

Sveučilište u Zagrebu

Građevinski fakultet

Mateja Čupić

DINAMIČKA ANALIZA TANKE KRUŽNE PLOČE

Zagreb, 2012.

Ovaj rad izrađen je u laboratoriju Zavoda za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta u Zagrebu pod vodstvom prof. dr. sc. Mladenko Rak, dipl. ing. građ. i doc. dr. sc. Domagoj Damjanović, dipl. ing. građ. i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2012.

SADRŽAJ RADA

1. UVOD.....	1
2. CILJ RADA.....	2
3. DOSADAŠNJA SAZNANJA.....	3
4. PROGRAM ISPITIVANJA I NJEGOVA REALIZACIJA.....	4
4.1. Teorijska podloga.....	4
4.1.1. Eksperimentalna modalna analiza.....	4
4.1.2. Klasična eksperimentalna modalna analiza.....	13
4.1.3. Operacionalna modalna analiza.....	16
4.2. Eksperimenti na modelu slobodno oslonjene kružne ploče.....	21
5. REZULTATI ISPITIVANJA.....	27
5.1. Eksperimentalna modalna analiza.....	27
5.2. Operacionalna modalna analiza.....	43
5.2.1. FDD analiza.....	43
5.2.2. EFDD analiza.....	52
6. PRIBLIŽNI PRORAČUN VLASTITIH FREKVENCIJA.....	56
7. NUMERIČKI PRORAČUN POMOĆU PROGRAMSKOG PAKETA SAP2000.....	62
8. ANALIZA I USPOREDBA REZULTATA.....	64
9. ZAKLJUČAK.....	74
10. PRILOZI.....	75
11. LITERATURA.....	75
SAŽETAK.....	78
SUMMARY.....	79

1. UVOD

Rezultati dobiveni ispitivanjima na konstrukcijama nam omogućavaju ocjenu stanja konstrukcije, razvoj novih modernijih konstrukcija, unapređenje tehničkih normi i propisa te otkrivanje eventualnih nedostataka konstrukcije. Kako se često radi o malim, teško uočljivim oštećenjima, dinamičko mjerenje je idealna metoda za ispitivanje i utvrđivanje stanja konstruktivnih elemenata jer je jednostavna, brza i nerazorna metoda ispitivanja. Na osnovi razlike između dinamičkih karakteristika konstrukcije unutar dva razdoblja ispitivanja moguće je donijeti zaključak o bitnim promjenama na konstrukciji (krutost i masa) i o stanju konstruktivnih elemenata.

Metodama eksperimentalne analize moguće je dobiti niz podataka potrebnih za analizu nosivosti i stabilnosti konstrukcije. Za eksperimentalno određivanje dinamičkih parametara konstrukcije polazi se od činjenice da odgovor konstrukcije na dinamičku pobudu sadrži karakteristiku fizičkog sustava. Svrha dinamičkih ispitivanja je mnogobrojna: kontrola kvalitete radova tijekom gradnje i učinkovitosti radova na rekonstrukciji, određivanje utjecaja dinamičkih djelovanja na proizvodne procese u građevini, određivanje promjena strukturnih parametara (krutost) i oštećenja konstrukcija, predviđanje odgovora na poznatu pobudu (potres, vjetar), dokaz sigurnosti, utjecaj dinamičkih djelovanja na ljude te kontrola računskih veličina dinamičkih parametara i poboljšanje računskog modela.

Jedan od osnovnih uvjeta pravilne provedbe dinamičkog ispitivanja je dobar izbor dinamičkog djelovanja. Dobar izbor se odnosi na način djelovanja, veličinu djelovanja te mjesto djelovanja. Pri dinamičkom djelovanju na konstrukciju dolazi do aktiviranja inercijalnih sila koje uzrokuju dinamičke pomake i deformacije ovisne o vremenu. Točna matematička rješenja koja opisuju ponašanje konstrukcije pri dinamičkom djelovanju moguće je dobiti samo za jednostavne i idealizirane slučajeve. Ponašanje konstrukcija pri dinamičkom djelovanju ovisi o intenzitetu dinamičkog opterećenja, promjeni opterećenja tijekom vremena, mjestu (položaju) djelovanja i fizikalnim svojstvima materijala konstrukcije. Dinamička djelovanja se mijenjaju u vremenu i/ili mijenjaju položaj na konstrukciji. Najčešća dinamička djelovanja su opterećenje vjetrom, potresno djelovanje, djelovanja prouzročena radom strojeva, prometom ili izvanrednim djelovanjima (udar, eksplozija) na građevinu.

Svako opterećenje, osim vlastite težine i stalnog tereta, moglo bi se smatrati dinamičkim jer od svakog opterećenja nastaju deformacije tijela, dakle i neki pomaci koji se mijenjaju u vremenu i izazivaju ubrzanja.

Pri podjeli na statička i dinamička djelovanja postaje nam bitno kako promatrano djelovanje nastaje, kakav intenzitet ima i kakve su mu posljedice. Postoje djelovanja koja imaju izrazito promjenjiv intenzitet, ali uzrokuju zanemarivo gibanje konstrukcije. Koja ćemo djelovanja smatrati dinamičkim, a koja aproksimirati statičkim ili potpuno zanemariti, zavisi o silama inercije koje nastaju za vrijeme gibanja. Ako su gibanja od promatranog djelovanja toliko spora da se sile inercije koje zbog toga nastaju mogu zanemariti (to su npr. pomaci od slijeganja temelja, skupljanja betona i temperaturnih utjecaja) ili ako je intenzitet djelovanja zanemariv (npr. udar naših koraka), tada to djelovanje aproksimiramo statičkim, a dinamičke utjecaje pokrивamo propisanim dinamičkim faktorom sigurnosti. Ako su sile inercije takvog intenziteta da ih ne možemo zamijeniti statičkim silama, opterećenje nazivamo dinamičkim.

1. CILJ RADA

Za dinamičku analizu i određivanje dinamičkih parametara kružnih ploča danas se koriste brojne analitičke i numeričke metode. Osim izravnog rješavanja diferencijalne jednačbe, kao i odgovarajuće frekvencijske jednačbe, koriste se numerički postupci bazirani na metodi konačnih razlika i konačnih elemenata, kao i varijacijski i energetski postupci. Sve su to teorijski utemeljene metode bazirane na određenim pretpostavkama koje u sebi sadrže i određene nedostatke, uglavnom u ponašanju materijala. Stoga sva ta utemeljena teorijska rješenja u sebi sadrže i neke pogreške.

Da bismo dobili točna rješenja, koja u sebi ne sadrže greške zbog teorijskih pretpostavki i usvajanja približnih modela ponašanja, koristimo odgovarajuće eksperimentalne metode. Jedna od najsuvremenijih eksperimentalnih metoda analize dinamičkih parametara (vlastitih frekvencija, modalnih oblika i modalnih prigušenja) je svakako eksperimentalna modalna analiza. Eksperimentalna modalna analiza se razvijala u zadnjih nekoliko desetljeća prošlog stoljeća, a njezin intezivni razvoj traje i do danas. Posebnu pažnju u području građevinskih konstrukcija i njenih elemenata ima tzv. „Operacionalna modalna analiza“ pomoću koje se s visokom točnošću određuju dinamički parametri samo na temelju mjerenja dinamičkog odgovora konstrukcija ili njezinih elemenata.

Cilj ovog rada je primjena eksperimentalne „Operacionalne modalne analize“ (OMA) u svrhu verifikacije dosad utemeljenih analitičkih i približnih numeričkih računskih modela koji se koriste u određivanju dinamičkih parametara kružnih ploča.

Ekperimentalnim putem, odnosno primjenom OMA – e, točno određeni dinamički parametri (otprilike prvih 10 modova) usporedit će se s odgovarajućim vrijednostima dobivenim numeričkim postupkom. Na taj način će se ocijeniti pogreške koje su nastale usvajanjem određenih teorijskih pretpostavki o ponašanju materijala ili određenog računskog modela.

2. DOSADAŠNJA SAZNANJA

Do sada su razni autori razvijali određene metode rješavanja dinamičkih problema tankih ploča, a posebno metode određivanja dinamičkih parametara. To se uglavnom odnosilo na određivanje vlastitih frekvencija i vlastitih oblika osciliranja. U tom smislu, treba izdvojiti probleme određivanja vlastitih frekvencija i vlastitih oblika tankih kružnih ploča. S teorijskog stanovišta, taj problem je uglavnom riješen. Rješenje diferencijalne i frekvencijske jednadžbe vodi preko određivanja Besselovih funkcija i matematički je dosta složeno. Problem slobodnih vibracija kružne ploče prvi je istraživao Poisson 1829. godine [19], a John i Airey [20] su predložili metodu za rješenje korijena jednadžbe koje uključuju Besselove funkcije. S druge strane, imamo mogućnost određivanja dinamičkih parametara približnim numeričkim metodama, primjerice Ritzovom metodom (vibracije kružne ploče, koristeći Rayleigh – Ritzovu metodu, proučavao je Kang W. [6]), Glarkinovom metodom, konačnim elementima (matematiču podlogu je prvi dao Courant 1943. godine, a naziv „konačni element“ prvi puta je upotrijebio Clough 1960. godine [21]) i konačnim razlikama, kao i drugim metodama baziranim na funkcionalu energije. Naravno, tu su i eksperimentalne metode koje su se u zadnjih nekoliko godina intezivno razvijale, ali su se zbog određenih nedostataka malo koristile. Primjenom računala eksperimentalne metode su dobile na brzini i točnosti tako da se počinju i intezivno primjenjivati i to uglavnom u svrhu verificiranja analitičkih i numeričkih postupaka, tzv. Baždarenje računskih modela.

4. PROGRAM ISPITIVANJA

4.1. Teorijska podloga

4.1.1. Eksperimentalna modalna analiza

Eksperimentalna modalna analiza podrazumijeva eksperimentalno određivanje dinamičkih parametara. Određuju se modalni parametri linearnog sustava neovisnog o vremenu. Ovaj postupak se temelji na analizi registriranih funkcija pobude, koje se nanose na konstrukciju i vibracija konstrukcije kao odgovora sustava u vremenskoj i frekventnoj domeni. Modalni parametri (vlastita frekvencija, prigušenje i modalni oblik) određuju pojedini mod i ovise o geometriji, karakteristikama materijala i rubnim uvjetima. Modalni model opisuje dinamičko ponašanje konstrukcije kao linearnu kombinaciju različitih rezonantnih modova.

Postoje dvije osnovne metode eksperimentalne modalne analize klasična eksperimentalna modalna analiza (EMA) i Operacionalna modalna analiza (OMA). Za primjenu EMA-e potrebno je poznavanje ulazne funkcije pobude i funkcije odgovora. Kod primjene OMA-e dinamički parametri se određuju iz funkcija odgovora konstrukcije pri pobudama koje se javljaju u operacionim uvjetima.

Uvodimo određene pretpostavke o ponašanju konstrukcije kako bi mogli primijeniti eksperimentalnu modalnu analizu.

Odgovor konstrukcije uvijek je proporcionalan pobudi, to jest pretpostavlja se da je konstrukcija linearna. Linearnost se često gubi pri velikim pomacima. Pretpostavka linearnosti za sobom povlači zaključak da odgovor konstrukcije pri kombiniranom djelovanju više opterećenja mora odgovarati zbroju pojedinačnih odgovora konstrukcije pri svakom od tih opterećenja, znači da vrijedi princip superpozicije. Također iz pretpostavke o linearnosti proizlazi i zaključak da za konstrukciju vrijedi Maxwell-Betti-ev teorem o uzajamnosti pomaka. Mjerenje niza frekventnih odgovora može se prikazati u formi kvadratne matrice u kojoj članovi reda predstavljaju točke registriranih odgovora, a stupci odgovaraju točkama pobude.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.1.)$$

Matrica frekventnog odgovora (4.1.) je simetrična što proizlazi iz Maxwell-Betti-ovog teorema. Mjerenja kod kojih su registrirane funkcije odgovora samo u točkama pobude naziva se mjerenje pobuđenih točaka i formira dijagonalu matrice frekventnog odgovora. Iz teorema o uzajamnosti pomaka se može zaključiti da je kod određivanja funkcije frekventnog odgovora za dvije točke na konstrukciji svejedno na kojoj se mjeri odgovor, a na kojoj pobuda $H_{ij} = H_{ji}$.

Druga osnovna pretpostavka je da se parametri koje određujemo ne mijenjaju tijekom mjerenja, to jest da je konstrukcija neovisna o vremenu. Kod dugotrajnih ispitivanja recimo temperatura može utjecati na promjenu dinamičkih parametara. Utjecaj može biti značajniji kad se mjerenja provode u razmacima od nekoliko dana, tjedana, mjeseci ili godina što je slučaj kod određivanja oštećenja konstrukcije. Tada trebamo poznavati utjecaj temperature i uzeti ga u obzir.

Oprema za prikupljanje i obradu podataka

Da bi se dinamičko ispitivanje provelo potrebna nam je oprema za prikupljanje i obradu podataka. Danas postoje razni tipovi instrumenata i osjetila za mjerenje na konstrukcijama koji se razlikuju po veličini, kvaliteti, preciznosti i pouzdanosti mjerenja. Kod dinamičkih ispitivanja oprema predstavlja značajan faktor o kojem ovisi osnovni pristup prikupljanju i obradi podataka. Sva korištena oprema mora biti prilagođena po svojoj frekventnoj rezoluciji i opsegu frekventnih karakteristika konstrukciji koja se ispituje. Potrebno je voditi računa o tome da se pri prikupljanju i prijenosu podataka izoliraju svi dodatni signali iz frekventnog područja od interesa koji pri analizi mogu uzrokovati greške i poteškoće. Oprema za dinamičko ispitivanje se sastoji od nekoliko komponenata, a to su pobuđivač, osjetilo, sustav za prikupljanje podataka te sustav za analizu ili analizator.

Kod klasične eksperimentalne modalne analize potreban nam je pobuđivač koji će nam osigurati kontrolirano nanošenje poznate sile na ispitivanu konstrukciju dok kod metoda OMA-e nije potreban. Pobuđivač omogućava nanošenje vibracija uz poznatu funkciju unesene sile u konstrukciju. Preko osjetila ćemo mehaničko gibanje pojedinih točaka konstrukcije pretvoriti u električni signal. Slijedeća komponenta je sustav za prikupljanje podataka, u kojem se vrši kondicioniranje signala, filtriranje i pojačanje signala, te analogno-digitalna pretvorba. Analizator u kojem se vrši obrada i analiza signala je zadnja komponenta.

Konstrukciju možemo pobuditi na više načina. Jedan od načina je uz pomoć udarnog čekića, što je primijenjeno u okviru ovog istraživanja. Čekić se koristi za nanošenje impulsne pobude na konstrukciju koja ju mora pobuditi sa dovoljnim opsegom frekvencija.

Udarni čekić ima ugrađeno osjetilo za mjerenje sile u glavi samog čekića. Pobuda nanošena udarnim čekićem nije idealna delta funkcija već ima određeno vremensko trajanje. Trajanje impulsa, a time i oblik frekventne funkcije je određen masom i krutošću samog čekića i konstrukcije koju ispituje. Krutost čekića, koja utječe na tvrdoću impulsa se može povećavati ili smanjivati različitim vrhovima glave čekića koje se najčešće mogu mijenjati (aluminijaska, plastična, gumena). Opseg frekvencija kojim pobuđujemo konstrukciju smanjujemo ako povećavamo masu čekića, a povećavamo ako koristimo tvrdi vrh glave čekića, recimo od aluminija. Ova tehnika unošenja funkcije pobude vrlo je pogodna zbog relativno jednostavne opreme i kratkog vremena mjerenja. Primjena je moguća samo kod modelskih istraživanja i kod manjih konstrukcija i konstruktivnih elemenata.

Još možemo i koristiti elektromagnetske, hidraulične i pobuđivače s rotirajućim masama za kontinuirano nanošenje sinusne, slučajne ili neke druge vrste pobude. Da bi se proizveli odgovarajući signali kojima pobuđujemo konstrukciju koriste se elektronički generatori signala koji su integrirani u računalni program koji vrši i analizu signala.

Osjetila pretvaraju neku fizičku veličinu u električnu i najčešće se dijele po mjernoj veličini, specifikacijama karakteristika, tipu pretvaranja, materijalu izrade, području primjene. Klasificiramo senzore po specifikaciji karakteristika s obzirom na osjetljivost, linearnost, mjesto područje, stabilnost, rezoluciju, točnost, selektivnost, brzinu odziva, područje neosjetljivosti, životni vijek, cijenu, veličinu, težinu [7].

Za prikupljanje podataka danas se najviše koriste električni senzori i to akcelerometri (za mjerenje ubrzanja), brzinomjeri (za mjerenje brzine), vibrometri (za mjerenje pomaka) te mikrofoni (za mjerenje jačine zvuka).

Ovisno o tome kako se vrši pretvorba mehaničkih veličina (akceleracija, brzina i pomak) u električne veličine, senzori za njihovo mjerenje mogu biti zasnovani na principima promjene otpora, induktiviteta, kapaciteta, potencijala ili električnog naboja.

Senzori daju električni izlazni signal proporcionalan mehaničkoj veličini koju mjere i uglavnom se napajaju s konstantnim električnim naponom. Rad spomenutih senzora je zasnovan uglavnom na inercijalnoj metodi, gdje su glavni elementi masa i opruga odgovarajuće krutosti [9]. Često se koriste akcelometri pri mjerenju vibracija (Slika 1.). Iz zapisa ubrzanja može se jednostrukom integracijom dobiti brzina, a dvostrukom integracijom pomak. Najčešće se koriste akcelometri sa piezoelektričnim kristalima koji generiraju električni naboj pri deformiranju. Sastoje se od dvije mase, jedna od njih je pričvršćena na konstrukciju osjetila i odvojena od druge piezoelektričnim materijalom, koji se ponaša kao opruga što uzrokuje postojanje rezonantne frekvencije akcelometra.



Slika 1. Akcelometri Brüel & Kjær [8]

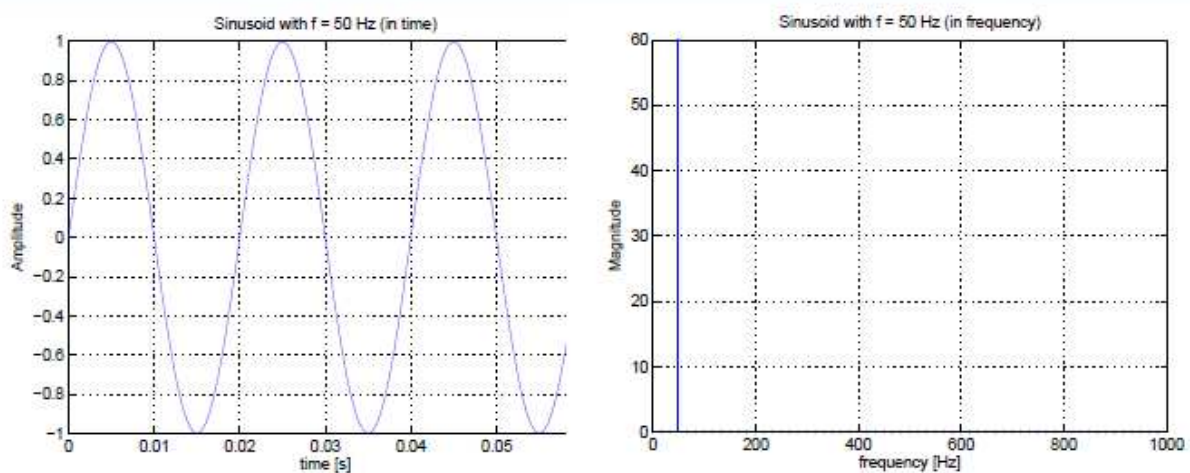
Elementi za kondicioniranje signala pretvaraju izlazni signal osjetila u oblik prikladan za daljnju obradu. Postupak se temelji na obradi analognog signala na način da zadovolji zahtjeve računskih uređaja koji vrše digitalnu obradu i analizu signala. Kondicioniranje je priprema signala za analogno digitalnu pretvorbu signala koju obavlja analogno digitalni pretvarač (ADC – Analog Digital Converter). Eksperiment impulsnim udarom popraćen je problemima u signalnom procesu koji se manifestiraju šumom prezentiranim u vremenskom zapisu pobude i odgovora [3]. Kako bi izbjegli znatne šumove signala pri pojačanju potrebno ga je filtrirati. Pojačavanje signala ima dvije funkcije, povećava se rezolucija ulaznog signala i povećava se omjer signala i šuma. Izlazni signal osjetila (napon, struja, električni naboj) je najčešće prenizak za direktnu obradu u analogno digitalnom pretvaraču. Potrebno je razinu signala povećati kako bi se mogla obaviti analogno digitalna konverzija. Danas se analiza signala vrši digitalnim analizatorima baziranim na osobnim računalima, a kao priprema signala za analizu vrši se prozoriranje i osrednjavanje signala. Odgovor konstrukcije sistema na ulaznu funkciju pobude prikazan je funkcijom odgovora u vremenskoj ili frekventnoj domeni.

Za prijelaz u frekventno područje koriste se Fourierove transformacije. Kao rezultat imamo spektre frekvencija pojedinih signala ili međuspektre ulaznih funkcija pobude i raznih mjerenih odgovora konstrukcije. Što je niži opseg frekvencija pobude kao ulazne funkcije to će i funkcija odgovora konstrukcije imati uži spektar frekvencija. Daljnjom analizom dolazimo do podataka o vlastitim frekvencijama, koeficijentima prigušenja, modalnim oblicima koje možemo prikazivati numerički ili grafički.

Digitalna obrada signala

Fourierove transformacije

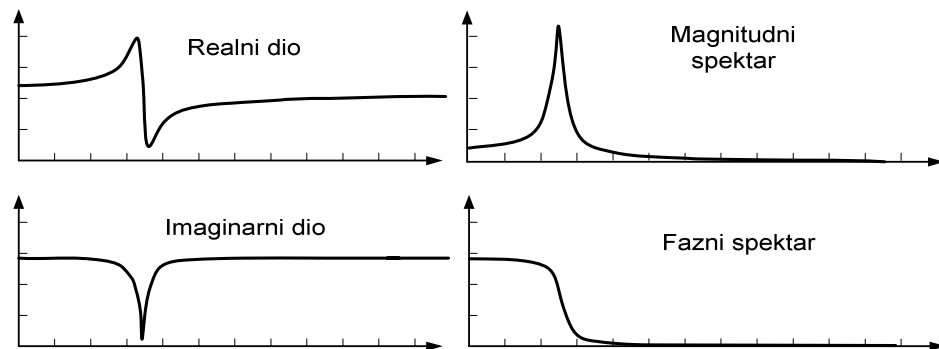
Fourierova transformacija omogućava da se svaki fizikalno realan signal može jedinstveno rastaviti u sumu sinusnih i kosinusnih članova odgovarajućih frekvencija, to jest Fourierov red i Fourierova transformacija pružaju informacije o spektralnom sadržaju analiziranog signala. To je postupak koji omogućuje prijelaz iz vremenskog u frekventno područje i obratno (Slika 2.).



Slika 2. Signal u vremenu i frekvenciji [12]

Kod digitalnog prikupljanja podataka mjerenje se vrši u konačnom vremenskom periodu koji je diskretiziran na N jednako raspoređenih vremenskih intervala, stoga je Diskretna Fourierova Transformacija (DFT) osnova za formulaciju bilo kakve funkcije u frekventnom području kod digitalnog prikupljanja podataka. Ako je frekventno područje diskretizirano, izbor frekvencija je ovisan o toj diskretizaciji, a DFT opisuje doprinos svakog sinusnog i kosinusnog člana za pojedinu diskretnu frekvenciju [2].

Rezultat Diskretne Fourierove transformacije je kompleksni spektar frekvencija određenog signala koji ima realni i imaginarni dio, a oni se najčešće preračunavaju u magnitudni i fazni spektar. prikaz magnitude komponenti kao funkcije frekvencije, prikaz faze komponenti kao funkcije frekvencije (Slika 3.).



Slika 3. Rezultat DFT-a prigušenog sinusnog signala

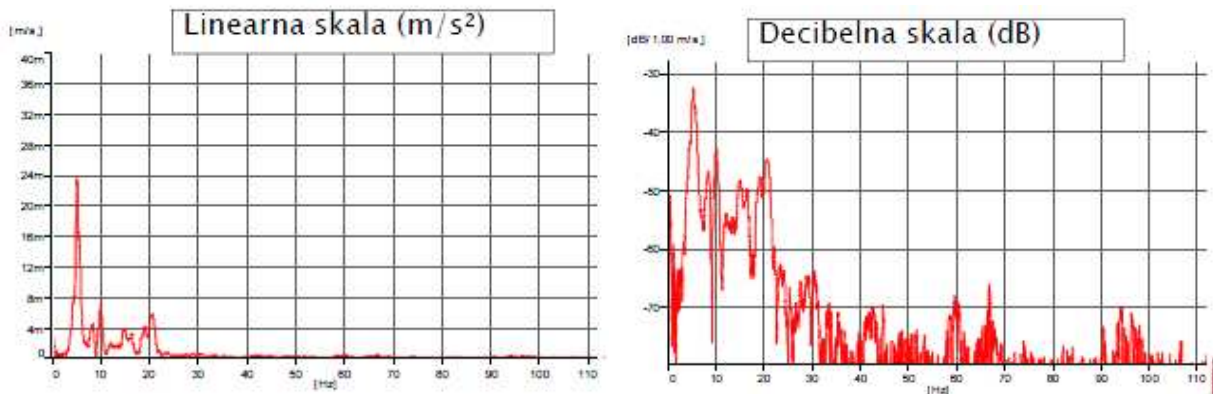
Sinusni signal se može u potpunosti rekonstruirati iz uzorkovanog signala ukoliko je frekvencija uzorkovanja bar dvostruko veća od frekvencije sinusnog signala. U spomen na Nyqista dvostruko veća frekvencija uzorkovanja naziva se često i Nyquistova frekvencija uzorkovanja [11]. Nyquistovim teoremom je određen vremenski interval uzorkovanja. Frekventna rezolucija (diskretizacija spektra) je određena trajanjem uzorkovanja. Veličina bloka podataka određuje ukupni vremenski period prikupljanja podataka i kod većine digitalnih analizatora to je vrijednost koja se određuje prije početka prikupljanja podataka i ona je potencija broja 2. S povećanjem bloka podataka produžujemo vremenski period uzorkovanja i povećavamo frekventnu rezoluciju i obrnuto, za isto područje frekvencija. Ako povećavamo područje frekvencija, a zadržimo istu veličinu bloka podataka, smanjujemo vremenski period uzorkovanja i frekventnu rezoluciju [3].

Brza Fourierova Transformacija (FFT) predstavlja algoritam za rješavanje DFT-a koji taj proces znatno ubrzava. Razlika u broju operacija može biti znatna.

Da bismo mogli vidjeti i signale nižih amplituda, amplitude se često prikazuju na logaritamskoj skali u frekventnom području, dok se kod amplitudnih zapisa u vremenskom području koristi uglavnom linearna skala. Čest je slučaj da neke zanimljive komponente frekvencija imaju u spektru puno nižu amplitudu od dominantne komponente frekvencija. Te niske amplitude se kod linearne skale neće ni primijetiti, dok će kod logaritamske svaka zastupljena frekvencija u spektru biti dobro vidljiva (Slika 4.).

Spektralni analizatori često koriste logaritamsku amplitudnu skalu koja je bazirana na decibelima (dB).

Piezoelektrični akcelerometri mogu detektirati amplitude vibracija u rasponu od 100000 milijuna ($10^{11}:1$), što u decibelnoj skali iznosi prihvatljivih 220 dB [2].



Slika 4. Usporedba linearne i decibelne skale [2]

Spektralne funkcije

Prijelaz iz vremenskog u frekventno područje obavlja spektralni analizator. Proces je baziran na diskretnoj Fourierovoj transformaciji, a koristi se FFT algoritam radi jednostavnosti postupka i uštede vremena. Analizatorima frekvencija određuju se različite spektralne funkcije [13]:

- kompleksni spektar frekvencija
- spektralne gustoće snage
 - funkcija autospektralne gustoće snage
 - funkcija međuspektralne gustoće snage
- frekventni odgovor
- koherencija.

Kompleksni spektar frekvencija je osnovni oblik spektralne funkcije i on je direktan rezultat brze Fourierove transformacije [2]. Sastoji se od realnog i imaginarnog dijela koji se koriste za određivanje magnitudnog i faznog dijela spektra.

Spektralna gustoća snage je veličina koja najbolje opisuje frekventne ili spektralne karakteristike signala [2]. Kod mjerenja na mehaničkim sustavima koristi se za određivanje energetskog doprinosa pojedine frekvencije ukupnoj energiji sustava.

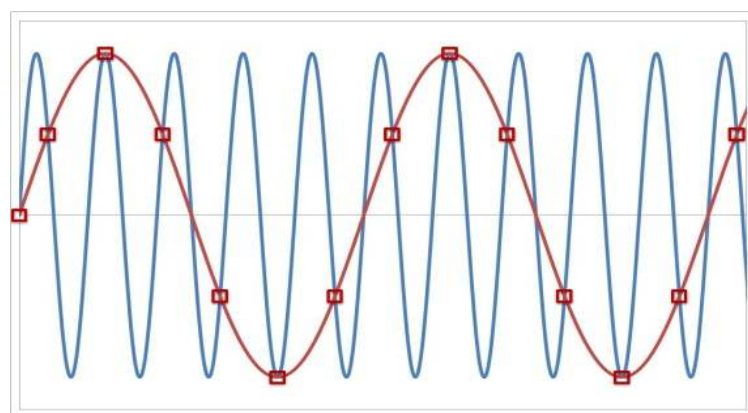
Frekventni odgovor ili prijenosna funkcija, opisuje odnos između ulaznih i izlaznih signala ili odgovora linearnih sustava u frekventnom području.

Prijenosne funkcije se mogu odrediti iz spektralnih, autospektralnih i međuspektralnih funkcija. To je kompleksna funkcija koja opisuje snagu i fazu odgovora po jedinici sinusne pobude kao funkciju ulazne frekvencije [10].

Koherencija pokazuje stupanj uzročnosti u funkciji frekventnog odgovora, to jest daje veličinu onih dijelova izlazne snage spektra koji su direktan rezultat ulaznog signala kao i onih dijelova snage spektra koji su izazvani nekom drugom vanjskom pobudom ili šumom. Funkcija koherencije se izvodi iz serije mjerenja prosječnih frekventnih odgovora. U praktičnoj primjeni funkcija koherencije se kreće između vrijednosti 0 kada izlazni signal uopće nije izazvan ulaznim signalom i vrijednosti 1,0 kada je cijela snaga izlaznog signala uzrokovana ulaznim signalom.

Najčešće greške pri digitalizaciji signala

Najčešće greške koje se javljaju pri digitalizaciji signala su greške preslikavanja i greške propuštanja. Do greške preslikavanja dolazi kada je uzorkovanje presporo da se u potpunosti uhvati signal, to jest kada signal sadrži frekvencije iznad maksimalne frekvencije. Kao posljedica toga kod digitalizacije će se frekvencije više od frekvencije uzorkovanja krivo interpretirati i preslikati će se simetrično oko te frekvencije. Da bi se izbjeglo preslikavanje mora se odabrati dovoljno mali period uzorkovanja koji će uhvatiti najmanje dva zapisa po ciklusu najviše frekvencije koja nas zanima u analizi, prema Nyquistovom teoremu o uzorkovanju.



Slika 5. Greška preslikavanja [3]

Test impulsnim udarom popraćen je problemima u signalnom procesu koji se manifestiraju šumom prezentiranim u vremenskom zapisu pobude i odgovora.

Kako je trajanje impulsa redovito vrlo kratko u odnosu na dužinu vremenskog zapisa, dio signala nakon prestanka djelovanja impulsa je šum, kojeg možemo eliminirati upotrebom „prisilnog“ prozora. Upotreba „prisilnog“ prozora neće promijeniti frekventne karakteristike ulaznog signala. Prije provedbe FFT-a primjenjuje se prozor na ulazni signal na način da se vremenska funkcija množi sa prozorskom funkcijom. Upotrebom prozorskih funkcija greška propuštanja se može smanjiti ili svesti na minimum.

Prozor predstavlja filter za otklanjanje signala koji nisu periodički i primjenjuje se kao težinska funkcija na ulazni signal u vremenskom području.

Primjena prozora je standardan postupak kod provođenja FFT-a, prozori malo mijenjaju podatke, ali daju velika poboljšanja u smislu periodičnosti svakog zapisa. Odabir prozorskih funkcija ovisi o primjeni na temelju koje se bira funkcija koja daje veću točnost ili prozorska funkcija koja daje veću rezoluciju.

4.1.2. Klasična eksperimentalna modalna analiza

Dinamičko ponašanje konstrukcije u određenom frekventnom opsegu može se modelirati s nizom pojedinačnih modova vibriranja. Modalnim parametrima nazivamo parametre koji opisuju svaki mod, a to su vlastita (modalna) frekvencija, modalno prigušenje i modalni oblik. Klasična eksperimentalna modalna analiza (EMA) temelji se na određivanju funkcije frekventnog odgovora iz koje se mogu odrediti modalni parametri. Bazirana je na mjerenjima ulaznih funkcija pobude i izlaznih funkcija odgovora mehaničkog sustava. Dobro je uhodana i ima široku praktičnu primjenu. Primjenjiva je u praksi kod laboratorijskih ispitivanja gdje je obuhvaćeno mjerenje odgovora konstrukcije na velikom broju mjernih mjesta s istodobnim nanošenjem pobude na više lokacija te je u potpunosti zadovoljavala potrebe ispitivanja koja su provedena u okviru ovog rada. Poznavanje modalnih parametara pomaže kod pronalaženja rješenja kod dinamičkih problema uzrokovanih rezonantnim vibracijama i omogućuje bolje razumijevanje istih.

Primarni parametar koji određuje ponašanje konstrukcije pod dinamičkim djelovanjem je osnovni period konstrukcije. To je vrijeme potrebno da tijelo dospije u početni položaj, tijekom gibanja koje nastane nakon uklanjanja neke početne pobude. Svi objekti mogu oscilirati u različitim oblicima, ali osnovni oblik ima najveći utjecaj na veličinu pomaka. Frekvencija je fizikalna veličina kojom se izražava broj titraja u određenom vremenskom intervalu i obrnuto je proporcionalna periodu. Modalni oblik predstavlja režim gibanja (osciliranja) sustava pri pojedinoj vlastitoj frekvenciji. Stvarni pomaci bilo koje točke konstrukcije su uvijek kombinacija svih modova. Modalni oblik opisuje relativne pomake svih dijelova konstrukcije za pojedini mod. Određuje gibanje pojedinog moda kao da je on izdvojen od svih ostalih modova sustava.

Prigušenje je mjera raspršivosti energije u konstrukciji. Iz iskustva znamo da se konstrukcija, ako ju zanjišemo, nakon nekog vremena prestane njihati. Dakle, konstrukcija je izgubila energiju (mehaničku), to jest oscilacije su se prigušile. Funkcija prigušenja ovisi o svojstvima okruženja. Za vrijeme gibanja uvijek postoji otpor. To može biti otpor zraka, otpor gibanju može biti sila trenja koja je uvijek suprotna smjeru gibanja ili viskozno prigušenje, otpor gibanju unutar gustih tekućina. Točno uzimanje svih utjecaja na prigušenje je vrlo složeno, no znamo da prigušenja izmjerena na našim modelima nisu velika te se, radi pojednostavljenja, u većini matematičkih modela oscilacija pretpostavlja da je prigušenje viskozno, proporcionalno brzini.

Prigušenje se najčešće izražava koeficijentom prigušenja u odnosu na kritično prigušenje, najmanje prigušenje pri kojem slobodno gibanje našeg sistema, nastalo zbog početnog pomaka i/ili brzine, nema oscilirajući karakter [5]. Određivanje koeficijenta prigušenja vrši se eksperimentalno.

Funkcija frekventnog odgovora

Funkcija frekventnog odgovora je prijenosna funkcija izražena u frekventnom području. Idealan slučaj u provođenju eksperimenta i eksperimentalnoj dinamičkoj analizi je kada smo u mogućnosti simultano registrirati i funkciju pobude i funkciju odgovora, te iz njih frekventnom analizom odrediti funkcije spektralne gustoće snage pobude i odgovora, te funkciju međuspektralne gustoće. Tada je prijenosna funkcija sistema definirana odnosom gustoća snage odgovora i pobude, a funkcija frekventnog sistema definirana je odnosom međuspektralne gustoće odgovora i pobude, te spektralne gustoće snage pobude.

Modalni parametri mogu se odrediti serijom mjerenja funkcija frekventnog odgovora (FRF) između jedne ili više referentnih točaka na kojima se nanosi pobuda i određenog broja mjernih točaka, tj. mjerenih stupnjeva slobode (DOF – Degree of Freedom). Stupanj slobode je mjerna točka i smjer definiran na konstrukciji. Da bi se točno interpretirao pojedini modalni oblik potrebno je provesti mjerenja za dovoljan broj stupnjeva slobode. Broj mjernih stupnjeva slobode određuje se s obzirom na svrhu ispitivanja koje se provodi i geometriji ispitivane konstrukcije. Vlastite frekvencije i koeficijenti prigušenja ne mogu se odrediti iz mjerenja funkcije frekventnog odgovora između onih stupnjeva slobode koji predstavljaju nultočke pojedinog modalnog oblika, dok između bilo koja dva druga stupnja slobode mogu.

Prijenosna funkcija opisuje ulazno – izlaznu vezu između dvije točke na sistemu kao funkciju frekvencije. Odgovor konstrukcije na jednom mjestu je uzrokovan djelovanjem sile na drugom mjestu i mjeri se kao pomak, brzina ili akceleracija. U sva tri slučaja funkcija frekventnog odgovora nosi iste podatke koji su međusobno povezani integracijom ili derivacijom. Tijekom ispitivanja mjeri se ili jedan cijeli redak (pobuda) ili jedan cijeli stupac (odgovor) matrice prijenosne funkcije (1.1). Iz izmjerenih podataka moguće je izvršiti sintezu neizmjenjenih podataka [10].

Određivanje funkcije frekventnog odgovora ovisi i o konfiguraciji ispitivanja koja se odnosi na broj pobuda koje se primjenjuju i na broj kanala na kojima se mjeri odgovor konstrukcije.

Postoje četiri osnovne konfiguracije ispitivanja [13]:

- jedan ulaz/jedan izlaz – SISO (single input/single output)
- jedan ulaz/više izlaza – SIMO (single input/multiple output)
- više ulaza/jedan izlaz – MISO (multiple input/single output)
- više ulaza/više izlaza – MIMO (multiple input/multiple output).

MIMO konfiguracija je najzahtjevnija s aspekta opreme koja se koristi kao i obrade prikupljenih rezultata, ali daje najbolje rezultate ispitivanja jer se prikupljanje podataka provodi u najkraćem vremenu s najmanje promjena uvjeta pri ispitivanju.

Svaki redak ili stupac matrice frekventnog odgovora sadrži dostatne informacije za procjenu niza frekvencija, prigušenja i koeficijenata modalnih oblika. To znači da je kod linearnog sistema za određivanje dinamičkih parametara dostatno upotrijebiti pobudu u jednoj točki, te registrirati funkcije odgovora na nizu točaka ili obratno primijeniti pobudu na nizu točaka i registrirati funkciju odgovora u jednoj točki.

Određivanje dinamičkih parametara

Za određivanje jednadžbi krivulja modalnih oblika postoji čitav niz poznatih algoritama koji se temelje na dvije osnovne metode.

a) Metoda jednostrukog oblika

Metoda jednostrukog oblika je najjednostavnija metoda određivanja modalnih parametara i uglavnom primjenjuje za jednostavnije lagano prigušene konstrukcije koje se ponašaju kao jednostupanjski sustavi pri rezonantnim frekvencijama, gdje su su modovi raspoređeni dovoljno široko po spektru. Primjenjuje se u onim slučajevima kada u blizini rezonantne frekvencije nema istaknutih frekvencija ostalih oblika. Rezonantna frekvencija određuje se iz bilo kojeg prikaza frekventnog odgovora u polarnim ili pravokutnim koordinatama. Kod realnog dijela FRF-a to je točka infleksije koja ima vrijednost nula. Imaginarni dio frekventnog odgovora pri vlastitoj frekvenciji ima maksimum ili minimum. Magnituda frekventnog odgovora je maksimalna pri vlastitoj frekvenciji, a odgovor kasni za 90° u odnosu na pobudu što je vidljivo iz faznog dijela frekventnog odgovora [3].

Koeficijent prigušenja se određuje metodom pojasa pola snage ili nekom drugom metodom temeljenoj na procjeni oštine rezonantnog vrha (stupnja prigušenja).

Ova metoda se može upotrijebiti samo kod malih prigušenja ($< 0,05$), frekventna rezolucija zapisa mora biti najmanje pet puta manja od širine pojasa pola snage te se promatrani mod ne smije preklapati sa susjednim modom. U mnogo slučajeva se ova metoda ne može preporučiti. Nepovoljno je nelinearno ponašanje konstrukcije jer može prouzročiti izobličenje vrha rezonantne krivulje. Mogu i nastupiti greške mjerenja uzrokovane registriranim šumom bliskih rezonantnoj frekvenciji koje prividno povećavaju koeficijent prigušenja. Najjednostavnije je procjeniti modalne koeficijente jednostrukog oblika izdvajanjem vrha iz imaginarnog dijela funkcije frekventnog odgovora. Ovaj način je jednostavan i brz, no osjetljiv je na šumove i efekte rezonantnih vrhova susjednih oblika. Može se preporučiti za primjenu na konstrukcijama s malim prigušenjem i jače odvojenim vrijednostima rezonantnih frekvencija.

b) Metoda višestrukih oblika

Primjenjuju se kad su rezonantne frekvencije susjednih modalnih oblika u spektru bliske te kad su koeficijenti prigušenja veći. Funkcija frekventnog odgovora tada poprima matrični oblik. Potrebno je izvršiti, uz korištenje raznih numeričkih metoda, procjenu doprinosa pojedinog jednostupanjskog sustava kao dijela višestupanjskog sustava mjerenja. Moderni analizatori frekvencije sadrže pakete tih programa te posjeduju mogućnost kvalitetne procjene funkcije frekventnog odgovora tijekom mjerenja u realnom vremenu.

4.1.3. Operacionalna modalna analiza

Cilj modalne analize je konstruirati matematički model vibracijskih osobina i ponašanja strukture eksperimentalnim putem. Operacionalna modalna analiza (OMA) za razliku od klasične eksperimentalne modalne analize (EMA) za određivanje modalnih parametara koristi se samo rezultatima izmjerenih odgovora konstrukcija [2]. Kod primjene metode OMA-e, determinističke harmoničke pobude (kao što su pobude uzrokovane proizvodnim postrojenjima, ventilacionim sistemima, turbinama, generatorima i slično) koje se mogu pojaviti kod građevinskih konstrukcija, mogu uzrokovati greške i krivu interpretaciju rezultata te ih je potrebno prepoznati i izdvojiti te eliminirati njihov utjecaj kod određivanja dinamičkih parametara.

Osnovna prednost OMA-e je u tome što pri ispitivanju nije potrebno kontrolirano pobuđivati konstrukciju.

Postupak je jednostavniji, brži i znatno jeftiniji jer provođenje eksperimenata zahtjeva samo korištenje opreme za prikupljanje i obradu podataka što su najčešće akcelerometri i sustav za prikupljanje podataka (analizator, AD pretvarač i osobno računalo). Razlikujemo dvije osnovne skupine metoda OMA-e, metode razvijene u frekventnom području koje se temelje se na singularnoj dekompoziciji funkcija odgovora konstrukcije – **FDD** (Frequency Domain Decomposition), te metode razvijene u vremenskom području koje se baziraju se na metodama stohastičke identifikacije potprostora – **SSI** (Stochastic Subspace Identification).

Dekompozicija frekventnog područja – FDD

Osnovna ideja ove metode je da se izvrši dekompozicija funkcije autospektralne gustoće snage odgovora višestupanjskog sustava na seriju neovisnih jednostupanjskih sustava, po jedan za svaki mod koji se nalazi u spektralnom opsegu u kojem je mjerenje provedeno. Uz pretpostavke da funkcija pobude odgovara bijelom šumu u promatranom spektralnom opsegu, da su prigušenja mala i da su modalni oblici geometrijski ortogonalni, singularne vrijednosti predstavljaju autospektralne gustoće jednostupanjskog sustava, a singularni vektori modalne oblike. Ako neka od pretpostavki nije zadovoljena dekompozicija na jednostupanjske sustave je procjena koja je i dalje točnija od klasične metode odabira vrhova spektralnih funkcija odgovora konstrukcije.

FDD metoda je proširenje klasične metode određivanja modalnih parametara odabirom vrhova funkcija spektralnog odgovora za slučaj kada pojedini modovi nisu blisko raspoređeni u spektru. Postupak se temelji na dekompoziciji na singularne vrijednosti matrice autospektralnih gustoća snage odgovora konstrukcije [14 i 15].

Teoretska podloga FDD metode temelji se na odnosu ulaznih pobuda i odgovora konstrukcije koji se preko matrice funkcije frekventnog odgovora mogu prikazati u obliku[14]:

$$G_{XX}(\omega) = H^*(\omega)G_{FF}(\omega)H^T(\omega) , \quad (4.2.)$$

gdje je $G_{XX}(\omega)$ kvadratna matrica spektralnih gustoća snaga odgovora konstrukcije reda n koji označava broj mjernih mjesta mjerenja odgovora konstrukcije, G_{FF} je kvadratna matrica spektralnih gustoća snaga pobuda konstrukcije reda m koji označava broj mjesta nanošenja pobude, a $H(\omega)$ je matrica funkcija frekventnog odgovora formata $(n \times m)$.

EkspONENTI “*” i “T” označavaju konjugirano kompleksnu i transponiranu matricu. Funkcija frekventnog odgovora može se zapisati u obliku:

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^k \frac{R_r}{i\omega - p_r} + \frac{R_r^*}{i\omega - p_r^*}, \quad (4.3.)$$

gdje je k broj modova, R_r je ostatak, p_r je pol i određeni su izrazima:

$$R_r = a_r \varphi_r \varphi_r^T = \varphi_r \gamma_r^T \quad (4.4.)$$

$$p_r = -\sigma_r \pm i\omega_{dr} \quad (4.5.)$$

Ostatak je određen vektorom modalnog oblika φ_r i γ_r vektorom modalnih participacija, a pol stupnjem prigušenja σ_r i prigušenom vlastitom frekvencijom ω_{dr} .

Ako sada primijenimo pretpostavku da pobuda ima karakteristiku bijelog šuma, tj. da je matrica spektralne gustoće snage $G_{FF}(\omega) = C$ dijagonalna matrica sa konstantama na dijagonali, izraz (4.2.) možemo zapisati u obliku:

$$\mathbf{G}_{XX}(\omega) = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^s \left[\frac{R_r}{i\omega - p_r} + \frac{R_r^*}{i\omega - p_r^*} \right] \mathbf{C} \left[\frac{R_s}{i\omega - p_s} + \frac{R_s^*}{i\omega - p_s^*} \right]^H \quad (4.6.)$$

EkspONENT “H” označava transponiranje i konjugaciju [18].

Proces određivanja modalnih parametara sastoji se u prvom koraku od određivanja matrice spektralnih gustoća snaga odgovora konstrukcije. Drugi korak je dekompozicija na singularne vrijednosti (SVD - Singular Value Decomposition) matrice spektralnih gustoća snaga. Rezultat dekompozicije matrice spektralnih gustoća snaga odgovora pri pojedinoj diskretnoj frekvenciji su matrice - matrica koja sadrži singularne vektore i dijagonalna matrica koja sadrži singularne vrijednosti.

Osnovna FDD metoda je brza i efikasna u određivanju vlastitih frekvencija i modalnih oblika. Određivanjem vrhova funkcije spektralne gustoće snage nakon provedene dekompozicije na singularne vrijednosti (SVD), direktno određujemo modalni oblik za tu frekvenciju. Kako se pri ovoj metodi za određivanje vlastitih frekvencija i modalnih oblika za svaki mod koristi samo jedna diskretna frekvencija metoda ne omogućava određivanje modalnih prigušenja.

Poboljšana FDD metoda – EFDD

EFDD (Enhanced Frequency Domain Decomposition) je poboljšana metoda dekompozicije frekventnog područja, to jest nadogradnja osnovne metode FDD. Ovom metodom se određuje funkcija spektralne gustoće snage jednostupanjskog sustava u blizini vlastite frekvencije odnosno rezonantnog vrha, zatim se ta funkcija jednostupanjskog sustava vraća u vremensko područje Inverznom Diskretnom Fourierovom Transformacijom (IDFT) i predstavlja procjenu funkcije korelacije jednostupanjskog sustava. Za određivanje vlastitih frekvencija i koeficijenata prigušenja pojedinog moda koriste se tako određene funkcije u vremenskom području.[16] Usporedbom vektora modalnih oblika određenih dekompozicijom na singularne vrijednosti za diskretne frekvencije u blizini vrha s vektorom određenim za sam vrh funkcije određuje se funkcija jednostupanjskog sustava, koja se ponekad naziva i “spektralno zvono”. Korelacija modalnih oblika određuje se korištenjem MAC-a faktora, na taj način utvrđuje se u kojoj mjeri pojedini modalni oblik pri diskretnim frekvencijama (φ_i) oko vrha funkcije oblikom odgovara referentnom modalnom obliku (φ_r) određenom za sam vrh funkcije spektralne gustoće snage.

$$MAC = \frac{|\varphi_r^T \varphi_i|^2}{\{\varphi_r^T \varphi_r\} \{\varphi_i^T \varphi_i\}} \quad (4.7.)$$

Kod primjene ove metode odabiremo vrijednost MAC faktora kojim definiramo zahtjevanu podudarnost modalnih oblika i nazivamo ga faktor odbacivanja.

Ako je MAC faktor jednak 1 modalni oblici su potpuno identični. Ako je vrijednost MAC faktora veća od faktora odbacivanja za modalni oblik određen pri nekoj diskretnoj frekvenciji, singularna vrijednost za tu diskretnu frekvencije (spektralna gustoća snage) ulazi u funkciju spektralne gustoće snage jednostupanjskog sustava. Smanjivanjem stupnja odbacivanja povećavamo broj singularnih vrijednosti koje definiraju pojedini jednostupanjski sustav, odnosno uzimamo šire područje oko vrha funkcije spektralne gustoće snage i suprotno [18]. Ako sada primijenimo IDFT na funkciju jednostupanjskog sustava (spektralno zvono) koja je određena na ranije opisan način, određujemo normaliziranu funkciju korelacije iz koje možemo potvrditi vlastitu frekvenciju na način da broj prolazaka funkcije kroz nulu prikažemo u vremenu.

Koeficijenti prigušenja se određuju korištenjem logaritamskog dekrementa linearnom aproksimacijom funkcije logaritamskih vrijednosti ekstrema normalizirane funkcije.

Za određivanje modalnih oblika EFDD metoda koristi težinsku sumu singularnih vektora i singularnih vrijednosti pri čemu se eventualni slučajni šumovi gube kroz osrednjavanje.

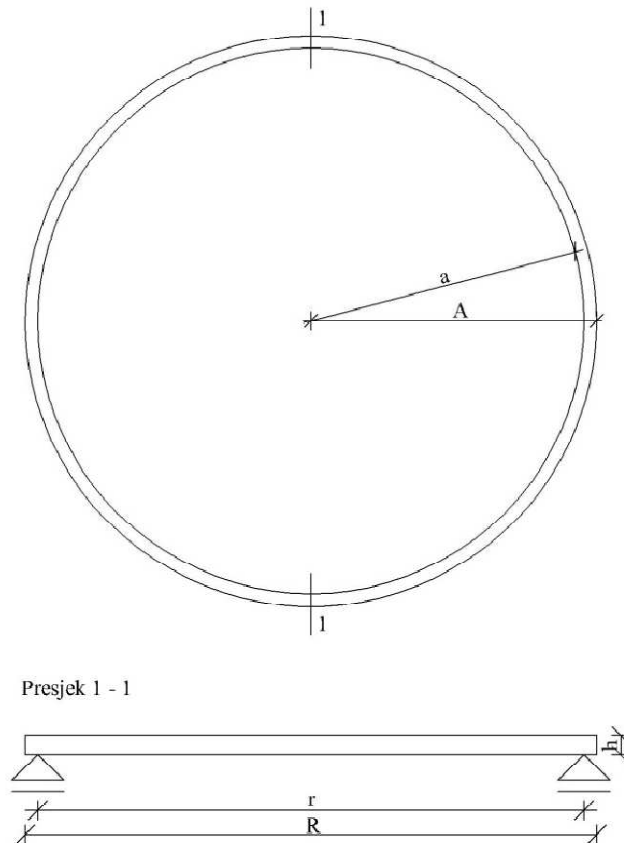
FDD metoda izjednačavanja krivulja - CFDD

CFDD metoda ima određene prednosti u odnosu na EFDD u prisutnosti determinističkih signala pri mjerenju ili kada su zapisi prikupljeni u kratkom vremenskom periodu što uzrokuje nečiste rezultate dekompozicije na singularne vrijednosti.

CFDD (Curve-fit Frequency Domain Decomposition) kao nadogradnja EFDD je FDD metoda izjednačavanja krivulja. CFDD metoda (kao i EFDD metoda) obuhvaća određivanje svih modalnih parametara. Postupak određivanja modalnih parametara temelji se na FDD metodi i određivanju funkcija spektralne gustoće snage jednostupanjskih sustava. Razlika je u tome što CFDD metoda za određivanje modalnih parametara koristi izjednačavanje krivulja jednostupanjskih sustava u frekventnom području. Modalni oblici u slučaju EFDD i CFDD metode određuju se na isti način [16 i 17].

4.2. Eksperimenti na modelu slobodno oslonjene kružne ploče

Model koji ispitujemo je kružna ploča od mediapana promjera 75 cm (A), visine 1cm (h), slobodno oslonjena duž cijele kružnice. Ležaj je odmaknut od ruba za 3,3 cm (Slika 6.). Masa ploče je 3,1336 kg, Poissonov koeficijent $\nu = 0,16$, a modul elastičnosti $E = 4408 \text{ MPa} = 4408000 \text{ kN/m}^2$.

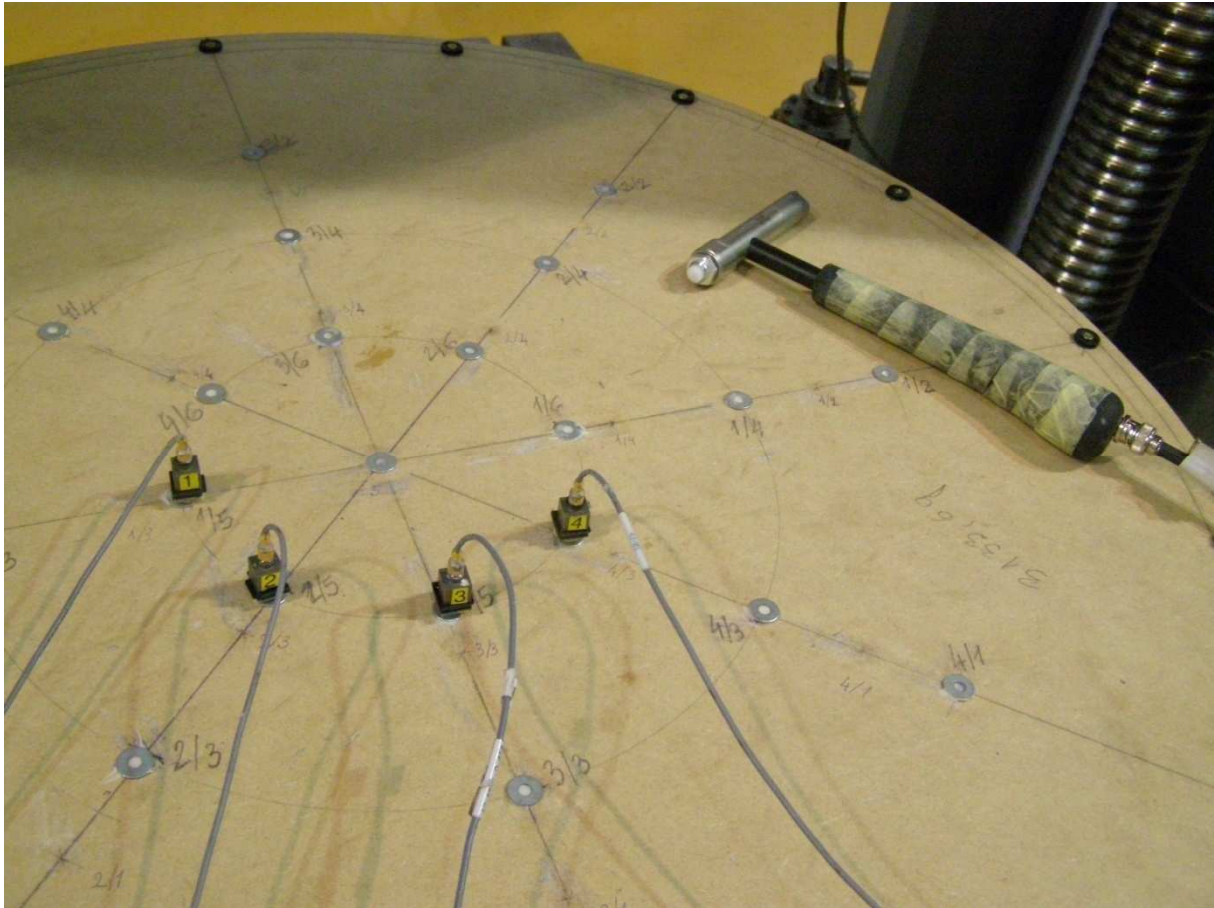


Slika 6. Dispozicija modela

Eksperimentalna modalna analiza

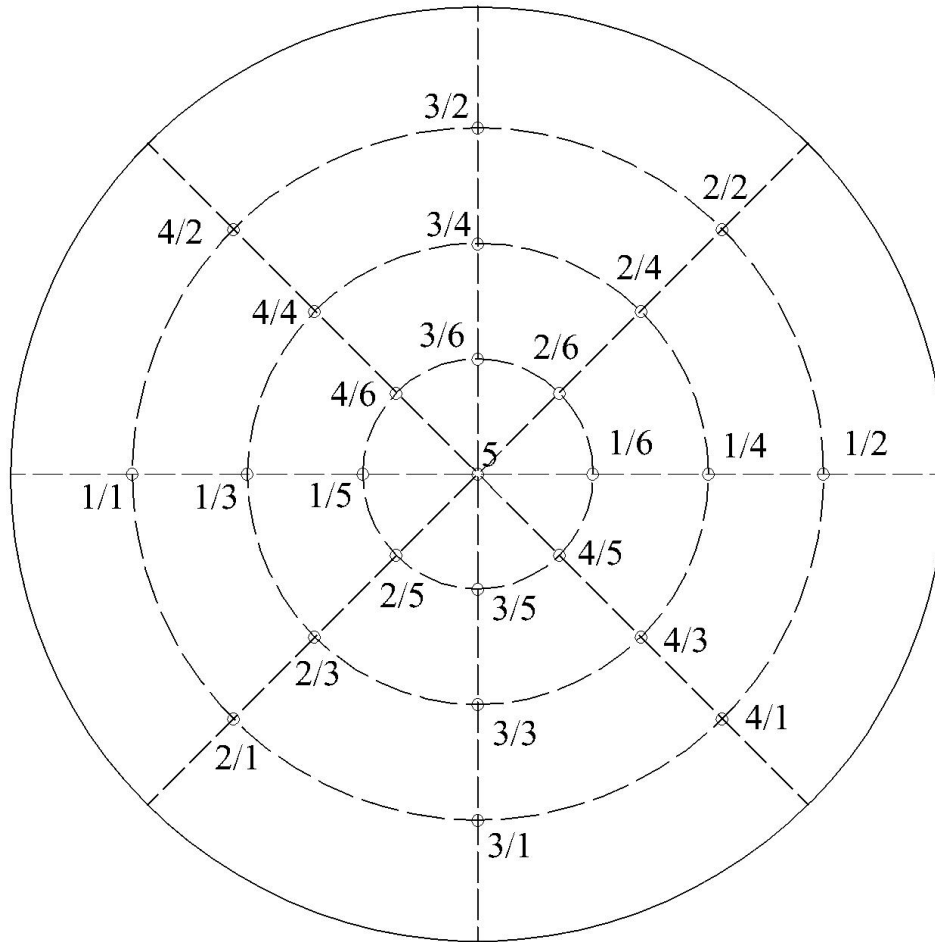
Kako bismo osigurali kontrolirano nanošenje pobude, koristili smo udarni čekić (Slika 7.). Pobuda koju smo ostvarili je impulsna i omogućila je dobivanje dovoljnog opsega frekvencija. U svrhu ovog istraživanja koristili smo udarni čekić tipa Brüel & Kjær 8206. Osjetljivost mjerne doze za silu ovog udarnog čekića je 22,7 mV/N, sila koju može nanijeti je 220 N, a raspon radne temperature od -73° do $+60^\circ\text{C}$.

Udarni čekić ima ugrađeno osjetilo za mjerenje sile koje se nalazi u glavi samog čekića, što nam omogućava nanošenje vibracija uz poznatu funkciju unesene sile u konstrukciju. Koristili smo čekić tvrde glave (od aluminija) kako bi dobili što veći opseg frekvencija.



Slika 7. Udarni čekić i akcelerometri u 5. fazi ispitivanja

Za prikupljanje podataka koristili smo piezoelektrične akcelerometre tipa Brüel & Kjær 4508B sa osjetljivošću od 10mV/ms^{-2} , amplitudnim područjem frekvencija od 0,3Hz do 8 kHz i faznim od 2 Hz do 5 kHz, rezonantnom frekvencijom od 26,6 kHz, mjernim područjem od 700ms^{-2} i temperaturnim radnim područjem od -54° do $+121^{\circ}\text{C}$. Na raspolaganju smo imali pet akcelerometra od kojih smo jedan postavili u središte modela kao statični, a ostala četiri smo premještali po modelu po mjernim mjestima koje smo unaprijed odredili. Mjerna mjesta (mjerne točke) su mjerni stupnjevi slobode. Dispozicija mjernih mjesta prikazana je na Slici 8.

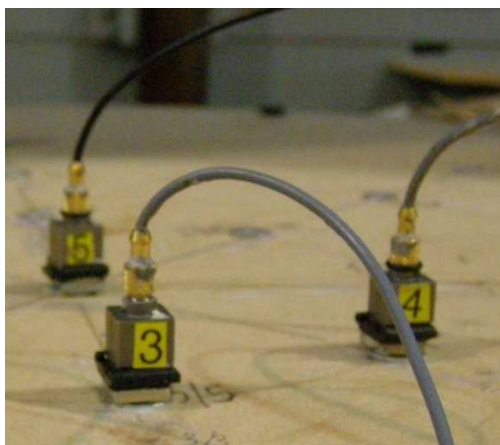


Slika 8. Dispozicija mjernih mjesta na modelu

Akcelerometre smo pomicali po fazama. Kod oznaka 1/1, 2/1, 3/5 itd. broj na prvom mjestu označava broj akcelerometra (Slika 9.), a na drugom mjestu je broj koji označava fazu ispitivanja.

Kako bi dobili što točije rezultate kombinirali smo mjesto pobude s fazama ispitivanja pomicanjem akcelometara. Ispitivanja smo vršili ovim redoslijedom:

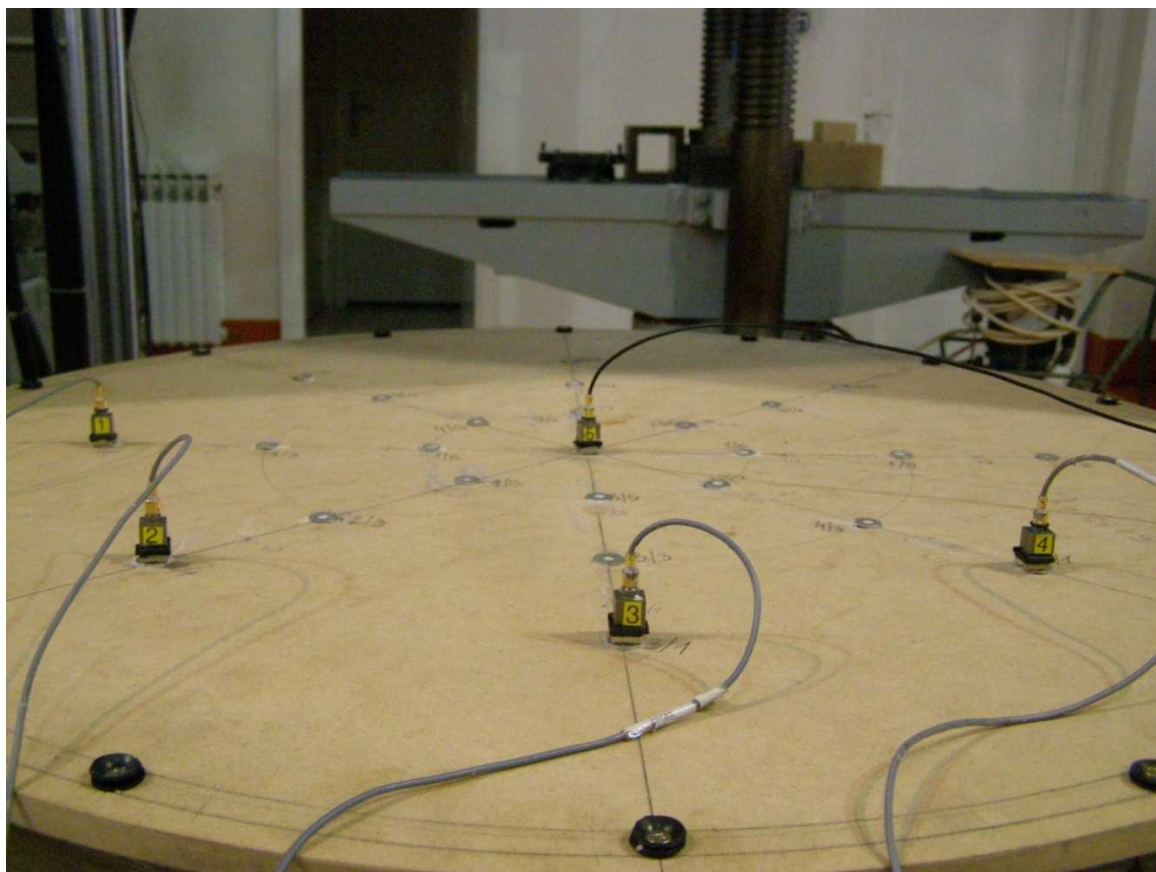
- 1) ispitivanje s pobudom na srednjem prstenu i akcelometrima postavljenim na srednjem prstenu
- 2) ispitivanje s pobudom na sredini i akcelometrima na srednjem prstenu
- 3) ispitivanje s pobudom na srednjom prstenu i akcelometrima na unutarnjem prstenu
- 4) ispitivanje s pobudom na sredini i akcelometrima na unutarnjem prstenu
- 5) ispitivanje s pobudom na srednjem prstenu i akcelometrima na vanjskom prstenu
- 6) ispitivanje s pobudom na sredini i akcelometrima na vanjskom prstenu



Slika 9. Brojevi na akcelerometrima



Slika 10. Model s postavljenim akcelerometrima



Slika 11. Model s postavljenim akcelerometrima, prva faza

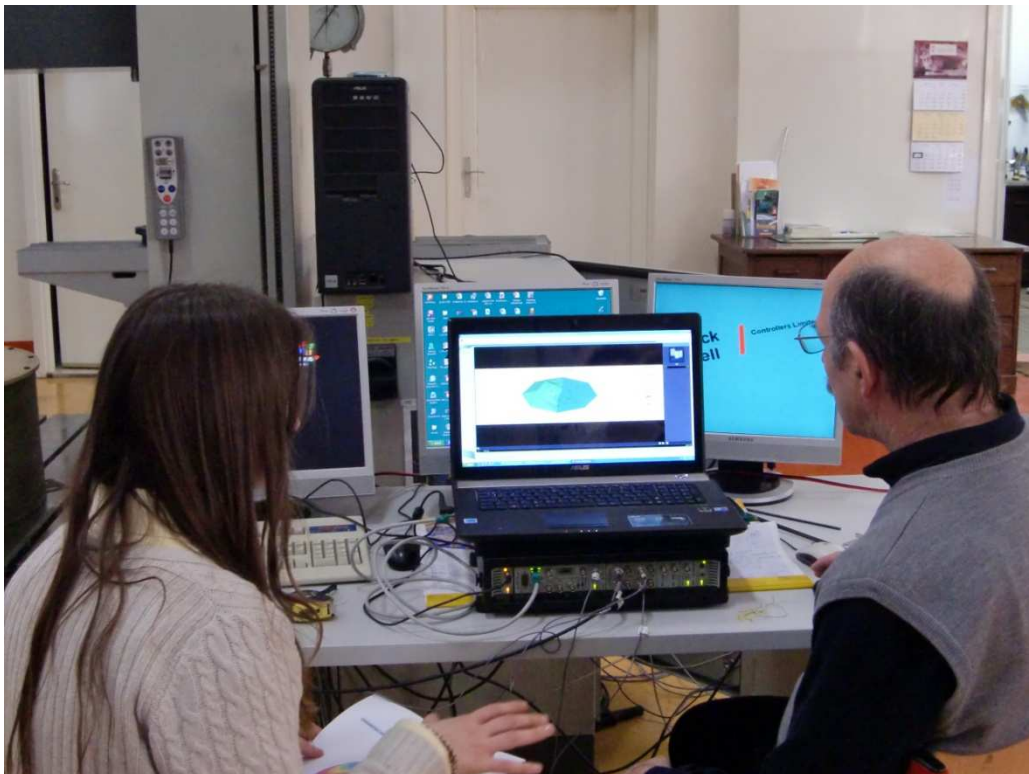
Operacionalna modalna analiza

Ispitivanje je vrlo slično kao i kod eksperimentalne modalne analize. Razlika je u tome što pobudu nismo nanosili kontrolirano. Istim udarnim čekićem smo pobuđivali konstrukciju na raznim mjestima na modelu (Slika 12.). Faze pomicanja akcelerometara i dispozicija mjernih mjesta je ista kao i kod EMA –e (Slika 8.).

Kod obje metode ispitivanja analiza signala vrši se digitalnim analizatorima baziranim na osobnim računalima (Slika 12.).



Slika 11. Pobuđivanje konstrukcije kod OMA – e

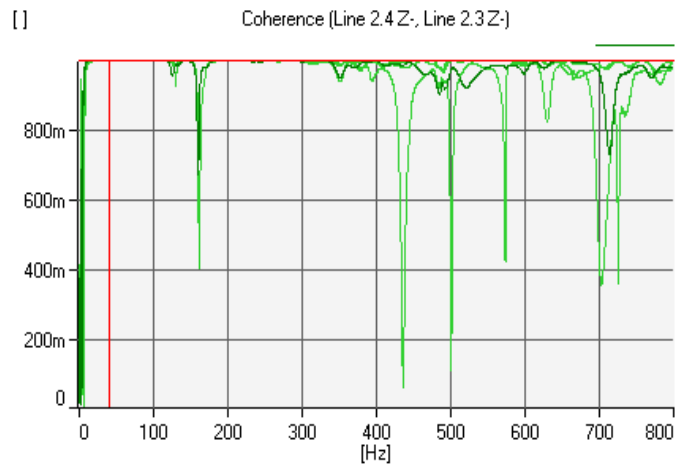


Slika 12. Digitalni analizator baziran na osobnom računalu

5. REZULTATI ISPITIVANJA

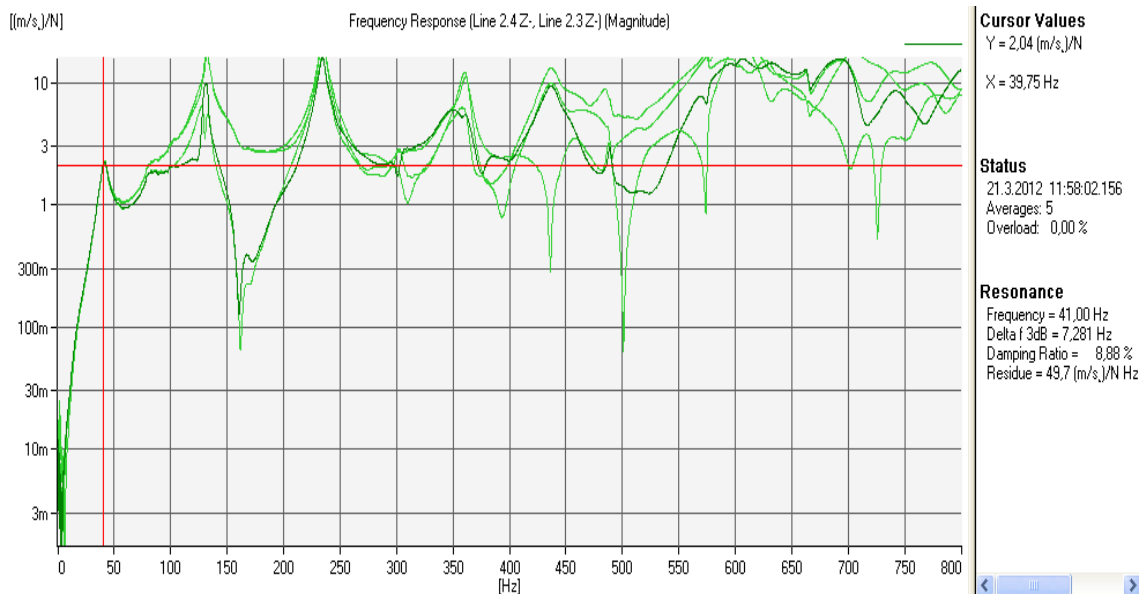
5.1. Eksperimentalna modalna analiza

1. Ispitivanje s pobudom na srednjem prstenu i akceleroimetrima postavljenim na srednjem prstenu



Slika 13. Koherencija

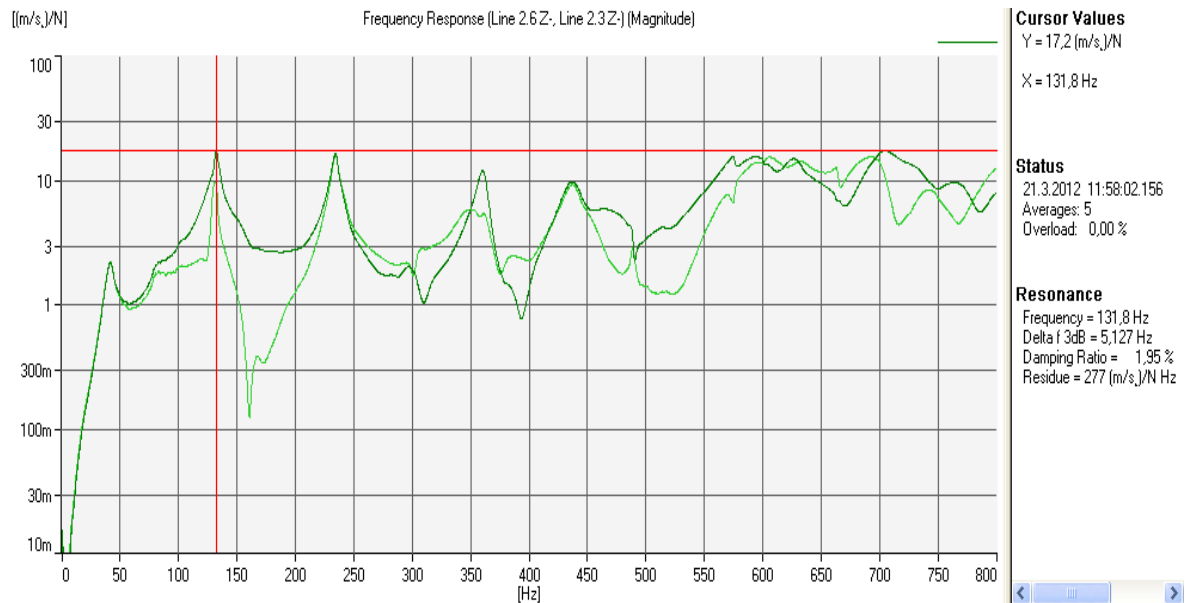
Prvi mod



Slika 14. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana prva vlastita frekvencija (f_1)

→ Prva frekvencija: $f_1 = 41,00 \text{ Hz}$

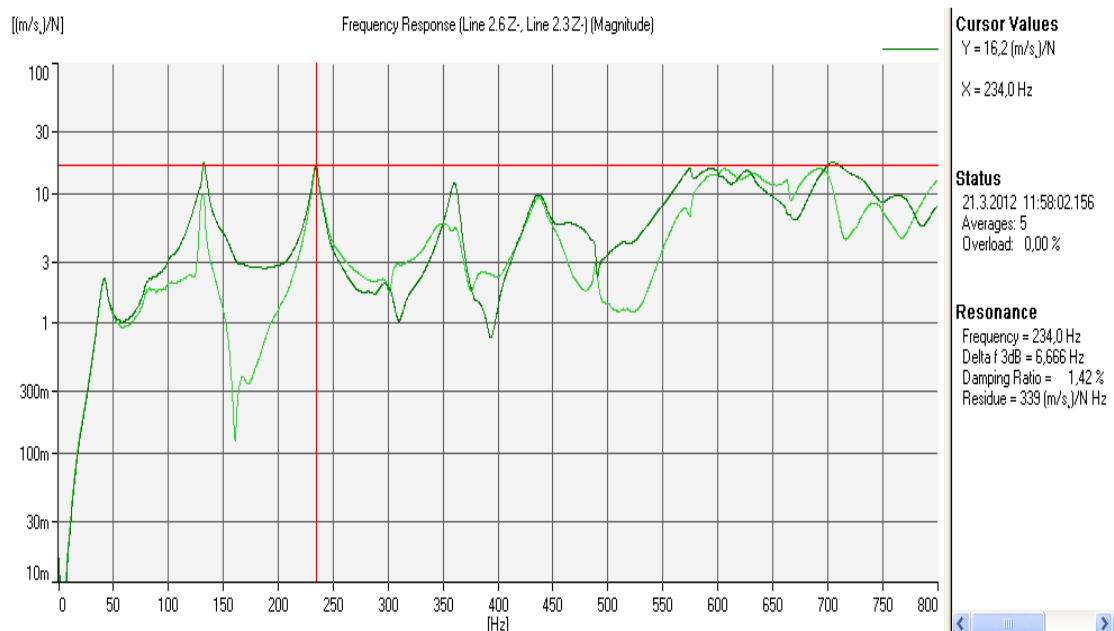
Drugi mod



Slika 15. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana druga vlastita frekvencija (f_2)

→ Druga frekvencija: $f_2 = 131,8 \text{ Hz}$

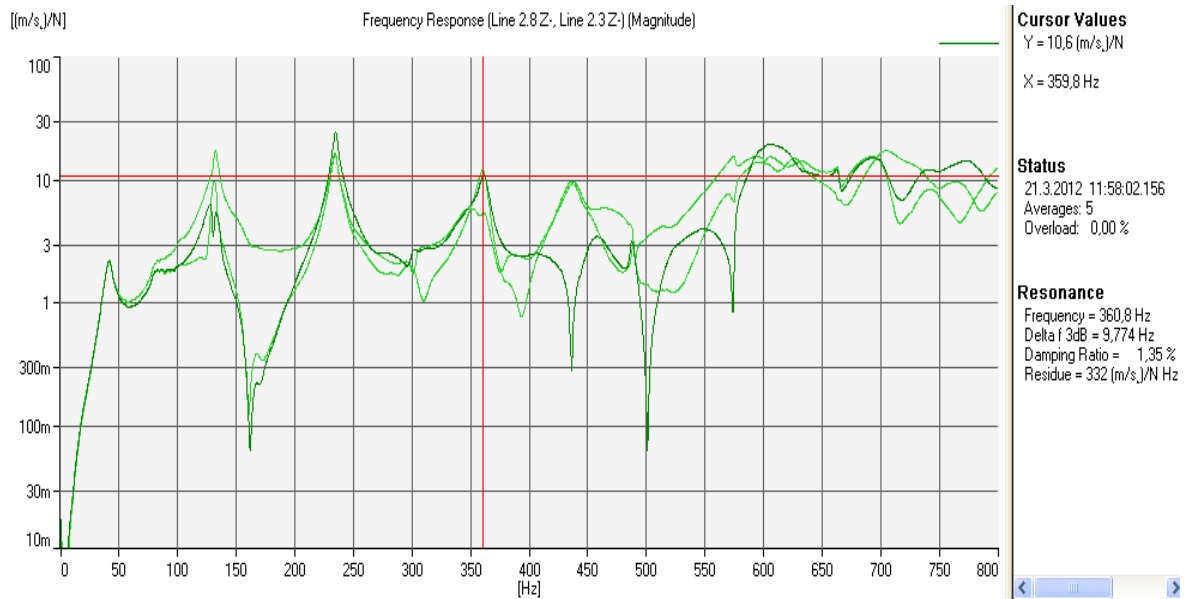
Treći mod



Slika 16. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana treća vlastita frekvencija (f_3)

→ Treća frekvencija: $f_3 = 234,0 \text{ Hz}$

Peti mod

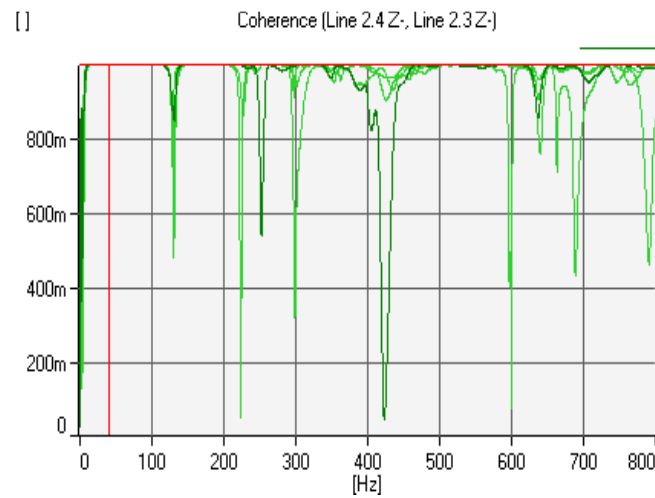


Slika 17. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana peta vlastita frekvencija (f_5)

→ Četvrta frekvencija: $f_5 = 360,8 \text{ Hz}$

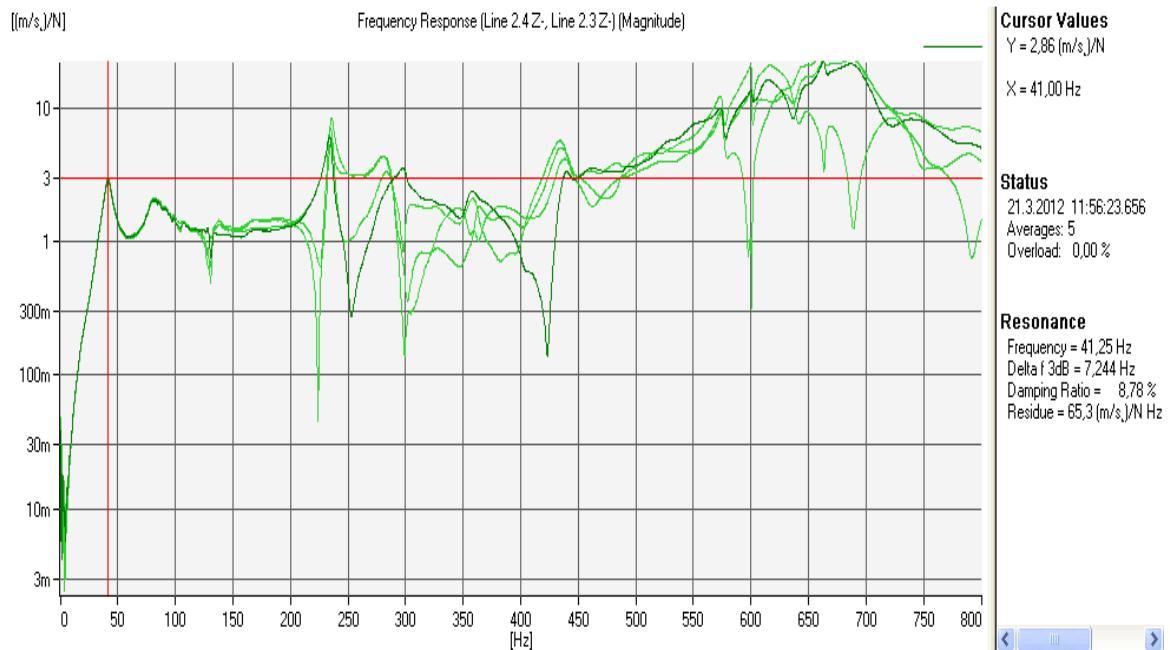
Ostali zapisi nisu mjerodavni jer nastupa niska koherencija.

1. Ispitivanje s pobudom na sredini i akcelometrima na srednjem prstenu



Slika 18. Koherencija

Prvi mod

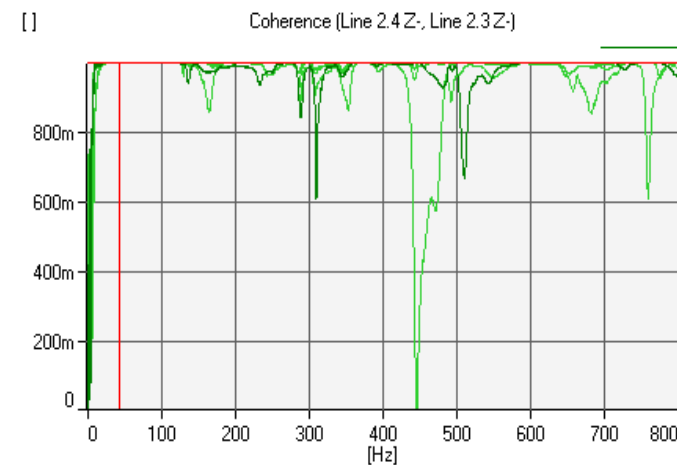


Slika 19. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana prva vlastita frekvencija (f_1)

→ Prva frekvencija: $f_1 = 41,25 \text{ Hz}$

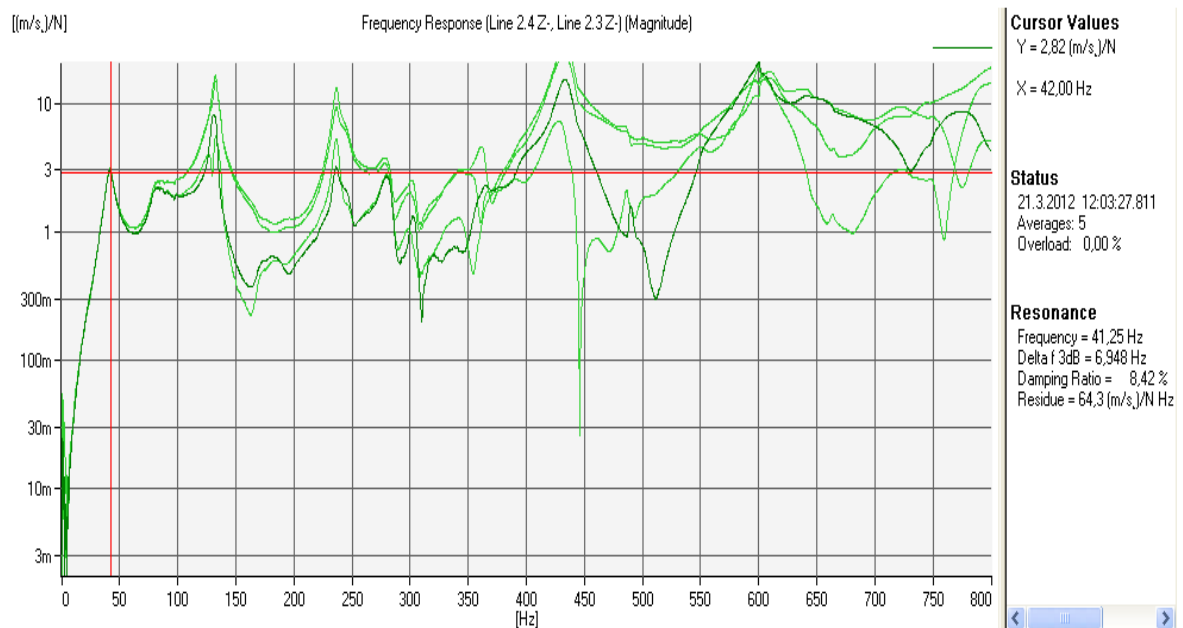
Ostale frekvencije nisu mjerodavne zbog prisutnosti šuma.

2. Ispitivanje s pobudom na srednjom prstenu i akcelometrima na unutarnjem prstenu



Slika 20. Koherencija

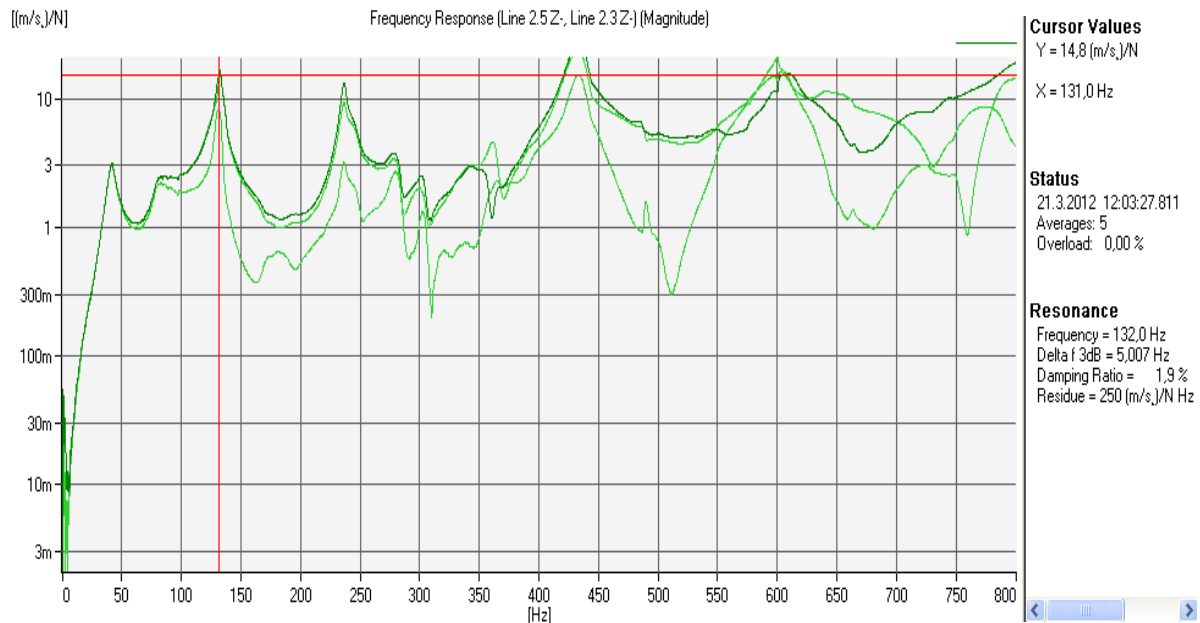
Prvi mod



Slika 21. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana prva vlastita frekvencija f_1

→ Prva frekvencija: $f_1 = 41,25 \text{ Hz}$

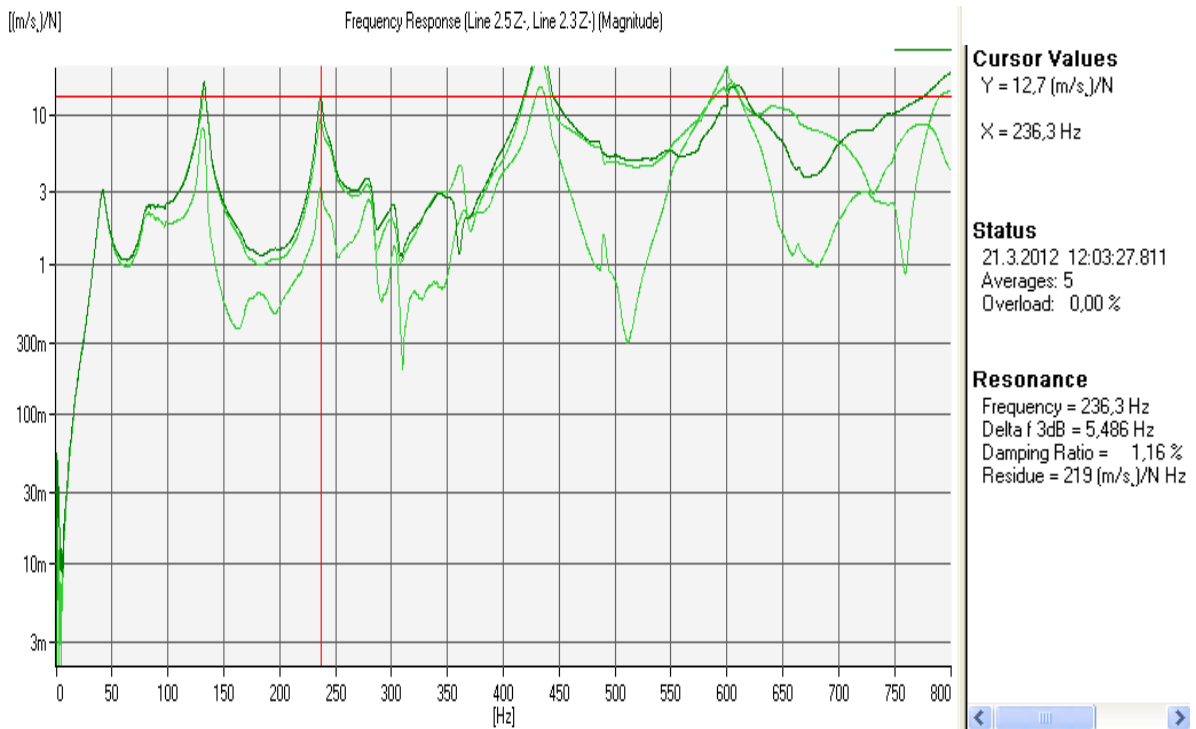
Drugi mod



Slika 22. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana druga vlastita frekvencija (f_2)

→ Druga frekvencija: $f_2 = 132,0 \text{ Hz}$

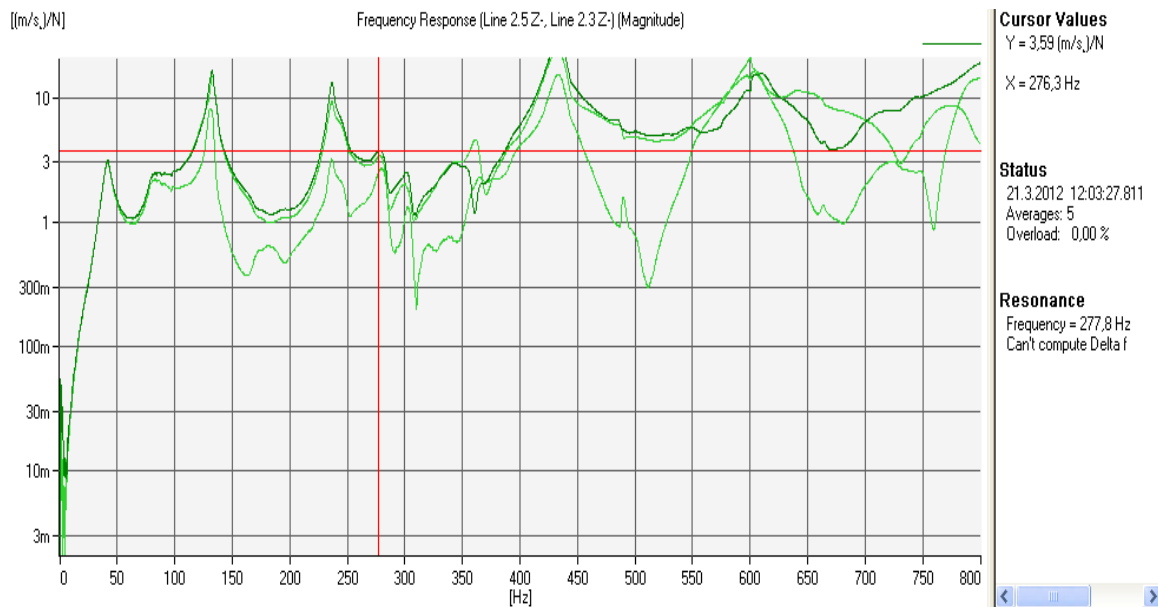
Treći mod



Slika 23. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana treća vlastita frekvencija (f_3)

→ Treća frekvencija: $f_3 = 236,3 \text{ Hz}$

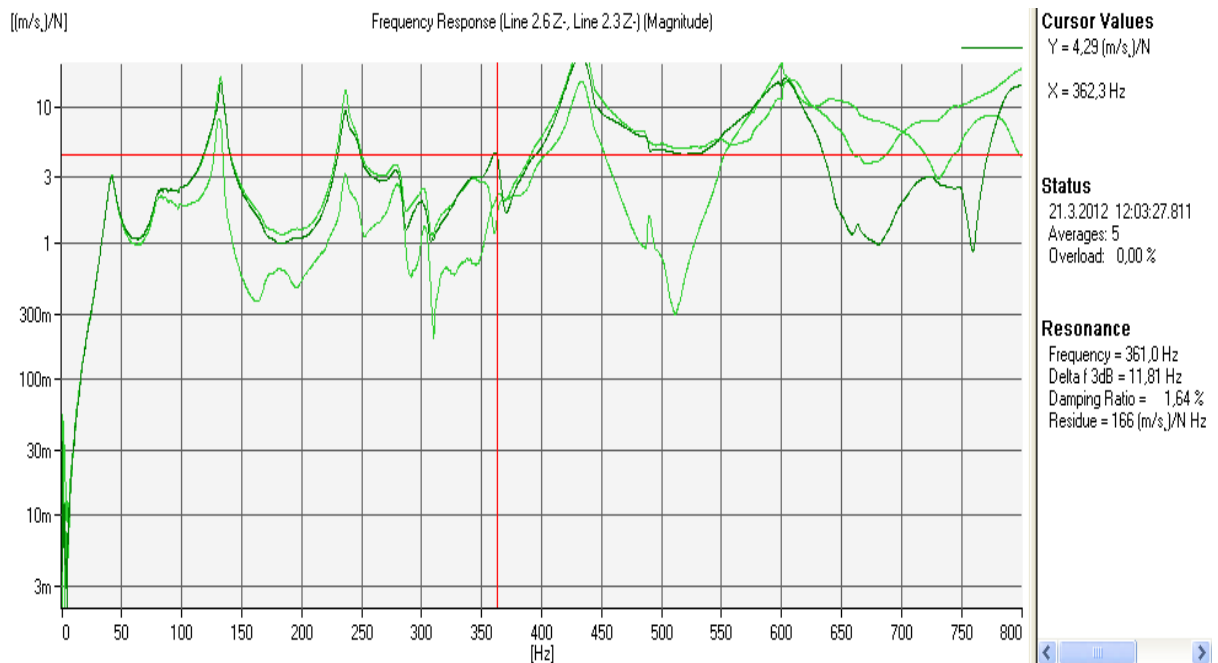
Četvrti mod



Slika 24. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana četvrta vlastita frekvencija (f_4)

→ Četvrta frekvencija: $f_4 = 277,8 \text{ Hz}$

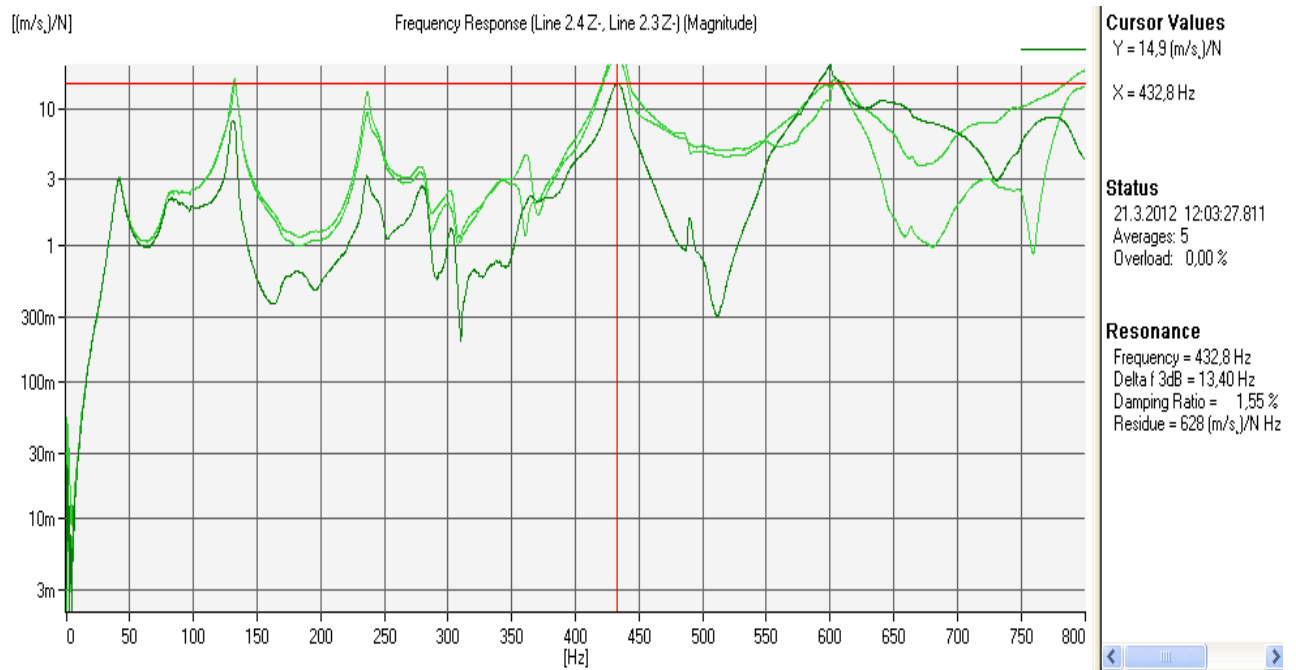
Peti mod



Slika 25. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana peta vlastita frekvencija (f_5)

→ Peta frekvencija: $f_5 = 361,0 \text{ Hz}$

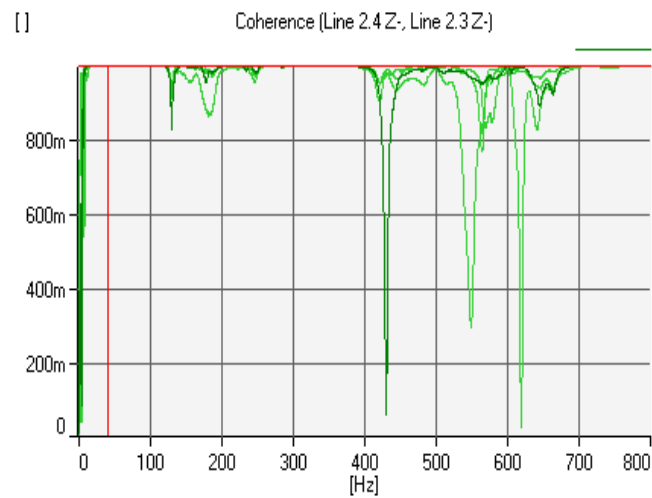
Šesti mod



Slika 26. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana šesta vlastita frekvencija (f_6)

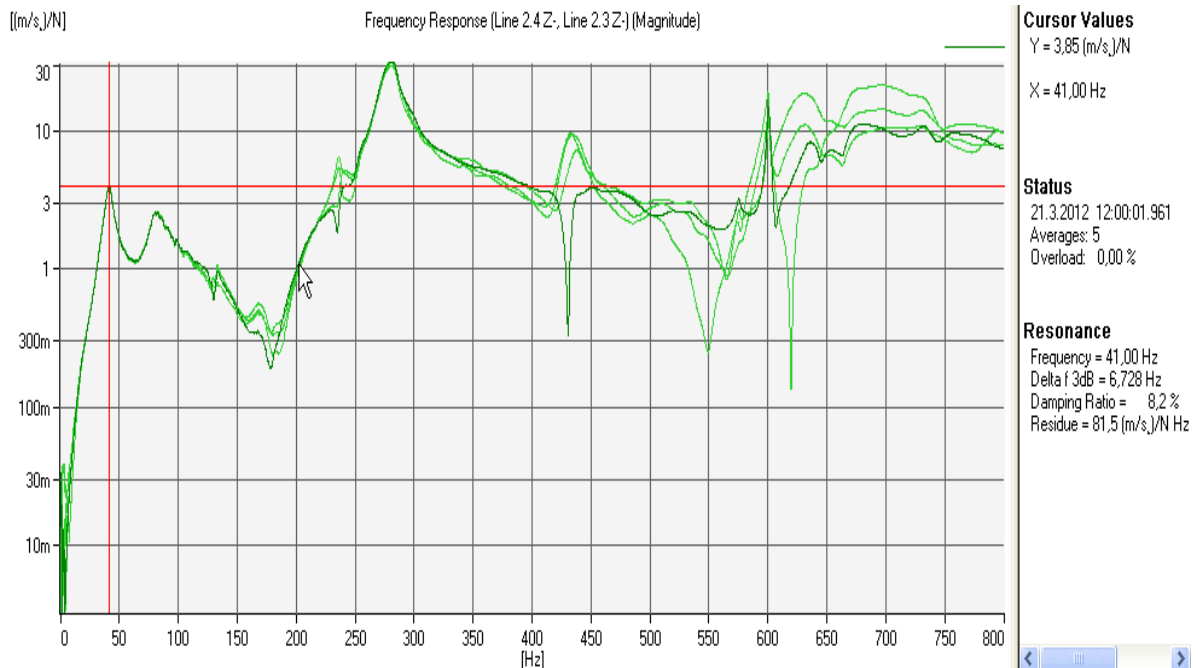
→ Šesta frekvencija: $f_6 = 432,8 \text{ Hz}$

3. Ispitivanje s pobudom na sredini i akcelometrima na unutarnjem prstenu



Slika 27. Koherencija

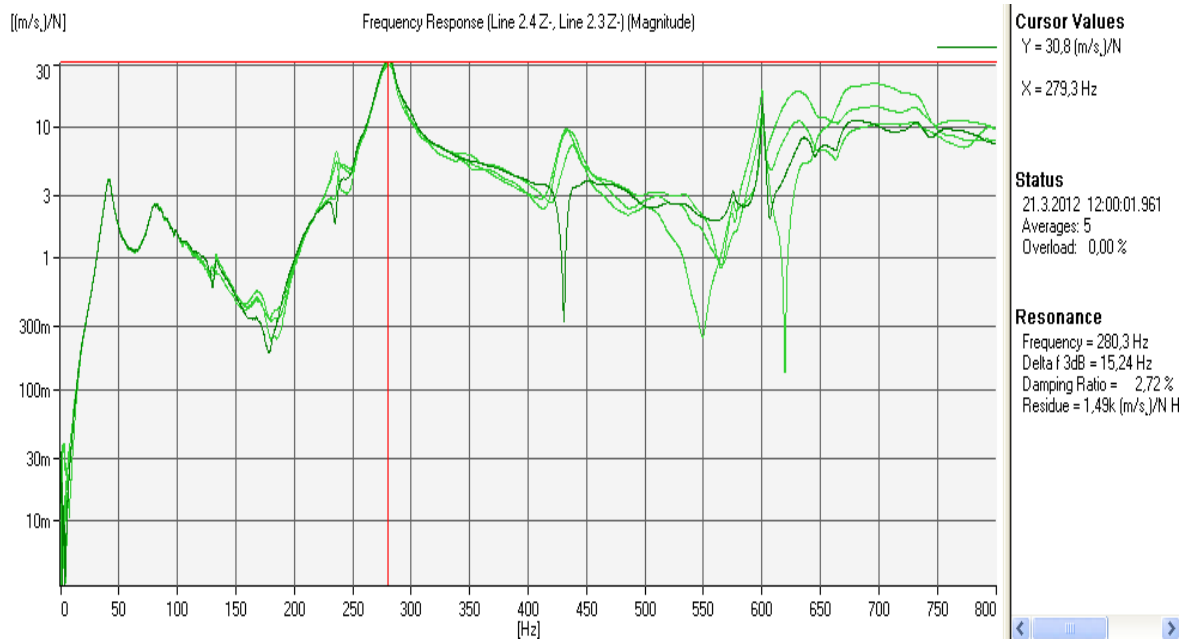
Prvi mod



Slika 28. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana prva vlastita frekvencija (f_1)

→ Prva frekvencija: $f_1 = 41,00 \text{ Hz}$

Četvrti mod

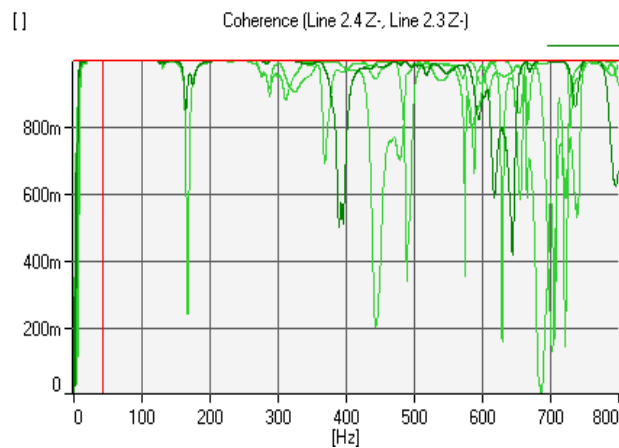


Slika 29. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana četvrta vlastita frekvencija (f_4)

→ Četvrta frekvencija: $f_4 = 280,3 \text{ Hz}$

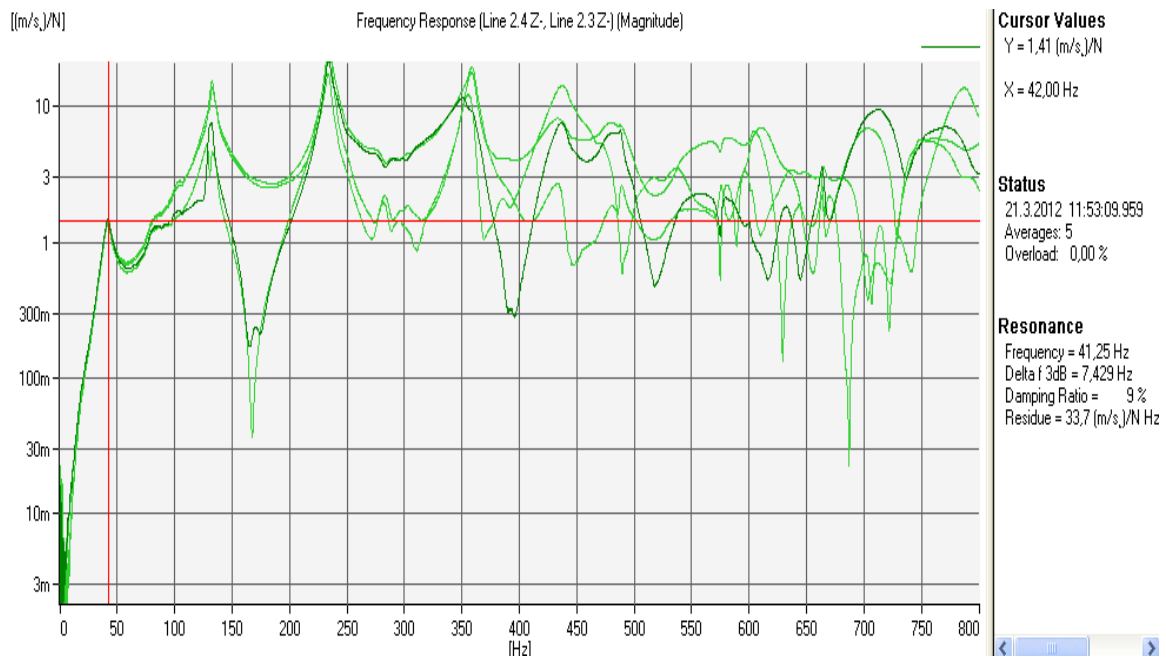
Ostale frekvencije nisu mjerodavne zbog prisutnosti šuma.

4. Ispitivanje s pobudom na srednjem prstenu i akcelometrima na vanjskom prstenu



Slika 30. Koherencija

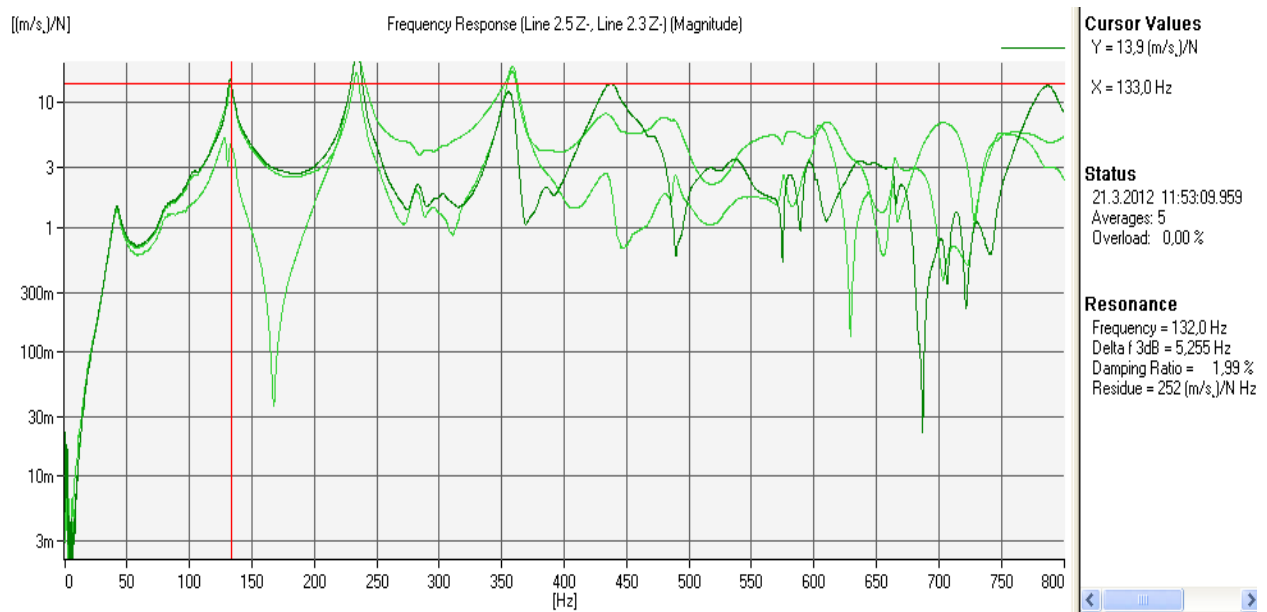
Prvi mod



Slika 31. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana prva vlastita frekvencija (f_1)

→ Prva frekvencija: $f_1 = 41,25 \text{ Hz}$

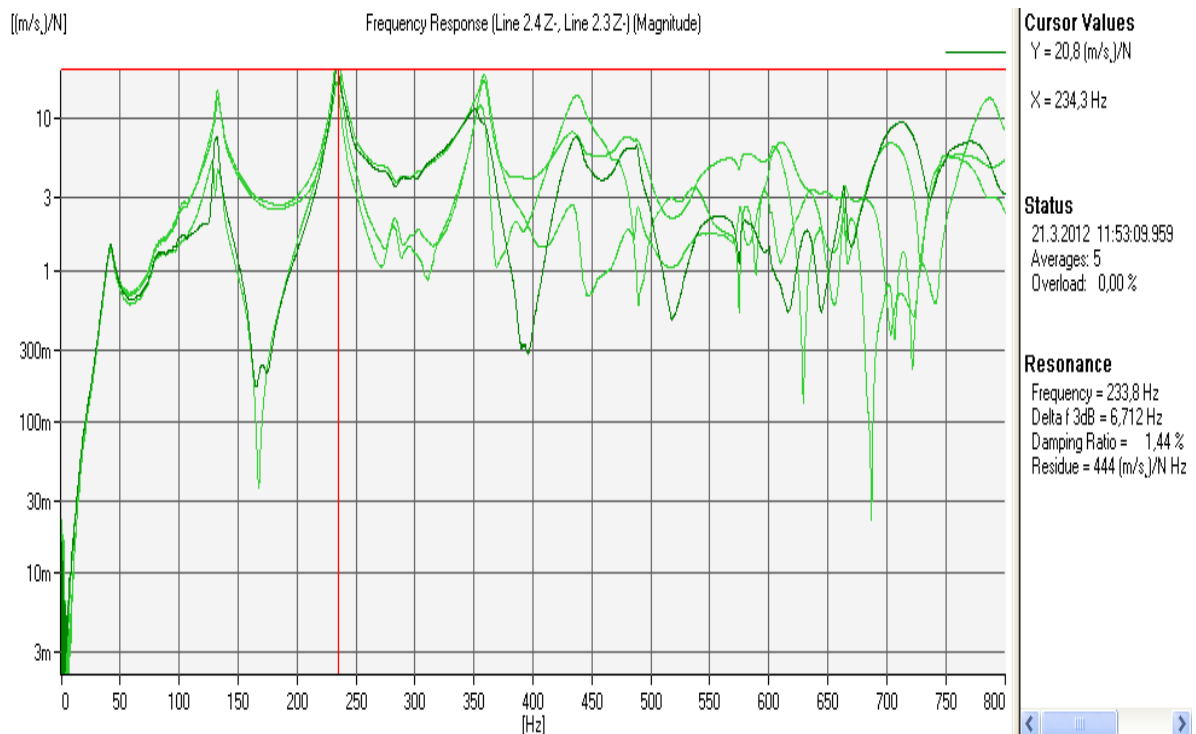
Drugi mod



Slika 32. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana druga vlastita frekvencija f_2

→ Druga frekvencija: $f_2 = 132,0 \text{ Hz}$

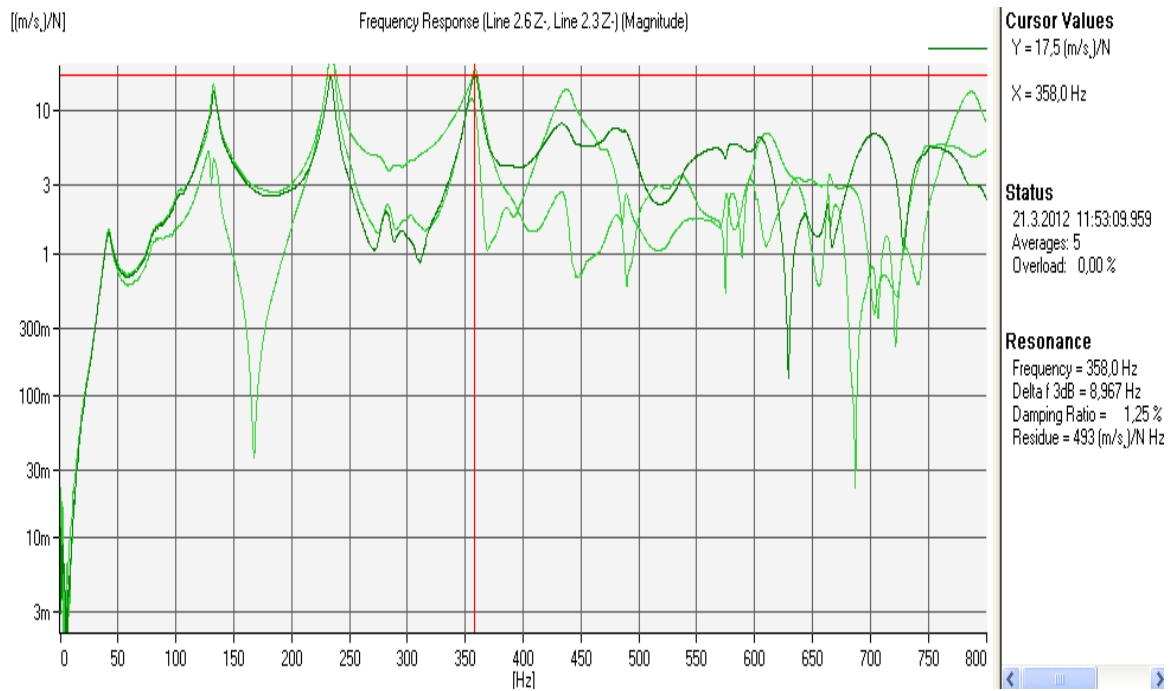
Treći mod



Slika 33. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana treća vlastita frekvencija f_3

→ Treća frekvencija: $f_3 = 233,8 \text{ Hz}$

Peti mod

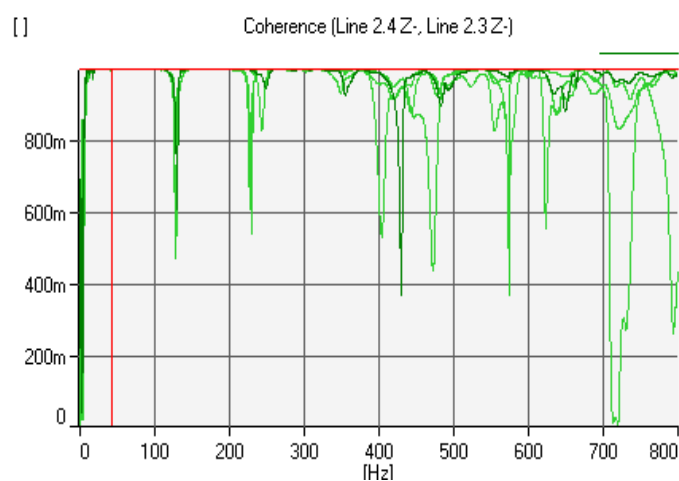


Slika 34. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana peta vlastita frekvencija (f_5)

→ Peta frekvencija: $f_5 = 358,0 \text{ Hz}$

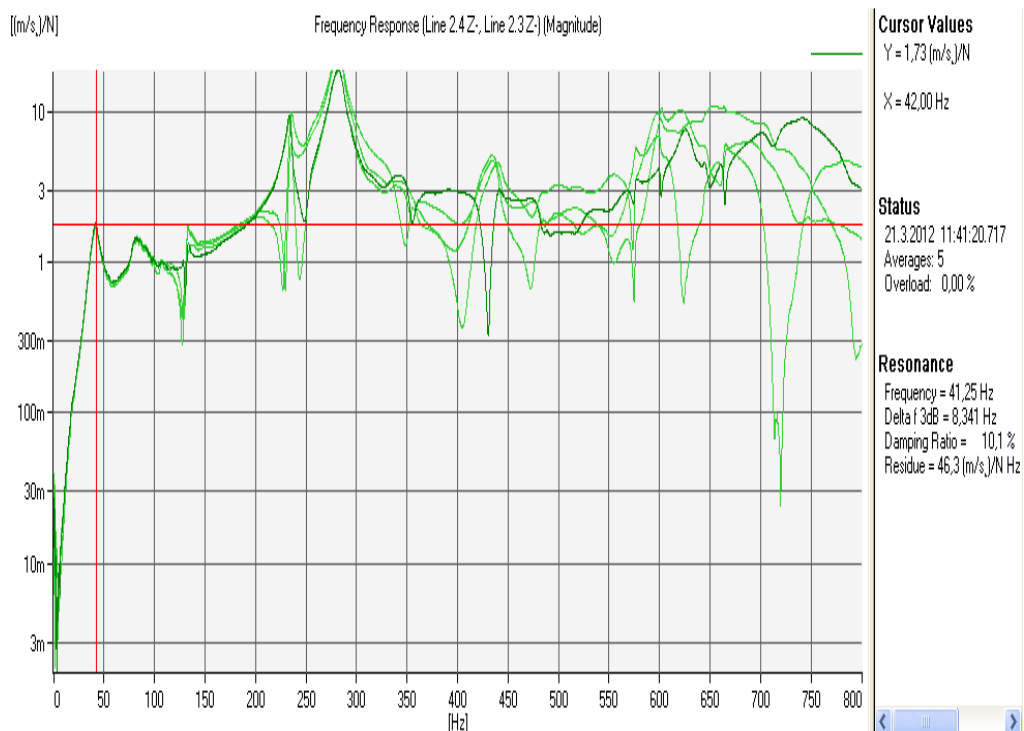
Ostale frekvencije nisu mjerodavne zbog prisutnosti šuma.

5. Ispitivanje s pobudom na sredini i akcelometrima na vanjskom prstenu



Slika 35. Koherencija

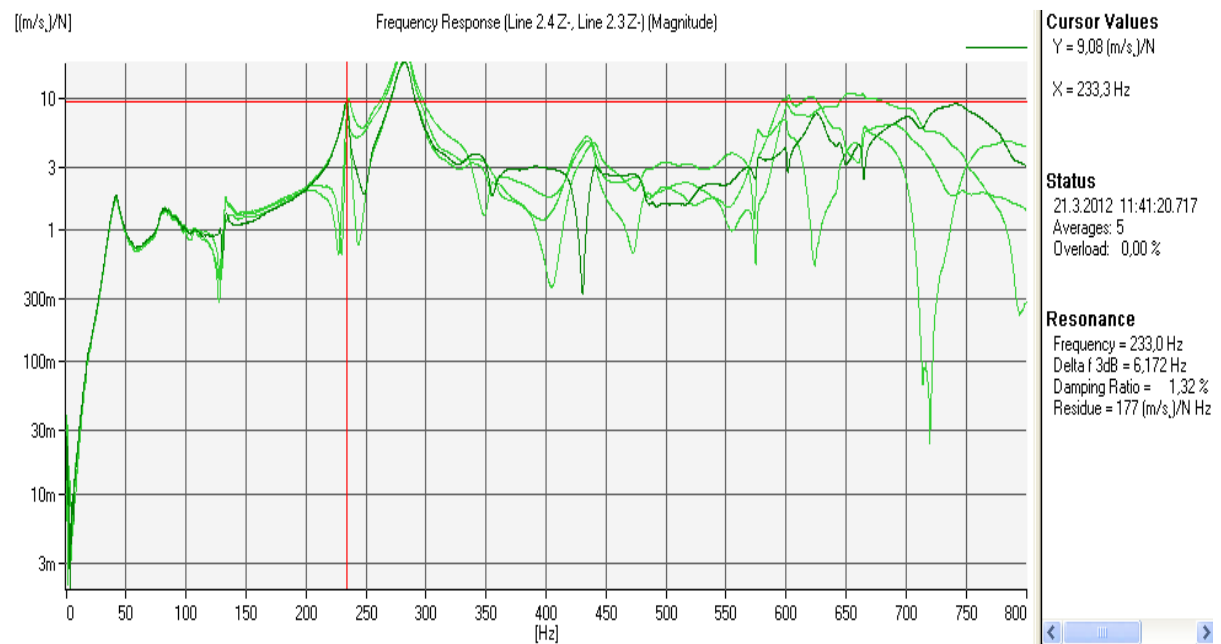
Prvi mod



Slika 36. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana prva vlastita frekvencija (f_1)

→ Peta frekvencija: $f_1 = 41,25 \text{ Hz}$

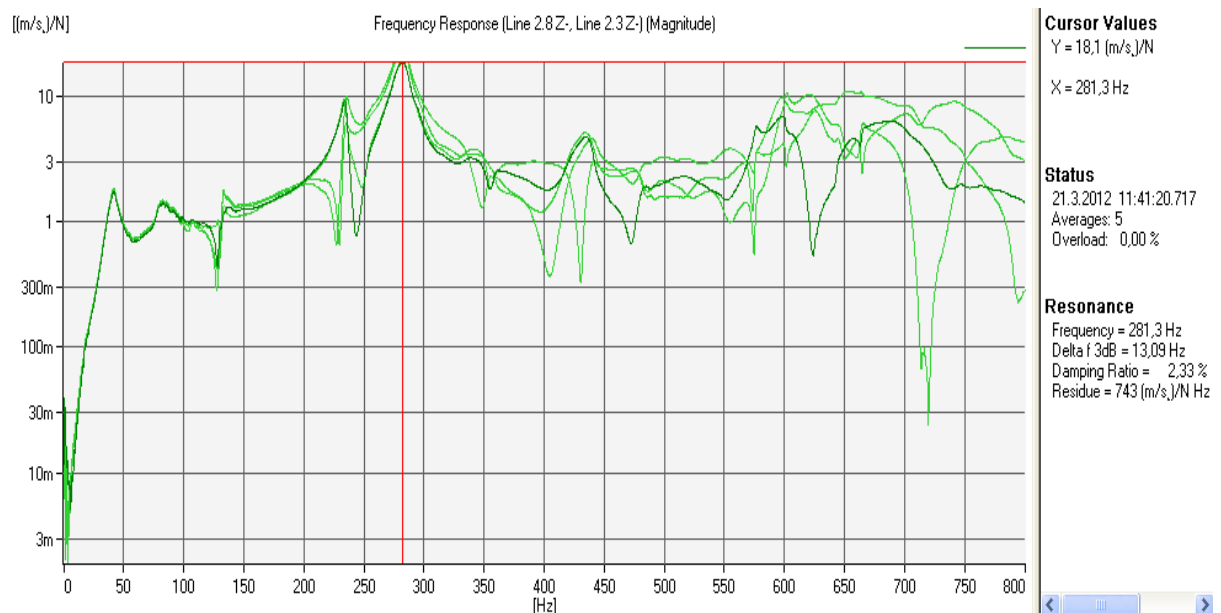
Treći mod



Slika 37. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana treća vlastita frekvencija (f_3)

→ Treća frekvencija: $f_3 = 233,0 \text{ Hz}$

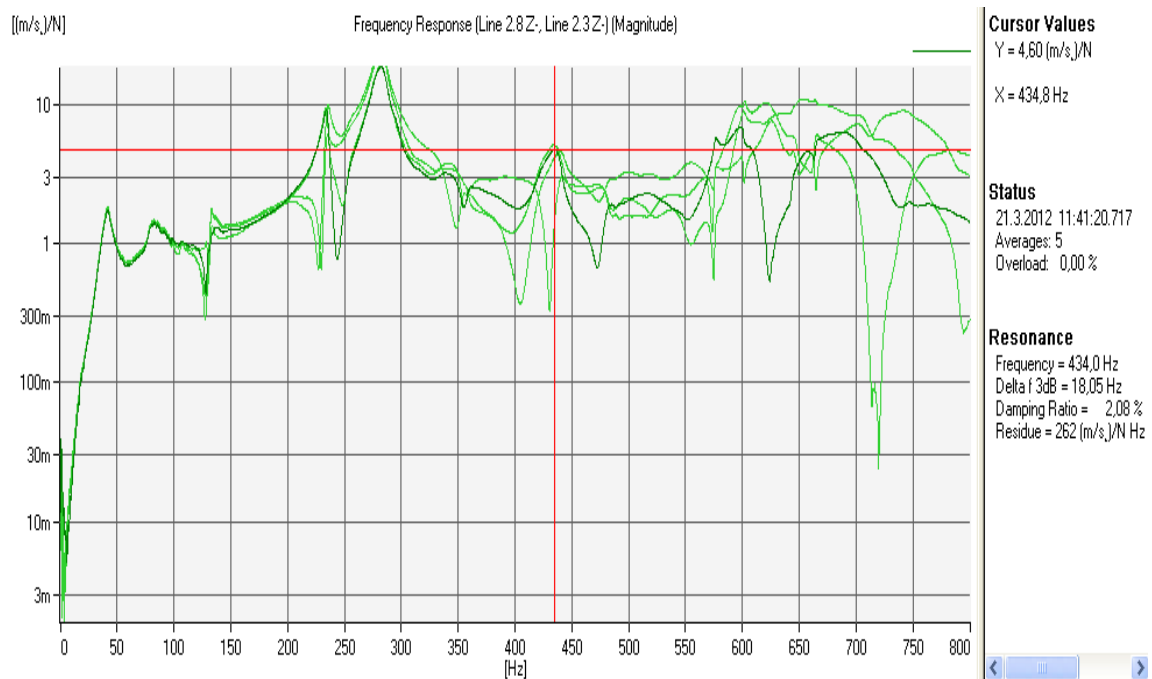
Četvrti mod



Slika 38. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana četvrta vlastita frekvencija f_4

→ Četvrta frekvencija: $f_4 = 281,3 \text{ Hz}$

Šesti mod



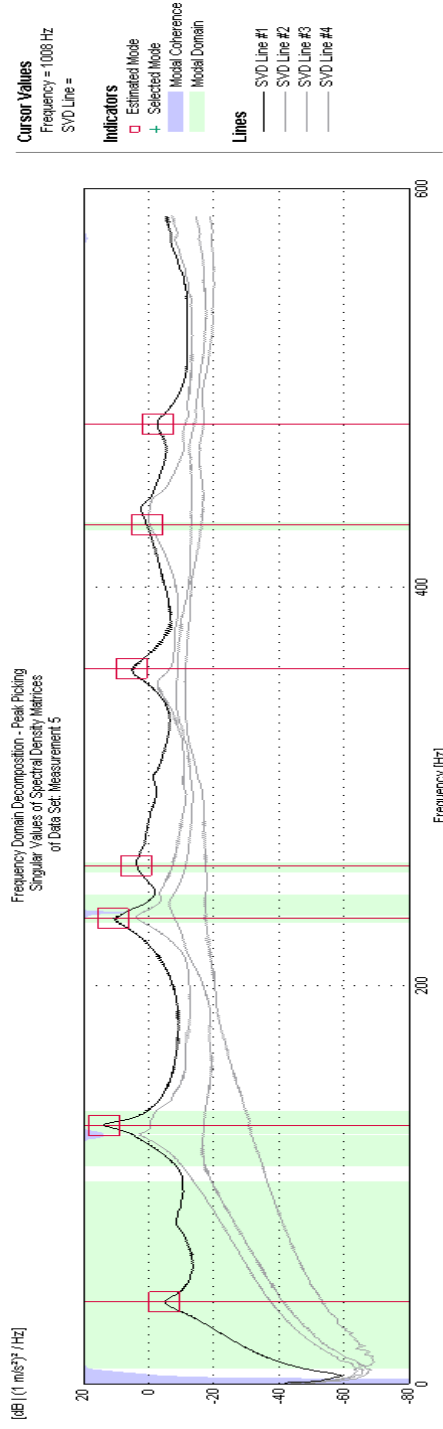
Slika 39. Funkcija frekventnog odgovora na kojoj je registrirana šesta vlastita frekvencija (f_6)

→ Šesta frekvencija: $f_6 = 434,0 \text{ Hz}$

Ostale frekvencije nisu mjerodavne zbog prisutnosti šuma.

5.2. Operacionalna modalna analiza

5.2.1. FDD analiza



Slika 40. Singularne vrijednosti matrica spektralnih gustoća

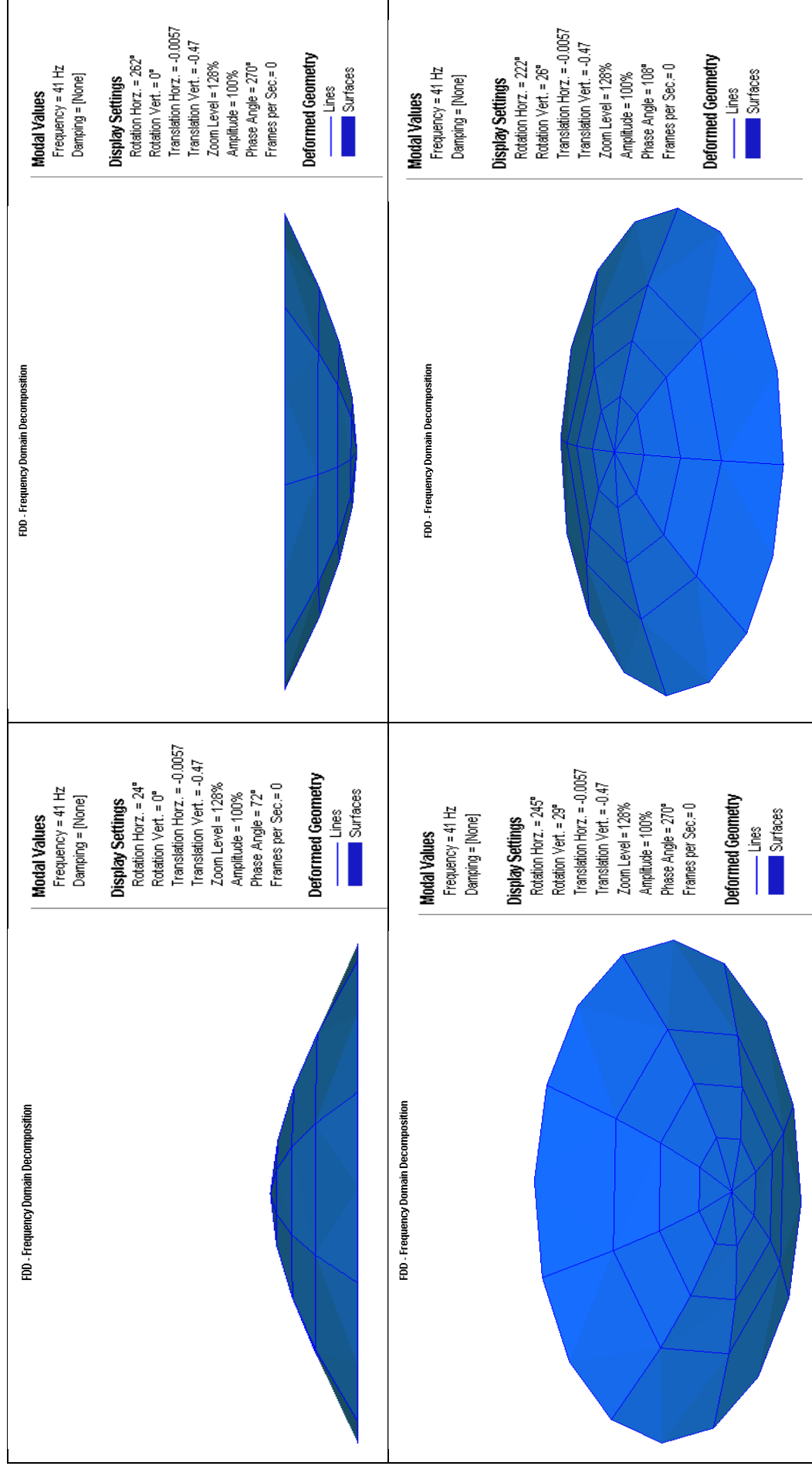
Dekompozicijom na singularne vrijednosti (Peak Picking) dobili smo prvih sedam frekvencija oscilacija ploče (Slika 40., Slika 41.).

Mode	Frequency [Hz]
FDD Mode 1	41
FDD Mode 2	122.5
FDD Mode 3	233.5
FDD Mode 4	260
FDD Mode 5	359
FDD Mode 6	431
FDD Mode 7	481.5

Slika 41. Frekvencije dobivene FDD analizom

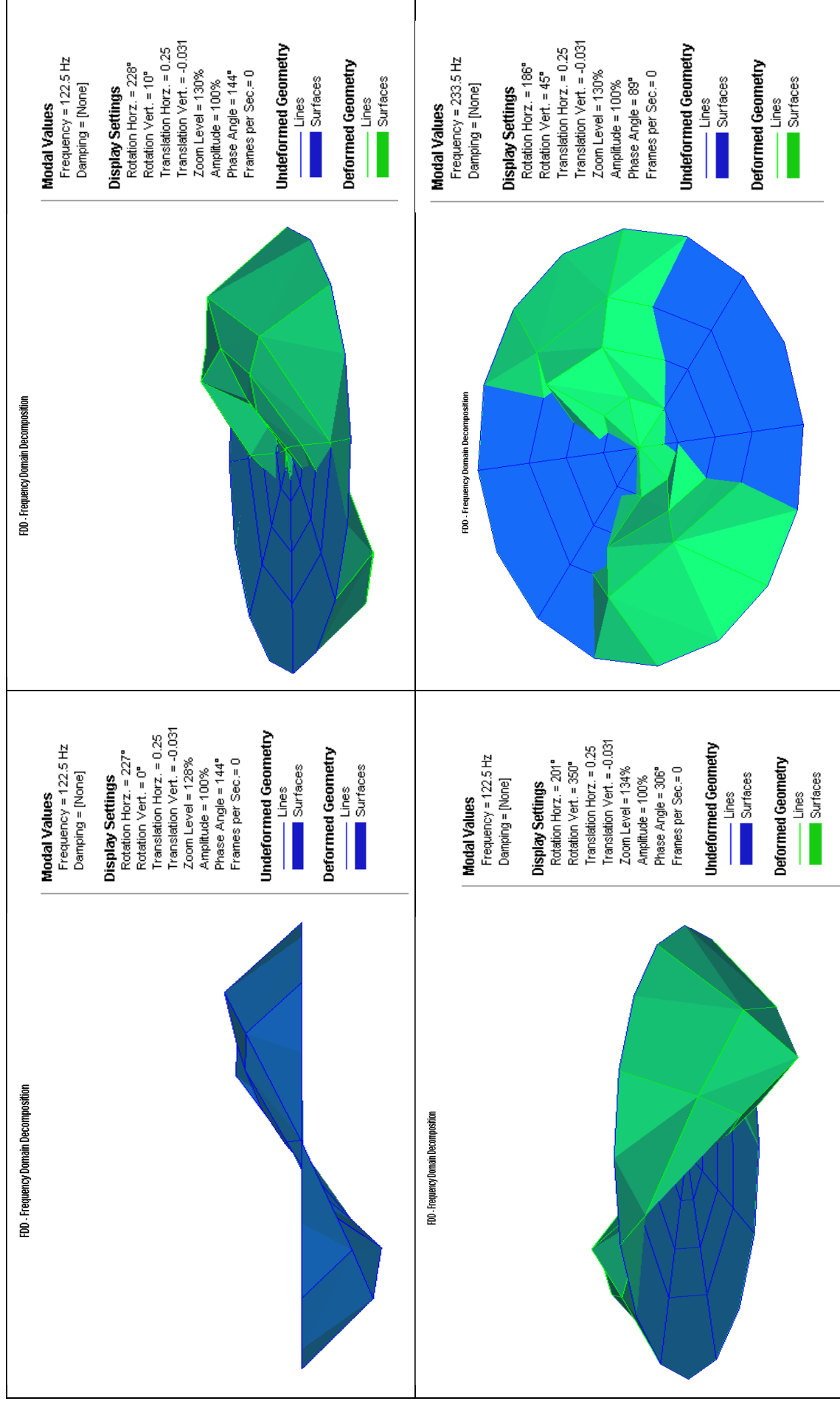
Oblici oscilacija kružne ploče

Prvi oblik oscilacija



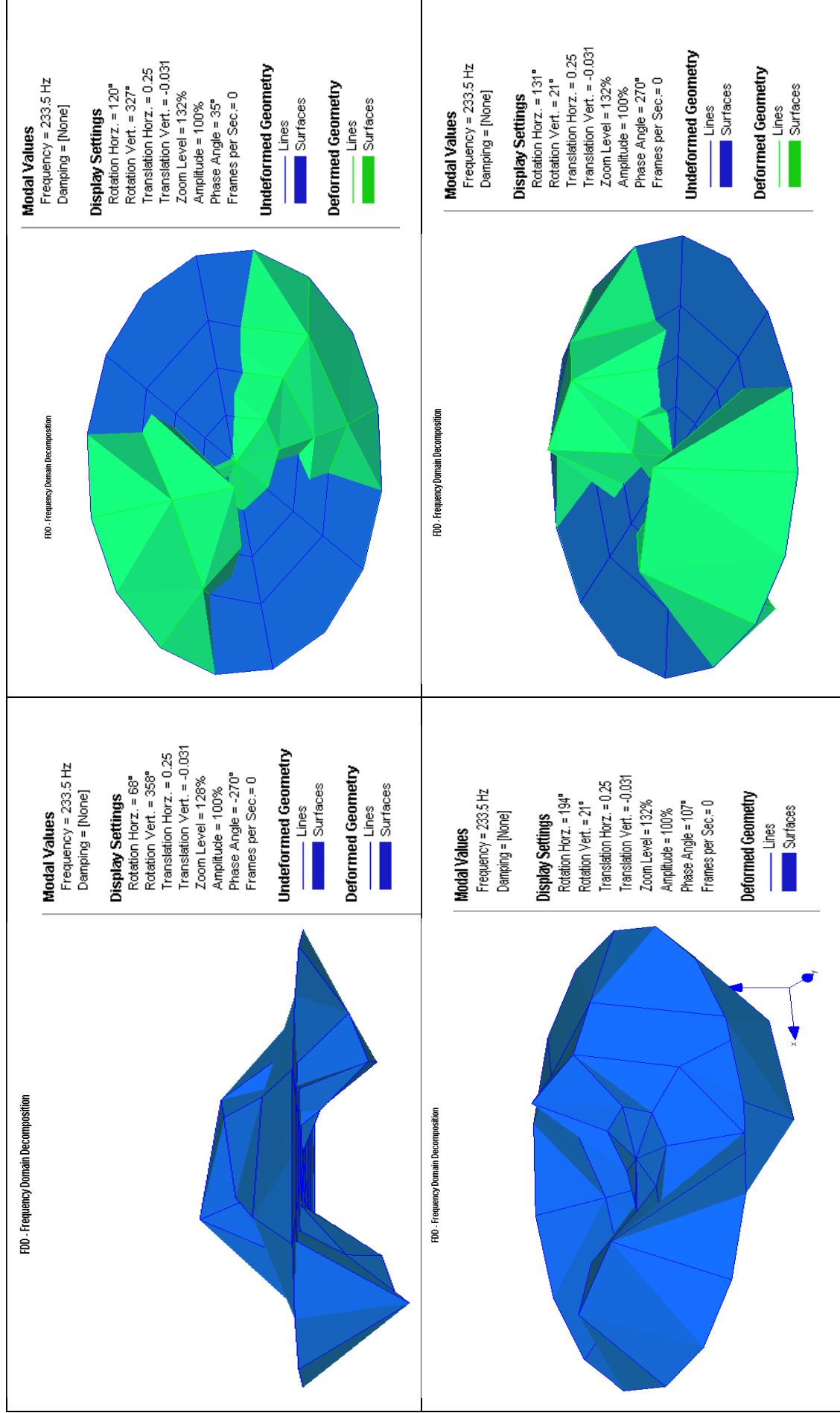
Slika 42. Oblik oscilacija pri prvoj vlastitoj frekvenciji

Drugi oblik oscilacija



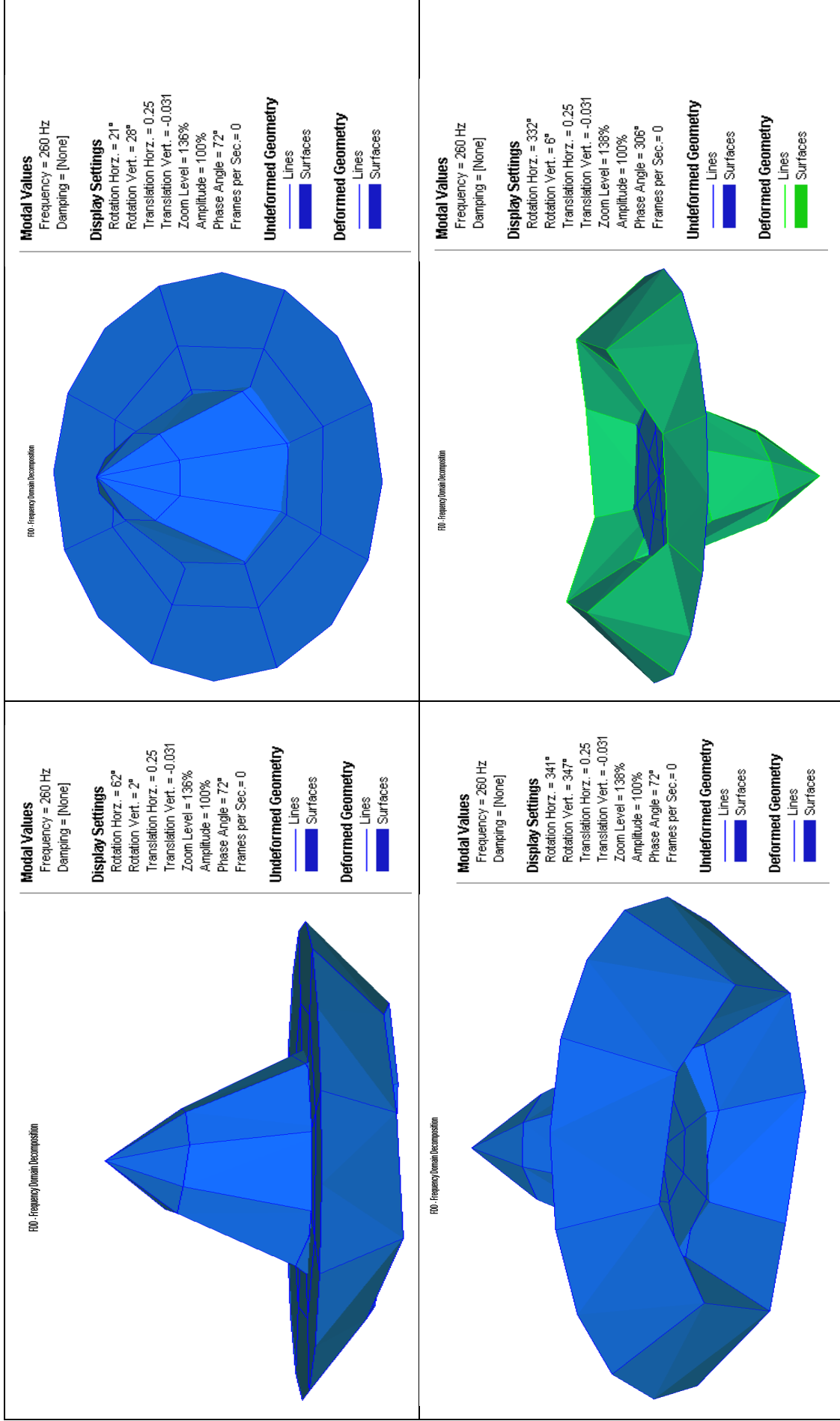
Slika 43. Oblik oscilacija pri drugoj vlastitoj frekvenciji

Treći oblik oscilacija



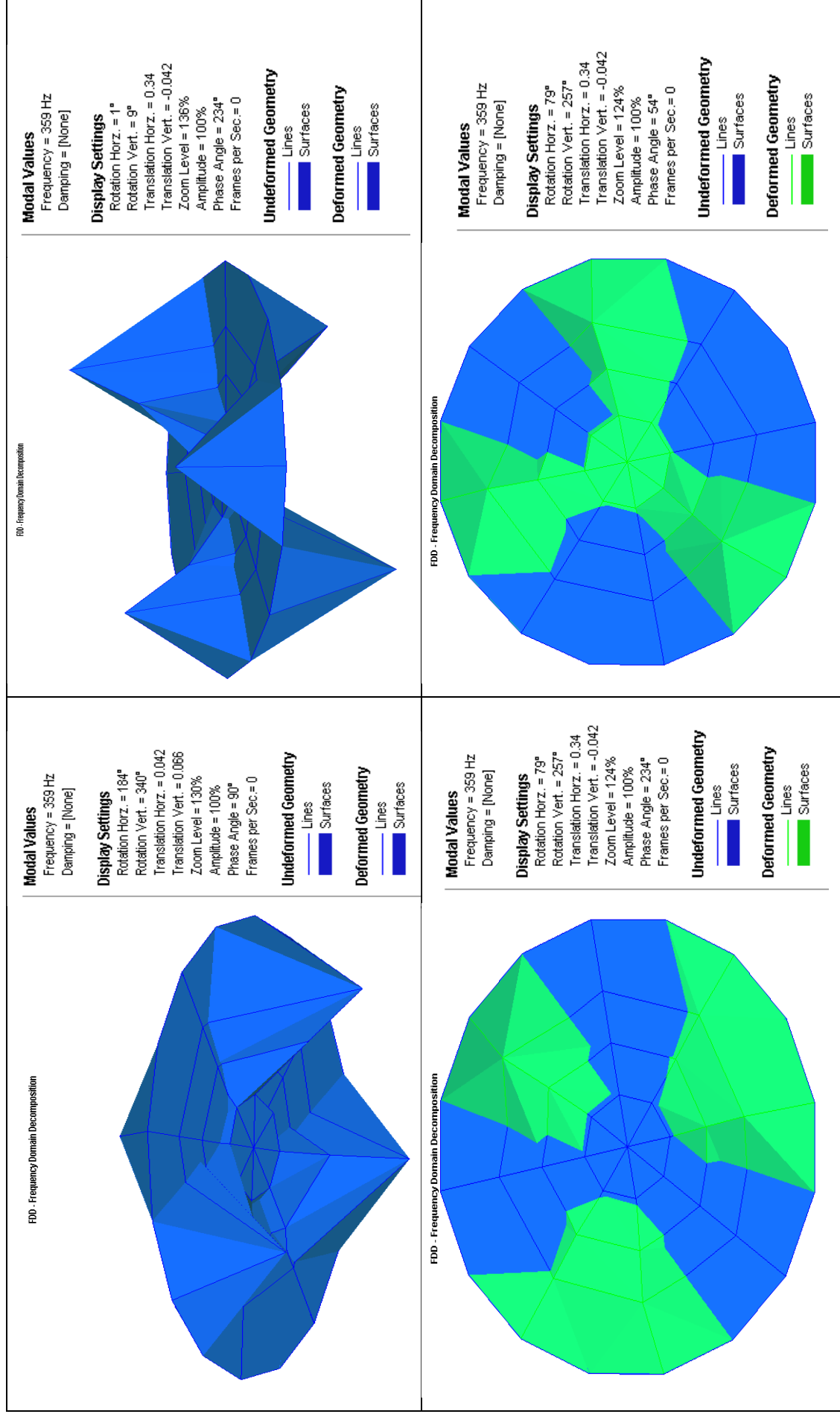
Slika 44. Oblik oscilacija pri trećoj vlastitoj frekvenciji

Četvrti oblik oscilacija



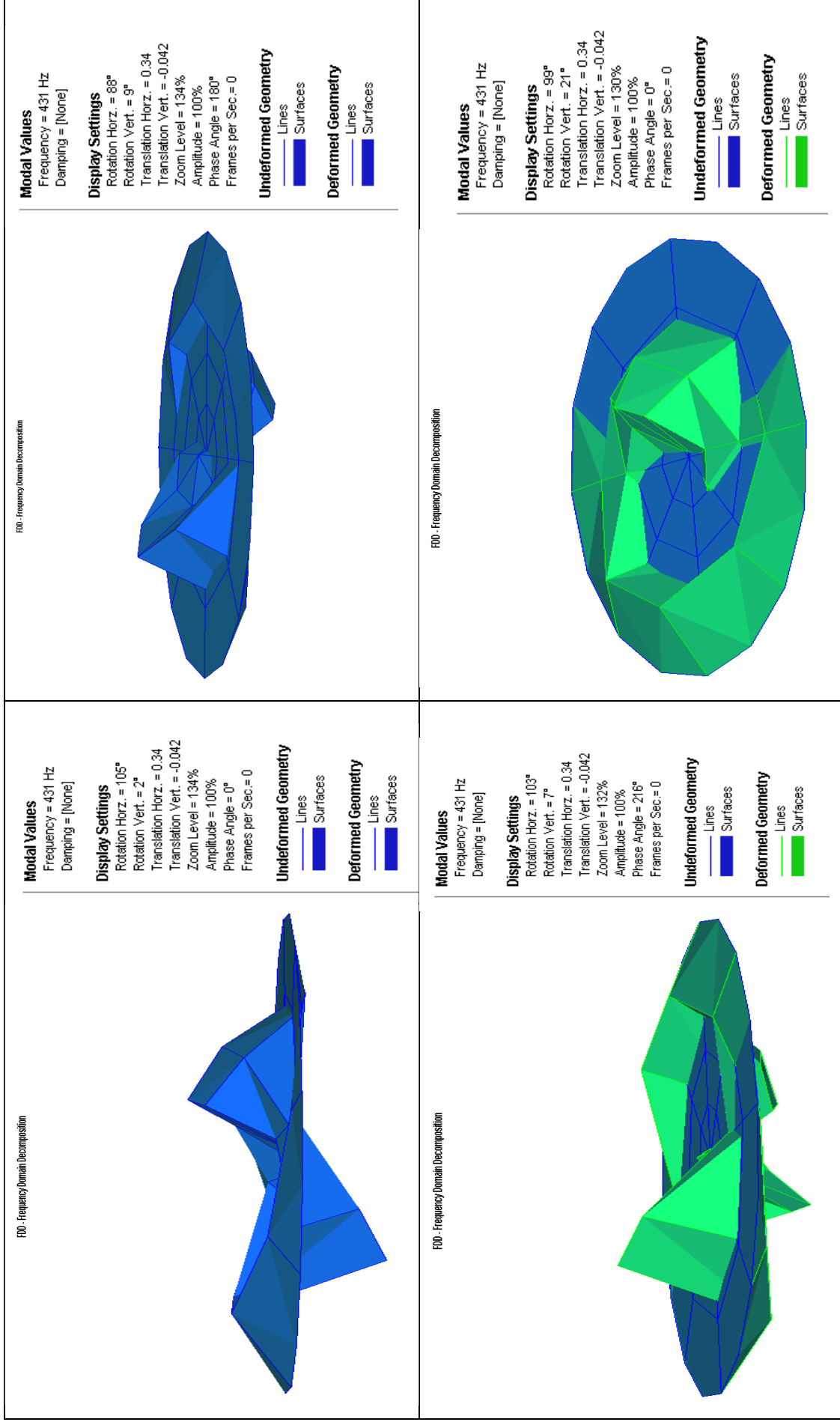
Slika 45. Oblik oscilacija pri četvrti vlastitoj frekvenciji

Peti oblik oscilacija



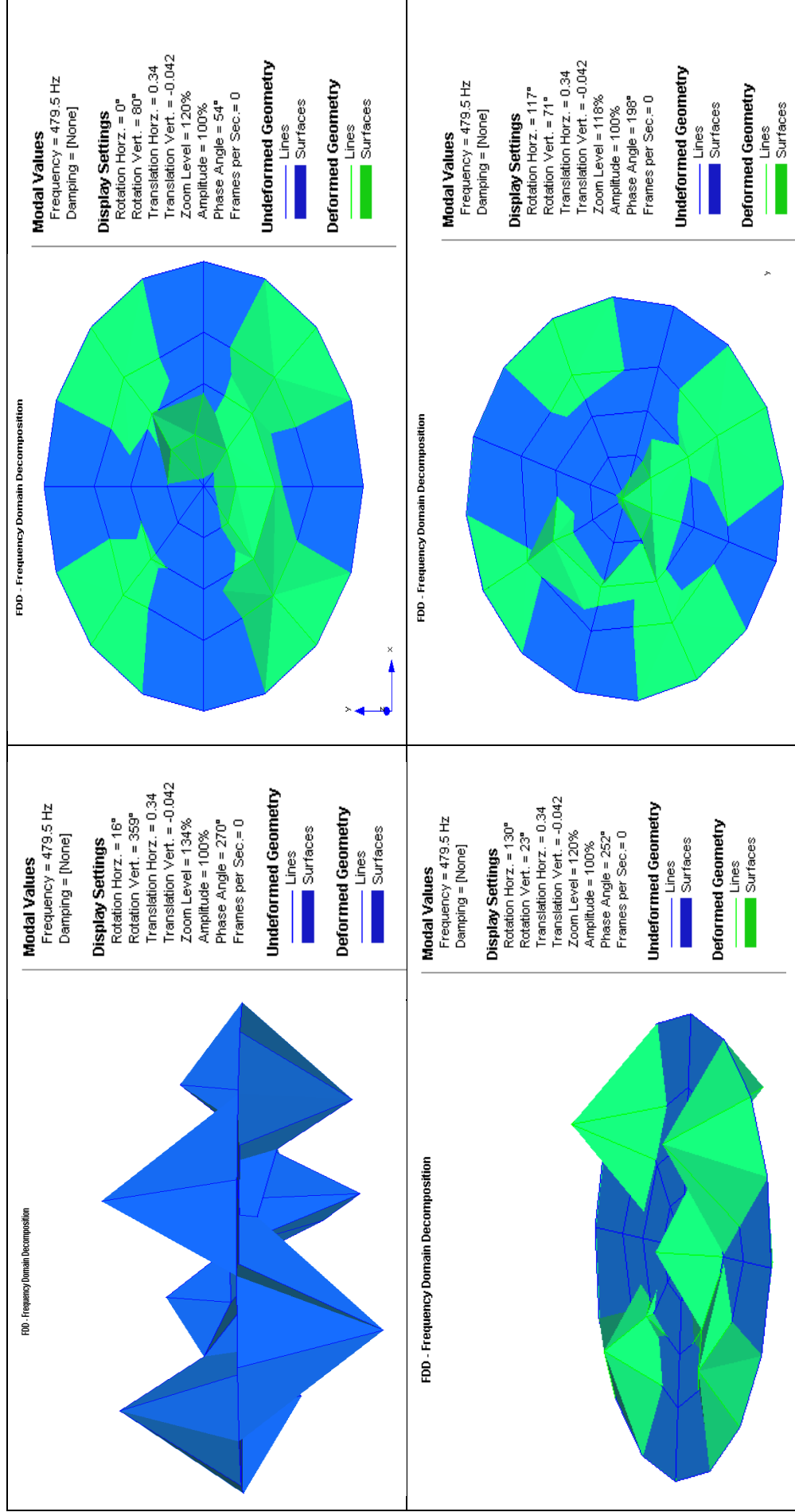
Slika 46. Oblik oscilacija pri petoj vlastitjoj frekvenciji

Šesti oblik oscilacija



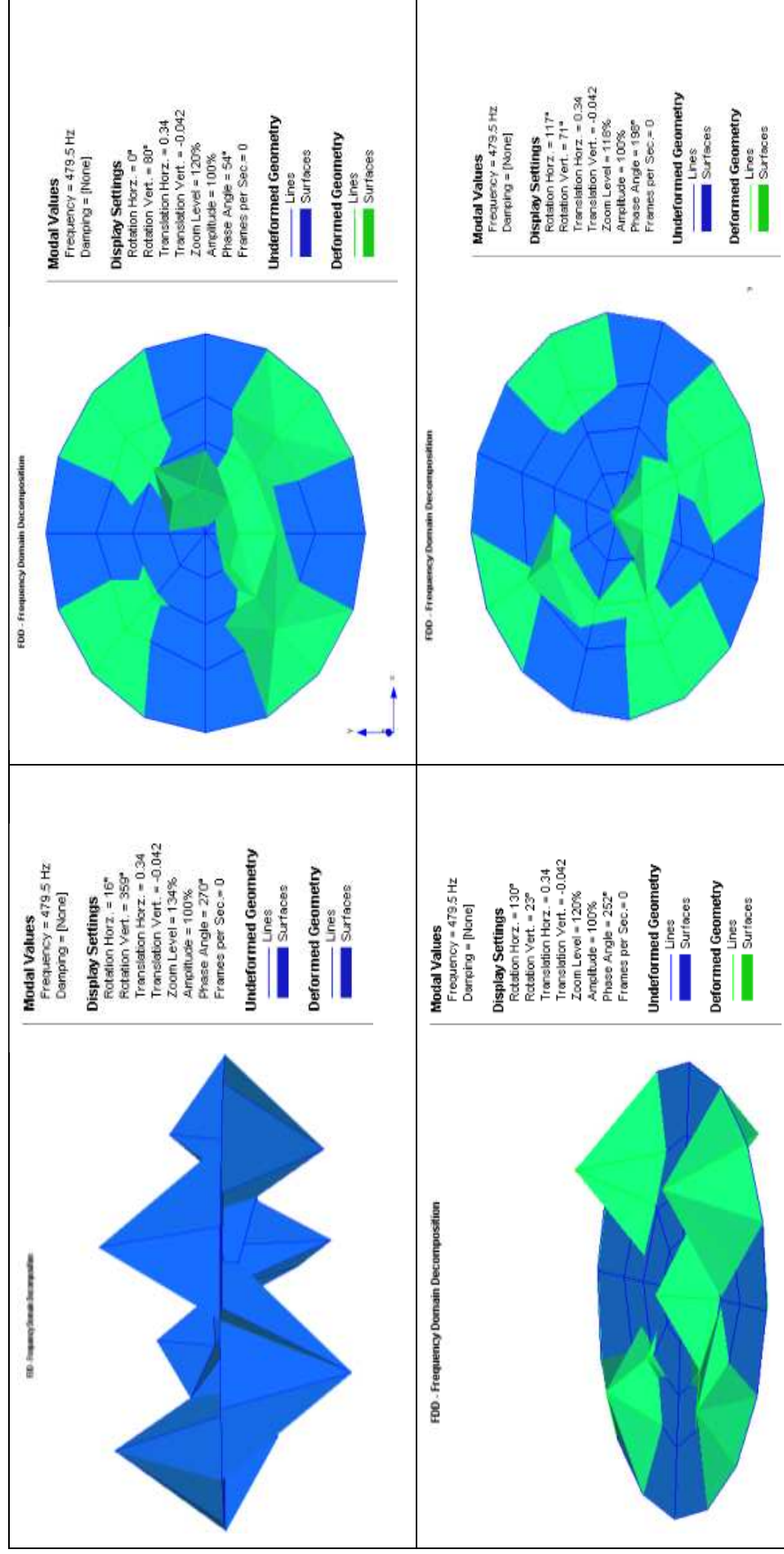
Slika 47. Oblik oscilacija pri šestoj vlastitoj frekvenciji

Sedmi oblik oscilacija



Slika 48. Oblik oscilacija pri sedmoj vlastitoj frekvenciji

Sedmi oblik oscilacija



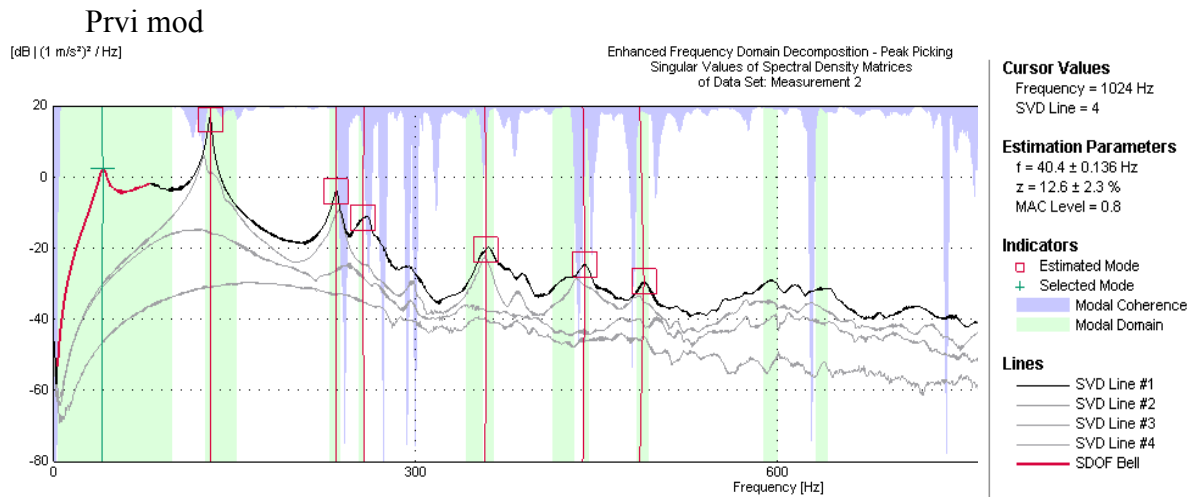
Slika 48. Oblik oscilacija pri sedmoj vlastitoj frekvenciji

U Prilogu 1. nalazi se video – animacija svih oblika osciliranja ploče.

5.2.2. EFDD analiza

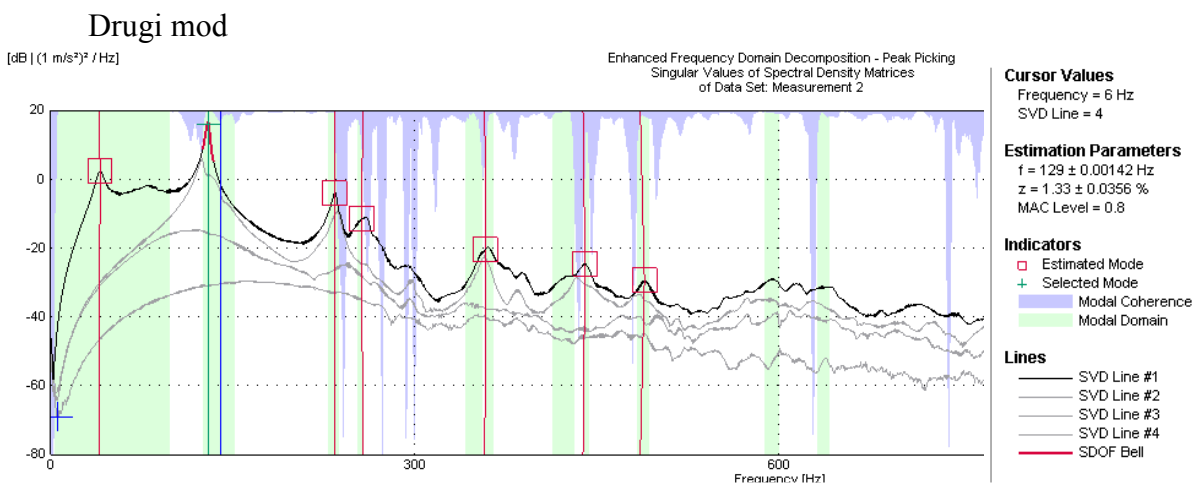
Određuje se funkcija spektralne gustoće snage jednostupanjskog sustava u blizini rezonantnog vrha (vlastite frekvencije), zatim se ta funkcija jednostupanjskog sustava vraća u vremensko područje Inverznom Diskretnom Fourierovom Transformacijom i predstavlja procjenu funkcije korelacije jednostupanjskog sustava.

Funkcija jednostupanjskog sustava određena singularnim vrijednostima:



Slika 49. Funkcija jednostupanjskog sustava određena singularnim vrijednostima na kojoj je registrirana prva frekvencija (f_1)

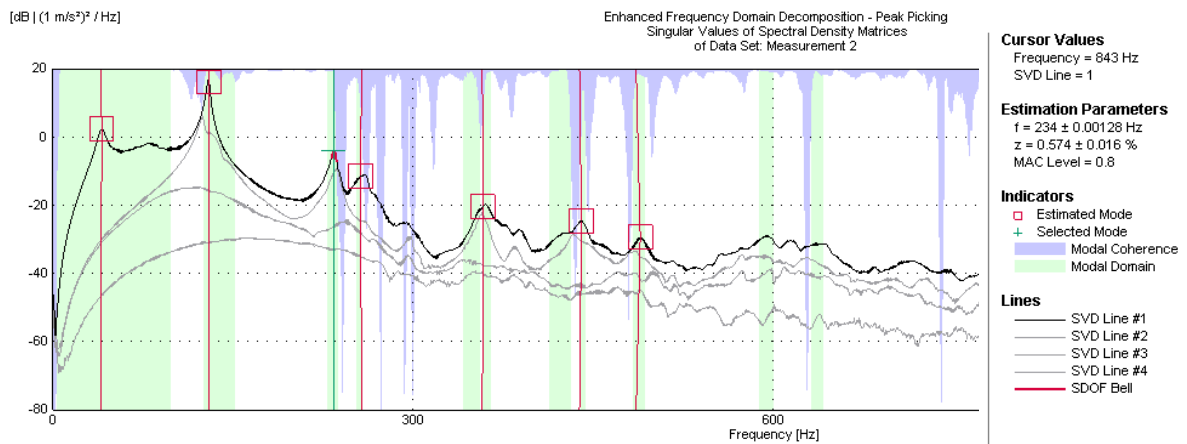
→ Prva frekvencija: $f_1 = 40,4 \pm 0,136 \text{ Hz}$



Slika 50. Funkcija jednostupanjskog sustava određena singularnim vrijednostima na kojoj je registrirana druga frekvencija (f_2)

→ Druga frekvencija: $f_2 = 129 \pm 0,00142 \text{ Hz}$

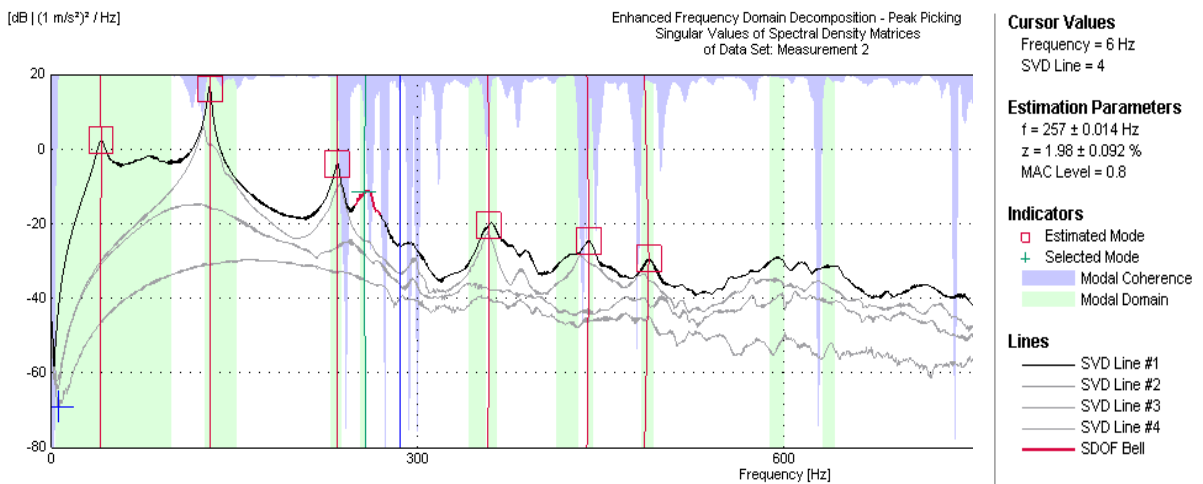
Treći mod



Slika 51. Funkcija jednostupanjskog sustava određena singularnim vrijednostima na kojoj je registrirana treća frekvencija (f_3)

→ Treća frekvencija: $f_3 = 234 \pm 0,00128$ Hz

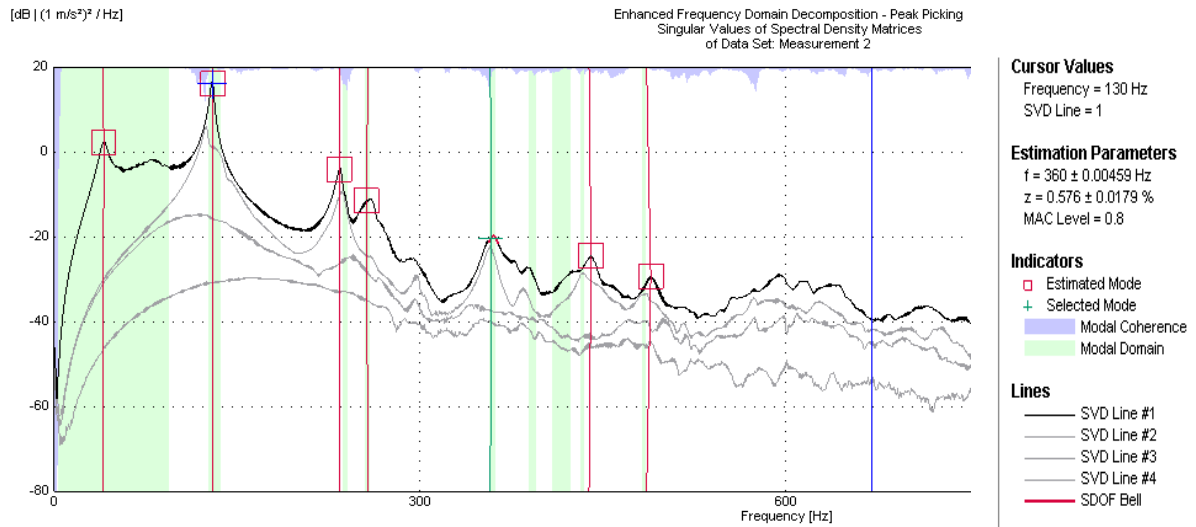
Četvrti mod



Slika 52. Funkcija jednostupanjskog sustava određena singularnim vrijednostima na kojoj je registrirana četvrta frekvencija (f_4)

→ Četvrta frekvencija: $f_4 = 257 \pm 0,014$ Hz

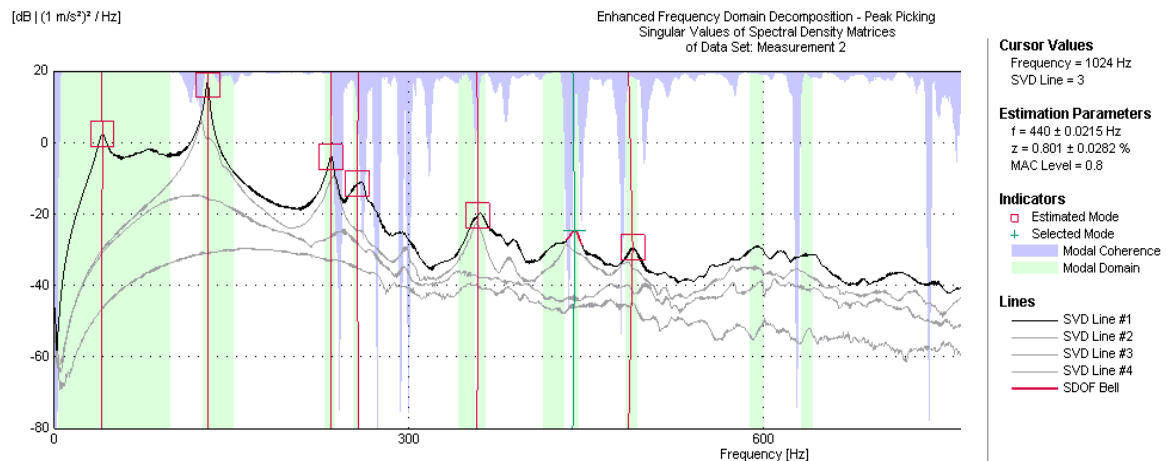
Peti mod



Slika 53. Funkcija jednostupanjskog sustava određena singularnim vrijednostima na kojoj je registrirana peta frekvencija (f_5)

→ Peta frekvencija: $f_5 = 360 \pm 0,00459$ Hz

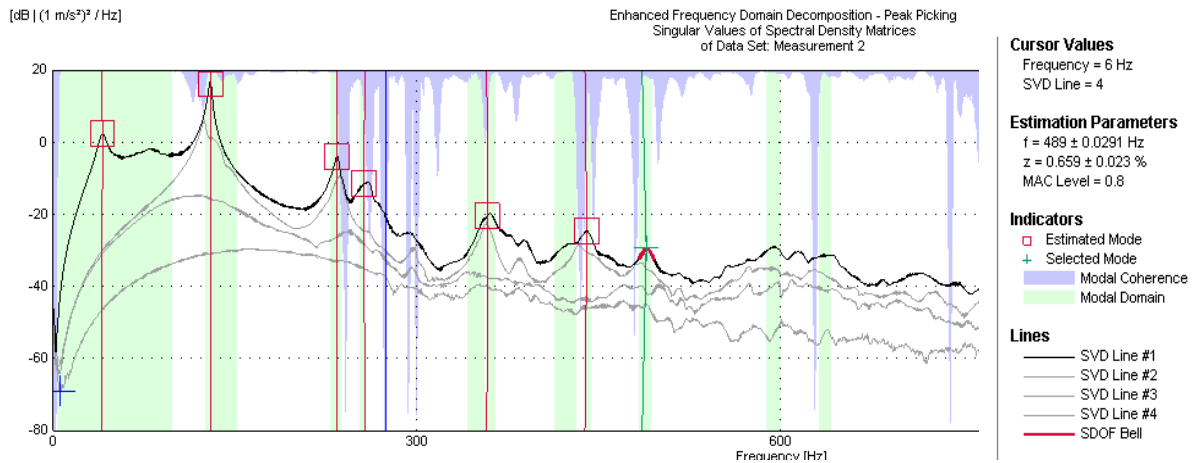
Šesti mod



Slika 54. Funkcija jednostupanjskog sustava određena singularnim vrijednostima na kojoj je registrirana šesta frekvencija (f_6)

→ Šesta frekvencija: $f_6 = 440 \pm 0,0215$ Hz

Sedmi mod



Slika 55. Funkcija jednostupanjskog sustava određena singularnim vrijednostima na kojoj je registrirana sedma frekvencija (f_7)

→ Sedma frekvencija: $f_7 = 489 \pm 0,0291 \text{ Hz}$

Prikaz frekvencija i prigušenja po modovima

Mode	Frequency [Hz]	Std. Frequency [Hz]	Damping Ratio [%]	Std. Damping Ratio [%]
EFDD Mode 1	40.09	0.2251	10.71	2.67
EFDD Mode 2	129.6	0.2819	1.351	0.06444
EFDD Mode 3	234.2	1.008	0.4593	0.1876
EFDD Mode 4	257	1.137	2.066	0.3783
EFDD Mode 5	357.5	3.362	0.387	0.1996
EFDD Mode 6	438.4	2.919	0.671	0.2398
EFDD Mode 7	485.6	4.821	0.7624	0.5105

Slika 56. Frekvencije i prigušenja po modovima dobiveni EFDD analizom

6. Približni proračun vlastith frekvencija

Problem oscilacija kružne ploče rješio je G.R.Kirchoff. Također postavio je rješenja za frekvencije za više oblike oscilacija za ploču sa slobodnim rubom. Točno rješenje ovog problema zahtjeva primjenu Bessel-ovih funkcija. U svrhu ovog istraživanja usredotočila sam se na Rayleigh – Ritz – ovu metodu, koja daje za najniže oblike dovoljnu točnost za praktičnu primjenu.

Rayleigh – Ritz – ova metoda se bazira na analizi energije konstrukcije. Mehanička energija (zbroj potencijalne i kinetičke energije) za vrijeme slobodnih neprigušenih oscilacija mora biti konstantna.

Potencijalna energija ploče jednaka je [4]:

$$V = \iint dV = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (6.1.)$$

gdje je D krutost ploče pri savijanju:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (6.2.)$$

Kinetička energija ploče koja oscilira jednaka je [4]:

$$T = \frac{1}{2} \frac{\gamma h}{g} \iint \dot{v}^2 dx dy, \quad (6.3.)$$

gdje je $\frac{\gamma h}{g}$ masa po jedinici površine ploče.

Iz izjednačavanja izraza (6.1.) i (6.3.) možemo dobiti diferencijalnu jednadžbu oscilacija ploče.

Primjenjujući Rayleigh – Ritz – ovu metodu na modelu kružne ploče potrebno je transformirati izraze za potencijalnu (6.1.) i kinetičku energiju (6.3.) preko polarnih koordinata.

Nakon transformacije dobivamo izraz za potencijalnu energiju:

$$V = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + 2(1 - \nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] r d\theta dr, \quad (6.4.)$$

gdje a označava polumjer ploče.

Izraz za kinetičku energiju u polarnim koordinatama:

$$T = \frac{1}{2} \frac{\gamma h}{g} \int_0^{2\pi} \int_0^a \dot{v}^2 d\theta dr. \quad (6.5.)$$

Primjenom Rayleigh – Ritz – ove metode pretpostavljamo da je $v = v_0 \cos ft$, gdje je v_0 funkcija od r i θ . Deriviramo li v , dobivmo $\dot{v} = v_0 f \sin ft$.

Uzimajući v_0 u obliku reda:

$$v_0 = a_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + a_2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + \dots \quad (6.6.)$$

U slučaju najnižeg oblika oscilacija, oblik ploče koja oscilira je simetričan u odnosu na centar ploče i tada je v_0 funkcija samo od r .

Izjednačavanjem izraza za potencijalnu i kinetičku energiju dobivamo:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^a \left\{ \left(\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_0}{dr} \right)^2 - \frac{f^2 \gamma h}{gD} v_0^2 \right\} r dr = 0. \quad (6.7.)$$

Uzimajući samo jedan član reda (6.6.) dobivamo prvu aproksimaciju za frekvenciju najnižeg oblika oscilacija ploče f_1 . Ako uzmemo prva dva člana reda (6.6.) dobit ćemo drugu aproksimaciju frekvencije drugog oblika oscilacija pri čemu ploča koja oscilira ima samo jedan čvorni krug. Primjenjujući istu metodu mogu se također odrediti i oblici oscilacija koji imaju čvorne radijuse.

U svim slučajevima frekvencija oscilacija se određuje iz jednadžbe:

$$f_n = \frac{\alpha}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}, \quad (6.8.)$$

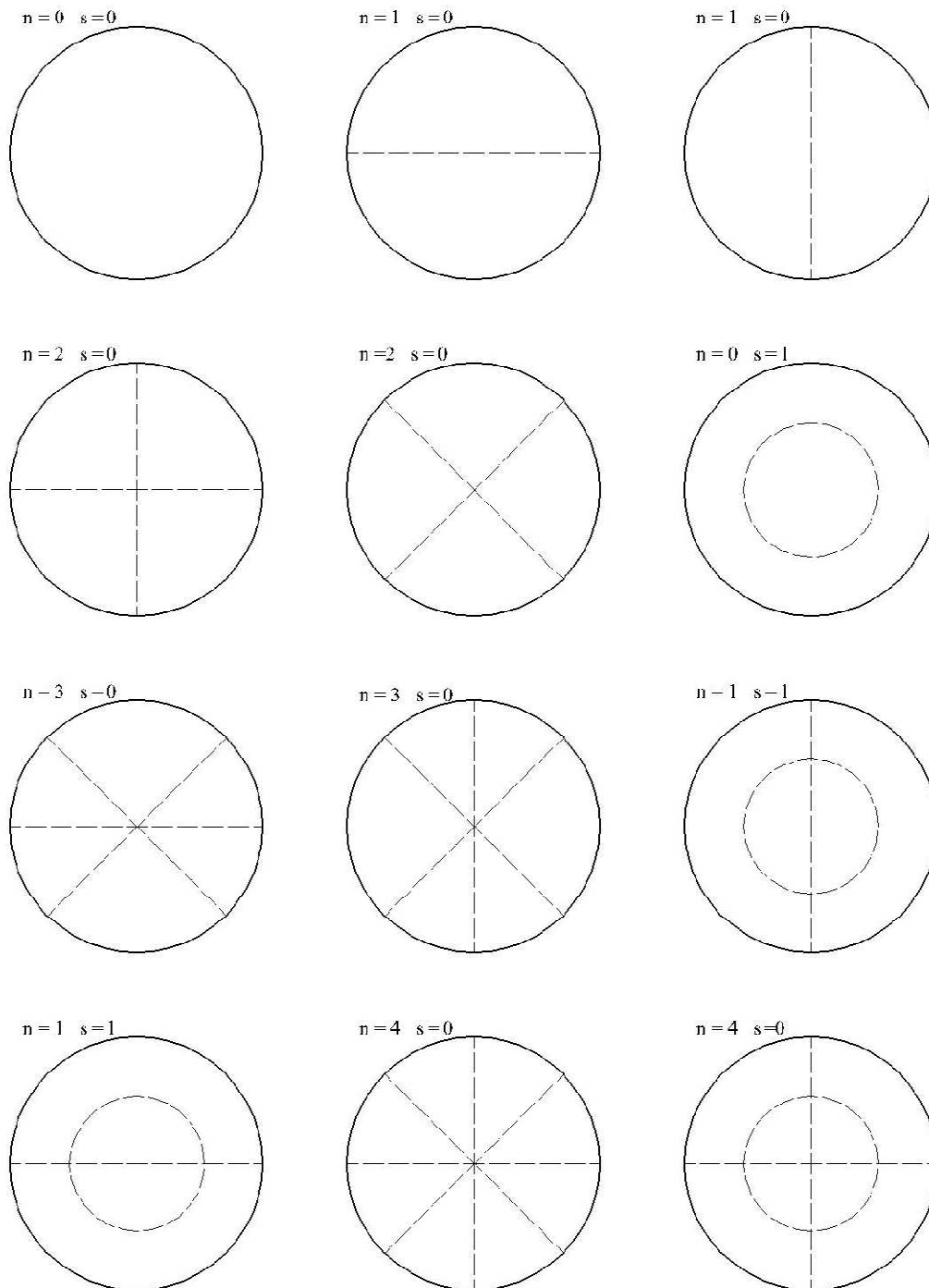
gdje je α konstanta, za s broj čvornih krugova i n broj čvornih radijusa.

za slobodno oslonjene kružne ploče α očitava se iz tablice 1, gdje n označava broj čvornih promjera, a s broj čvornih krugova ne uključujući rubni krug.

Tablica 1. Koeficijent α za slobodno oslonjenu kružnu ploču i $\nu = 3,0$ [1]

$\begin{matrix} n \\ s \end{matrix}$	0	1	2	3
0	4,9351	13,8982	25,6133	39,9573
1	29,7658	48,5299	70,1170	94,5490
2	74,2302	102,7965	134,2978	168,6749
3	138,3181	176,8012	218,2026	262,6244

Čvorni krugovi i čvorni radijusi su čvorne linije duž kojih su progibi za vrijeme oscilacija jednaki nuli. Nekoliko oblika oscilacija kružne ploče prikazani su na slici 57., gdje su čvorni krugovi (s) i čvorni radijusi (n) prikazani isprekidanim linijama.



Slika 57. Oblici oscilacija kružne ploče

Dimenzije kružne ploče koju ispitujemo:

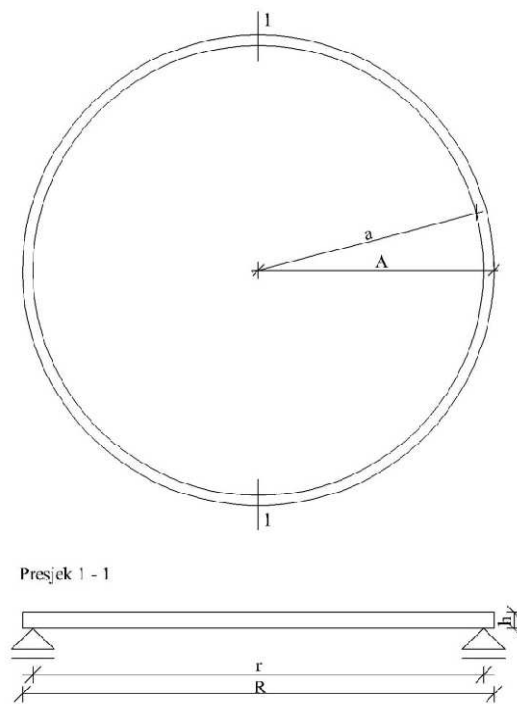
$$r = 71,7 \text{ cm}$$

$$R = 75 \text{ cm}$$

$$a = r/2 = 35,85 \text{ cm} = 0,3585 \text{ m}$$

$$A = R/2 = 37,50 \text{ cm} = 0,375 \text{ m}$$

$$h = 0,99 \text{ cm} \approx 1 \text{ cm}$$



Slika 58. Dispozicija ploče

Karakteristike materijala :

$$\text{Masa ploče} \quad - \quad m = 3133,6 \text{ g} = 3,1336 \text{ kg}$$

$$\text{Poissonov koeficijent} \quad - \quad \nu = 0,16$$

$$\text{Modul elastičnosti} \quad - \quad E = 4408 \text{ MPa} = 4408000 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Volumen ploče} \quad - \quad V = r^2 \pi h = 0,375^2 \pi \cdot 0,01 = 4,41786 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\text{Gustoća ploče} \quad - \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{3,1336}{(4,41786 \cdot 10^{-3})} = 709,3019 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Zapreminska težina} \quad - \quad \gamma = \frac{m}{V} \cdot g = \frac{3,1336}{(4,41786 \cdot 10^{-3})} \cdot 10 = 7093,019 \text{ N/m}^3 = 7,09302 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{Krutost ploče pri savijanju} \quad - \quad D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{4408000 \cdot 0,01^3}{12(1-0,16^2)} = 376,98 \text{ Nm} = 0,37698 \text{ kNm}$$

Mjerne jedinice najviših i najnižih oscilacija (6.8.):

$$\left[\frac{1}{m^2} \sqrt{\frac{kNm}{\frac{kg}{m^3} m}} = \frac{1}{m^2} \sqrt{\frac{kNm}{\frac{kg}{m^3} m}} = \frac{1}{m^2} \sqrt{\frac{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m}{\frac{kg}{m^2}}} = \frac{1}{m^2} \sqrt{m^4 s^{-2}} = s^{-1} \right]$$

Frekvencije prvih 10 oblika oscilacija ploče

Prva frekvencija:

$$f_1 = \frac{4,9351}{2\pi \cdot 0,3585^2} \sqrt{\frac{376,98}{709,3019 \cdot 0,01}} = 6,111 \cdot 7,2903 = 44,551 s^{-1}$$

Druga frekvencija:

$$f_2 = \frac{13,8982}{2\pi \cdot 0,3585^2} \sqrt{\frac{376,98}{709,3019 \cdot 0,01}} = 17,210 \cdot 7,2903 = 125,471 s^{-1}$$

Treća frekvencija:

$$f_3 = \frac{13,8982}{2\pi \cdot 0,3585^2} \sqrt{\frac{376,98}{709,3019 \cdot 0,01}} = 17,210 \cdot 7,2903 = 125,471 s^{-1}$$

Četvrta frekvencija:

$$f_4 = \frac{25,6133}{2\pi \cdot 0,3585^2} \sqrt{\frac{376,98}{709,3019 \cdot 0,01}} = 31,718 \cdot 7,2903 = 231,234 s^{-1}$$

Peta frekvencija:

$$f_5 = \frac{25,6133}{2\pi \cdot 0,3585^2} \sqrt{\frac{376,98}{709,3019 \cdot 0,01}} = 31,718 \cdot 7,2903 = 231,234 s^{-1}$$

Šesta frekvencija:

$$f_6 = \frac{29,7658}{2\pi \cdot 0,3585^2} \sqrt{\frac{376,98}{709,3019 \cdot 0,01}} = 36,860 \cdot 7,2903 = 268,722 s^{-1}$$

Sedma frekvencija:

$$f_7 = \frac{39,9573}{2\pi \cdot 0,3585^2} \sqrt{\frac{376,98}{709,3019 \cdot 0,01}} = 49,481 \cdot 7,2903 = 360,731 s^{-1}$$

Osmá frekvencija:

$$f_8 = \frac{39,9573}{2\pi \cdot 0,3585^2} \sqrt{\frac{376,98}{709,3019 \cdot 0,01}} = 49,481 \cdot 7,2903 = 360,731 \text{ s}^{-1}$$

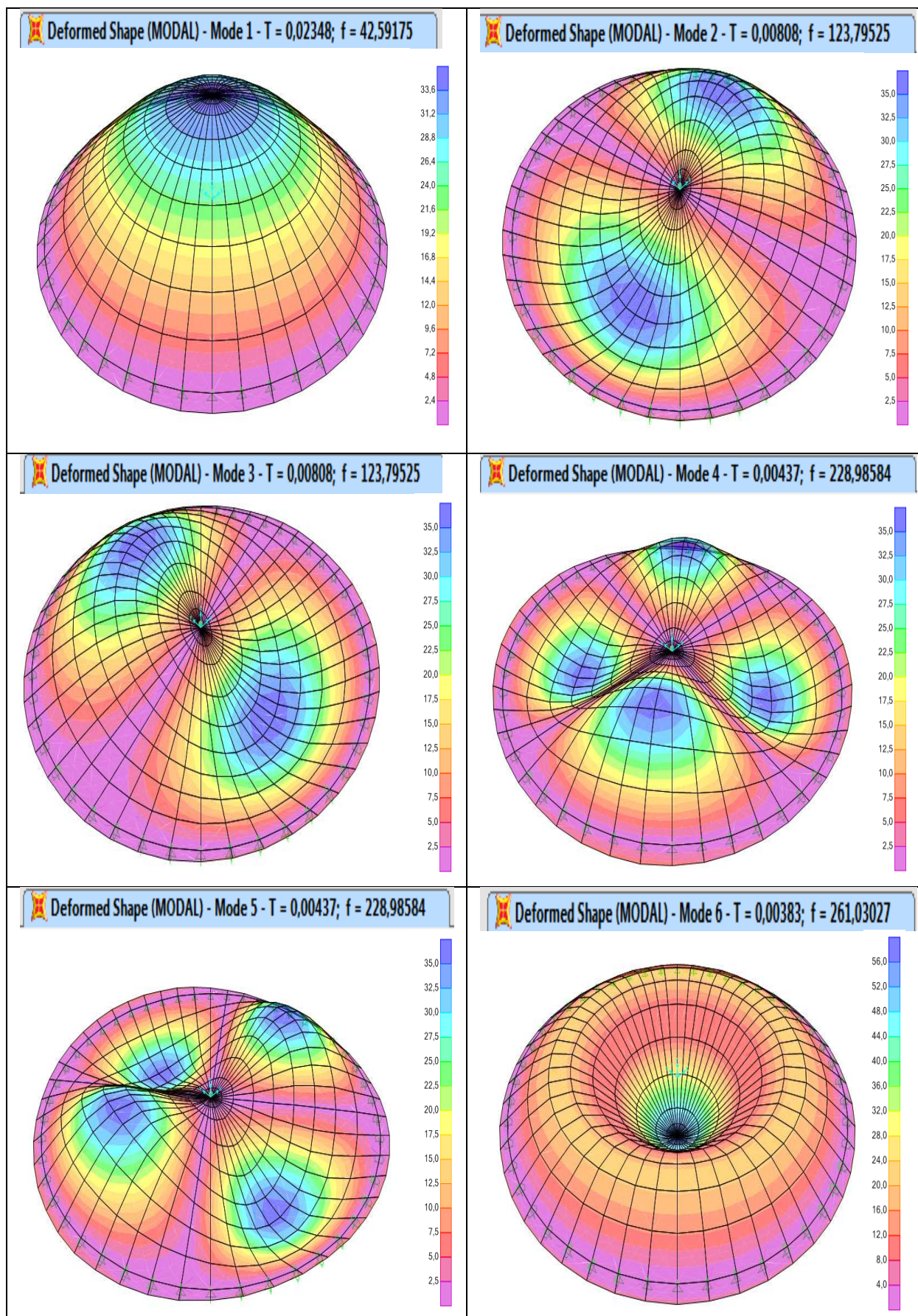
Deveta frekvencija:

$$f_9 = \frac{48,5299}{2\pi \cdot 0,3585^2} \sqrt{\frac{376,98}{709,3019 \cdot 0,01}} = 60,096 \cdot 7,2903 = 438,123 \text{ s}^{-1}$$

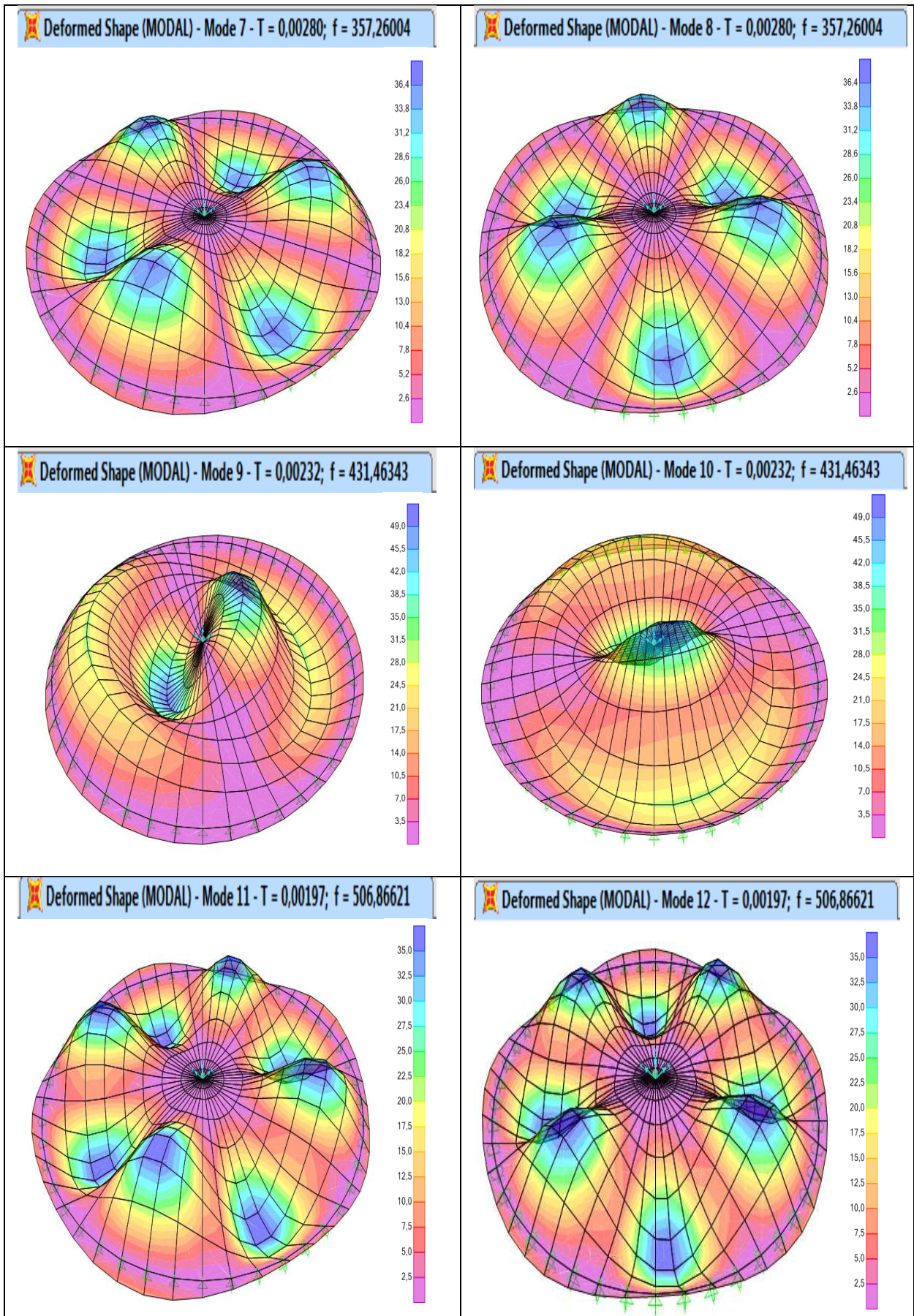
Deseta frekvencija:

$$f_{10} = \frac{48,5299}{2\pi \cdot 0,3585^2} \sqrt{\frac{376,98}{709,3019 \cdot 0,01}} = 60,096 \cdot 7,2903 = 438,123 \text{ s}^{-1}$$

7. NUMERIČKI PRORAČUN POMOĆU PROGRAMSKOG PAKETA SAP2000



Slika 59. Prvih šest modova, oblici oscilacija, vlastite frekvencije i periodi



Slika 60. Drugih šest modova, oblici oscilacija, vlastite frekvencije i periodi

8. ANALIZA I USPOREDBA REZULTATA

USPOREDBA REZULTATA MJERENJA S ANALITIČKI I NUMERIČKI DOBIVENIM REZULTATIMA

Tablica 2. Usporedba analitički i numerički dobivenih rezultata s rezultatima dobivenim operacionalnom analizom

	ANALITIČKI	NUMERIČKI	FDD	EFDD
f_1	44,551	42,59	41,00	40,09
f_2	125,471	123,79525	122,5	129,6
f_3	231,234	228,98584	233,5	234,2
f_4	268,722	261,03027	260	257
f_5	360,731	357,26004	359	357,5
f_6	438,123	431,46343	431	438,4
f_7	-	506,86621	481,5	485,6

Tablica 3. Obrada rezultata

	SREDNJA VRIJEDNOST	STANDARDNA DEVIJACIJA	POGREŠKA
f_1	42,06	1,957236651	4,65%
f_2	125,34	3,088505777	2,46%
f_3	231,98	2,36363492	1,02%
f_4	261,69	4,99120736	1,91%
f_5	358,62	1,602558551	0,45%
f_6	434,75	4,064628943	0,93%
f_7	491,32	13,61681741	2,77%

Tablica 4. Usporedba rezultata dobivenih operacionalnom analizom s rezultatima dobivenim eksperimentalnom modalnom analizom

	FDD	EFDD	EMA					
			1.MJERENJE	2.MJERENJE	3.MJERENJE	4.MJERENJE	5.MJERENJE	6.MJERENJE
f_1	41,00	40,09	41	41,25	41,25	41	41,25	41,25
f_2	122,5	129,6	131,8	-	132	-	132	-
f_3	233,5	234,2	234	-	236,3	-	238,8	233
f_4	260	257	-	-	277,8	280,3	-	281,3
f_5	359	357,5	360,8	-	361	-	358	-
f_6	431	438,4	-	-	432,8	-	-	434
f_7	481,5	485,6	-	-	-	-	-	-

Tablica 5. Obrada rezultata

	SREDNJA VRIJEDNOST	STANDARDNA DEVIJACIJA	POGREŠKA
f₁	41,01	0,392262212	0,96%
f₂	129,58	4,085584414	3,15%
f₃	234,97	2,191498726	0,93%
f₄	271,28	11,78376001	4,34%
f₅	359,26	1,593110166	0,44%
f₆	434,30	3,151190251	0,73%
f₇	483,55	2,899137803	0,60%

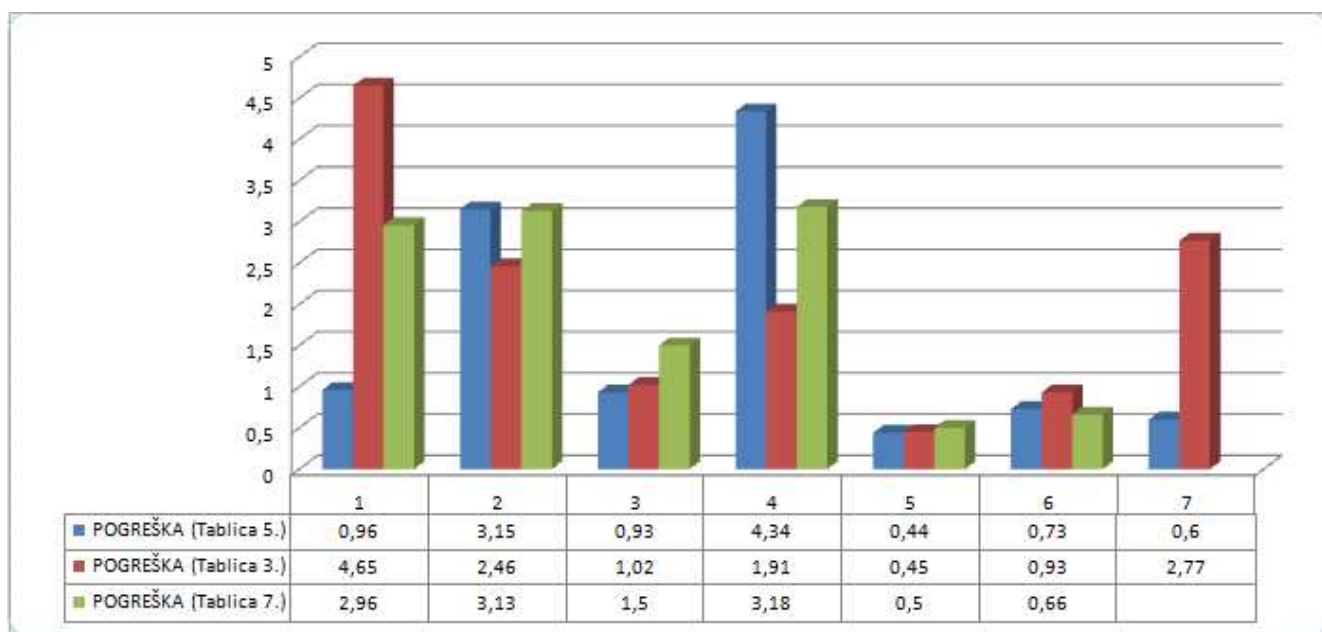
Tablica 6. Usporedba analitički i numerički dobivenih rezultata s rezultatima dobivenim eksperimentalnom modalnom analizom

	ANALIT.	NUMER.	EMA					
			1.MJER.	2.MJER.	3.MJER.	4.MJER.	5.MJER.	6.MJER.
f₁	44,551	42,59	41	41,25	41,25	41	41,25	41,25
f₂	125,471	123,79525	131,8	-	132	-	132	-
f₃	231,234	228,98584	234	-	236,3	-	238,8	233
f₄	268,722	261,03027	-	-	277,8	280,3	-	281,3
f₅	360,731	357,26004	360,8	-	361	-	358	-
f₆	438,123	431,46343	-	-	432,8	-	-	434
f₇	-	506,86621	-	-	-	-	-	-

Tablica 7. Obrada rezultata

	SREDNJA VRIJEDNOST	STANDARDNA DEVIJACIJA	POGREŠKA
f₁	41,77	1,235001265	2,96%
f₂	129,01	4,042968765	3,13%
f₃	233,72	3,511468835	1,50%
f₄	273,83	8,708436298	3,18%
f₅	359,56	1,782262673	0,50%
f₆	434,10	2,877266314	0,66%

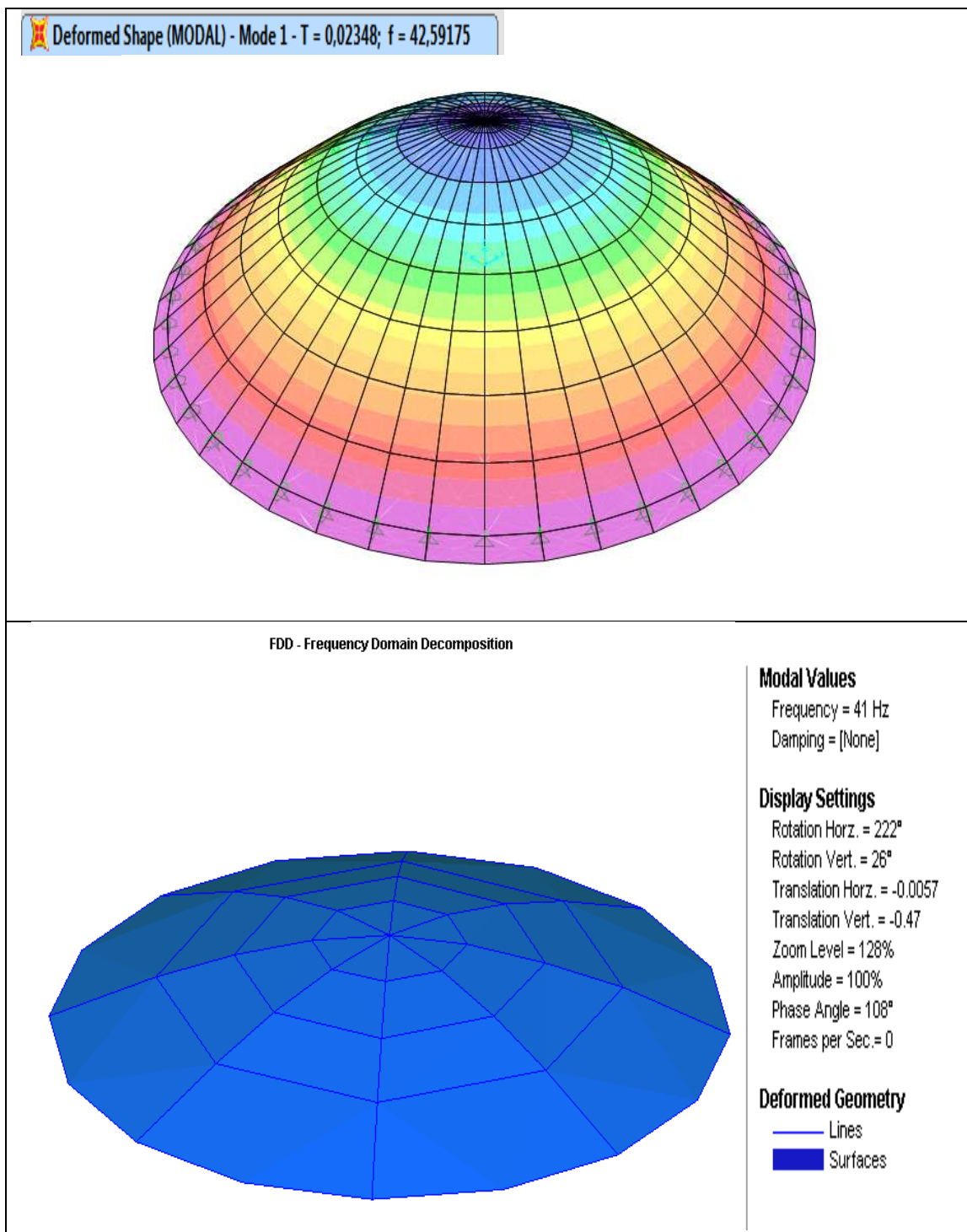
Srednja vrijednost je broj koji će predstavljati rezultat našeg mjerenja u slučajevima kad smo izvršili više uzastopnih, nezavisnih mjerenja iste veličine. No, ne možemo taj broj smatrati pravim iznosom tražene veličine, to je najbolja aproksimacija tog iznosa koja se može dobiti iz dotične serije mjerenja, uz pretpostavku da su pogreške nastale u mjernom postupku isključivo slučajne prirode. Mjera za disperziju rezultata oko srednje vrijednosti dana je iznosom standardne devijacije. Standardna devijacija predstavlja točnost s kojom je izvršeno pojedino mjerenje. Što je ona manja, za niz mjerenja kažemo da je točniji. Na slici 61. grafički je prikazan odnos pogreške u postotcima s obzirom na usporedbu EMA –e i OMA –e (Tablica 5.), analitički dobivenih rezultata, numerički dobivenih rezultata i OMA – e (Tablica 3.) te usporedbe analitički dobivenih rezultata, numerički dobivenih rezultata i EMA – e (Tablica 7.).



Slika 61. Usporedba pogreški svih metoda dobivanja frekvencija

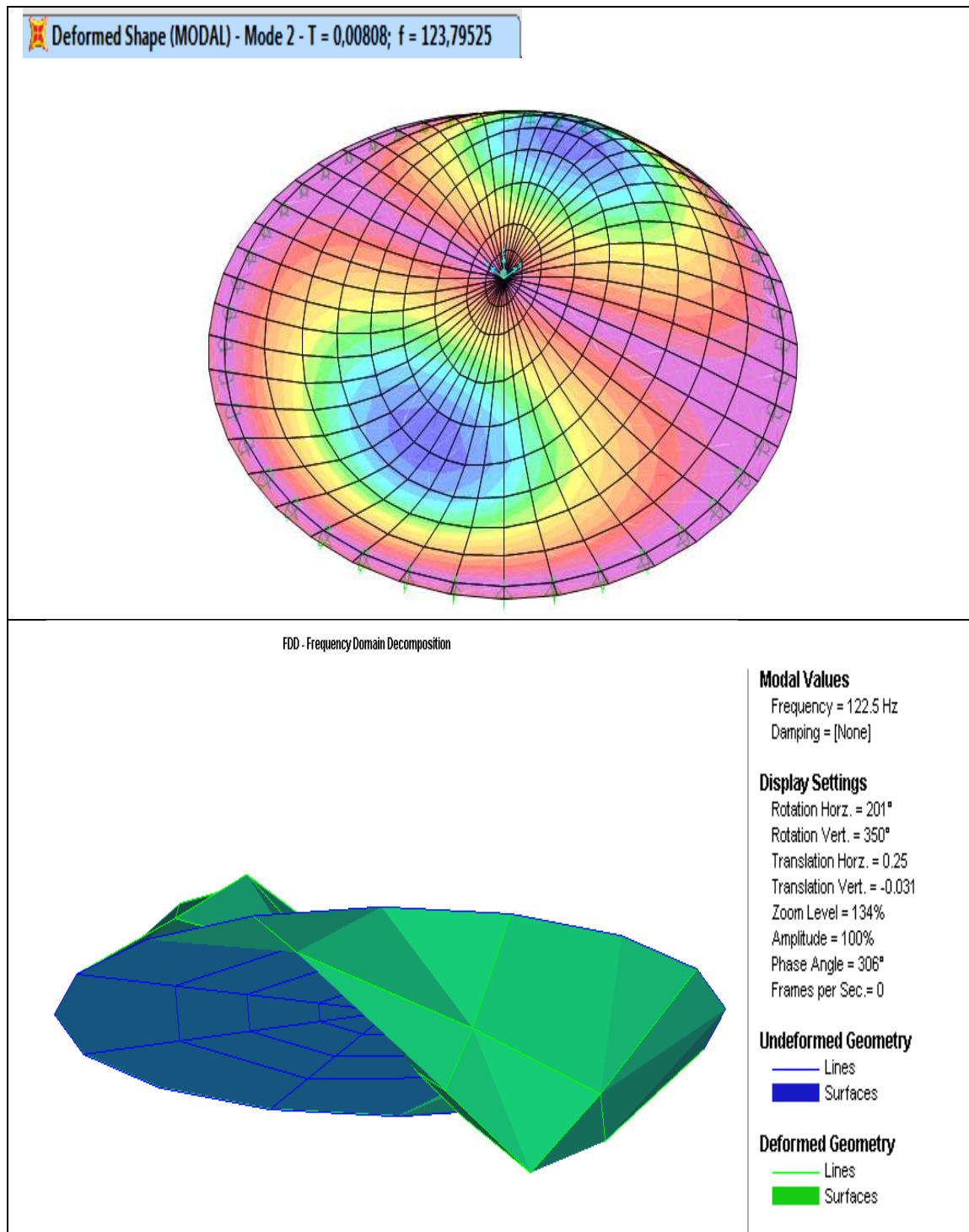
Usporedba analitičke i eksperimentalne metode

1. Mod



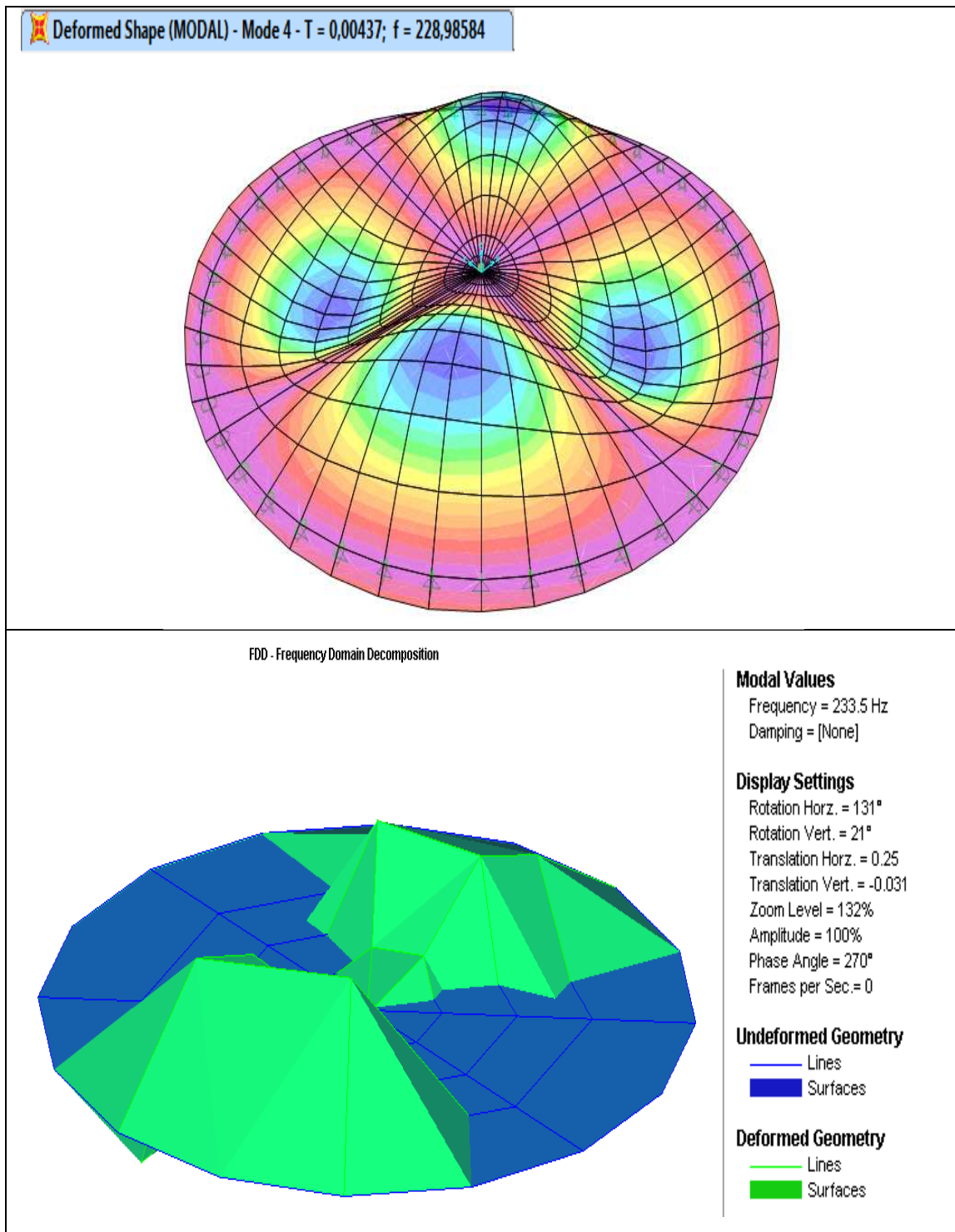
Slika 62. Prvi modalni oblik oscilacija

2. Mod



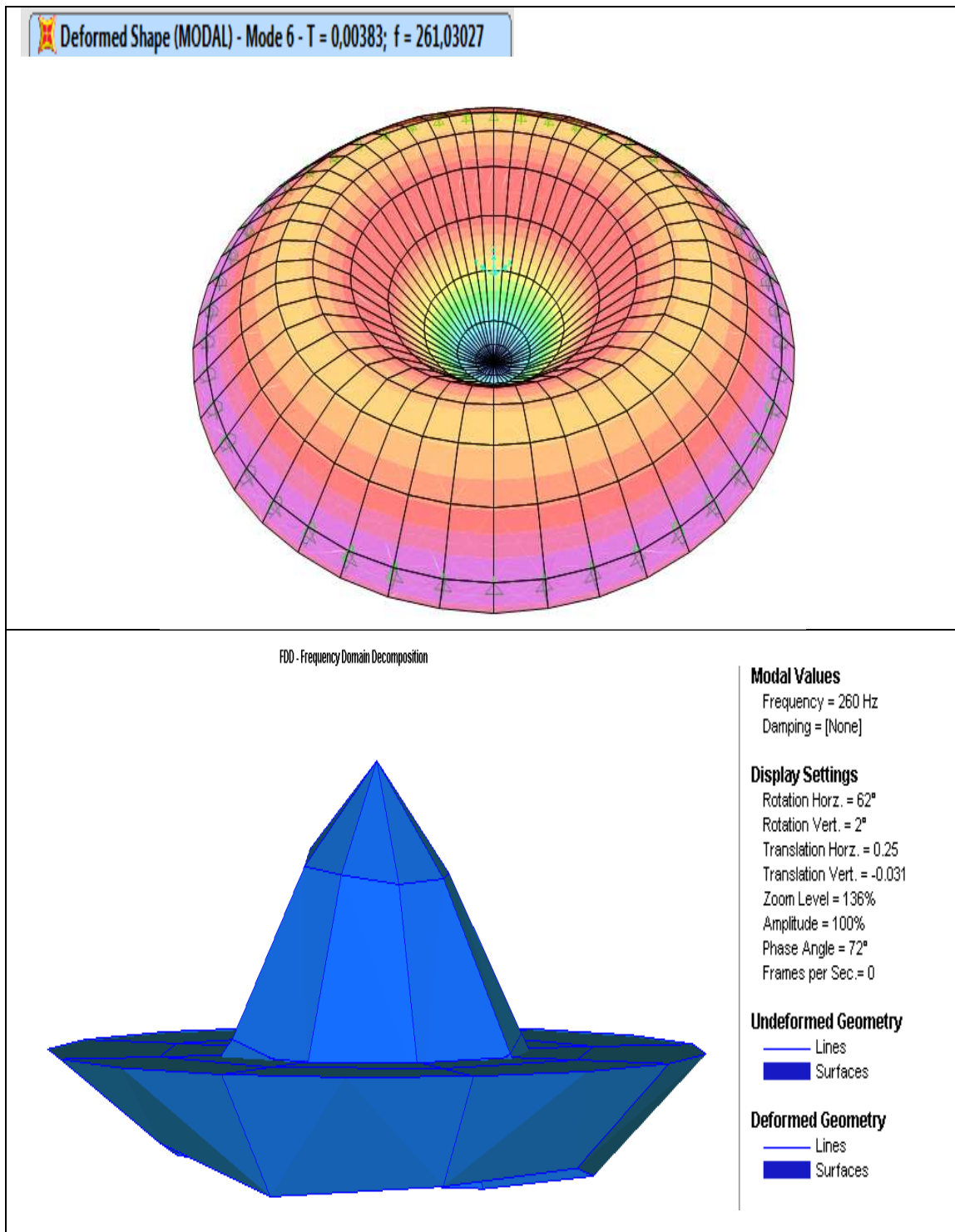
Slika 63. Drugi modalni oblik oscilacija

4. Mod



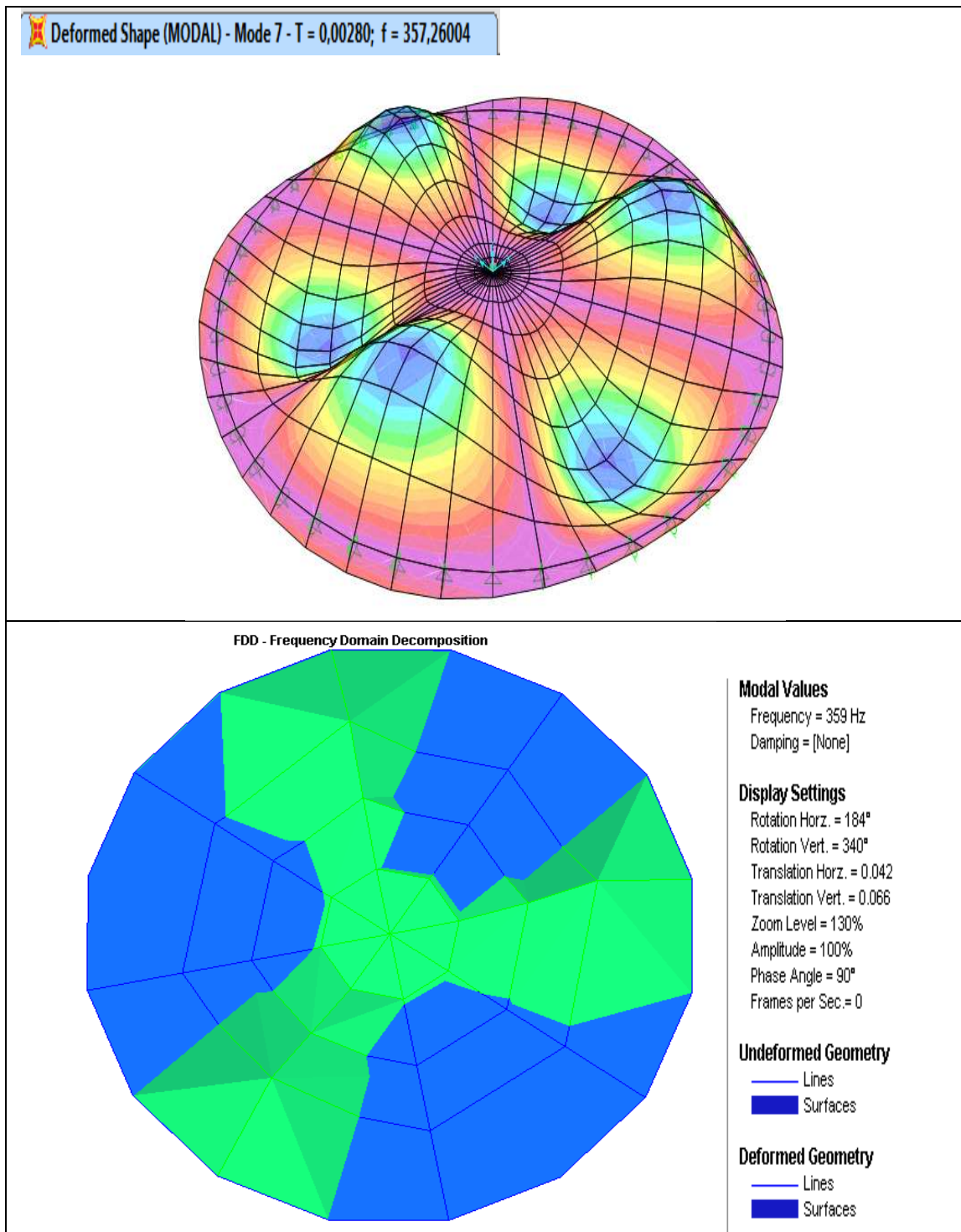
Slika 64. Četvrti modalni oblik oscilacija

6. Mod



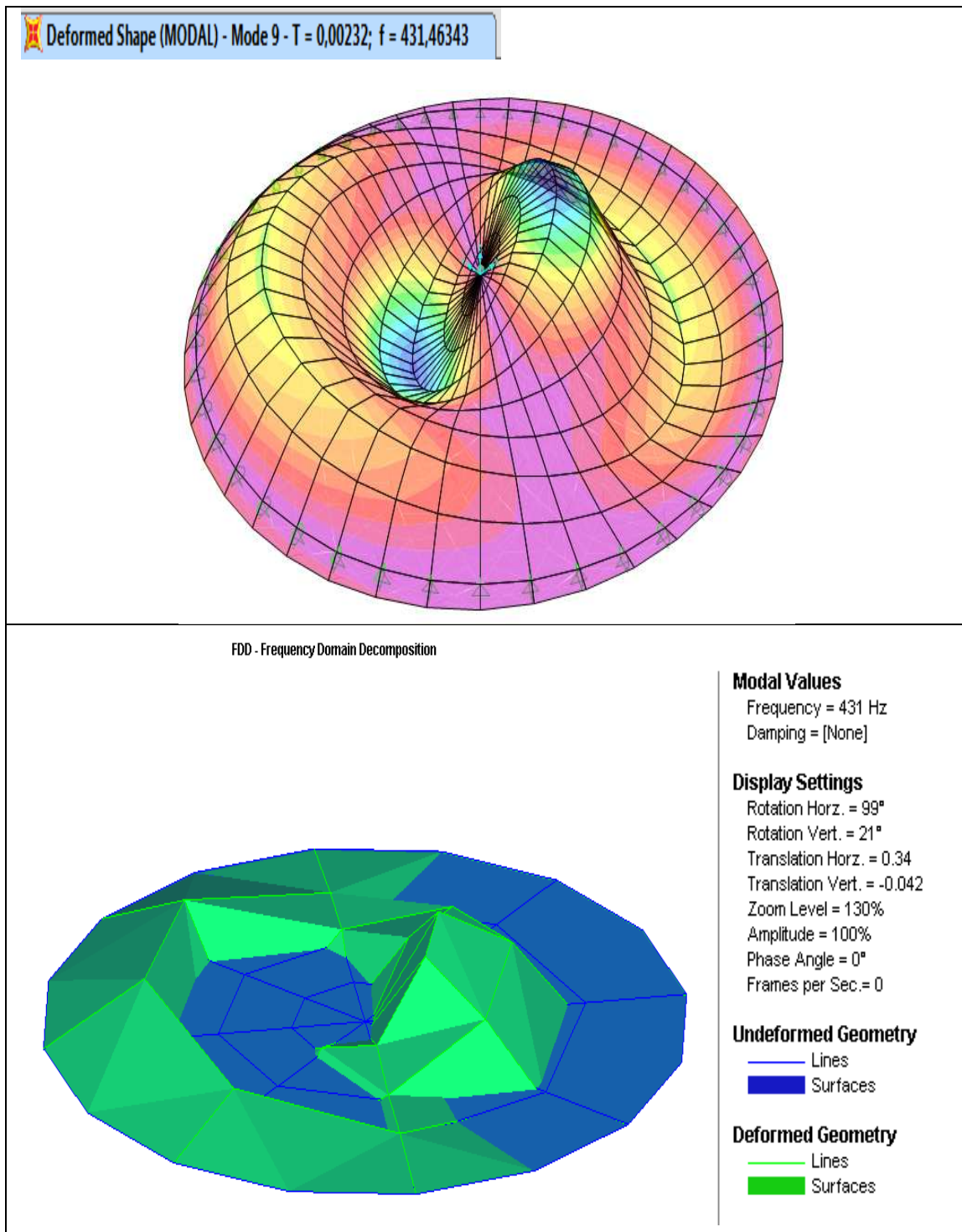
Slika 65. Šesti modalni oblik oscilacija

7. Mod



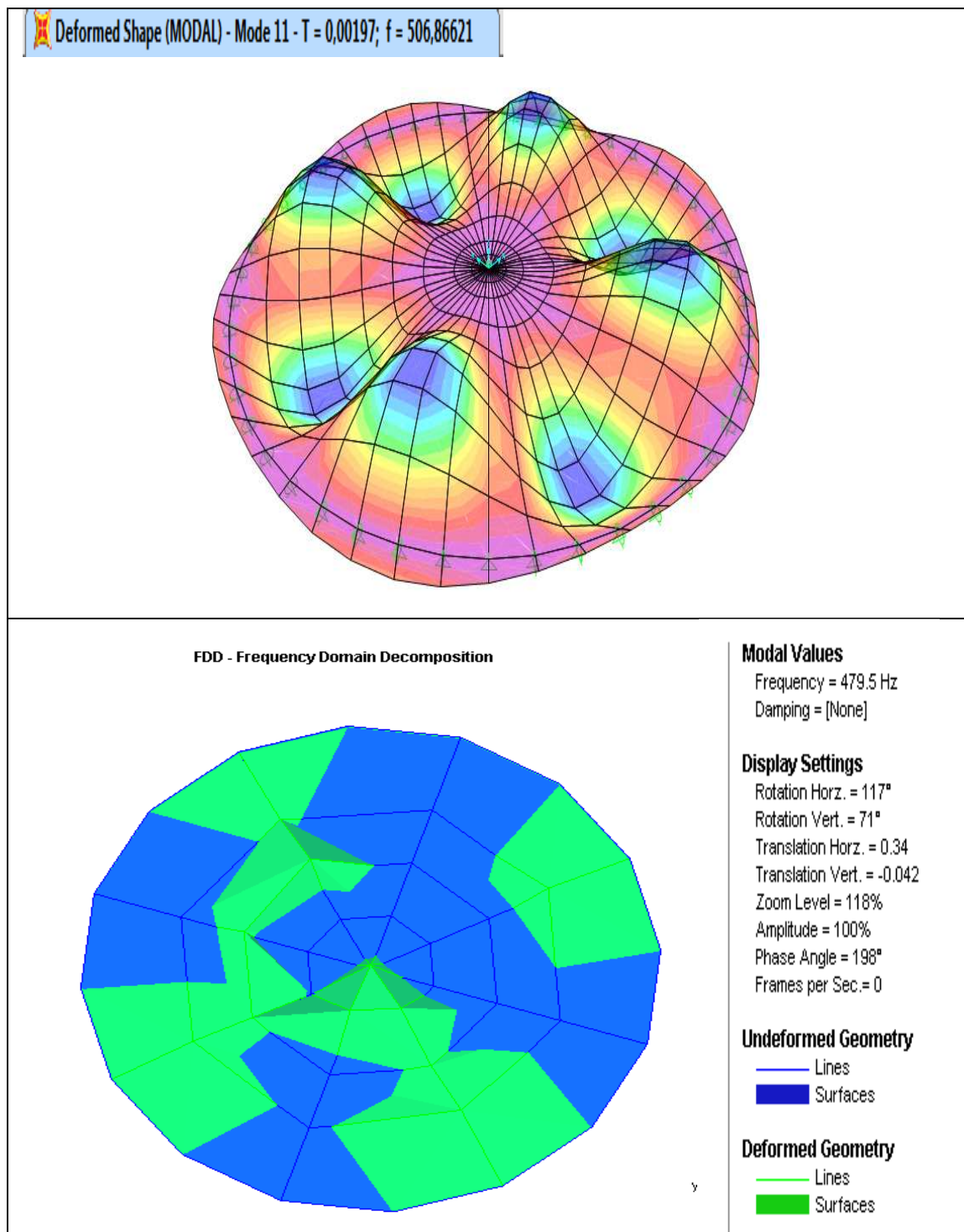
Slika 66. Sedmi modalni oblik oscilacija

9. Mod



Slika 67. Deveti modalni oblik oscilacija

11. Mod



Slika 68. Jedanaesti modalni oblik oscilacija

9. ZAKLJUČAK

Na temelju usporedbe dobivenih vlastitih frekvencija modela analitičkom Rayleigh – Ritz metodom te numeričkom metodom s obzirom na eksperimentalnu (EMA) i Operacionalnu modalnu analizu (OMA), možemo zaključiti da postoje mala odstupanja u rezultatima jer analitičke i numeričke metode sadrže u sebi određene nedostatke.

Numerička Rayleigh – Ritz – ova metoda je metoda za približno određivanje vlastitih frekvencija. Bazira se na određenim pretpostavkama koje nisu u potpunosti precizne, već se temelje na dosadašnjim saznanjima, to jest iskustvu inženjera, koji su upoznati s dotičnom problematikom. Na primjer, pretpostavlja se funkcija oblika na temelju očekivanog rješenja tj. odgovora konstrukcije.

Modalni oblici koje smo dobili eksperimentalnim putem (Slika 42. – Slika 48.) zadovoljili su teoretska očekivanja (Slika 57.) te numerički dobivene oblike oscilacija (Slika 59. i Slika 60.).

Točna rješenja dobili smo koristeći eksperimentalnu i Operacionalnu modalnu analizu. Njihovom usporedbom vidimo vrlo male razlike, gotovo nikakve (Tablica 5.), te su rješenja prihvatljiva za praktičnu primjenu.

Dakle, na modelu, konstruktivnom elementu ili konstrukciji možemo procijeniti stanje konstrukcije (otkriti eventualne nedostatke konstrukcije), s dovoljnom preciznošću, pomoću eksperimentalne i Operacionalne modalne analize.

10. PRILOZI

Prilog 1. Compact Disc (CD) sa video – animacijom svih oblika osciliranja ploče dobivenih FDD analizom.

11. LITERATURA

[1] Tom Irvine - Natural frequencies of circular plate bending modes

[2] D.Damjanović , Ispitivanje konstrukcija

[3] LJ. Herceg, Eksperimentalne metode

[4] Weaver, Timoshenko, and Young; Vibration Problems in Engineering, Wiley-Interscience, New York, 1990.

[5] V.Raduka, Dinamika i potresno inženjerstvo

[6] Kang W., Lee N.-H., Pang Sh., Chung W.Y., 2005, Approximate closed form solutions for free vibration of polar orthotropic circular plates, *Applied Acoustics* 66: 1162-1179.

[7] Senzori i pretvarači - <http://www.sau.ac.me/Brodskaaautomatika/senzori.pdf> , posjećeno u ožujku 2012.

[8] Akcelometri Brüel & Kjær -

<http://www.bksv.com/products/transducersconditioning/vibration-transducers/accelerometers.aspx> , posjećeno u ožujku 2012.

[9] Dinamičko ispitivanje konstrukcije, RIJEKA -

<http://www.gradri.hr/adminmax/files/class/8%20dinamika-2.ppt>, posjećeno u travnju 2012.

[10] Hrvoje Krstić, Vladimir Sigmund - Utvrđivanje lokacije oštećenja na konstrukciji dinamičkim mjerenjem

- [11] Nyquist ,C.E. Shannon ,Teorem uzimanja uzoraka - http://laris.fesb.hr/digitalno_vodjenje/text_2-4.htm, posjećeno u travnju 2012.
- [12] Prof.dr.sc.Viktor Sučić – Uvod i analizu i obradu podataka
- [13] Albertus Bekker, Experimental modal analysis
- [14] Thai-Hoa Le, Yukio Tamura - Modal identification of ambient vibration structure using Frequency Domain Decomposition and wavelet transform
- [15] Rune Brincker, Lingmi Zhang, Palle Andersen - Modal identification of output-only systems using Frequency Domain Decomposition
- [16] Svend Gade, Nis B. Møller, Henrik Herlufsen, Hans Konstantin-Hansen, Brüel & Kjær Sound and Vibration Measurements A/S, Skodsborgvej 307, DK2850 Nærum, Denmark, Frequency Domain Techniques for Operational Modal Analysis
- [17] Software for Operational Modal Analysis ARTeMIS, Frequency Domain Operational Modal Analysis- http://www.svibs.com/products/frequency_domain_modal_analysis.aspx#EFDD, posjećeno u travnju 2012.
- [18] Brincker, R., L. Zhang and P. Andersen: “Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition, Proc. of the 18th International Modal analysis Conference, San Antonio, Texas, February 7-10, 2000
- [19] S.D.Poisson 1829 Memories de L'Academie Royale des Sciences de L'Institute de France, 8, 357-570. L'Equilibre et le mouvement des corps elastiques
- [20] R.JOHN and M.A.AIREY 1911Proceeding of the Physical Society of London 23, 225-232. The vibration of circular plates and their relation of Bessel functions
- [21] D. Lazarević, J. Dvornik, Plošni nosači

Želim izraziti posebnu zahvalu mojim mentorima Mladenku Raku i Domagoju
Damjanoviću za pomoć pri izvođenju laboratorijskih ispitivanja.

SAŽETAK

Autor: Mateja Čupić

Naslov rada: Dinamička analiza tanke kružne ploče

Ovaj rad je napisan u svrhu verificiranja dosad utemeljenih analitičkih i približnih numeričkih računskih modela koji se koriste u određivanju dinamičkih parametara kružnih ploča uporabom eksperimentalne modalne analize (EMA) i Operacionalne modalne analize (OMA). Ispitivanjem modela kružne slobodno oslonjene ploče na dinamičku pobudu te primjenom EMA – e i OMA – e dobili smo odgovarajuće vlastite frekvencije, modalne oblike i modalna prigušenja (dinamičke parametre). Model smo pobuđivali udarnim čekićem, a za prikupljanje podataka koristili smo piezoelektrične akcelerometre i brze AD konvertore. Kako bi dobili što točnije rezultate kombinirali smo različita mjesta pobuđivanja konstrukcije s različitim položajem akcelerometara. Kod EMA – e pobudu smo nanosili kontrolirano, dok kod OMA – e za time nije bilo potrebe jer se ta metoda bazira na analizi odgovora konstrukcije. Kod obje metode ispitivanja analizu signala vršili smo digitalnim analizatorima baziranim na osobnom računalu. Numerički sam vlastite frekvencije modela dobila pomoću Rayleigh – Ritz – ove metode, koja se bazira na analizi energije modela. Pomoću programskog paketa SAP2000 dobila sam prvih 12 modalnih oblika osciliranja ploče te pripadajuće periode i vlastite frekvencije. Usporedbom dobivenih frekvencija analitički, numerički i eksperimentalno uočila sam malu pogrešku u rezultatima dobivenim analitičkom i numeričkom metodom zbog ponošanja materijala, to jest raznih pretpostavki na kojima se baziraju. Eksperimentalna i Operacionalna modalna analiza daju stvarne rezultate o dinamičkim parametrima modela za prvih nekoliko modova te se pomoću njih jednostavno i brzo može procijeniti stanje konstrukcije.

Ključne riječi: dinamički parametri, eksperimentalna modalna analiza, Operacionalna modalna analiza

SUMMARY

Author: Mateja Čupić

Title: Dynamic analysis of thin circular plate

This paper was written for the purpose of verifying existing analytical and approximate numerical computational models which are used in determining of the dynamic parameters of circular plates using experimental modal analysis (EMA) and Operational modal analysis (OMA). The research model that I have used is a simply supported circular plate which has been subjected to the dynamic excitation and then by using EMA and OMA I have attained corresponding frequencies, modal shapes and modal damping (dynamic parameters). The model was excited using impact hammer excitation and the data was collected with piezoelectric accelerometers and high performance data acquisition systems. In order to get the most accurate results I have combined different excitation positions with different placements of accelerometers. Experimental modal analysis (EMA) was used in combination with controlled excitation which was not necessary for Operational modal analysis (OMA) because that method is based on analysis of construction response. Digital analyzer in combination with a personal computer was used for signal analysis in both EMA and OMA. Rayleigh – Ritz method was used for numerical calculations. It is a method which is based on energy analysis of the model. Using the software package SAP2000 I got the first 12 modal shapes and associated natural frequencies and periods. By comparing the frequencies obtained analytically, numerically and experimentally I noticed a small error in the results obtained by analytical and numerical methods due to material behavior, that is, various assumptions on which their behavior is based. Experimental and Operational modal analysis give satisfactory results for dynamic parameters of the model and are easy and quick methods for assessing state of a construction.

Keywords: dynamic parameters, experimental modal analysis, operational modal analysis