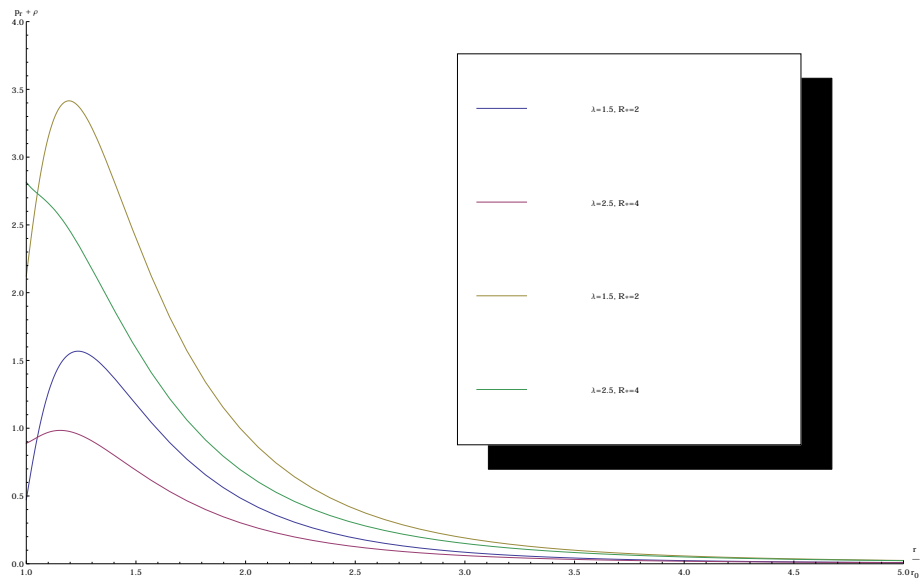


Slika 17: Ponašanje $\rho + p_r$ (drugi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \sqrt{r_0/r}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$

5.3.2 $b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$

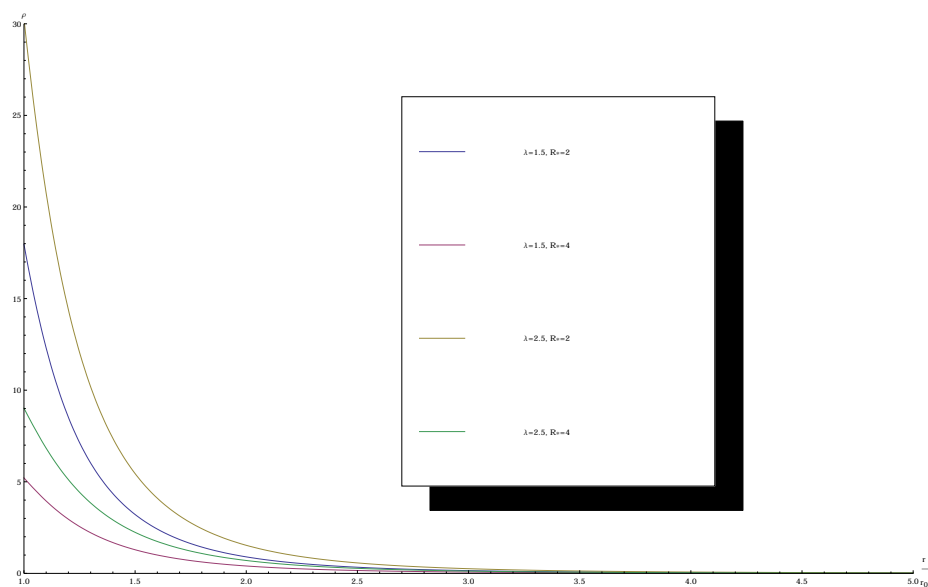


Slika 18: Ponašanje gustoće energije (prvi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$

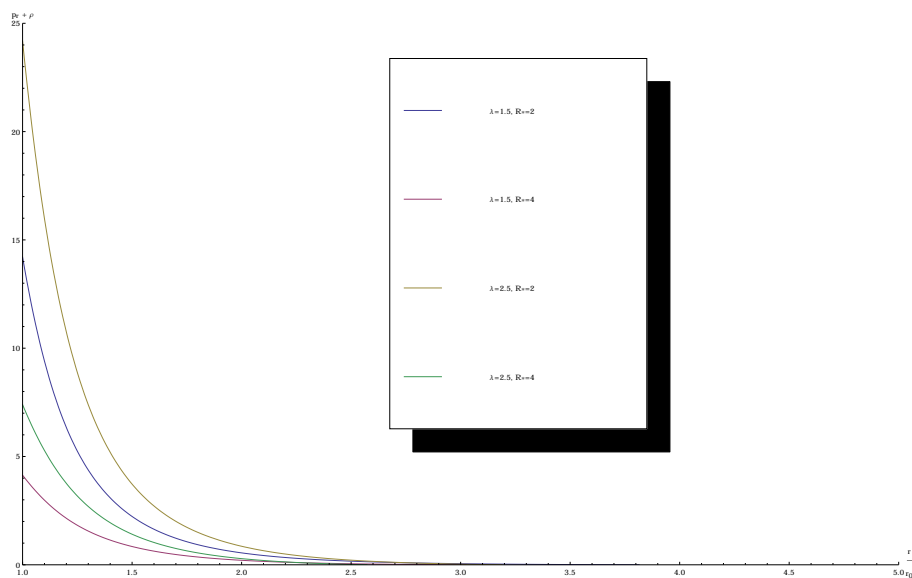


Slika 19: Ponašanje $\rho + p_r$ (drugi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi = \ln(r_0/r + 1)$

5.3.3 $b(r) = \frac{1}{2}e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{r/r_0}$



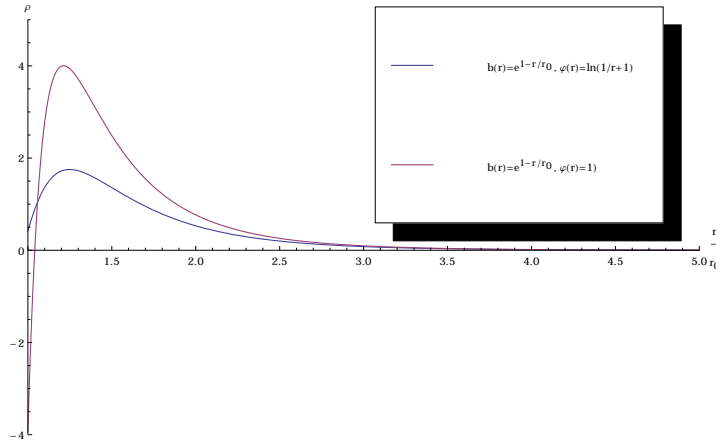
Slika 20: Ponašanje gustoće energije (prvi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \frac{1}{2}e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{r/r_0}$



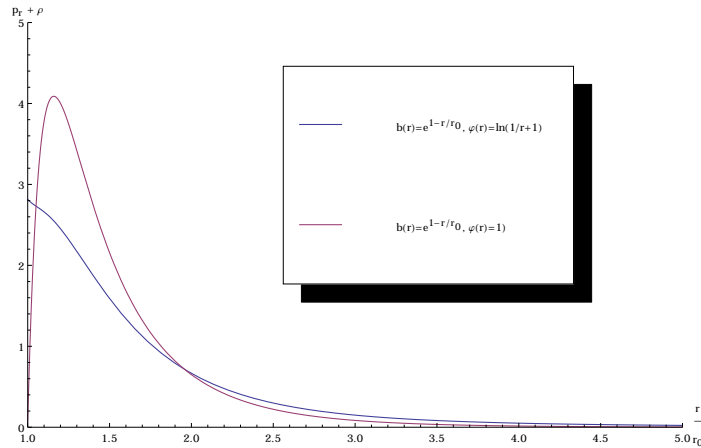
Slika 21: Ponašanje $\rho + p_r$ (drugi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = \frac{1}{2}e^{1-\frac{r}{r_0}}$, $\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{r/r_0}$

5.3.4 Usporedba $\varphi(r) = \text{konstanta}$ i $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$

U modelu eksponencijalne gravitacije možemo prikazati dramatičan utjecaj crvenog pomaka $\varphi(r)$. Naime, uzmemo li crvotočinu geometrije $b(r) = e^{1-r/r_0}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$ dobivamo zadovoljenje slabog energijskog uvjeta, dok uzmemo li crvotočinu tipa $b(r) = e^{1-r/r_0}$, $\varphi(r) = 1$, dakle kada je $\varphi(r)$ konstanta, slabi energijski uvjet nije zadovoljen. Zanimljiv je slučaj u drugom djelu slabog energijskog uvjeta, gdje je očito da se one razlikuju na kvalitativnoj razini. Slike 22. i 23. pokazuju usporedbu tih rezultata.



Slika 22: Ponašanje gustoće energije (prvi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = e^{1-r/r_0}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$ i $b(r) = e^{1-r/r_0}$, $\varphi(r) = 1$



Slika 23: Ponašanje $\rho + p_r$ (drugi dio slabog energijskog uvjeta) u ovisnosti o r/r_0 za $b(r) = e^{1-r/r_0}$, $\varphi(r) = \ln(r_0/r + 1)$ i $b(r) = e^{1-r/r_0}$, $\varphi(r) = 1$

6 Zaključak

Proučavali smo problem ispunjenja slabog energijskog uvjeta kod crvotočina u gravitaciji tipa $f(R)$. Pri tome smo se koncentirali isključivo na modele koji su relevantni u smislu zadovoljavanja standardnih kozmoloških i gravitacijskih testova za alternativnu teoriju gravitacije. Konkretno, radilo se o MJW modelu, modelu Starobinskog, te eksponencijalnoj gravitaciji. Prilikom izvođenja gravitacijskih jednažbi za proučavanje navedenog problema nastojali smo zadržati najveću moguću općenitost i izbjeći neke standardne uvjete na parametre crvotočine. Analiza dobivenih rezultata pokazala je zadovoljavanje Slabog energijskog uvjeta, odnosno mogućnost izgradnje crvotočine bez egzotične materije, za svaki izbor parametara crvotočine u MJW modelu, za dva izbora promatranih parametara i poseban slučaj slobodnog parametra modela u eksponencijalnoj gravitaciji, te niti jedan od razmotrenih izbora parametara u modelu Starobinskog. Kao nastavak ovog rada bilo bi zanimljivo istražiti stabilnost pojedinih rješenja, te rješenja u crvotočinama koje su vremenski ovisne i bez sferne simetrije, budući da predstavljaju rješenja s određenom fenomenološkom težinom.

7 Zahvale

Zahvaljujemo našem mentoru prof. dr. sc. Dubravku Horvatu na predlaganju teme koja je u skladu s našim ukusom i interesima usmjerenim prema fascinirajućim tajnama koje kriju prostor i vrijeme, te građa materije. Uzbudljivi trenuci razmišljanja o konceptualnim pitanjima, primjene matematičkog alata na izvođenje odgovarajućih jednažbi, istraživanja novih modela i njihovih posljedica u neistraženim režimima, predstavljaju nagradu koja je dovoljna sama po sebi. Posebno zahvaljujemo prof. dr. sc. Dubravku Horvatu na polemikama i dinamičnim raspravama, te strpljivosti i izdvojenom vremenu.

8 Literatura

- [1] Lewis Ryder, *Introduction to General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009)
- [2] Michael S. Morris and Kip S. Thorne, *Am. J. Phys.* 56, 395 (1988)
- [3] M. Visser, *Lorenzian Wormholes: From Einstein to Hawking* (AIP, New York, 1995)
- [4] D. Stoler, *Phys. Rev. D* 4, 1925 (1971)
- [5] L. Parker and S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* 7, 2357 (1973)
- [6] L. H. Ford, *Proc. R. Soc. London Ser. A* 364, 227 (1978)
- [7] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge U. P., Cambridge, 1973) pp. 89-96
- [8] Miguel A. Oliveira, arXiv:1107.2703 [gr-qc]
- [9] S. Perlmutter, et al. *Astrophys. J.* 517, 565 (1999)
- [10] A. Grant et al *Astrophys. J.* 560 49-71 (2001)
- [11] Steven Weinber *Cosmology* (Oxford University Press, Great Clarendon Street, Oxford, 2008.)
- [12] Sean M. Carroll *Spacetime and geometry.* (Pearson Education, Inc. Addison Wesley, St. Francisco, 2004.)
- [13] Astier, P., et al (The SNLS) 2006, *Astron. Astrophys.* 447, 31
- [14] H. A. Buchdahl *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 150, 1 (1970)
- [15] F. S. N Lobo, Miguel A. Oliveira *Phys. Rev. D* 80, 104012 (2009)
- [16] T. Azizi *J. Theor. Phys.* 1(2012) 120-128
- [17] L. G. Jaime, L. Patino, M. Salgado arXiv:1206.1642v1 [gr-qc] 7Jun 2012
- [18] L. Jaime, M. Salgado, L. Patino arXiv:1211.0015v1 [gr-qc] 31Oct 2012
- [19] Linder, E. V *Phys. Rev. D*, 80, 123528, (2009)
- [20] H. Motohashi, A. A Starobinsky, J. Yokoyama *Int. Jour. Mod. Phys. D* 20, 1347 (2011)
- [21] V. Miranda, S. Joras I. Waga *Phys. Rev. Lett.* 102, 221101 (2009)
- [22] A. A. Starobinsky *JETP Lett.* 86, 157 (2007)
- [23] Elizalde, E. et al. *Phys. Rev. D*, 77, 046009, (2008)

9 Dodatak : Varijacijski postupak za gravitaciju tipa $f(R)$

Varirajući integral djelovanja za gravitacijsko polje po metrici dobivamo dva doprinosa :

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2k} \int \delta \sqrt{-g} f(R) d^4x + \frac{1}{2k} \int \delta R \frac{df(R)}{dR} \sqrt{-g} d^4x. \quad (41)$$

Najprije promatramo prvi doprinos varijaciji. Za računanje varijacije determinante metrike rabimo identitet $\ln(g) = Tr(\ln(g_{\mu\nu}))$ Iz varijacije izraza proizlazi $(1/g)\delta g = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$.

Za prvi doprinos stoga dobivamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{-1}{2\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} f(R) d^4x &= \int \frac{1}{2\sqrt{-g}} g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} f(R) d^4x \\ &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} f(R) d^4x, \end{aligned} \quad (42)$$

pri čemu je iskorišten identitet $g^{u\alpha}g_{v\alpha} = \delta_v^u$, odnosno njegova varijacija iz koje u našem slučaju proizlazi $g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$. Sada promatramo drugi integral u izrazu (41) uočavajući kako se u svrhu Riccijev skalar može prikazati kao $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ čime se taj integral razdvaja na dva člana:

$$\int \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \frac{df(R)}{dR} \sqrt{-g} d^4x + \int \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \frac{df(R)}{dR} \sqrt{-g} d^4x. \quad (43)$$

Prvi član u (43) je već izražen kao varijacija po metrici, stoga je naredni korak razmotriti drugi član u kojem je sadržana varijacija po Riccijevom tenzoru. Uzimamo u obzir kako je Riccijev tenzor kontrakcija Riemannovog tenzora, $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$, te varijaciju Riemannovog tenzora raspisujemo kao varijaciju Christoffelovih simbola, u skladu s definicijom Riemannovog tenzora:

$$\delta R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\rho} \Gamma^\rho_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho} \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \delta \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \delta \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \quad (44)$$

Varijacija Christoffelovog simbola je zapravo razlika dviju konekcija, te je u skladu s definicijom kovarijantne derivacije, $\nabla_\mu V_\alpha = \partial_\mu V_\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\rho} V^\rho$, razlika dviju konekcija razlika odgovarajućih kovarijantnih derivacija, odnosno dobro definiran tenzor. Stoga je moguće promotriti kovarijantu derivaciju varijacije Christoffelovog simbola:

$$\nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \partial_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho} \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\rho}. \quad (45)$$

Dobili smo dio članova koji se pojavljuje u (44), drugi dio dobiva se ekvivalentno kao $\nabla_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}$, te se varijacija Riemannovog tenzora može prikazati kao njihova razlika, odnosno

$$\delta R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}, \quad (46)$$

Stoga je drugi integral u (43) jednak

$$\int \{ \nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \} g^{\mu\nu} \frac{df(R)}{dR} \sqrt{-g} d^4x. \quad (47)$$

Da bismo mogli nastaviti potreban nam je izraz za varijaciju Christoffelovog simbola, a njega računamo na temelju definicije $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \{ g_{\beta\sigma,\gamma} + g_{\gamma\sigma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma} \}$ Prije toga izraz (47) možemo prikazati u prikladnijem

obliku koristeći kompatibilnosti metrike i preimenujući indekse po kojima se vrši kontrakcija:

$$\int \nabla_\sigma \{g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda\} \frac{df(R)}{dR} \sqrt{-g} d^4x. \quad (48)$$

Sada računamo varijaciju Christoffelovog simbola:

$$\delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma = \frac{1}{2} \delta g^{\sigma\rho} \{g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\} + \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \{\delta g_{\mu\rho,\nu} + \delta g_{\nu\rho,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\rho}\}. \quad (49)$$

Koristeći se osnovnim izrazom za kovarijantnu derivaciju, parcijalne derivacije varijacije metrike možemo iskazati preko kovarijantnih derivacija: $\delta g_{\mu\rho,\nu} = \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} + \Gamma_{\nu\rho}^\phi \delta g_{\mu\phi} + \Gamma_{\nu\mu}^\phi \delta g_{\rho\phi}$, te slično za ostale članove. Uvrštavajućih ih u (49) dobivamo:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} \delta g^{\sigma\rho} \{g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\} + \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \{\nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} + 2\Gamma_{\nu\mu}^\phi \delta g_{\rho\phi} + \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}\}. \quad (50)$$

Kao i do sada, želimo promotriti varijaciju po metrici s gornjim indeksima, zbog čega koristimo identitet $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\phi} g_{\nu\eta} \delta g^{\phi\eta}$, direktno dobiven iz ranije korištenog $g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$. Koristeći taj identitet u (50), koristeći kompatibilnost metrike, kontrahirajući odgovarajuće matrice metrike, te raspisujući prvi član u varijaciji pomoću Christoffelovog simbola dobivamo :

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \delta g^{\sigma\rho} g_{\phi\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\phi - \frac{1}{2} g_{\mu\phi} \nabla_\nu \delta g^{\phi\sigma} - \frac{1}{2} g_{\nu\phi} \nabla_\mu \delta g^{\phi\sigma} \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} g_{\mu\phi} g_{\nu\eta} \nabla_\rho \delta g^{\phi\eta} + \Gamma_{\nu\mu}^\phi \delta g_{\rho\phi} g^{\sigma\rho} \\ &= -\frac{1}{2} (g_{\mu\phi} \nabla_\nu \delta g^{\phi\sigma} + g_{\nu\phi} \nabla_\mu \delta g^{\phi\sigma} - g_{\mu\phi} g_{\nu\eta} \nabla^\sigma \delta g^{\phi\eta}). \end{aligned} \quad (51)$$

Koristeći ovaj izraz za raspisivanje članova koji se pojavljuju u (48), kontrahiranjem odgovarajućih tenzora metrike i oduzimanjem navedena dva člana konačno dobivamo integral u obliku :

$$\int \nabla_\sigma \{g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\lambda \delta g^{\sigma\lambda}\} \frac{df(R)}{dR} \sqrt{-g} d^4x. \quad (52)$$

Dobiveni integral možemo dalje razviti kao :

$$\int \nabla_\sigma \{(g_{uv} \nabla^\sigma (\delta g^{uv}) - \nabla_\lambda \delta g^{\sigma\lambda}) \frac{df}{dR}\} \sqrt{-g} d^4x - \int (g_{uv} \nabla^\sigma (\delta g^{uv}) - \nabla_\lambda \delta g^{\sigma\lambda}) \nabla_\sigma \frac{df}{dR} \sqrt{-g} d^4x \quad (53)$$

Na prvi integral u (53) možemo primjeniti Stokesov teorem

$$\int_\Sigma \nabla_\mu V^\mu \sqrt{-g} d^n x = \int_{\partial\Sigma} n_\mu V^\mu \sqrt{-\gamma} d^{n-1} x, \quad (54)$$

gdje je n_μ normala na rubnu hiperplohu $\partial\Sigma$, γ_{ij} pripadna inducirana metrika. Prvi integral u (53) je time jednak rubnom doprinosu u beskonačnosti koji iščezava uslijed zahtjeva da varijacija na rubu iščezava. U (53) dakle preostaje samo drugi integral kojeg ponovno rastavljamo :

$$\begin{aligned} \int \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \frac{df(R)}{dR} \sqrt{-g} d^4x &= - \int (g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu} \nabla_\sigma \frac{df}{dR}) - \nabla_\lambda (\delta g^{\sigma\lambda} \nabla_\sigma \frac{df}{dR})) \sqrt{-g} d^4x + \\ &\quad \int (g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma \frac{df}{dR} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \nabla_\sigma \frac{df}{dR} \delta g^{\sigma\lambda}) \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (55)$$

Kod prvog člana ponovno primjenjujemo Stokesov teorem i zahtijevamo da varijacija na graničnoj plohi iščezava, te stoga preostaje samo drugi član u (55). Sada prikupljamo sve izračunate doprinose varijaciji integrala djelovanja (doprinos u (42), prvi član u (43) i drugi član u (55) i tražimo ekstremnu točku, tj. zahtijevamo da ukupna varijacija iščezava. Na taj način dobivamo modificiranu Einsteinovu jednadžbu u vakuumu:

$$R_{\mu\nu} \frac{df(R)}{dR} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma) \frac{df}{dR} = 0 \quad (56)$$

Kako bismo dobili potpunu modificiranu Einsteinovu jednadžbu za gravitaciju tipa $f(R)$ dodajemo još standardni član djelovanja za materiju : $S = S_{EH} + S_{MAT}$, uz standardno definiranje tenzora energije-impulsa $T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{MAT}}{\delta g_{\mu\nu}}$ konačno proizlazi:

$$R_{\mu\nu} \frac{df(R)}{dR} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma) \frac{df}{dR} = k T_{\mu\nu} \quad (57)$$

10 Sažetak

Petar Pavlović i Marko Sossich

Crvotočine u gravitaciji tipa $f(R)$ i očuvanje slabog energijskog uvjeta

U našem radu proučavamo crvotočine u gravitaciji tipa $f(R)$ – teoriji koja generalizira i modificira jednačbe opće teorije relativnosti. Istraženo je više rješenja gravitacijskih jednačbi koje smo izveli u različitim modelima gravitacije tipa $f(R)$. Većina dobivenih rješenja isključuje potrebu postojanja egzotične materije, koja je prisutna u standardnoj općoj teoriji relativnosti. Za razliku od do sada uobičajenog pristupa problemu ne uvodimo nikakve dodatne pretpostavke u svrhu pojednostavljivanja jednačbi, te funkciju $f(R)$ ne tretiramo proizvoljno, već kao karakteristiku teorije koja mora biti određena na temelju zahtjeva konzistentnosti s opažanjima na razini sunčevog sustava i kozmološke evolucije.

Ključne riječi: opća teorija relativnosti, crvotočina, gravitacija tipa $f(R)$, slabi energijski uvjet, egzotična materija

11 Summary

Petar Pavlović i Marko Sossich

Wormholes in $f(R)$ Theory of Gravity and Weak Energy Condition

In our work we analyze wormholes in the context of $f(R)$ gravity – theory that generalizes and modifies equations of general theory of relativity. Several solutions of derived gravitational equations in different $f(R)$ models are examined. Most of the solutions imply no need for exotic material, which is present in the standard general theory of relativity. Our approach differs from the one that has been common in respect that we don't take any additional assumptions to simplify the equations, and we don't treat $f(R)$ as arbitrary functions, but rather as a characteristic of the theory that has to be evaluated on the basis of consistency with observations for Solar system and cosmological evolution.

Key words: general theory of relativity, wormhole, $f(R)$ gravity, Weak Energy Condition, exotic matter