Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet

Melkior Ornik, Ana Šušnjara

Neki prilozi teoriji egzaktne rekonstrukcije poligona

Zagreb, 2012.

Ovaj rad izrađen je na Zavodu za numeričku matematiku i znanstveno računanje na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, pod vodstvom prof. dr. sc. Zlatka Drmača i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2011./2012.

Sadržaj

1 Uvod

Problem egzaktne rekonstrukcije poligona pomoću kompleksnih momenata traži da, ukoliko znamo određeni broj kompleksnih momenata poligona P, tj. vrijednosti

$$\iint_P z^k dz,\ k \in \mathbb{N}_0,$$

na jedinstven način odredimo vrhove tog poligona.

Na ovo je pitanje pozitivno odgovoreno — rezultati koje daju Davis [3, 5] šezdesetih i sedamdesetih godina prošlog stoljeća te, u općenitom slučaju, Milanfar, Verghese, Karl i Willsky [19] sredinom 1990-tih pokazuju da je to moguće ukoliko znamo prvih $2n-2$ kompleksnih momenata n-terokuta. Dano je i nekoliko algoritama [6, 7] na tu temu, od kojih se izdvaja Pronyjeva metoda [13] kao jednostavan i brz način rekonstrukcije. No, neka su pitanja, bitna za praktične primjene, ostala do sada nedovoljno istražena, a napose se ističe problem prepoznavanja broja vrhova poligona iz kompleksnih momenata, ukoliko ga a priori ne znamo. Također, rješenja dobivena Pronyjevom metodom su osjetljiva [10, 2] na korištenje konačne aritmetike. Stoga se postavlja pitanje mogućnosti njenog modificiranja, sa ili bez poznavanja dodatnih informacija o objektu.

Nakon kraćeg uvoda i navođenja poznatih činjenica, pri čemu nalazimo kontraprimjer za dokaz Propozicije 2. iz [19], predlažemo dva poboljšanja Pronyjeve metode. Prvo, dokazujemo da se poligon može rekonstruirati i iz vrijednosti znatno veće klase integrala oblika

$$\iint_P f(z)^k dz,\ k \in \mathbb{N}_0,$$

iz čega spomenuti teorem za kompleksne momente slijedi kao korolar.

Nadalje, uz određene ograde, odgovorit ćemo na pitanje određivanja broja vrhova iz integrala potencija, pa stoga i iz kompleksnih momenata, te ćemo pružiti jednostavnu metodu za otkrivanje broja vrhova putem pridružene Hankelove matrice.

Poslije tog se rezultata vraćamo Pronyjevoj metodi za kompleksne momente te ocjenu od $2n - 2$ momenata značajno poboljšavamo za slučaj poligona koji pokazuju neku vrstu simetrije (od posebnog se praktičnog interesa čine centralno simetrični poligoni). U tu svrhu predlažemo konkretan algoritam za rekonstrukciju, ponovno baziran na Pronyjevoj metodi, koji iskorištava našu bolju ocjenu te na taj način značajno ubrzava i povećava točnost Pronyjeve metode. Uz to, dajemo i jednostavnu propoziciju koji pomaže pri određivanju kandidata za simetrični poligon.

Završavamo s nekim rezultatima vezanima uz praktične primjene. Jasno je da je nemoguće odrediti u kojim će točno slučajevima metoda zbog numeričkih problema pogriješiti. Ipak, dokazat ćemo nekoliko tvrdnji iz kompleksne analize i teorije matrica koje pomažu pri stvaranju intuicije o tome kada Pronyjeva metoda radi, a kada ne. Na primjerima pokazujemo i da je ta intuicija u skladu sa stvarnim ograničenjima algoritma. Na kraju, naše rezultate predstavljamo na izabranom skupu stvarnih primjera, nešto složenijih nego u dosadašnjim radovima (npr. [19, 7]), te uz integrale generirane potencijama eksponencijalne funkcije i identitete.

2 Matematička pozadina i dosadašnji rezultati

Prije no što počnemo s navođenjem dosadašnjih rezultata na ovu temu, potrebno je precizno definirati objekte s kojima radimo.

Definicija 1. *Za $n \geq 3$,* ***poligon*** *je uređena n-torka $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ koja zadovoljava sljedeće uvjete:*

(i) Svi z_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, su međusobno različiti.

(ii) Za $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \neq j$, vrijedi

$$\overline{(z_j, z_{j+1})} \cap \overline{(z_k, z_{k+1})} = \begin{cases} \{z_j\} & : k = j - 1 \\ \{z_{j+1}\} & : k = j + 1 \\ \emptyset & : inače \end{cases} .$$

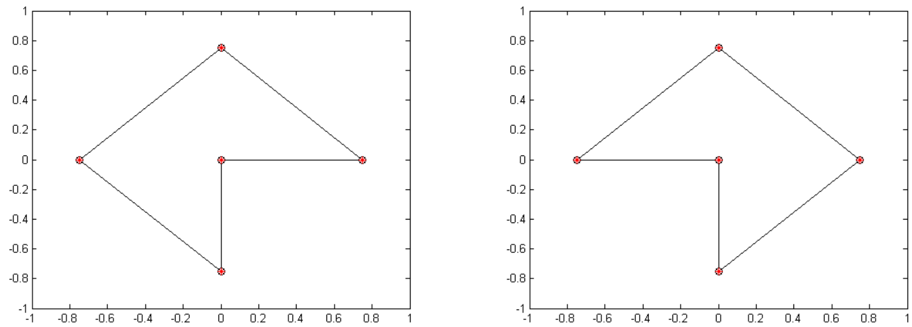
(iii) Za $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, točke z_{j-1}, z_j i z_{j+1} nikada nisu kolinearne.

Da bi se izbjegla konfuzija između stranica poligona i množenja kompleksnih konjugata, dužine označavamo pomalo nestandardnom oznakom $\overline{(\cdot, \cdot)}$. Također, ovdje, a i svuda u daljnjem tekstu, prirodno identificiramo vrhove modulo n: $z_{n+j} \equiv z_j$.

Definicija 2. *Uređenu n-torku koja zadovoljava prva dva uvjeta Definicije 1., ali ne i treći, nazivamo* ***degenerirani poligon****.*

Napomena 1. *Međusobno identificiramo sljedećih n poligona: $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $(z_2, z_3, \ldots, z_n, z_1)$, $\ldots$, $(z_n, z_1, \ldots, z_{n-1})$.*

Primijetimo da prošla napomena govori da u poligonu niti jedan vrh ne tretiramo kao početni. No, kao što pokazuje sljedeća usporedba, to ne znači da je poligon u potpunosti određen samo skupom vrhova — poredak je bitan. Specijalno, poligone $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ i $(z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1)$ također ne identificiramo kao isti poligon, pa se poligoni razlikuju i po orijentaciji.



Slika 1: Različiti poligoni s jednakim vrhovima

Napomena 2. *Kompleksan integral funkcije f po dijelu ravnine omeđenom stranicama*[1] $\overline{(z_1, z_2)}$, $\overline{(z_2, z_3)}$, $\dots$, $\overline{(z_n, z_1)}$ *poligona P označavamo, prirodnim zlorabljenjem notacije, s*

$$\iint_P f(z)dz.$$

Prije uvođenja pojma kompleksnih momenata, navodimo rezultat koji motivira njihovo korištenje. Ideju daje Newton-Leibnizova formula.

Primjer 1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ nepoznati. Znamo da za sve funkcije f klase C^1 vrijedi*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

pa uvrštavanjem $f(x) \equiv x$ i $f(x) \equiv x^2$ dobivamo

$$\int_a^b 1dx = b - a, \qquad \int_a^b 2xdx = b^2 - a^2.$$

Očito je da, ako znamo vrijednosti dva integrala slijeva, na jedinstven način možemo odrediti a i b.

Sličan rezultat, uz uvođenje druge derivacije, vrijedit će u kompleksnoj ravnini.

[1] Primijetimo da je orijentacija poligona ovdje bitna zbog predznaka integrala.

2.1 Integriranje analitičke funkcije po poligonu

Kako je najavljeno, sljedeći teorem predstavlja osnovu teorije rekonstrukcije vrhova poligona iz kompleksnih momenata. Prvotno ga objavljuje Davis [3] na temelju Motzkin-Schoenbergove formule [24] za trokute, no uz ograničenje na konveksne poligone. Stoga njegov dokaz ispuštamo u korist znatno elegantnijeg i općenitijeg dokaza [19] Milanfara, Verghesea, Karla i Willskyja iz 1995.

Teorem 1. *Neka je $P = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ poligon, a f funkcija koja je analitička na $\overline{P}$.*[2] *Tada vrijedi*

$$\iint_P f''(z)dz = \sum_{j=1}^{n} a_j f(z_j),$$

pri čemu su a_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neovisni o funkciji f i iznose

$$a_j = \frac{2D_j}{(z_j - z_{j+1})(z_j - z_{j-1})},$$

a D_j je definirano s

$$D_j = \frac{\mathfrak{i}}{4} \begin{vmatrix} z_{j-1} & \overline{z_{j-1}} & 1 \\ z_j & \overline{z_j} & 1 \\ z_{j+1} & \overline{z_{j+1}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Koristeći Greenov teorem u $\mathbb{C}$ [29] te Cauchy-Riemannove uvjete za analitičke funkcije, dobivamo:

$$\iint_P f''(z)dz = \frac{\mathfrak{i}}{2} \int_{\partial P} f'(z)d\overline{z},$$

gdje ∂P označava rub od P, a $d\overline{z} = dx - \mathfrak{i}dy$. Označimo stranice poligona sa s_1,s_2,...,s_n, pri čemu s_j povezuje vrhove z_j i z_{j+1}. Nadalje, pretpostavimo

[2] Ovdje i kasnije se radi o blagom zlorabljenju notacije: s $\overline{P}$ označavamo zatvoreni dio ravnine omeđen stranicama poligona P.

da su vrhovi poligona poredani u smjeru obrnutom od kazaljke na satu te definirajmo $z_0 = z_n$ i $z_{n+1} = z_1$.

Iskoristimo li izraz za jednažbu pravca kroz dvije različite točke u kompleksnoj ravnini, vrijedit će:

$$\iint\limits_P f''(z)dz = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{s_j} f'(z)d\overline{z} = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{j-1} - \alpha_j)f(z_j),$$

gdje je $\alpha_j = \frac{\overline{z}_j - \overline{z}_{j+1}}{z_j - z_{j+1}}$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ te $\alpha_0 = \alpha_n$. Uz oznake kao u iskazu teorema, laganim računom dobivamo:

$$\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha_{j-1} - \alpha_j) = \frac{2D_j}{(z_j - z_{j+1})(z_j - z_{j-1})},\ j \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Slijedi tvrdnja teorema. □

Korolar 1. *Koeficijenti a_j iz gornjeg teorema su različiti od* 0.

Dokaz. Dokaz je očit, budući da je, uz oznake iz Teorema 1., apsolutna vrijednost determinante

$$\begin{vmatrix} z_{j-1} & \overline{z_{j-1}} & 1 \\ z_j & \overline{z_j} & 1 \\ z_{j+1} & \overline{z_{j+1}} & 1 \end{vmatrix}$$

proporcionalna površini trokuta s vrhovima u z_{j-1}, z_j i z_{j+1}. □

Sljedeći će nam tehnički korolar biti potreban pri razvijanju Pronyjeve metode. Očit je, no navodimo ga radi potpunosti.

Korolar 2. *Neka je P poligon s vrhovima z_1, z_2, …, z_n, a a_1, a_2, …, a_n kompleksni brojevi dobiveni gornjim teoremom. Tada vrijedi*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 0$$

i

$$\sum_{j=1}^{n} a_j z_j = 0.$$

Dokaz. U prethodnom teoremu uzmimo $f(z) \equiv 1$ te $f(z) \equiv z$. $\square$

Primijetimo da ovaj teorem pruža mogućnost uvrštavanja vrlo velike klase funkcija f. Pokazuje se da će nam funkcije oblika z^k biti dovoljne za određivanje vrhova poligona. Postavlja se prirodno pitanje mogu li neke druge funkcije preuzeti njihovu ulogu i omogućiti korektnu rekonstrukciju poligona. Pokazat ćemo da je to moguće. No, prije toga završavamo izlaganje teorijske osnove rada definiranjem kompleksnih momenata.

2.2 Korištenje kompleksnih momenata

Općenito govoreći, kompleksnim[3] momentima smatraju se integrali oblika $\iint\limits_{\Omega} f(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z) z^k dz$. No, za potrebe ovog rada, koristimo najjednostavniju nama prihvatljivu definiciju.

Definicija 3. *k-ti **kompleksni moment** nad poligonom P definira se s*

$$c_k = \iint\limits_{P} z^k dz,$$

pri čemu je $k \in \mathbb{N}_0$.

U praktičnim se primjenama pojavljuje potreba za određivanjem vrhova poligona iz njihovih kompleksnih momenata. Ne ulazeći u to kako se kompleksni momenti mogu dobiti bez apriornog znanja vrhova poligona, sljedeći teorem odgovara na pitanje rekonstrukcije vrhova poligona iz kompleksnih momenata, a njegov dokaz ujedno predstavlja i smisleni algoritam za određivanje vrhova, tzv. Pronyjevu metodu.

Naime, Teorem 1. pokazuje da postoje a_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, takvi da

$$\iint\limits_{P} f''(z) dz = \sum_{j=1}^{n} a_j f(z_j)$$

[3] U literaturi se kompleksni momenti spominju i pod nazivom **harmonijski momenti**.

za sve analitičke funkcije f.

Uvrštavanjem funkcija iz niza $(z^k)_{k\geq 2}$ dobivamo da vrijedi

$$\iint\limits_P k(k-1)z^{k-2}dz = \sum_{j=1}^{n} a_j(z_j)^k$$

za sve $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Dakle, ukoliko sada definiramo τ_k preko $(k-2)$-og kompleksnog momenta na način

$$\tau_k = k(k-1)c_{k-2},$$

a, u skladu s Korolarom 2., uzmemo $\tau_0 = 0$ i $\tau_1 = 0$, dobivamo da za sve $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\tau_k = \sum_{j=1}^{n} a_j z_j^k.$$

Teorem daje jednostavan inverzan rezultat. Dokaz ispuštamo jer kasnije izlažemo vlastito poopćenje, uz potpuno istu ideju dokaza, a iz te će generalizacije ovaj teorem slijediti kao jednostavna posljedica.

Teorem 2 (Rekonstrukcija vrhova poligona iz kompleksnih momenata)**.** *Neka su τ_k, $k \in \{2,\ldots,2n\}$, kompleksni brojevi. Ukoliko postoji poligon P s n vrhova takav da vrijedi*

$$\tau_k = k(k-1)c_{k-2}$$

za sve $k \in \{2,\ldots,2n-1\}$, pri čemu je c_k k-ti kompleksni moment poligona P, svi drugi n-terokuti koji to zadovoljavaju imaju isti skup vrhova kao P.

Napomena 3. *Primijetimo da ovaj teorem zapravo govori da iz kompleksnih momenata poligona na jedinstven način možemo rekonstruirati vrhove poligona. Posebno je bitno da je dokaz konstruktivan te služi kao jednostavna metoda za određivanje tih vrhova.*

2.3 Jedinstvenost poligona

Teorem 2. nije idealan — htjeli bismo iz kompleksnih momenata rekonstruirati cijeli poligon. No, Strakhov i Brodsky 1986. u [26] konstruiraju kontraprimjer i time pokazuju da postoje dva različita poligona kojima su svi momenti isti. Ipak, jedinstvenost rekonstrukcije poligona može se pokazati uz neke uvjete. Među ostalim, jasno je da su ti poligoni jedinstveni u konveksnom slučaju, kada je poligon u potpunosti zadan svojim skupom vrhova.

Konveksnost predstavlja vrlo jak uvjet i Milanfar i dr. 1995. u [19] iznose propoziciju čiji bi jednostavan korolar davao jedan drugi dovoljan uvjet za jedinstvenost rekonstrukcije. No, dokaz nije točan. Prije predstavljanja kontraprimjera, navodimo propoziciju i netočan dokaz.

Propozicija (Milanfar i dr.). *Neka su P i Q različiti n-terokuti s istim skupom vrhova $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Također, neka P i Q imaju barem jednu zajedničku stranicu. Neka su a_j i b_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, takvi da vrijedi*

$$\iint\limits_P f''(z)dz = \sum_{j=1}^{n} a_j f(z_j), \qquad \iint\limits_Q f''(z)dz = \sum_{j=1}^{n} b_j f(z_j)$$

za sve funkcije f koje su analitičke na $\overline{P \cup Q}$.[4] *Tada postoji neki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da $a_j \neq b_j$.*

Pogrešan dokaz iz [19]. Neka je stranica $\overline{(z_j, z_{j+1})}$ zajednička poligonu P i Q. Označimo s z_{j-1} vrh koji prethodi vrhu z_j u poligonu P, a s z'_{j-1} vrh koji prethodi tom vrhu u poligonu Q. Pretpostavimo da propozicija ne vrijedi. (Zapravo je dovoljno pretpostaviti da je $a_j = b_j$.) Tada raspisivanjem izraza

[4] Radi se o dijelu ravnine kojeg čine sve točke unutar barem jednog od dijelova ravnine kojeg zatvaraju stranice poligona P ili Q.

za a_j i b_j u Teoremu 1. dobivamo da mora vrijediti

$$\frac{\overline{z_{j-1}-z_j}}{z_{j-1}-z_j} - \frac{\overline{z_j-z_{j+1}}}{z_j-z_{j+1}} = \frac{\overline{z'_{j-1}-z_j}}{z'_{j-1}-z_j} - \frac{\overline{z_j-z_{j+1}}}{z_j-z_{j+1}},$$

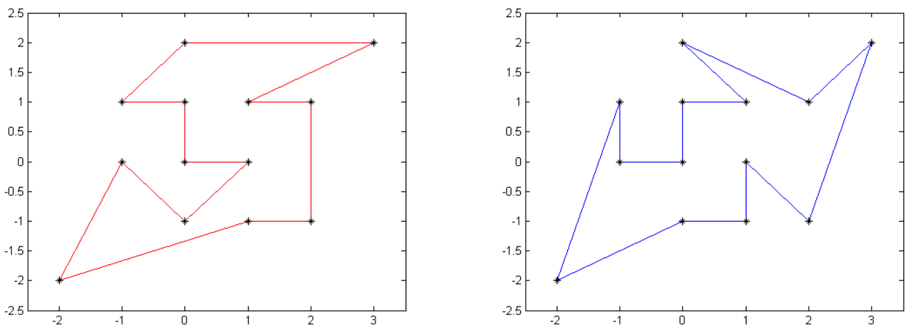
odnosno

$$\frac{\overline{z_{j-1}-z_j}}{z_{j-1}-z_j} = \frac{\overline{z'_{j-1}-z_j}}{z'_{j-1}-z_j}.$$

Ovo je upravo uvjet kolinearnosti u kompleksnoj ravnini pa znamo da su z'_{j-1}, z_{j-1} i z_j kolinearni. Dakle, ili je $z'_{j-1} = z_{j-1}$ (pa dalje idemo induktivno) ili imamo tri različita vrha poligona na istom pravcu. Kako P i Q nisu degenerirani, dolazimo do kontradikcije. $\square$

Greška je u zadnjoj tvrdnji: nema nikakvog razloga zašto z'_{j-1}, z_{j-1} i z_j ne bi bili kolinearni, čak i uz uvjet iste orijentacije poligona P i Q. Kontraprimjer koji dajemo to će pokazati, pri čemu valja naglasiti da time nije dokazano da je propozicija netočna, već samo da je dokaz nevaljan.

Kontraprimjer 1. *Neka su* $P = (3+2\mathfrak{i}, 2\mathfrak{i}, -1+\mathfrak{i}, \mathfrak{i}, 0, 1, -\mathfrak{i}, 1, -2-2\mathfrak{i}, 1-\mathfrak{i}, 2-\mathfrak{i}, 2+\mathfrak{i}, 1+\mathfrak{i})$ *i* $Q = (2+\mathfrak{i}, 2\mathfrak{i}, 1+\mathfrak{i}, i, 0, -1, -1+\mathfrak{i}, -2-2\mathfrak{i}, -\mathfrak{i}, 1-\mathfrak{i}, 1, 2-\mathfrak{i}, 3+2\mathfrak{i})$. *$P$ i Q su očito iste orijentacije, i to pozitivne.*



Slika 2: Poligoni P i Q koji daju kontraprimjer za gornji dokaz.

Promatrajmo stranicu $\overline{(\mathfrak{i}, 0)}$. *Radi se o (jedinoj) zajedničkoj stranici poligona P i Q. Stoga, uzimamo, u kontekstu gornjeg dokaza,* $z_j = \mathfrak{i}$ *i* $z_{j+1} = 0$.

Tada je $z_{j-1} = -1 + \mathrm{i}$, a $z'_{j-1} = 1 + \mathrm{i}$. Očito je da su točke z_j, z_{j-1} i z'_{j-1} kolinearne. Ipak, ni P ni Q nisu degenerirani.

Napomena 4. *Isti kontraprimjer djeluje i ukoliko bismo promatrali točke z_{j+2}, z_{j+1} i z'_{j+2} i pokušali izvući sličan zaključak.*

Ipak, ovaj dokaz može biti valjan ukoliko prihvatimo jedno dodatno svojstvo poligona. Na taj ćemo način kasnije preko jednostavnog korolara dobiti jedan dovoljan uvjet jedinstvenosti.

Propozicija 1. *Neka su P i Q različiti n-terokuti s istim skupom vrhova $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Također, neka P i Q imaju barem jednu zajedničku stranicu. Neka su a_j i b_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, takvi da vrijedi*

$$\iint_P f''(z)dz = \sum_{j=1}^{n} a_j f(z_j), \qquad \iint_Q f''(z)dz = \sum_{j=1}^{n} b_j f(z_j)$$

za sve funkcije f koje su analitičke na $\overline{P \cup Q}$.[5] *Tada, ukoliko skup vrhova $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ ne sadrži tri kolinearne točke, postoji neki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da $a_j \neq b_j$.*

Dokaz. U ovom slučaju, gore izloženi dokaz iz [19] djeluje: kolinearnost točaka z'_{j-1}, z_{j-1} i z_j implicira da su točke z'_{j-1} i z_{j-1} jednake, pa dalje nastavljamo induktivno. □

Napomena 5. *Primijetimo da se svojstvo nekolinearnosti može nešto oslabiti: dovoljno je da postoji samo jedan vrh z_j neke zajedničke stranice P i Q takav da ne postoje neka dva vrha s kojima je z_j kolinearan. No, to svojstvo samo pridonosi nerazumljivosti i upitno je ima li praktičnih primjena.*

[5] Radi se o dijelu ravnine kojeg čine sve točke unutar barem jednog od dijelova ravnine kojeg zatvaraju stranice poligona P ili Q.

Ovime smo završili s izlaganjem dosadašnjih rezultata, koji tvore osnovu za nove rezultate koje predstavljamo. Konkretno, iskoristit ćemo ideje dokaza prošlog teorema da bismo dokazali njegovu generalizaciju i postigli poboljšanja u slučaju da je poligon u nekom smislu simetričan.

3 Rekonstruiranje vrhova poligona iz integrala potencija

Prije nego što započnemo s centralnim rezultatom ovog poglavlja, potrebno je definirati generalizaciju kompleksnog momenta.

Definicija 4. *k-ti **integral potencije** analitičke funkcije f nad poligonom P definira se s*

$$\tau_k = \iint\limits_P \frac{d^2}{dz^2} f^k(z) dz.$$

Pri tome uzimamo kao konvenciju $f^0 \equiv 1$, tj. $\tau_0 = 0$.

Napomena 6. *Primijetimo da se τ_k u kontekstu integrala potencija slažu po vrijednosti s istoimenima τ_k u kontekstu kompleksnih momenata. Naime, za $f(z) \equiv z$ imamo, u kontekstu integrala potencija, $\tau_0 = \tau_1 = 0$ i*

$$\tau_k = \iint\limits_P \frac{d^2}{dz^2} z^k dz = \iint\limits_P k(k-1) z^{k-2} dz = k(k-1) c_{k-2}$$

za $k \geq 2$, pri čemu je c_{k-2} odgovarajući kompleksni moment poligona P.

Sad smo spremni za teorem.

3.1 Osnovni rezultat o rekonstrukciji

Teorem 3 (Rekonstrukcija vrhova poligona iz prvih $2n-1$ integrala potencija)**.** *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, analitička funkcija i injekcija. Također, neka su τ_k, $k \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, kompleksni brojevi i neka postoji poligon P, $\overline{P} \subseteq \Omega$, s n vrhova takav da su τ_k jednaki odgovarajućim integralima potencija funkcije f nad P. Tada svi drugi n-terokuti Q, $\overline{Q} \subseteq \Omega$, koji to zadovoljavaju imaju isti skup vrhova kao P.*

Dokaz. Neka su vrhovi poligona P točke z_1, z_2, ..., z_n. Također, definirajmo $\tau_0 = 0$. Tada iz Teorema 1., Korolara 1. i Korolara 2., uz konvenciju $f^0 \equiv 1$, znamo da vrijedi

$$\tau_k = \sum_{j=1}^{n} a_j f(z_j)^k$$

za sve $k \in \{0, \ldots, 2n-1\}$, pri čemu su a_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, različiti od 0.

Stoga,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_{2n-1} \end{pmatrix}}_{\Theta_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f(z_1) & f(z_2) & \cdots & f(z_n) \\ f(z_1)^2 & f(z_2)^2 & \cdots & f(z_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(z_1)^{2n-1} & f(z_2)^{2n-1} & \cdots & f(z_n)^{2n-1} \end{pmatrix}}_{\zeta_n} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\alpha_n}.$$

Definirajmo sad funkciju $Q : \Omega \to \mathbb{C}$ s

$$Q(z) = \prod_{j=1}^{n} (f(z) - f(z_j)) = f(z)^n + p_1 f(z)^{n-1} + \ldots + p_{n-1} f(z) + p_n.$$

Tvrdimo da su koeficijenti p_1, p_2, ..., p_n na jedinstven način određeni vrijednostima τ_k, $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$. Neka je matrica $K \in \mathbb{C}^{n \times (2n)}$ definirana s

$$K = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_n & \cdots & p_2 & p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tada imamo

$$K\Theta_n = K\zeta_n\alpha_n.$$

Budući da vrijedi, uz definiciju $p_0 = 1$,

$$K\zeta_n = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_1)^j & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_2)^j & \cdots & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_n)^j \\ \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_1)^{j+1} & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_2)^{j+1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_n)^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_1)^{j+n-1} & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_2)^{j+n-1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_n)^{j+n-1} \end{pmatrix},$$

a kako je $\sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_k)^j = Q(z_k) = 0$ za sve $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, imamo

$$K\Theta_n = K\zeta_n\alpha_n = 0\alpha_n = 0,$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_n & \cdots & p_2 & p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Očitom algebarskom manipulacijom dobivamo

$$\begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_{n-1} \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-1} & \tau_n & \cdots & \tau_{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_n \\ -\tau_{n+1} \\ \vdots \\ -\tau_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Označimo matricu $\begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_{n-1} \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-1} & \tau_n & \cdots & \tau_{2n-2} \end{pmatrix}$ s T_n. Tvrdimo da se radi o regularnoj matrici.

Primijetimo da vrijedi

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ f(z_1) & \cdots & f(z_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(z_1)^{n-1} & \cdots & f(z_n)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & f(z_1)^{n-1} \\ 1 & \cdots & f(z_2)^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & f(z_n)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dakle, uz oznake

$$Z_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f(z_1) & f(z_2) & \cdots & f(z_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(z_1)^{n-1} & f(z_2)^{n-1} & \cdots & f(z_n)^{n-1} \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

imamo $T_n = Z_n A_n Z_n^T$.

Budući da su po Korolaru 1. svi a_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ različiti od 0, A_n je regularna matrica. Također, primjećujemo da je Z_n Vandermondeova matrica u točkama $f(z_1)$, $f(z_2)$, $\ldots$, $f(z_n)$, što znači [21] da je regularna ukoliko su te točke različite. Budući da je f injekcija, taj uvjet je zadovoljen te je Z_n, pa tako i Z_n^T, regularna.

Dakle, i T_n je regularna, pa koeficijente p_1, p_2, $\ldots$, p_n možemo na jedinstven način izračunati iz

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = T_n^{-1} \begin{pmatrix} -\tau_n \\ -\tau_{n+1} \\ \vdots \\ -\tau_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Naposljetku, iz koeficijenata p_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ kao nultočke pripadajućeg polinoma lako računamo vrijednosti $f(z_1)$, $f(z_2)$, $\ldots$, $f(z_n)$, a kako je f injektivna na $\Omega \supseteq \overline{P}$, iz tih vrijednosti dobivamo skup $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.

Dakle, dokazali smo da je iz prvih $2n - 1$ integrala potencija funkcije f na jedinstven način određen skup vrhova n-terokuta, pa svi n-terokuti s istih prvih $2n - 1$ integrala potencija imaju zajedničke vrhove. $\square$

Najvažnija posljedica ovog dokaza je Teorem 2. On sada direktno slijedi ukoliko uzmemo $f(z) \equiv z$. Dajemo još nekoliko napomena.

Napomena 7. *Primijetimo da dokaz Teorema 3. zahtijeva da znamo broj vrhova poligona prije ulaska u algoritam.*

Napomena 8. *Iz dokaza Teorema 3. vidljivo je da f ne mora biti injekcija, nego je dovoljno da su vrijednosti $f(z_j)$ izdvojene, tj. da vrijedi $\{f(z_j)\} \cap \{f(z) : z \in \Omega \backslash \{z_j\}\} = \emptyset$ za sve $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. No, budući da mi tek želimo odrediti vrhove poligona P, takvo oslabljivanje uvjeta nema puno smisla.*

3.2 Neka dodatna svojstva integrala potencija

Razumno je tražiti daljnje poopćenje gornjeg teorema. Na primjer, bilo bi optimalno kada bi se iz bilo kojih $2n$ integrala potencija neke funkcije f na jedinstven i lak način mogao rekonstruirati poligon P. No, direktna modifikacija gornjeg dokaza ne daje željene rezultate bez dodavanja uvjeta na funkciju f, a koji bitno ovise o poligonu P. Ipak, izdvajamo jednu generalizaciju gornjeg teorema koja ne uvodi jak dodatni zahtjev na f.

Dokaz je gotovo identičan dokazu Teorema 3., pa ga izlažemo samo u kratkim crtama.

Propozicija 2. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, analitička funkcija i injekcija takva da $f(z) \neq 0$ za sve $z \in \Omega$. Također, neka je $l \in \mathbb{N}_0$ i neka su τ_{l+k}, $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, kompleksni brojevi. Neka postoji poligon P, $\overline{P} \subseteq \Omega$, s n vrhova takav da su τ_{l+k} jednaki odgovarajućim integralima potencija funkcije f nad P. Tada svi drugi n-terokuti Q, $\overline{Q} \subseteq \Omega$, koji zadovoljavaju iste uvjete imaju isti skup vrhova kao P.*

Dokaz. Ponovno, neka su vrhovi poligona P točke z_1, z_2, $\ldots$, z_n. Tada iz prethodnih rezultata znamo da vrijedi

$$\tau_{l+k} = \sum_{j=1}^{n} a_j f(z_j)^{l+k}$$

za sve $k \in \{0, \ldots, 2n-1\}$, pri čemu su a_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kompleksni brojevi različiti od 0.

Analogno dokazu Teorema 3., definiramo

$$\tilde{\Theta}_n = \begin{pmatrix} \tau_l & \tau_{l+1} & \tau_{l+2} & \cdots & \tau_{l+2n-1} \end{pmatrix}^T .$$

Nadalje, neka je

$$\tilde{\zeta}_n = \begin{pmatrix} f(z_1)^l & f(z_2)^l & \cdots & f(z_2)^l \\ f(z_1)^{l+1} & f(z_2)^{l+1} & \cdots & f(z_n)^{l+1} \\ f(z_1)^{l+2} & f(z_2)^{l+2} & \cdots & f(z_n)^{l+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(z_1)^{l+2n-1} & f(z_2)^{l+2n-1} & \cdots & f(z_n)^{l+2n-1} \end{pmatrix}$$

i

$$\alpha_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^T .$$

Očito vrijedi

$$\tilde{\Theta}_n = \tilde{\zeta}_n \alpha_n .$$

Kao u Teoremu 3., definiramo $Q : \Omega \to \mathbb{C}$ s

$$Q(z) = \prod_{j=1}^{n} (f(z) - f(z_j)) = f(z)^n + p_1 f(z)^{n-1} + \ldots + p_{n-1} f(z) + p_n .$$

i matricu

$$K = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_n & \cdots & p_2 & p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Lakim računom dobivamo

$$K\tilde{\zeta}_n = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_1)^{l+j} & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_2)^{l+j} & \cdots & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_n)^{l+j} \\ \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_1)^{l+j+1} & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_2)^{l+j+1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_n)^{l+j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_1)^{l+j+n-1} & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_2)^{l+j+n-1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} f(z_n)^{l+j+n-1} \end{pmatrix},$$

pa svakako vrijedi

$$K\tilde{\Theta}_n = K\tilde{\zeta}_n \alpha_n = 0.$$

Na isti način kao u Teoremu 3. dobivamo

$$\begin{pmatrix} \tau_l & \tau_{l+1} & \cdots & \tau_{l+n-1} \\ \tau_{l+1} & \tau_{l+2} & \cdots & \tau_{l+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{l+n-1} & \tau_{l+n} & \cdots & \tau_{l+2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_{l+n} \\ -\tau_{l+n+1} \\ \vdots \\ -\tau_{l+2n-1} \end{pmatrix}.$$

Tvrdimo da je matrica s lijeve strane jednakosti regularna. Označimo ju s $\tilde{T}_n$. Primijetimo da vrijedi

$$\tilde{T}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} f(z_1)^l & \cdots & f(z_1)^l \\ f(z_1)^{l+1} & \cdots & f(z_n)^{l+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(z_1)^{l+n-1} & \cdots & f(z_n)^{l+n-1} \end{pmatrix}}_{\tilde{Z}_n} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}}_{A_n} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & f(z_1)^{n-1} \\ 1 & \cdots & f(z_2)^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & f(z_n)^{n-1} \end{pmatrix}}_{Z_n^T}.$$

U dokazu Teorema 3. pokazali smo da su matrice A_n i Z_n regularne. Također, vrijedi

$$\det \tilde{Z}_n = f(z_1)^l f(z_2)^l \cdots f(z_n)^l \det Z_n.$$

Kako smo uvjetovali da $f(z) \neq 0$ na Ω, i $\tilde{Z}_n$ je regularna.

Dokaz završavamo na isti način: koeficijente p_1, p_2, ..., p_n računamo iz

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = \tilde{T}_n^{-1} \begin{pmatrix} -\tau_{l+n} \\ -\tau_{l+n+1} \\ \vdots \\ -\tau_{l+2n-1} \end{pmatrix}.$$

Iz koeficijenata p_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ na način opisan u dokazu Teorema 3. dobivamo vrhove poligona P. $\square$

Neki rezultati koje kasnije dokazujemo mogu se izvesti iz prethodne propozicije, uz odgovarajuće modifikacije. No, u interesu razumljivosti i praktične koristi, navodimo samo najjednostavniji slučaj opisan u Teoremu 3.

Sljedeća propozicija također slijedi direktno iz dokaza Teorema 3., pa koristimo i pripadajuće oznake. Radi se o tvrdnji koja na još jednom primjeru pokazuje da, iako integrali potencija ne generiraju nužno jedinstveni poligon, poligoni koje oni generiraju imaju brojna zajednička svojstva.

Propozicija 3. *Ukoliko n-terokuti P i Q imaju istih prvih $2n-1$ integrala potencija (počevši od 1.) za neku injektivnu funkciju, tada za sve analitičke funkcije $h : \overline{P \cup Q} \to \mathbb{C}$ vrijedi*

$$\iint_P h''(z)dz = \iint_Q h''(z)dz.$$

Dokaz. Ukoliko n-terokuti P i Q imaju istih prvih $2n-1$ integrala potencija neke injektivne funkcije f, Teorem 3. kaže da imaju iste vrhove. Dakle, ukoliko je $P = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, a $Q = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)$, vrijedi

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{pmatrix} \Pi = \begin{pmatrix} z'_1 & z'_2 & \ldots & z'_n \end{pmatrix}$$

za neku permutacijsku (stoga, i regularnu) matricu Π. Zaključujemo da za sve funkcije g koje su analitičke na $\overline{P \cup Q}$ vrijedi

$$\begin{pmatrix} g(z_1) & g(z_2) & \ldots & g(z_n) \end{pmatrix} \Pi = \begin{pmatrix} g(z'_1) & g(z'_2) & \ldots & g(z'_n) \end{pmatrix}.$$

Nadalje, ukoliko u skladu s oznakama u Teoremu 3. sa $Z_n(P)$ označimo Vandermondeovu matricu u točkama $f(z_j)$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a sa $Z_n(Q)$ Vandermondeovu matricu u točkama $f(z'_j)$ $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, iteriranjem gornje tvrdnje po retcima matrica $Z_n(P)$ i $Z_n(Q)$ dobivamo $Z_n(P)\Pi = Z_n(Q)$.

Označimo s $\alpha_n(P)$ i $\alpha_n(Q)$, respektivno, matrice koeficijenata

$$\begin{pmatrix} a_1(P) \\ a_2(P) \\ \dots \\ a_n(P) \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} a_1(Q) \\ a_2(Q) \\ \dots \\ a_n(Q) \end{pmatrix},$$

u smislu Teorema 1, pri čemu je

$$\iint_Q h''(z)dz = \sum_{j=1}^{n} a_j(Q) f(z_j')$$

za sve analitičke funkcije h. Neka su $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2n-1}$ zajednički integrali potencija poligona P i Q. Jasno je da vrijedi

$$\begin{pmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{n-1} \end{pmatrix} = Z_n(P)\alpha_n(P),$$

a budući da P i Q imaju istih prvih $2n-1$ integrala potencija analogna tvrdnja vrijedi i za poligon Q.

Dakle,

$$Z_n(P)\alpha_n(P) = Z_n(Q)\alpha_n(Q),$$

tj.

$$Z_n(P)\alpha_n(P) = Z_n(P)\Pi\alpha_n(Q).$$

Vandermondeova matrica u točkama $f(z_j)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je, kako smo diskutirali u Teoremu 3., regularna, pa vrijedi

$$\alpha_n(P) = \Pi\alpha_n(Q).$$

Time smo zapravo došli do kraja: neka je h proizvoljna analitička funkcija na $\overline{P \cup Q}$. Tada vrijedi

$$\iint\limits_P h''(z)dz = \sum_{j=1}^{n} a_j(P)h(z_j) = \begin{pmatrix} h(z_1) & h(z_2) & \dots & h(z_n) \end{pmatrix} \alpha_n(P) =$$

$$= \begin{pmatrix} h(z_1') & h(z_2') & \dots & h(z_n') \end{pmatrix} \Pi^{-1}\Pi\alpha_n(Q) = \sum_{j=1}^{n} a_j(Q)h(z_j') =$$

$$= \iint\limits_Q h''(z)dz.$$

□

Na temelju dokaza Propozicije 1. i prethodnog rezultata, zatvaramo ovo poglavlje rezultatom koji daje dovoljan uvjet za jedinstvenost generiranja poligona iz integrala potencija.

Korolar 3 (Dovoljan uvjet za jedinstvenost generiranja poligona iz integrala potencija)**.** *Neka su P i Q n-terokuti koji imaju istih prvih $2n-1$ integrala potencija neke injektivne funkcije f. Također, neka P i Q imaju barem jednu zajedničku stranicu i neka skup njihovih vrhova ne sadrži tri kolinearne točke. Tada je $P = Q$.*

Dokaz. P i Q zadovoljavaju uvjete prethodne propozicije te stoga, uz oznake iz dokaza iste, vrijedi $\alpha_n(P) = \Pi\alpha_n(Q)$ za neku permutacijsku matricu Π. Također, znamo da, ukoliko je $P = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, a $Q = (z_1', z_2', \dots, z_n')$, za sve analitičke funkcije $h : \overline{P \cup Q} \to \mathbb{C}$ vrijedi $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix} \Pi = \begin{pmatrix} z_1' & z_2' & \dots & z_n' \end{pmatrix}$. Kako je $(\alpha_n(P))^T = (\alpha_n(Q))^T\Pi^T = (\alpha_n(Q))^T\Pi^{-1}$, vrijedi

$$(\alpha_n(P))^T\Pi = (\alpha_n(Q))^T.$$

Dakle, vrhovi su permutirani na isti način kao i njima pripadni koeficijenti, pa iz Propozicije 1. obratom po kontrapoziciji slijedi rezultat. □

4 Određivanje broja vrhova poligona

Prethodni rezultati pokazuju da je za određivanje vrhova nepoznatog n-terokuta dovoljno znati prvih $2n-1$ integrala potencija i teorem, kao što je naznačeno u Napomeni 7., implicitno zahtijeva da nam je n poznat. Ipak, u praktičnim je primjenama razumno pretpostaviti da broj vrhova poligona ne znamo uvijek unaprijed. Stoga se postavlja pitanje možemo li Teorem 3. iskoristiti i ukoliko imamo nepoznat broj vrhova. To pitanje, uz smislen zahtjev da znamo dovoljno mnogo integrala potencija, ima pozitivan odgovor.

Teorem 4. *Neka je P nedegeneriran poligon s n vrhova. Ukoliko su dani integrali potencija τ_k, $k \in \{0, \dots, 2M\}$, pri čemu je $M \geq n-1$, rang matrice*

$$T_{M+1} = \begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_M \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_M & \tau_{M+1} & \cdots & \tau_{2M} \end{pmatrix}$$

je jednak n, u oznaci $r(T_{M+1}) = n$.

Dokaz. Uz korištenje oznaka iz Teorema 3., uviđamo da T_{M+1} možemo zapisati u obliku $T_{M+1} = Z_{M+1} A_n Z_{M+1}^T$. Tada je

$$r(T_{M+1}) \leq \min\{r(A_n), r(Z_{M+1}), r(Z_{M+1}^T)\}.$$

Budući da je $Z_{M+1} \in \mathbb{C}^{(M+1)\times n}$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, slijedi da je $r(Z_{M+1}) = r(Z_{M+1}^T) \leq n$ te $r(A) \leq n$. Stoga, vrijedi i $r(T_{M+1}) \leq n$. Međutim, u dokazu Teorema 3. pokazano je da vrijedi $r(T_n) = n$, a kako je T_n podmatrica matrice T_{M+1}, očito vrijedi $r(T_{M+1}) \geq n$. $\square$

Dakle, viška potrebnih integrala potencija se jednostavno rješavamo određivanjem ranga n Hankelove matrice T_{M+1}, a zatim uzimanjem njene pod-matrice T_n. Dapače, taj se algoritam pokazao kao numerički pouzdan i u testiranju je davao točne rezultate čak i za vrlo složene poligone.

Ipak, ne možemo pružiti pozitivan odgovor na problem traženja broja vrhova poligona iz proizvoljno mnogo integrala potencija.

Napomena 9. *Primijetimo da prethodni teorem ne pruža algoritam za nalaženje broja vrhova poligona, čak i ukoliko možemo izračunati proizvoljno mnogo integrala potencija. Naime, ne postoji nikakva garancija da broj nama poznatih integrala nije manji od onog potrebnog za određivanje vrhova.*

5 Neki rezultati za poligone s više rotacija

Vratimo se istraživanju kompleksnih momenata. Prvenstveno, zanima nas možemo li smanjiti broj momenata potrebnih za određivanje vrhova poligona. Na tu tvrdnju, u kontekstu projekcija, ranije je u općenitom slučaju negativno odgovoreno u [19].

Pokazuje se da poligoni s nekim svojstvima simetrije dopuštaju reduciranje broja momenata. U tu svrhu prvo definiramo pojam broja rotacija i dokazujemo preliminarije.

Definicija 5. *Poligon P* ***ima*** *r* ***rotacija*** *ukoliko je*

$$Rot_r(P) = P,$$

pri čemu je[6] *$Rot_r : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ operator rotacije u pozitivnom smjeru za kut $2\pi/r$ oko točke 0. Pri tome uzimamo $r \in \mathbb{N}$.*

Napomena 10. *Svaki poligon ima barem jednu rotaciju.*

Sljedeća je tvrdnja intuitivno jasna, no pomaže pri potrazi za rotacijama poligona, osobito uzevši u obzir kasniju propoziciju o nužnom uvjetu za broj rotacija.

Propozicija 4. *Ukoliko poligon P ima n vrhova i r rotacija, vrijedi $r|n$.*

Dokaz. Koristimo teorem [15] o dekompoziciji permutacije na cikluse. Neka poligon P ima vrhove $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Tada je, po definiciji rotacije,

$$\begin{pmatrix} Rot_r(z_1) & Rot_r(z_2) & \ldots & Rot_r(z_n) \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{pmatrix}$$

[6] S $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ označavamo sve podskupove skupa $\mathbb{C}$.

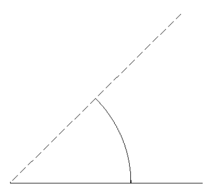
za neku permutacijsku matricu π. Znamo da pripadnu permutaciju možemo dekomponirati na disjunktne cikluse. Suma duljina tih ciklusa je očito jednaka n. Tvrdimo da je za $r > 1$ duljina svakog od tih ciklusa točno r, iz čega će očito slijediti $r|n$.

No, za svaki $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ vrijedi $Rot_r^r(\{z_j\}) = z_j$ (radi se o r rotacija za $2\pi/r$, tj. o rotaciji za 2π). Dakle, svaki od ciklusa je duljine najviše r. S druge strane, ako $Rot_r^k(\{z_j\}) = z_j$, imamo $z_j e^{\frac{2k\pi \mathrm{i}}{r}} = z_j$. Dakle, $k \geq r$ ili $z_j = 0$. Ukoliko je $z_j = 0$, nužno je $r = 1$ (inače će 0 biti višestruki vrh poligona P), pa svakako $r|n$. S druge strane, ako je $k \geq r$, pokazali smo da je svaki ciklus duljine barem r, čime završavamo dokaz. $\square$

5.1 Iskorištavanje rotacija u rekonstrukciji kompleksnim momentima

Prije samog dokaza donosimo lemu koja je od krucijalne važnosti za navedeni teorem. Za nju će nam biti potrebno definirati poluotvoreni kut.

Definicija 6. ***Poluotvoreni kut*** $\Phi(\varphi)$, $0 < \varphi \leq \pi$ *je dio kompleksne ravnine omeđen polupravcima* $\mathrm{Re}z \geq 0 \wedge \mathrm{Im}z = 0$ *i* $\mathrm{Im}z \geq 0 \wedge \mathrm{Im}z = \mathrm{tg}(\varphi)\mathrm{Re}z$, *pri čemu je polupravac* $\mathrm{Im}z = 0$ *uključen, a uz prirodno proširenje na poluotvoreni kut veličine* $\pi/2$. *Za* $\varphi = \pi$ *drugi polupravac je* $\mathrm{Re}z \leq 0 \wedge \mathrm{Im}z = 0$.



Slika 3: Poluotvoreni kut

Lema 1. *Neka je P poligon s n vrhova*[7] *i r rotacija. Tada za koeficijente p_j polinoma*

$$P(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1}z + p_n$$

vrijedi

$$r \nmid j \Rightarrow p_j = 0.$$

Dokaz. Neka su $z'_1, \ldots, z'_n$ vrhovi poligona poredani u smjeru obrnuto od kazaljke na satu, pri čemu je poredak vrhova koji su pod istim kutem uzlazan po modulu. Primijetimo da vrijedi $z'_{\frac{n}{r}+j} = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} z'_j$, uz konvenciju $z'_j = z'_{j \bmod n}$: poligon sastoji od r rotacija točaka koje se nalaze unutar jednog poluotvorenog kuta veličine $\frac{2\pi}{r}$. Budući da poligon ima n vrhova, u svakom od poluotvorenih kuteva nalazi se $\frac{n}{r}$ točaka. Jasno je da će se prva točka iz nekog poluotvorenog kuta preslikati u prvu točku koja leži u poluotvorenom kutu rotiranom za $e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}}$ pa vrijedi gornja tvrdnja.

Tada dobivamo

$$\begin{aligned} P(z) &= \prod_{j=1}^{n}(z - z_j) = \prod_{j=1}^{n}(z - z'_j) = \prod_{j=0}^{r-1}\prod_{t=1}^{\frac{n}{r}}(z - z'_{jk+t}) = \\ &= \prod_{t=1}^{\frac{n}{r}}\prod_{j=0}^{r-1}(z - z'_t w_j) \end{aligned}$$

gdje su $\omega_j = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r} j}$, $j = 0, \ldots, r-1$ $r-$ti korijeni iz jedinice, pa je

$$\prod_{j=0}^{r-1}(z - z'_t w_j) = (z'_t)^r \prod_{j=0}^{r-1}(\frac{z}{(z'_t)^r} - w_j) = (z'_t)^r((\frac{z}{z'_t})^r - 1) = z^r - (z'_t)^r.$$

Dakle,

$$P(z) = \prod_{t=1}^{\frac{n}{r}}(z^r - (z'_t)^r) = \prod_{t=1}^{\frac{n}{r}}(z^r - z_t^r),$$

[7] Podsjećamo da vrhove i ovdje i drugdje u radu, ako nije drugačije navedeno, standardno označavamo sa z_1, z_2, $\ldots$, z_n.

iz čega se vidi da se u raspisu polinoma P po koeficijentima ne javljaju potencije koje nisu djeljive s r. $\square$

Dolazimo do centralnog rezultata ovog poglavlja, koji dokazuje da, ukoliko poligon ima više od jedne rotacije i njegov broj rotacija unaprijed znamo, možemo znatno olakšati rekonstrukciju njegovih vrhova.

Teorem 5. *Neka je P poligon s n vrhova i r rotacija. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) Ukoliko je $r = 1$, vrhove poligona P možemo odrediti preko $0.,1.,2.,\ldots,$ $(2n-3)$. momenta (ukupno $2n-2$ momenata).

(ii) Ukoliko je $r = 2$, vrhove poligona P možemo odrediti preko $0.,2.,4.,\ldots,$ $(2n-4)$. momenta (ukupno $n-1$ momenata).

(iii) Ukoliko je $r \geq 3$, vrhove poligona P možemo odrediti preko $0.,r.,2r.,\ldots,$ $(2n-r)$. momenta (ukupno n/r momenata).

Dokaz. Iz Leme 1., a uz oznake iz Teorema 3., vrijedi

$$\begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_{n-1} \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \cdots & \tau_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \tau_{n-1} & \tau_n & \tau_{n+1} & \cdots & \tau_{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ 0 \\ \vdots \\ p_{n-r} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_n \\ -\tau_{n+1} \\ \vdots \\ -\tau_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

U Teoremu 3. je pokazano da gornja jednadžba ima jedinstveno rješenje. Nastavljamo s modifikacijom Pronyjeve metode, eliminiranjem nepotrebnih stupaca te dobivamo

$$\begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_r & \cdots & \tau_{n-r} \\ \tau_1 & \tau_{r+1} & \cdots & \tau_{n-r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-1} & \tau_{n-1+r} & \cdots & \tau_{2n-r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-r} \\ \vdots \\ p_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_n \\ -\tau_{n+1} \\ \vdots \\ -\tau_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je ovaj sustav za $r \geq 2$ predefiniran, u smislu da se sastoji od n jednadžbi s $k = \frac{n}{r} < n$ nepoznanica, pa želimo izdvojiti k linearno nezavisnih redaka lijeve matrice. Počinje glavni dio dokaza:

(i) Za $r = 1$ dokaz smo izveli u Teoremu 3.

(ii) Neka je sada $r = 2$. Primijetimo da je u tom slučaju n nužno paran i $k = \frac{n}{2}$. Biramo $1., 3., 5., \ldots, (n-1)$. redak.

$$\begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_2 & \cdots & \tau_{n-2} \\ \tau_2 & \tau_4 & \cdots & \tau_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-2} & \tau_n & \cdots & \tau_{2n-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-2} \\ \vdots \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_n \\ -\tau_{n+2} \\ \vdots \\ -\tau_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Preostaje pokazati da je matrica slijeva regularna. Označimo ju s $T_n^{(2)}$. Vrijedi

$$T_n^{(2)} = Z_n^{(2)} A_n (Z_n^{(2)})^T,$$

uz oznake

$$Z_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-2} & z_2^{n-2} & \cdots & z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

i

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Uvodimo supstituciju $\hat{z}_j = z_j^2$ te primijetimo da je

$$\hat{z}_{\frac{n}{2}+j} = z_{\frac{n}{2}+j}^2 = z_j^2 (e^{\frac{2\pi i}{2}})^2 = z_j^2 = \hat{z}_j.$$

Označimo li sa Z

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & \cdots & \hat{z}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{z}_1^{k-1} & \hat{z}_2^{k-1} & \cdots & \hat{z}_k^{k-1} \end{pmatrix},$$

dobivamo blok dekompoziciju matrice $T_n^{(2)}$:

$$T_n^{(2)} = \begin{bmatrix} Z & Z \end{bmatrix} A_n \begin{bmatrix} Z^T \\ Z^T \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo kako broj rotacija poligona utječe na koeficijente a_j:

$$\begin{aligned} a_{\frac{n}{2}+j} &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\overline{z_{\frac{n}{2}+j-1}} - \overline{z_{\frac{n}{2}+j}}}{z_{\frac{n}{2}+j-1} - z_{\frac{n}{2}+j}} - \frac{\overline{z_{\frac{n}{2}+j}} - \overline{z_{\frac{n}{2}+j+1}}}{z_{\frac{n}{2}+j} - z_{\frac{n}{2}+j+1}} \right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\overline{z_{j-1}e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{2}}} - \overline{z_j e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{2}}}}{(z_{j-1} - z_j)e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{2}}} - \frac{\overline{z_j e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{2}}} - \overline{z_{j+1}e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{2}}}}{(z_j - z_{j+1})e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{2}}} \right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\overline{z}_{j-1} - \overline{z}_j}{z_{j-1} - z_j} - \frac{\overline{z}_j - \overline{z}_j}{z_j - z_{j+1}} \right) = a_j \end{aligned}$$

Tada je

$$T_n^{(2)} = \begin{bmatrix} Z & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & A_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^T \\ Z^T \end{bmatrix}$$

iz čega slijedi

$$T_n^{(2)} = 2ZA_{\frac{n}{2}}Z^T.$$

Iz Korolara 1. slijedi da su svi $a_j \neq 0$ ukoliko je P nedegeneriran poligon. Stoga je matrica $A_{\frac{n}{2}}$ regularna, a isto vrijedi i za matricu Z budući da se radi o Vandermondeovoj matrici za točke $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_{\frac{n}{2}}$ koje su sve međusobno različite. Slijedi da je matrica $T_n^{(2)}$ također regularna pa dobivamo

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-2} \\ \vdots \\ p_2 \end{pmatrix} = -(T_n^{(2)})^{-1} \begin{pmatrix} \tau_n \\ \tau_{n+2} \\ \vdots \\ \tau_{2n-2} \end{pmatrix}$$

čime je dokazana tvrdnja za $r = 2$.

(iii) Neka je $r \geq 3$. Ideja dokaza slična je iskazanoj za $r = 2$: ponovno biramo r redaka i to upravo $3., r+3., \ldots, (n-r+3).$ redak (primijetimo da to nema smisla u slučaju da je $r \leq 2$). Dakle, imamo

$$\begin{pmatrix} \tau_2 & \tau_{r+2} & \cdots & \tau_{n-r+2} \\ \tau_{r+2} & \tau_{2r+2} & \cdots & \tau_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-r+2} & \tau_{n+2} & \cdots & \tau_{2n-2r+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-r} \\ \vdots \\ p_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_n \\ -\tau_{n+r+2} \\ \vdots \\ -\tau_{2n-r+2} \end{pmatrix}.$$

Koristeći sljedeću dekompoziciju: $\begin{pmatrix} \tau_2 & \tau_{r+2} & \cdots & \tau_{n-r+2} \\ \tau_{r+2} & \tau_{2r+2} & \cdots & \tau_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-r+2} & \tau_{n+2} & \cdots & \tau_{2n+r-2} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1^{r+1} & z_2^{r+1} & \cdots & z_n^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-r+1} & z_2^{n-r+1} & \cdots & z_n^{n-r+1} \end{pmatrix} A_n \begin{pmatrix} z_1 & z_1^{r+1} & \cdots & z_1^{n-r+1} \\ z_2 & z_2^{r+1} & \cdots & z_2^{n-r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n & z_2^{r+1} & \cdots & z_n^{n-r+1} \end{pmatrix},$$

pokazat ćemo da je matrica slijeva regularna.

Neka je $\hat{z_j} = z_j^r$. Tada je

$$\hat{z}_{k+j} = z_{k+j}^r = (z_j e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}})^r, \text{ gdje je } k = \frac{n}{r}.$$

Matricu $Z_n^{(r)}$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$Z_n^{(r)} = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_k & z_{k+1} & \cdots & z_n \\ \hat{z_1} z_1 & \cdots & \hat{z_k} z_k & \widehat{z_{k+1}} z_{k+1} & \cdots & \hat{z_n} z_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \hat{z_1}^{k-1} z_1 & \cdots & \hat{z_k}^{k-1} z_k & \widehat{z_{k+1}}^{k-1} z_{k+1} & \cdots & \hat{z_n}^{k-1} z_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_k & z_1 e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} & \cdots & z_k e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} \\ \hat{z_1} z_1 & \cdots & \hat{z_k} z_k & \hat{z_1} z_1 e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} & \cdots & \hat{z_k} z_k e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \hat{z_1}^{k-1} z_1 & \cdots & \hat{z_k}^{k-1} z_k & \hat{z_1}^{k-1} z_1 e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} & \cdots & \hat{z_k}^{k-1} z_k e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} \end{pmatrix}.$$

Ako sa Z označimo $k \times k$ matricu $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_k \\ \hat{z_1} z_1 & \hat{z_2} z_2 & \cdots & \hat{z_k} z_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{z_1}^{k-1} z_1 & \hat{z_2}^{k-1} z_2 & \cdots & \hat{z_k}^{k-1} z_k \end{pmatrix}$,

dobivamo blok reprezentaciju:

$$Z_n^{(r)} = \begin{bmatrix} Z & e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} Z & e^{2\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} Z & \cdots & e^{(r-1)\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} Z \end{bmatrix}, \text{ odnosno}$$

$$T_n^{(r)} = \begin{bmatrix} Z & e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} Z & e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}2} Z & \cdots & e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}(r-1)} Z \end{bmatrix} A_n \begin{bmatrix} Z^T \\ e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}} Z^T \\ e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}2} Z^T \\ \vdots \\ e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}(r-1)} Z^T \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo u kakvom su odnosu koeficijenti a_j i a_{tk+j}:

$$\begin{aligned} a_{tk+j} &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\overline{z_{tk+j-1}} - \overline{z_{tk+j}}}{z_{tk+j-1} - z_{tk+j}} - \frac{\overline{z_{tk+j}} - \overline{z_{tk+j+1}}}{z_{tk+j} - z_{tk+j+1}} \right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\overline{z_{j-1} e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}t}} - \overline{z_j e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}t}}}{(z_{j-1} - z_j) e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}t}} - \frac{\overline{z_j e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}t}} - \overline{z_{j+1} e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}t}}}{(z_j - z_{j+1}) e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{r}t}} \right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2} e^{-\frac{4\pi i}{r}t} \left(\frac{\overline{z}_{j-1} - \overline{z}_j}{z_{j-1} - z_j} - \frac{\overline{z}_j - \overline{z}_j}{z_j - z_{j+1}} \right) = e^{-\frac{4\pi i}{r}t} a_j. \end{aligned}$$

Uočimo da tada za blok matricu A_n, uz definiciju

$$A_k = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_k \end{pmatrix},$$

vrijedi

$$A_n = \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-\frac{4\pi}{r}} A_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-\frac{4\pi}{r}(r-1)} A_k \end{bmatrix}.$$

Naposljetku,

$$T_n^{(r)} = \begin{bmatrix} Z \\ e^{\frac{2\pi i}{r}} Z \\ \vdots \\ e^{(r-1)\frac{2\pi i}{r}} Z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-\frac{4\pi}{r}} A_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-\frac{4\pi}{r}(r-1)} A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^T \\ e^{\frac{2\pi i}{r}} Z^T \\ \vdots \\ e^{\frac{2\pi i}{r}(r-1)} Z^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Z & e^{-\frac{2\pi i}{r}} Z A_k & \cdots & e^{-(r-1)\frac{2\pi i}{r}} Z A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^T \\ e^{\frac{2\pi i}{r}} Z^T \\ \vdots \\ e^{\frac{2\pi i}{r}(r-1)} Z^T \end{bmatrix}$$

$$= r Z A_k Z^T.$$

Ukoliko P nije degeneriran, A_n je regularna pa preostaje pokazati da je matrica Z regularna:

$$\det Z = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_k \\ \hat{z}_1 z_1 & \hat{z}_2 z_2 & \cdots & \hat{z}_k z_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{z}_1^{\,k-1} z_1 & \hat{z}_2^{\,k-1} z_2 & \cdots & \hat{z}_k^{\,k-1} z_k \end{vmatrix}$$

$$= z_1 z_2 \cdots z_k \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & \cdots & \hat{z}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{z}_1^{\,k-1} & \hat{z}_2^{\,k-1} & \cdots & \hat{z}_k^{\,k-1} \end{vmatrix}.$$

Uočimo da su svi $z_i \neq 0$ jer bi u suprotnom 0 bio višestruki vrh poligona. Također, matrica Z je Vandermondeova, i to u različitim točkama jer je $\hat{z}_a \neq \hat{z}_b$ za $a \neq b$, $a, b \in \{1, \ldots, k\}$. Naime, ukoliko bi postojali a, b takvi da to vrijedi, dobili bismo da je $r \arg z_a = r \arg z_b + 2l\pi$, za neki $l \in \mathbb{Z}$, odnosno $|\arg z_a - \arg z_b| \geq \frac{2\pi}{r}$, a to ne može biti istinito budući da su a i b iz istog poluotvorenog kuta veličine $\frac{2\pi}{r}$. Iz gore navedenog slijedi da je matrica Z regularna.

Time je dokaz ovog teorema završen. $\square$

Napomena 11. *Primijetimo da prethodna tvrdnja u dokazu u bitnom koristi svojstva identitete i sasvim je jasno da nije primjenjiva za općenite integrale potencija.*

5.2 Otkrivanje rotacija

Uzevši u obzir prethodni rezultat, postavlja se pitanje možemo li nekako odrediti broj rotacija poligona bez znanja njegovih vrhova.

Uz Propoziciju 4., sljedeća propozicija daje kriterij za određivanje potencijalnih kandidata za rotacije te će se pokazati korisnom pri određivanju nekih numeričkih svojstava metoda. Usto, bit će nam od koristi pri određivanju nekih numeričkih svojstava metode. Tvrdnja je poznata i javlja se u više sličnih iskaza, na primjer u [8, 25]. Ovdje predstavljamo inačicu koji je jednostavno primjenjiva uz Pronyjevu metodu, uz direktan dokaz.

Propozicija 5 (Nužan uvjet za broj rotacija pomoću kompleksnih momenata)**.** *Za poligon P s r rotacija vrijedi*

$$\tau_{kr+3} = \tau_{kr+4} = \ldots = \tau_{kr+r+1} = 0, \text{ za } k \in \mathbb{N}_0.$$

Najprije dokazujemo sljedeću tehničku lemu:

Lema 2. *Ako su $\omega_p = e^{\frac{2\pi i}{r}p}$, $p \in \{0, \ldots, r-1\}$ $r-$ti korijeni iz jedinice, tada vrijedi:*

$$\sum_{p=0}^{r-1} \omega_p^k = 0, \text{ za } k \in \{1, \ldots, r-1\}.$$

Dokaz. Tvrdnja jednostavno slijedi iz teorije elementarnih simetričnih polinoma i Newtonovih identiteta [17]. Iz Vieteovih formula dobivamo da je za $k = 1$ istinita. Dalje, uz oznaku

$$e_j(\omega_0, \ldots, \omega_{r-1}) = \sum_{0 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_j \le r-1} \omega_{a_1}\omega_{a_2}\ldots\omega_{a_j},$$

uzimamo u obzir Newtonov identitet ([20])

$$ke_k(\omega_0, \ldots, \omega_{r-1}) = \sum_{j=1}^{k-1}((-1)^{j-1}e_{k-j}(\omega_0, \ldots, \omega_{r-1})\sum_{p=0}^{r-1}\omega_p^j) + (-1)^{k-1}\sum_{p=0}^{r-1}\omega_p^k.$$

Budući da iz Vieteovih formula slijedi $e_j(\omega_0, \ldots, \omega_{r-1}) = 0$ za sve $j \in \{1, \ldots, r-1\}$, imamo

$$0 = (-1)^{k-1}\sum_{p=0}^{r-1}\omega_p^k, \ k \in \{1, \ldots, r-1\}.$$

$\square$

Slijedi dokaz Propozicije 5.

Dokaz. Uzevši u obzir prethodne oznake, dobivamo $z_{j+\frac{n}{r}} = z_j e^{\frac{2\pi i}{r}}$, iz čega slijedi

$$\tau_l = \sum_{j=1}^{n} a_j z_j^l = \sum_{j=1}^{\frac{n}{r}}\sum_{p=0}^{r-1} a_{j+\frac{pn}{r}} z_j^l((e^{\frac{2\pi i}{r}})^p)^l, \text{ za } l \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, pokazana je jednakost $a_{j+\frac{pn}{r}} = e^{p\frac{-4\pi i}{r}}a_j$. Tada za $k \in \mathbb{N}_0$ dobivamo:

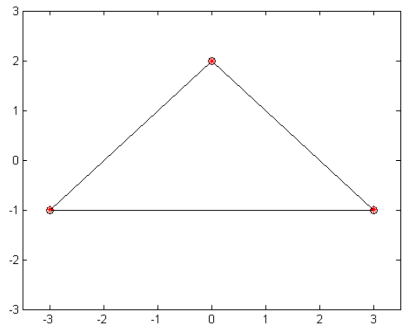
$$\begin{aligned}\tau_{kr+l} &= \sum_{j=1}^{n} a_j z_j^{kr+l} = \sum_{j=1}^{\frac{n}{r}}\sum_{p=0}^{r-1} a_j z_j^{kr+l} e^{\frac{2pl\pi i}{r} - \frac{4p\pi i}{r}} \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{n}{r}} a_j z_j^{kr+l}\sum_{p=0}^{r-1}(e^{\frac{2p\pi i}{r}})^{l-2}.\end{aligned}$$

Uvedemo li oznake kao u prethodnoj lemi, jasno je da vrijedi

$$\tau_{kr+l} = \sum_{j=1}^{\frac{n}{r}} a_j z_j^{kr+l} \cdot 0 = 0, \text{ za } l \in \{3, \ldots, r+1\},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

$\square$

Napomena 12. *Obrat ne vrijedi. Na primjer, za trokut* $(-3-\mathfrak{i}, 3-\mathfrak{i}, 2\mathfrak{i})$ *vrijedi* $\tau_3 = 0$*, a ovaj trokut ima samo jednu rotaciju.*



Slika 4: Kontraprimjer za obrat Propozicije 5.

6 Numerički rezultati i testiranje

6.1 Moguće greške Pronyjeve metode

Iako Pronyjeva metoda daje jednostavan odgovor na pitanje kako rekonstruirati vrhove poligona, u algoritmu ima nekoliko numerički loših dijelova koji nepovoljno utječu na točnost dobivenih rezultata.

Prvenstveno, matrica T_n je loše uvjetovana — kao što ćemo pokazati, njena kondicija [27] može biti proizvoljno velika. Stoga, prirodno je pitanje možemo li na neki način odrediti kad će ona postati prevelika. U tu svrhu putem Propozicije 5. dokazujemo sljedeći, naizgled vrlo specifičan, rezultat.

Teorem 6. *Neka je P pravilni mnogokut sa središtem u 0 i apsolutnom vrijednošću svakog vrha jednakom R, $R > 0$. Označimo njemu pripadnu matricu kompleksnih momenata s T_n. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i)

$$\kappa_2(T_3) = 1.$$

Za $n > 3$,

$$\kappa_2(T_n) = \|T_n\|_2 \|T_n^{-1}\|_2 = \begin{cases} 4R^n & : R \geq \sqrt[n]{\frac{1}{4}} \\ \frac{1}{4R^n} & : R < \sqrt[n]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

(ii)

$$\kappa_F(T_3) = 1.$$

Za $n > 3$, postoje konstante $C_1, C_2, C_3 > 0$ ovisne o n takve da vrijedi

$$\kappa_F(T_n) = \|T_n\|_F \|T_n^{-1}\|_F = \sqrt{C_1 R^{2n} + C_2 + \frac{C_3}{R^{2n}}}.$$

Dokaz. Neka je $P = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Iz uvjeta teorema je očito da P ima n rotacija, pa iz Propozicije 5. slijedi su svi τ_j, $j \in \{0, 1, 3, 4, \ldots, n, n+1, n+3, n+4 \ldots, 2n-2\}$ jednaki 0. Dakle,

$$T_n = \begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_{n-1} \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \\ \tau_2 & \tau_3 & \cdots & \tau_{n+1} \\ \tau_3 & \tau_4 & \cdots & \tau_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-1} & \tau_n & \cdots & \tau_{2n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \cdots & 0 \\ \tau_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Očitom permutacijom redaka transformirajmo T_n u dijagonalnu matricu. Pri tome je poznato da se Frobeniusova i 2-norma ne mijenjaju. [23] Dobivamo da T_n ima istu Frobeniusovu normu i istu 2-normu kao matrica

$$D = \begin{pmatrix} \tau_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_{n+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \tau_{n+2} \end{pmatrix},$$

a T_n^{-1} istu Frobeniusovu i 2-normu kao D^{-1}.

(i) Ukoliko je $n > 3$, poznato je (npr. [11]) da je

$$\|D\|_2 = \max\{|\tau_2|, |\tau_{n+2}|\}.$$

Isto tako,

$$\|D^{-1}\|_2 = \max\left\{\frac{1}{|\tau_2|}, \frac{1}{|\tau_{n+2}|}\right\}.$$

Naravno, budući da se radi o pozitivnim realnim brojevima, onda vrijedi

$$\kappa_2(D) = \max\left\{\frac{|\tau_{n+2}|}{|\tau_2|}, \frac{|\tau_2|}{|\tau_{n+2}|}\right\}.$$

Stoga, preostaje procijeniti τ_2 i τ_{n+2}. Znamo da je apsolutna vrijednost od τ_2 jednaka površini poligona P. Poznata formula za površinu pravilnog n-terokuta kaže da ona iznosi

$$P = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Dakle, $|\tau_2| = \frac{n}{2} R^2 \left|\sin \frac{2\pi}{n}\right|$.

S druge strane, iz dokaza Propozicije 5., a koristeći u tom kontekstu da je broj rotacija jednak n, imamo da je

$$\tau_{n+2} = a_1 z_1^{n+2} \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{2p\pi \mathrm{i}}{n} n} = n a_1 z_1^{n+2}.$$

Stoga,

$$|\tau_{n+2}| = n R^{n+2} |a_1|.$$

Iz Teorema 1. znamo da vrijedi

$$|a_1| = \left| \frac{\overline{z_n - z_1}}{z_n - z_1} - \frac{\overline{z_1 - z_2}}{z_1 - z_2} \right|,$$

a uvrštavanjem $z_2 = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} z_1$ i $z_n = e^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} z_1$ dobivamo

$$|a_1| = \frac{|\overline{z_1}|}{|z_1|} \left| \frac{e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} - 1}{e^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} - 1} - \frac{e^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} - 1}{e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} - 1} \right| = |e^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} - e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}| = 2 \left| \sin \frac{2\pi}{n} \right|.$$

Stoga,

$$\frac{|\tau_{n+2}|}{|\tau_2|} = 4 \frac{R^{n+2}}{R^2} = 4R^n.$$

Time smo završili slučaj $n > 3$. Za $n = 3$, T_n je oblika λI za neki $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, a onda je jasno da joj je kondicija 1.

(ii) Iz definicije Frobeniusove norme imamo

$$\|D\|_F = \sqrt{3|\tau_2|^2 + (n-3)|\tau_{n+2}|^2},$$
$$\|D^{-1}\|_F = \sqrt{3|\tau_2|^{-2} + (n-3)|\tau_{n+2}|^{-2}}.$$

Stoga dobivamo da je za $n > 3$

$$\kappa_F(T_n) = \sqrt{\tilde{C}_1|\tau_2|^{-2}|\tau_{n+2}|^2 + \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3|\tau_2|^2|\tau_{n+2}|^{-2}}$$

za neke pozitivne konstante $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ i $\tilde{C}_3$.

Budući da smo u prvom dijelu dokaza već pokazali da su $|\tau_2|$ i $|\tau_{n+2}|$ proporcionalni s R^2 i R^{n+2}, tvrdnja slijedi direktno za $n > 3$. Za $n = 3$, T_n je oblika λI za neki $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, pa joj je i kondicija s obzirom na Frobeniusovu normu jednaka 1.

□

Izrazi iz Teorema 6. na intuitivnoj se razini mogu shvatiti i ovako: za poligone čiji su svi vrhovi vrlo blizu ishodištu (recimo da su udaljeni oko R), kondicija matrice T_n otprilike je proporcionalna $1/R^{n+2}$. Ukoliko su vrhovi daleko od ishodišta, kondicija je otprilike proporcionalna R^{n+2}.

Budući da je teorem u svojem iskazu vrlo specifičan, sljedeća je napomena od posebne važnosti.

Napomena 13. *Stvarni primjeri daju naslutiti da ocjene slične onima iz Teorema 6., pri čemu je r maksimalna udaljenost vrhova od ishodišta, vrijede i za općenite poligone.*

Pri borbi s kondicijom matrice, javlja se [12, 9] ideja iskorištavanja posebne strukture Hankelove matrice da bi se doskočilo uvjetovanosti i riješilo sustav. Ipak, čak i bez takvih poboljšanja se pokazuje da ova točka u algoritmu nije ono što uzrokuje najveću grešku.

Primjećujemo da u dokazu Teorema 3. vrhove poligona dobivamo preko nultočaka polinoma kojem znamo koeficijente. Abel-Ruffinijev teorem [1] dokazuje da se tom problemu ne može pristupiti egzaktno, a radi se o numerički problematičnom postupku, kao što se vidi na primjeru [28] Wilkinsonovog polinoma.

MATLAB standardno nultočke polinoma traži rješavanjem svojstvenog problema za matricu pratilicu tog polinoma [14] i, iako se mogu smisliti i neki drugi pristupi [16, 18], upravo greške dobivene u ovom dijelu algoritma najviše utječu na točnost krajnjeg rezultata.

Naposljetku, za općenite integrale potencija injektivne funkcije f, same vrhove polinoma dobivamo korištenjem inverza funkcije f. U slučaju kompleksnih momenata, inverz je identiteta, pa nema nikakvih problema, no kod nešto složenijih funkcija, traženje i računanje inverza može biti problematično.

6.2 Testiranje

Testovi koji slijede obavljeni su na standardan način: iz zadanog poligona koristeći Teorem 1. izračunati su odgovarajući integrali potencija.[8] Nakon toga, Pronyjevom metodom pokušali smo rekonstruirati vrhove.

Testiranja smo podijelili na dva dijela, a provodili na kvadratu $[-1,1] \times [-1,1]$ koristeći integrale potencija bez uvođenja dodatnog šuma.[9] Iako je izvedivost toga u praktičnim primjenama upitna, okvir $[-1,1] \times [-1,1]$ nije izabran slučajno, budući da vrijedi sljedeći lagan rezultat.

Propozicija 6. *Neka je poligon $P = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ omeđen krugom radijusa R s radijusom u ishodištu, tj. takav da vrijedi*

$$\|(z_1, z_2, \ldots, z_n)\|_\infty \leq R.$$

[8]Primijetimo da već ove vrijednosti nisu posve točne. No, u praksi se ionako može očekivati [22] šum, pa nije realno očekivati savršene vrijednosti integrala potencija.

[9]Oznaka $[-1,1] \times [-1,1]$ u ovom slučaju stoji za $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z \in [-1,1] \wedge \mathrm{Im} z \in [-1,1]\}$.

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\overline{K}(0,R) \in \Omega$, analitička funkcija. Tada postoji konstanta $C > 0$, ovisna o f i R, takva da za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left| \iint_P \frac{d^2}{dz^2} f^k(z) dz \right| \leq Ck^2 \|f\|^k_{\infty,R},$$

pri čemu je za funkciju g, $\|g\|_{\infty,R}$ definirano s $\max\{|g(z)| : |z| \in \overline{K}(0,R)\}$.

Dokaz. Neka je $k \geq 2$. Tvrdnja dalje slijedi ograničavanjem vrijednosti integrala

$$\begin{aligned}
\left| \iint_P \frac{d^2}{dz^2} f^k(z) dz \right| &\leq \iint_P \left| \frac{d^2}{dz^2} f^k(z) \right| dz = \\
&= \iint_P \left| k(k-1) f^{k-2}(z)(f'(z))^2 + k f^{k-1}(z) f''(z) \right| dz \leq \\
&\leq \iint_P k(k-1)\|f\|^{k-2}_{\infty,R}\|f'\|^2_{\infty,R} + k\|f\|^{k-1}_{\infty}\|f''\|_{\infty,R} dz \leq \\
&\leq R^2 \pi k \big((k-1)\|f\|^{k-2}_{\infty,R}\|f'\|^2_{\infty,R} + \|f\|^{k-1}_{\infty}\|f''\|_{\infty,R} \big) \\
&\leq \tilde{C} k^2 \left(\|f\|^{k-2}_{\infty,R}\|f'\|^2_{\infty,R} + \|f\|^{k-1}_{\infty}\|f''\|_{\infty,R} \right)
\end{aligned}$$

za neki $\tilde{C} > 0$. Sada, budući da su funkcije f' i f'' ograničene na $\overline{K}(0,R)$, a $\|f\|^{k-2}_{\infty,R} \leq M_2 \|f\|^k_{\infty,R}$ i $\|f\|^{k-1}_{\infty,R} \leq M_1 \|f\|^k_{\infty,R}$ za neke $M_1, M_2 > 0$, gotovi smo:

$$\left| \iint_P \frac{d^2}{dz^2} f^k(z) dz \right| \leq Ck^2 \|f\|^k_{\infty,R}.$$

$\square$

Korolar 4. *Neka je P proizvoljan poligon, a $f(z) \equiv z$. Tada, uz oznake kao u Teoremu 3., ako vrijedi $P \subseteq K(0,1)$,*

$$\lim_{k \to \infty} \tau_k = 0.$$

Dokaz. Budući da je $\overline{P}$ zatvoren skup, ako vrijedi $P \subseteq K(0,1)$, vrijedi i $P \subseteq K(0, 1-\varepsilon)$ za neki $\varepsilon > 0$. Uzmimo, u smislu Propozicije 6., $R = 1 - \varepsilon$. Tada vrijedi $\|f\|_{\infty,R} = R$ i u uvjetima smo Propozicije 6. Dakle,

$$|\tau_k| \leq Ck^2(1-\varepsilon)^k$$

za neki $C > 0$. Očito, $\tau_k \longrightarrow 0$. $\square$

Dakle, ukoliko su vrhovi poligona blizu ishodišta, njihovi integrali potencija će općenito rasti sporije, a za poligone unutar otvorene kružnice oko ishodišta radijusa 1, njihovi kompleksni momenti će težiti u 0. Nadalje, kao što Teorem 6. predviđa, a na primjerima pokazuje sljedeća tablica, u slučaju da su vrhovi poligona jako udaljeni od ishodišta, kondicija matrice će biti velika. No, ukoliko su vrhovi poligona jako blizu ishodištu, kondicija će ponovno biti velika. Stoga se kvadrat $[-1,1] \times [-1,1]$ čini kao optimalno rješenje za skaliranje.

U donjoj tablici usporedili smo kondicije[10] i maksimalne (među prvih $2n$) integrale potencija poligona s 3, 4, 5 i 7 vrhova sadržanih u $[-1,1] \times [-1,1]$ s njihovim translacijama. S $P + (10 + 10\mathfrak{i})$ označavamo translaciju poligona za $10 + 10\mathfrak{i}$, dok s $n(P)$ označavamo broj vrhova poligona P, a s $\tau_{max}(P)$ maksimalni integral potencija poligona P.

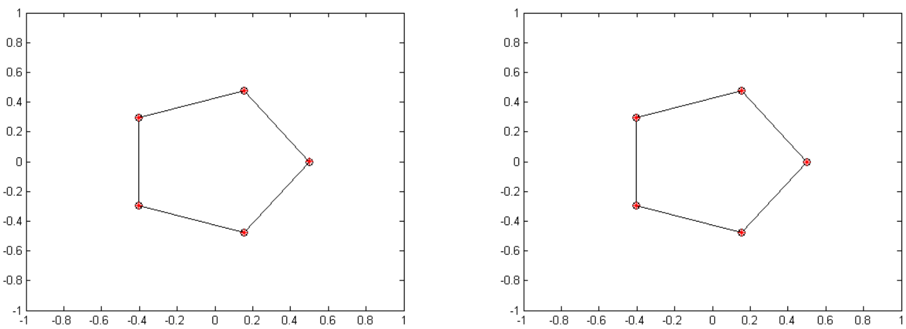
[10] Valja imati na umu da su kondicije računane ugrađenom funkcijom u MATLAB-u te je stoga njihova preciznost, posebno za jako velike vrijednosti, upitna.

Tablica 1: Usporedba svojstava poligona sa svojstvima njihovih translacija.

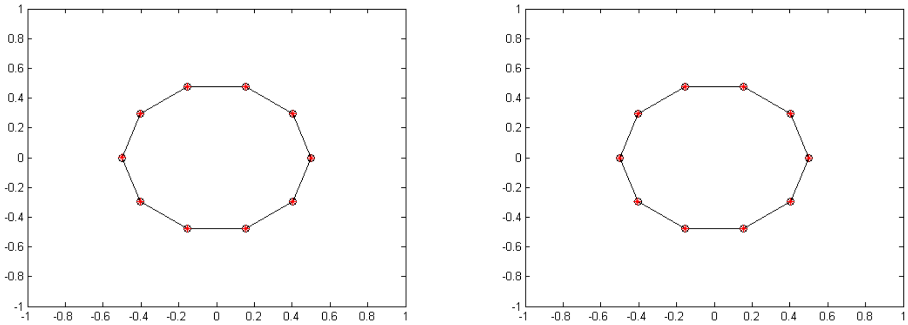
$n(P)$	$\kappa_2(P)$	$\tau_{max}(P)$	$\kappa_2(P + (10 + 10\mathrm{i}))$	$\tau_{max}(P + (10 + 10\mathrm{i}))$
3	18.18	8.06	$8.8 \cdot 10^6$	$1.52 \cdot 10^7$
4	4	2	$2.01 \cdot 10^{13}$	$8.15 \cdot 10^9$
5	244.31	14.68	$1.22 \cdot 10^{18}$	$2.98 \cdot 10^{12}$
7	$5.8 \cdot 10^6$	283.84	$1.45 \cdot 10^{23}$	$1.45 \cdot 10^{17}$

6.2.1 Integrali eksponencijalne funkcije

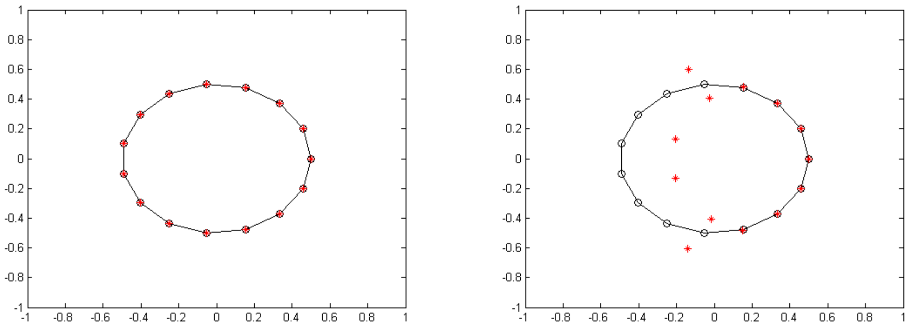
Uspoređujemo rekonstrukciju vrhova poligona iz integrala potencija funkcija $f(z) = z$ i $f(z) = e^z$. Eksponencijalna funkcija na $[-1, 1] \times [-1, 1]$ zadovoljava uvjete Teorema 3. te se čini prikladnim izborom jer se računa na jednostavan način i ima jednostavan inverz.



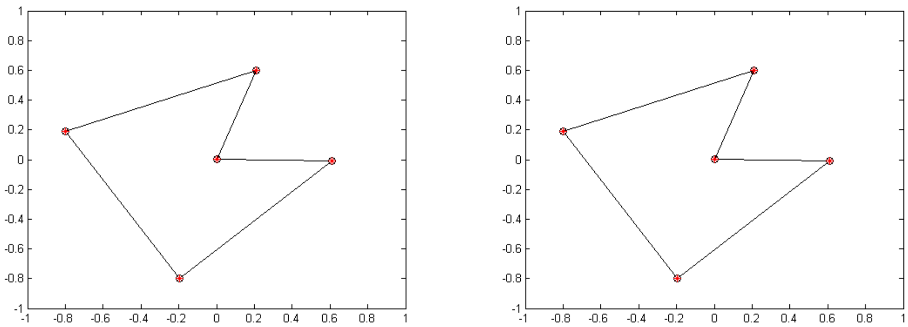
Slika 5: Pravilan peterokut: lijevo $f(z) = z$, desno $f(z) = e^z$.



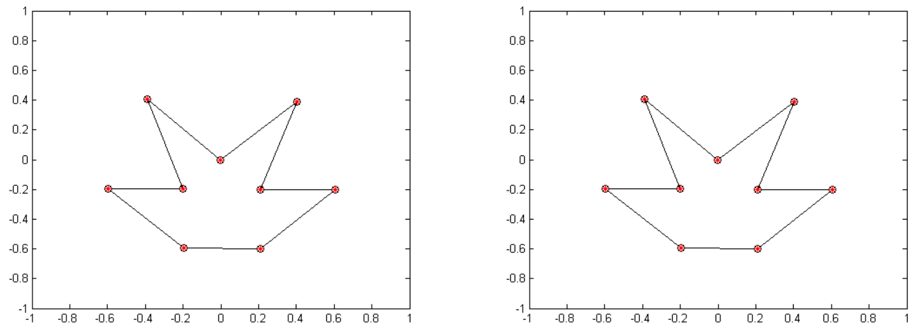
Slika 6: Pravilan 10-erokut: lijevo $f(z) = z$, desno $f(z) = e^z$.



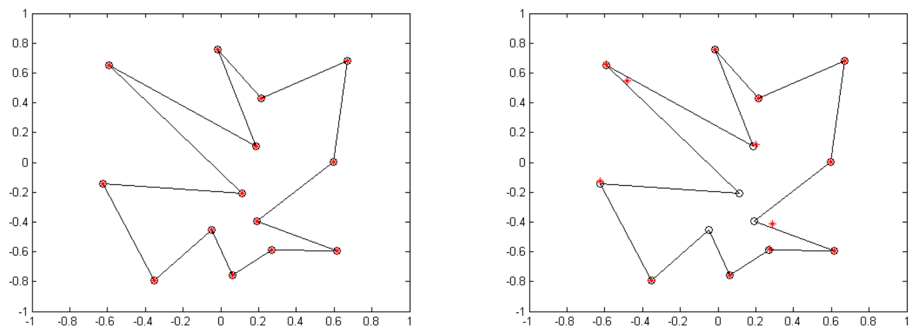
Slika 7: Pravilan 15-erokut: lijevo $f(z) = z$, desno $f(z) = e^z$.



Slika 8: Nekonveksan peterokut: lijevo $f(z) = z$, desno $f(z) = e^z$.



Slika 9: Nekonveksan 9-erokut: lijevo $f(z) = z$, desno $f(z) = e^z$.

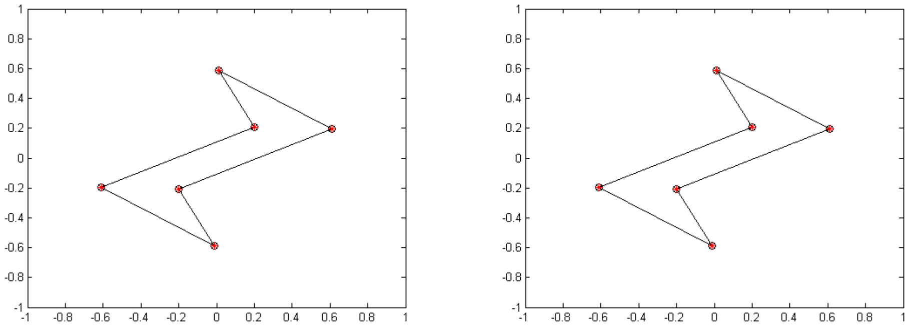


Slika 10: Nekonveksan 14-erokut: lijevo $f(z) = z$, desno $f(z) = e^z$.

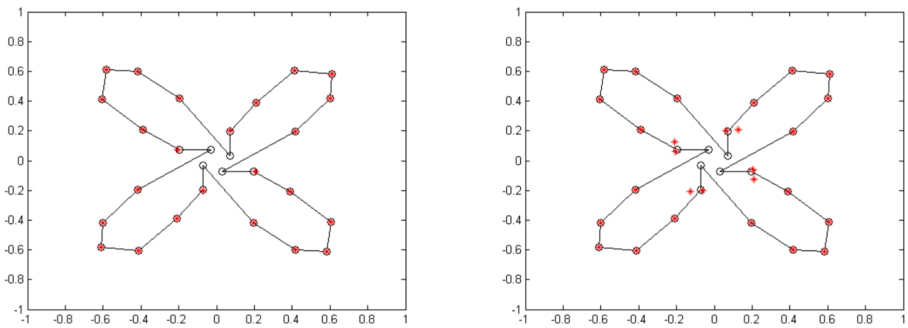
Primjećujemo da su u nekim primjerima rezultati podjednako dobri, no postoje i oni za koje korištenje funkcije $f(z) = z$ daje bolje rezultate. Nadalje, prvom funkcijom su generirane matrice T_n čija je uvjetovanost znatno bolja od onih koje su generirane drugom pa je identiteta na kvadratu $[-1, 1] \times [-1, 1]$ iz tog razloga numerički prihvatljivija.

6.2.2 Testiranje Pronyjeve metode za više rotacija

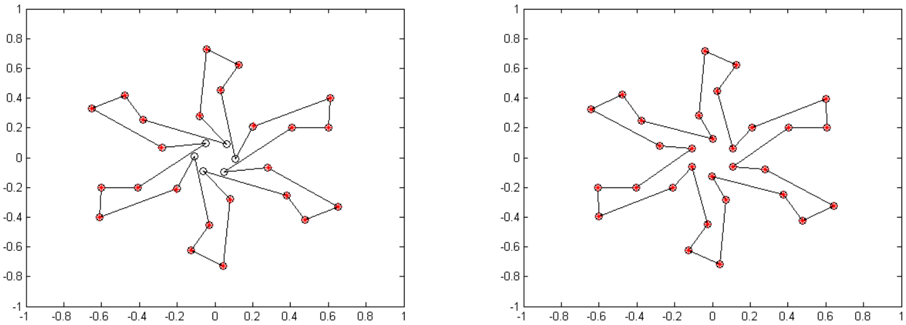
U drugom dijelu donosimo usporedbu rekonstrukcije vrhova kada je unaprijed poznat broj rotacija r poligona s onom kada je ta informacija nepoznata. Radi se o korištenju modifikacije Pronyjeve metode za rekonstruiranje pomoću kompleksnih momenata.



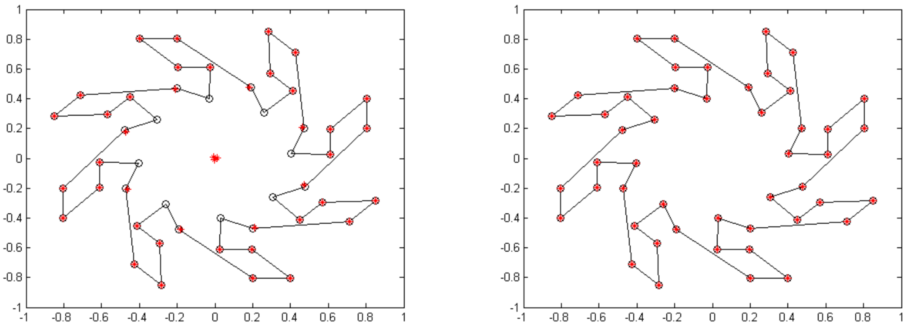
Slika 11: $r = 2$: lijevo bez, a desno uz korištenje Teorema 5.



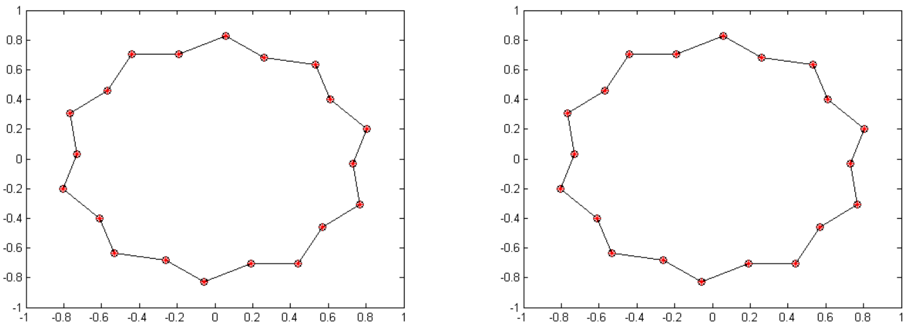
Slika 12: $r = 4$: lijevo bez, a desno uz korištenje Teorema 5.



Slika 13: $r = 6$: lijevo bez, a desno uz korištenje Teorema 5.



Slika 14: $r = 8$: lijevo bez, a desno uz korištenje Teorema 5.



Slika 15: $r = 10$: lijevo bez, a desno uz korištenje Teorema 5.

Primjeri pokazuju da, ako je broj rotacija poligona a priori poznat, dobivene aproksimacije vrhova znatno su bolje od onih kod kojih informaciju o simetriji nemamo. Tada je vjerojatnije da će u Pronyjevoj metodi neke ili sve dobivene točke biti daleko od pravih rješenja. Posebno se ističe fenomen grupiranja nekih dobivenih točki u 0.

Dobiveni su rezultati očekivani budući da smo modificiranjem metode smanjili veličinu pripadajuće Hankelove matrice, kao i broj traženih nultočaka polinoma. Dakako, postoje poligoni za koje Pronyjeva metoda, čak i uz informaciju o broju rotacija, ne daje sasvim točne aproksimacije vrhova.

7 Zaključak s naznakama daljnjih smjerova istraživanja

Tijekom dokazivanja teoretskih rezultata otvorilo se mnogo pitanja, pri čemu je jasno da neka od njih imaju i praktičnu ulogu. Na primjer, Teorem 4. riješio je problem određivanja broja vrhova u slučaju da znamo da imamo višak informacija. Postavlja se pitanje postoji li algoritam koji može odrediti broj vrhova poligona (uz računanje konačnog broja momenata tijekom izvođenja) u općenitom slučaju. Postoje stroge indicije da takav algoritam ne postoji i dokaz bi išao u smjeru konstruiranja niza poligona s rastućim brojem vrhova, pri čemu se dva susjedna člana niza slažu u dovoljno mnogo prvih integrala funkcija. Trivijalno se može pokazati da, ukoliko takav niz postoji, općeniti algoritam za određivanje broja vrhova ne može postojati.

Također, zanimljivo pitanje koje se postavlja je problem pronalaska dva n-terokuta koji se slažu u prvih $2n-2$ integrala potencija. Propozicija 5. kaže da možemo pronaći dva poligona s zajedničkih $n-1$ kompleksnih momenata, no ne odgovara na postavljeno pitanje. Konstruktivan odgovor omogućio bi nam direktan dokaz tvrdnje o $2n-1$ integrala potencija kao najboljoj ogradi za algoritam.

Već je bilo poznato da Pronyjeva metoda na način iznesen u [19] ne pokazuje dobra numerička svojstva. U stvarnim primjenama bitno je znati kad možemo s velikim stupnjem sigurnosti računati da će Pronyjeva metoda dati dobar rezultat. Teoremi koje smo dokazali pri kraju rada pomažu pri utvrđivanju odgovora. No, oni nikako ne predstavljaju iscrpan odgovor, već samo daju smjernice o tome kada bi metoda mogla biti neuspješna.

U testiranju na primjerima, pokazalo se da eksponencijalna funkcija kao generator integrala potencija ne daje bolje rezultate od identitete. Također, postoje jaki heuristički razlozi da zaključimo da se u općenitom slučaju situacija ne može puno poboljšati prema upotrebi kompleksnih momenata. No, za vjerovati je da je iskorištavanjem dodatnih svojstava na određenim dijelovima kompleksne ravnine moguće pronaći bolje funkcije.

Korištenje svojstava simetrije u stvarnim primjerima pokazalo je da Teorem 5. uistinu daje znatno poboljšanje Pronyjeve metode. Dapače, pokazalo se da i neki simetrični poligoni (npr. deltoid) omogućavaju postupke slične Teoremu 5. i uporabu Propozicije 5. Proširenje metode u tom smjeru, eventualno s idejom iz [4], čini se teorijski dohvatljivim.

Ukratko, ovim smo radom odgovorili na neka pitanja iz egzaktne rekonstrukcije poligona, u smislu Pronyjeve metode. Velik broj pitanja još preostaje, kako teorijskih, tako i onih koja se tiču praktičnih primjena, tako da svakako postoji potencijal za produbljivanje teorije.

Literatura

[1] V. B. Alekseev, *Abel's Theorem in Problems and Solutions: Based on the Lectures of Professor V. I. Arnold*, Springer, New York, 2004.

[2] G. Beylkin and L. Monzón, *Approximation by exponential sums revisited*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 28 (2010), pp. 131–149.

[3] P. J. Davis, *Triangle formulas in the complex plane*, Mathematics of Computation, 18 (1964), pp. 569–577.

[4] ——, *Cyclic transformation of polygons and the generalized inverse*, Canadian Journal of Mathematics, 29 (1977), pp. 756–770.

[5] ——, *Plane regions determined by complex moments*, Journal of Approximation Theory, 19 (1977), pp. 148–153.

[6] M. Elad, P. Milanfar, and G. H. Golub, *Shape from moments as an inverse problem*, in Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers, vol. 1, 2002.

[7] ——, *Shape from moments — an estimation theory perspective*, IEEE Transactions on Signal Processing, (2004), pp. 1814–1829.

[8] J. Flusser, *On the independence of rotation moment invariants*, Pattern Recognition, 33 (2000), pp. 1405–1410.

[9] R. W. Freund and H. Zha, *A look-ahead algorithm for the solution of general Hankel systems*, tech. report, Stanford University, 1992.

[10] G. H. Golub, P. Milanfar, and J. Varah, *A Stable Numerical Method for Inverting Shape from Moments*, SIAM Journal on Scientific Computing, 21 (1999).

[11] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[12] G. Heinig and P. Jankowski, *Parallel and superfast algorithms for Hankel systems of equations*, Numerische Mathematik, 58 (1990), pp. 109–127.

[13] B. F. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis: 2nd edition*, Dover Publications, Inc., New York, 1987.

[14] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[15] J. F. Humphreys, *A Course in Group Theory*, Oxford University Press, New York, 1996.

[16] M. A. Jenkins and J. F. Traub, *A three-stage variable-shift iteration for polynomial zeros and its relation to generalized rayleigh iteration*, tech. report, Stanford University, 1968.

[17] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1999.

[18] W. R. Mekwi, *Iterative methods for roots of polynomials*, master's thesis, Oxford University, 2001.

[19] P. Milanfar, G. C. Verghese, W. C. Karl, and A. S. Willsky, *Reconstructing polygons from moments with connections to array processing*, IEEE Transactions on Signal Processing, 43 (1995), pp. 432–443.

[20] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, and T. M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1994.

[21] L. Mirsky, *An Introduction to Linear Algebra*, Dover Publications, Inc., New York, 1990.

[22] T. Nara, N. Ito, T. Takamatsu, and T. Sakurai, *Direct computation of harmonic moments for tomographic reconstruction*, Journal of Physics: Conference Series, 73 (2007).

[23] Y. Saad, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems — 2nd Edition*, Manchester University Press, Manchester, 1992.

[24] I. J. Schoenberg, *Approximation: Theory and practice*. Stanford University, 1955. Notes on a series of lectures at Stanford University.

[25] D. Shen and H. H. S. Ip, *Generalized affine invariant image normalization*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 19 (1997), pp. 431–440.

[26] V. N. Strakhov and M. A. Brodsky, *On the uniqueness of the inverse logarithmic potential problem*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 46 (1986), pp. 324–344.

[27] L. N. Trefethen and D. Bau, *Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1997.

[28] J. H. Wilkinson, *Rounding Errors in Algebraic Processes*, Dover Publications, Inc., New York, 1994.

[29] L. Zalcman, *Real proofs of complex theorems (and vice versa)*, The American Mathematical Monthly, 81 (1974), pp. 115–137.

Sažetak

Melkior Ornik, Ana Šušnjara:

Neki prilozi teoriji egzaktne rekonstrukcije poligona

U ovom radu dokazujemo nekoliko novih rezultata koji proširuju teoriju rekonstrukcije pomoću kompleksnih momenata. Pri tome generaliziramo rezultate Milanfara i dr. te pokazujemo da se vrhovi poligona mogu na jedinstven način Pronyjevom metodom rekonstruirati i iz integrala potencija velike klase funkcija. Time se otvara prostor za traženje primjerenijih funkcija od identitete, čija svojstva pridonose numeričkoj neprihvatljivosti Pronyjeve metode u kompleksnim momentima.

Također, dokazujemo da je uz znanje dodatne informacije o simetriji poligona moguće višestruko smanjiti broj potrebnih kompleksnih momenata i dajemo jednostavan kriterij za određivanje potencijalnih simetrija.

S druge strane, uz jednostavnu metodu provjere dajemo odgovor na pitanje određivanja vrhova poligona ukoliko nemamo točnu informaciju o broju tih vrhova, što je razumna pretpostavka u primjenama.

Naposljetku, dajemo nekoliko teorema o veličini integrala potencija i kondicije pripadajuće matrice. Ti se rezultati pokazuju korisnima u određivanju kada će Pronyjeva metoda biti neuspješna.

Ključne riječi: *poligon, rekonstrukcija, kompleksni momenti, Pronyjeva metoda*

Summary

Melkior Ornik, Ana Šušnjara:

Some Contributions to the Theory of Exact Polygon Reconstruction

In the paper we prove several new results which expand the theory of reconstruction using complex moments. We generalize the results of Milanfar et al. and show that the vertices of a polygon can be uniquely reconstructed from integrals of powers of a large class of functions. That allows for seeking functions more suitable than the identity, the properties of which contribute to the numerical unsuitablity of the Prony method for complex moments.

Furthermore, we prove that, knowing additional information on the symmetry of a polygon, it is possible to decrease the number of necessary complex moments manyfold. We also provide a simple criterion for determining potential symmetries.

On the other hand, with a simple checking algorithm we provide an answer to the problem of determining the vertices of a polygon if there's no exact information on the number of those vertices, which is a reasonable assumption in real world applications.

Finally, we introduce several theorems on the size of integrals of powers and the condition number of the corresponding matrix. Those results prove to be useful in determining when the Prony method fails.

Keywords: *polygon, reconstruction, complex moments, Prony method*