

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Martina Rauch

**Minimizacija entropijske produkcije pri stacionarnom  
provođenju topline kroz ravnu stijenku s toplinskim izvorom i  
izotermnim rubnim uvjetima**

Zagreb, 2012.

*Ovaj rad izrađen je na Katedri za tehničku termodinamiku pod vodstvom dr. sc. Antuna Galovića, redovitog profesora u trajnom zvanju, i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2012.*

### ***Popis oznaka***

$A$  – površina ravne stijenke okomita na os  $x$ ,  $m^2$

$\delta$  – debljina ravne stijenke,  $m$

$\lambda$  – toplinska provodnost,  $W/(m \cdot K)$

$S_{gen}$  – ukupna entropijska produkcija,  $W/K$

$S'''_{gen}$  – lokalna entropijska produkcija,  $W/(m^3 \cdot K)$

$T$  – termodinamička temperatura,  $K$

$T_{s1}$  – rubna (površinska) temperatura,  $K$

$T_{s2}$  – rubna (površinska) temperatura,  $K$

$\Phi_V$  – volumenski toplinski izvor,  $W/m^3$

$x$  – prostorna koordinata,  $m$

$x_m$  – prostorna koordinata stacionarne točke,  $m$

### ***Bezdimenzijske veličine***

$\theta = T(x)/T_{s1}$  – bezdimenzijska lokalna temperatura, (–)

$\theta_s = T_{s2}/T_{s1}$  – bezdimenzijski omjer rubnih (graničnih) temperatura, (–)

$(\theta_s)_{stac}$  – bezdimenzijski omjer rubnih (graničnih) temperatura u točki minimuma, (–)

$\Phi_V^* = \Phi_V \delta^2 / (2\lambda T_{s1})$  – bezdimenzijski toplinski izvor, (–)

$x^* = x/\delta$  – bezdimenzijska prostorna koordinata, (–)

$x_{stac}^*$  – stacionarna bezdimenzijska prostorna koordinata, (–)

$S_{gen} \delta / A \lambda$  – ukupna bezdimenzijska generirana entropija, (–)

$S'''_{gen} \delta^2 / \lambda$  – lokalna bezdimenzijska generirana entropija, (–)

## *Sadržaj rada*

1. Uvod.....	1
2. Razrada matematičkog modela .....	3
3. Dijagramski prikaz i interpretacija pojedinih slučajeva .....	9
3.1. Dijagramski prikaz i pojašnjenje lokalne entropijske produkcije.....	9
3.2. Dijagramski prikaz i pojašnjenje minimizacije ukupne entropijske produkcije .....	21
4. Zaključak.....	27
5. Prilog 1 .....	28
6. Zahvala.....	31
7. Popis literature.....	32
Sažetak.....	33
Summary.....	34

## 1. Uvod

Drugi zakon termodinamike poučava nas da je svaki toplinski proces, koji se odvija u konačnom prostoru i konačnom vremenu, nepovratan ili ireverzibilan. Mjera te nepovratnosti je generirana entropija, a koja predstavlja sumu promjena svih sudionika (čimbenika) koji sudjeluju u promatranom procesu. Sve te sudionike svrstava se u tzv. *izolirani* sustav, pa se najčešće tu generiranu entropiju naziva još i *promjenom entropije izoliranog sustava*. Ta je promjena entropije prema teoremu *Gouya*, 1889. [1] i *Stodole*, 1910. [2] izravno spojena s gubitkom na raspoloživom radu prema jednadžbi  $\Delta W = T_{ok}\Delta S_{iz.sust.}$  [3], odakle se vidi da je taj gubitak, koji se još naziva i eksergijskom destrukcijom, izravno proporcionalan ukupnoj generiranoj entropiji. Za svaki realni proces neizbježan je pozitivni prirast entropije izoliranog sustava, ali iz navedenog teorema proizlazi kako je nužno inženjersko otkrivanje žarišta nepovratnosti, tako i njihovo smanjivanje, odnosno nameće se ideja minimizacije entropijske produkcije, a time i minimizacija eksergijske destrukcije.

U tom je pogledu također još davne 1938. godine prof. Bošnjaković objavio vizionarski rad pod naslovom "Kampf den Nichtumkehrbarkeiten" [4], u kojem upravo navodi činjenicu da su nepovratnosti veliki neprijatelj inženjerima te da ih treba locirati i pronaći određeni način za njihovo smanjivanje.

Tijekom cijelog prošlog stoljeća, a također i danas, mnogo je napisanih knjiga, znanstvenih i stručnih radova vezanih za područje minimizacije entropijske produkcije u mnogim kako složenijim, tako i u jednostavnijim toplinskim procesima. Veliki doprinos toj problematici dao je u mnogim svojim radovima suvremeni svjetski poznati termodinamičar A. Bejana, koji je tu problematiku obradio u svojoj knjizi *Entropy Generation Minimization*, [5]. Pored te njegove knjige, često je, glede tog područja, citirana knjiga *Exergie – Theorie and Anwendung*, autora Fratscher, Brodjanskij, Michalek [6].

Prijenos topline, a na koji su vezani svi toplinski procesi, spada u skupinu tipičnih nepovratnih procesa što znači da je povezan s generiranjem entropije. Kako u mnogim znanstvenim radovima tako i u gore navedinim knjigama, mogu se pronaći modeli minimizacije entropije u mnogim odabranim tehničkim primjerima. Jedan od načina jest da se ta minimizacija provodi nad granicama tzv. kontrolnog volumena, a bez da se ulazi u vremensko prostorni opis generiranja entropije unutar samog kontrolnog volumena. [7] Upravo se u ovom radu daje jedan algoritam minimizacije entropijske produkcije, na način da

se uđe unutar kontrolnog volumena pa je za primjer uzeta minimizacija entropijske produkcije pri jednom stacionarnom provođenju topline u ravnoj stijenci, s nametnutim volumenskim toplinskim izvorom i nametnutim izoternim rubnim uvjetima. Kao volumenski toplinski izvor može biti Jouleova toplina ili primjerice apsorbirano zračenje u stijenci.

## 2. Razrada matematičkog modela

Diferencijalna jednačba stacionarnog provođenja topline kroz ravnu stijenku, s nametnutim toplinskim izvorom ima oblik [8]

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\Phi_V}{\lambda} = 0 \quad (1)$$

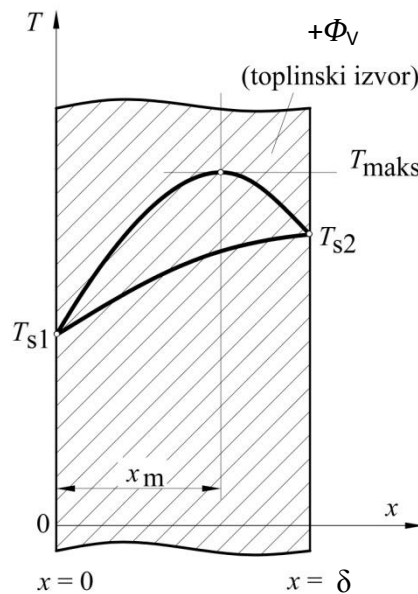
Nakon provedene prve integracije dobiva se izraz za temperaturni gradijent

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\Phi_V}{\lambda}x + C_1 \quad (2)$$

a sljedeća integracija daje opće rješenje temperaturnog polja kroz ravnu stijenku

$$T(x) = -\frac{\Phi_V}{2\lambda}x^2 + C_1x + C_2 \quad (3)$$

Jednačba (3) ukazuje da temperaturno polje ima, obzirom na lokalnu koordinatu  $x$ , karakter kvadratne parabole.



Slika 1. Temperaturno polje u ravnoj stijenci uz postojanje toplinskog izvora s nametnutim izotermnim rubnim uvjetima [9]

Integracijske konstante se dobiju iz izotermnih ili Dirichletovih rubnih uvjeta [10], shodno slici 1

$$x = 0 \rightarrow T = T_{s1}; \text{ i } x = \delta \rightarrow T = T_{s2} \quad (4)$$

Uvrštavajući rubne uvjete prema jednadžbi (4) u jednadžbu (3), dobivaju se izrazi za integracijske konstante  $C_1$  i  $C_2$ :

$$C_2 = T_{s1} \quad (5)$$

$$C_1 = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{\delta} + \frac{\Phi_V \delta}{2\lambda} \quad (6)$$

Uvrštavajući jednadžbe (5) i (6), jednostavnim algebarskim zahvatima, jednadžba (3) lako dobiva oblik

$$T(x) = -\frac{\Phi_V x^2}{2\lambda} + \left( \frac{T_{s2} - T_{s1}}{\delta} + \frac{\Phi_V \delta}{2\lambda} \right) x + T_{s1} \quad (7)$$

Gornja jednadžba prikazuje partikularno rješenje stacionarnog temperaturnog polja u ravnoj stijenci s toplinskim izvorom i nametnutim izotermnim rubnim uvjetima.

Jednadžba (7) jednostavno se prevodi na bezdimenzijski oblik

$$\theta = \frac{T(x)}{T_{s1}} = \Phi_V^* [x^* - (x^*)^2] + x^*(\theta_s - 1) + 1 \quad (8)$$

pri čemu su bezdimenzijske veličine strukturirane kao:

$$\theta_s = \frac{T_{s2}}{T_{s1}}; \quad \Phi_V^* = \frac{\Phi_V \delta^2}{2\lambda T_{s1}}; \quad x^* = \frac{x}{\delta} \quad (9)$$

Toplinski tok kroz ravnu stijenku posljedica je postojanja temperaturnih gradijenata pa se izraz za lokalnu entropijsku produkciju i stacionarno provođenje topline dobiva iz sljedeće polazne jednadžbe

$$S_{\text{gen}}''' Adx = \frac{\Phi}{T} - \frac{\Phi}{T - dT} \quad (a)$$

Pri tome prvi član označuje pozitivni prirast entropije na temperaturi  $T$ , a drugi član označuje negativni prirast entropije pri temperaturi  $(T - dT)$ . Uvjet stacionarnosti zadovoljen je istim toplinskim tokom  $\Phi$  na ulazu u elementarni volumen  $Adx$  i na izlazu iz istog elementarnog volumena.

Svođenjem desne strane jednadžbe (a) na zajednički nazivnik dobiva se

$$S_{\text{gen}}''' Adx = \frac{\Phi T - \Phi dT - \Phi T}{T^2 - T dT} \quad (b)$$



Budući da je  $dT \ll T$ , može se zanemariti član  $TdT$  pa jednačba (b) prelazi u oblik

$$S_{\text{gen}}''' Adx = -\frac{\Phi dT}{T^2} \quad (\text{c})$$

Prema Fourierovom stavku toplinski tok  $\Phi$  može se izraziti kao

$$\Phi = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad (\text{d})$$

te jednačba (c) prelazi u oblik

$$S_{\text{gen}}''' Adx = \frac{\lambda A \frac{dT}{dx} dT}{T^2} \quad (\text{e})$$

Veličina  $dT$  u gornjoj jednačbi može se izraziti kao  $dT = \frac{dT}{dx} dx$

$$S_{\text{gen}}''' Adx = \frac{\lambda A \frac{dT}{dx} \frac{dT}{dx} dx}{T^2} \quad (\text{f})$$

te nakon skraćivanja gornje jednačbe s  $Adx$  dolazi se do izraza za lokalnu entropijsku produkciju u ravnoj stijenci

$$S_{\text{gen}}''' = \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{10})$$

Ovaj se oblik jednačbe može pronaći kao specijalan slučaj kod jednog šireg zapisa u [11] te se može zapisati, koristeći jednačbu (9) i (10), također u bezdimenzijskom obliku

$$\frac{S_{\text{gen}}''' \delta^2}{\lambda} = \left( \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \right)^2 \quad (\text{11})$$

Derivirajući jednačbu (8) po lokalnoj koordinati  $x^*$  lako se dolazi do temperaturnog gradijenta

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \Phi_V^* (1 - 2x^*) + \theta_s - 1 \quad (\text{12})$$

Uvrštavanjem jednađbi (8) i (12) u jednađbu (11) dobiva se jednađba u bezdimenzijskom obliku koja opisuje lokalnu entropijsku produkciju

$$\frac{S_{\text{gen}}'''\delta^2}{\lambda} = \left( \frac{\Phi_V^*(1 - 2x^*) + \theta_s - 1}{\Phi_V^*[x^* - (x^*)^2] + x^*(\theta_s - 1) + 1} \right)^2 \quad (13)$$

Ukupna entropijska produkcija dobiva se prema sljedećoj jednađbi

$$S_{\text{gen}} = \lambda \int_0^\delta \left( \frac{\partial T}{T} \right)^2 A dx \quad (14)$$

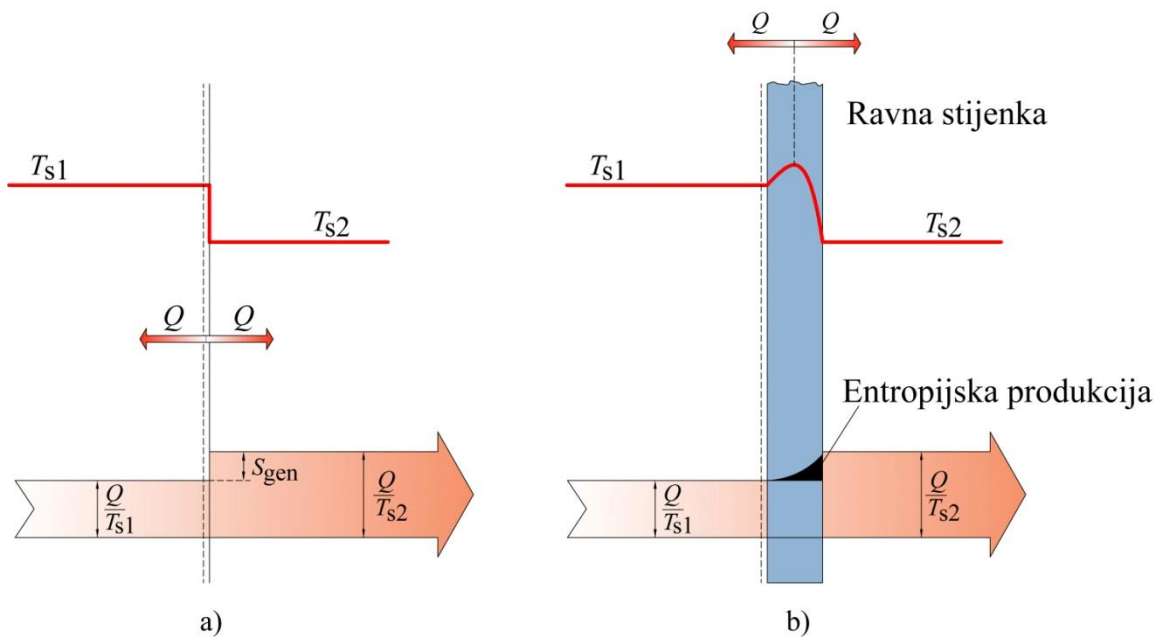
koju se također lako prevodi na bezdimenzijski oblik

$$\frac{S_{\text{gen}}\delta}{A\lambda} = \int_0^1 \left( \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \right)^2 dx^* \quad (15)$$

Uvrštavanjem jednađbi (8) i (12) u jednađbu (15) dobivamo konačni izraz koji opisuje ukupnu entropijsku produkciju

$$\frac{S_{\text{gen}}\delta}{A\lambda} = \int_0^1 \left( \frac{\Phi_V^*(1 - 2x^*) + \theta_s - 1}{\Phi_V^*[x^* - (x^*)^2] + x^*(\theta_s - 1) + 1} \right)^2 dx^* \quad (16)$$

Iz jednađbi (13) i (16) vidljivo je da je, bilo lokalna bilo ukupna entropijska produkcija, funkcija bezdimenzijskih veličina  $\theta_s$ ,  $\Phi_V^*$  i  $x^*$ . Lokalna entropijska produkcija izravno se dobiva za odabrane vrijednosti navedenih veličina iz jednađbe (13) dok se za ukupnu entropijsku produkciju mora numeričkim postupkom provesti integracija jednađbe (16), budući da ne postoji eksplicitno rješenje integrala sadržanog u jednađbi (16).



Slika 2. Grafički prikaz entropijske produkcije kod provođenja topline kroz ravnu stijenku s toplinskim izvorom i nametnutim izotermnim rubnim uvjetima [12]

Slika 2a) prikazuje prirast entropije kod provođenja topline kroz ravnu stijenku s toplinskim izvorom i nametnutim izotermnim rubnim uvjetima kroz granicu kontrolnog volumena. Takav pristup nam govori o kvantitativnoj vrijednosti generirane entropije unutar kontrolnog volumena bez razmatranja tijeka entropijske produkcije unutar same ravne stijenke. Slika 2b) prikaz je ulaska u prostorni opis generiranja entropije unutar samog kontrolnog volumena te je na takav način moguće i kvalitativno pratiti tijek generirane entropije unutar ravne stijenke.

Minimum lokalne entropijske produkcije određen je stanjem u kojem je temperaturni gradijent jednak nuli. Za odabrane vrijednosti bezdimenzijskih veličina  $\theta_s$ ,  $\Phi_V^*$  i  $x^*$ , koristeći jednadžbu (12) uz uvjet nulte vrijednosti temperaturnog gradijenta,  $d\theta / dx^* = 0$ , dobiva se izraz za  $x_{stac}^*$

$$x_{stac}^* = \frac{\Phi_V^* - 1 + \theta_s}{2\Phi_V^*} \quad (17)$$

Prema tome, jednadžbom (8) određeno je bezdimenzijsko temperaturno polje, jednadžbom (13) bezdimenzijska lokalna entropijska produkcija, kojoj je pozicija nulte vrijednosti (lokalnog ekstrema – minimuma) određena jednadžbom (17), dok je jednadžbom (16) određena ukupna entropijska produkcija.

Kako se vidi u matematičkom modelu egzistiraju bezdimenzijske varijable  $\theta_s$ ,  $\Phi_V^*$  i  $x^*$  kako za izračun lokalne tako i za izračun, a time i minimizaciju, ukupne bezdimenzijske entropijske produkcije. Za pojedine odabrane slučajeve rezultati proračuna prikazuju se u sljedećim poglavljima.

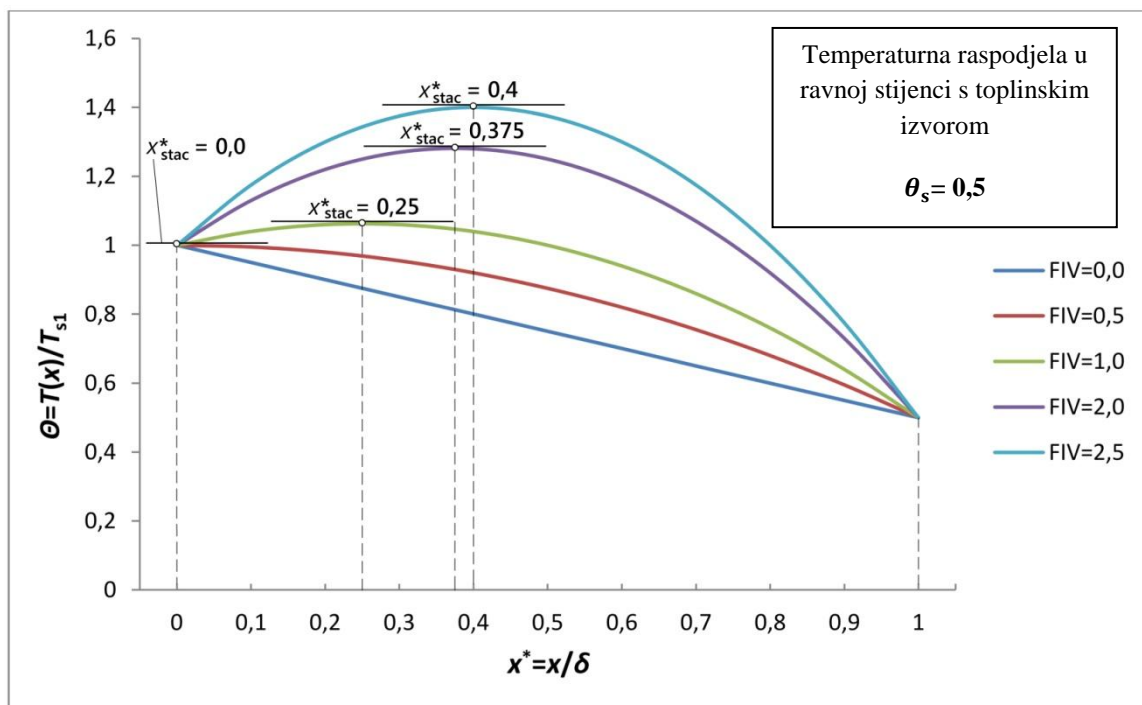
### 3. Dijagramski prikazi i interpretacija pojedinih slučajeva

U okviru ove analize prvo se pojašnjava za jedan odabrani slučaj temperaturno polje, temperaturni gradijenti i lokalna entropijska produkcija, a potom se pojašnjavaju slučajevi ukupne entropijske produkcije. U okviru razrade ukupne entropijske produkcije prikazana je i minimizacija iste.

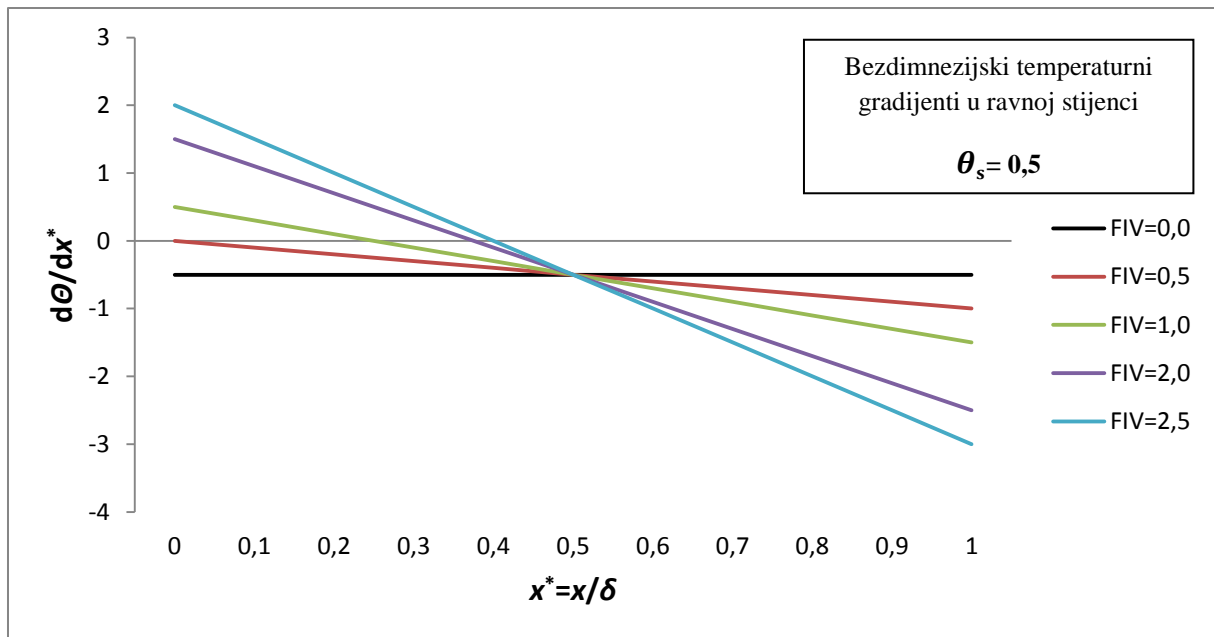
#### 3.1. Dijagramski prikaz i pojašnjenje lokalne entropijske produkcije

Za prvi primjer uzet je slučaj da je  $\theta_s = 0,5$ , a variran je iznos toplinskog toka  $\Phi_V^*$  unutar intervala  $0 \leq \Phi_V^* \leq 2,5$ .

Dijagram na slici 3 predstavlja bezdimenzijsko temperaturno polje, koje je izračunato prema jednadžbi (8), dok dijagram na slici 4 prikazuje pripadajuće bezdimenzijske temperaturne gradijente, računane prema jednadžbi (12). Ta dva dijagrama izravno fizikalno pojašnjavaju tijek, shodno jednadžbi (13), lokalne entropijske produkcije.



Slika 3. Temperaturno polje u ravnoj stijenci u ovisnosti o prostornoj koordinati  $x^*$  i bezdimenzijskim vrijednostima toplinskog izvora  $\Phi_V^*$  uz  $\theta_s = 0,5$



Slika 4. Prikaz bezdimenzijskih temperaturnih gradijenata u ovisnosti o prostornoj koordinati  $x^*$  i bezdimenzijskim vrijednostima toplinskog toka  $\Phi_V^*$  uz  $\theta_s = 0,5$

Crna linija na slici 3 prikazuje temperaturno polje za slučaj kada je  $\Phi_V^* = 0,0$ , i to je linearna funkcija, budući da otpadaju članovi uz  $\Phi_V^*$  u jednadžbi (8). Vidi se da u tom slučaju temperatura u stijenci monotono pada s porastom bezdimenzijske koordinate  $x^*$ . To je zbog toga što je u promatranom slučaju toplinski tok usmjeren s lijevog ruba stijenske prema desnom, tj. temperatura na lijevom rubu  $T_{s1}$  veća je od temperature na desnom rubu  $T_{s2}$ . Također je evidentno da u tom slučaju temperaturno polje nema lokalnog ekstrema, kao što to imaju ostali slučajevi kod kojih je  $\Phi_V^* > 0$  gdje su krivulje temperaturnog polja kvadratne parabole. Iz dijagrama na slici 3 vidi se da se s povećanjem vrijednosti  $\Phi_V^*$  povećavaju i vrijednosti lokalnih temperaturnih ekstrema (maksimuma), ali se i njihova pozicija  $x_{stac}^*$  pomiče u lijevo. Vrijednosti  $x_{stac}^*$  su određene prema jednadžbi (17) i prikazane su u dijagramu na slici 3. Uvrštavanjem tako dobivenih vrijednosti za  $x_{stac}^*$  u jednadžbu (8) određene su i vrijednosti maksimalnih bezdimenzijskih temperatura. Dotične vrijednosti, koje se dakako mogu iščitati iz dijagrama na slici 3, prikazuje tablica 1.

Tablica 1. Vrijednosti koordinata  $x_{\text{stac}}^*$  i  $\Theta_{\text{max}}$  u točkama ekstrema (maksimuma)

$\Phi_V^*$	0,5	1,0	2,0	2,5
$x_{\text{stac}}^* = (x/\delta)_{\text{stac}}$	0,0	0,25	0,375	0,4
$\Theta_{\text{max}} = (T(x) / T_{s1})_{\text{max}}$	1,0	1,0625	1,28125	1,4

Dijagram na slici 4 prikazuje temperaturne gradijente za promatrani slučaj. Iz slike se vidi da oni kontinuirano opadaju od pozitivnih k negativnim vrijednostima. Njihove nulte vrijednosti su na  $x_{\text{stac}}^*$ , čije su vrijednosti dane u tablici 1, a iste se mogu iščitati i iz dijagrama na slici 4. Očekivano, budući da je temperaturno polje za slučaj kada je  $\Phi_V^*=0,0$  linearna funkcija, pripadajući temperaturni gradijent je konstantan i iznosi 0,5. Iz istog se dijagrama vidi i jedna zanimljiva činjenica. Vidi se da postoji jedna vrijednost  $x^*$  za koju su međusobno jednaki svi temperaturni gradijenti, neovisno o veličini  $\Phi_V^*$ . Vrijednost te koordinate  $x^*$  dobiva se iz uvjeta

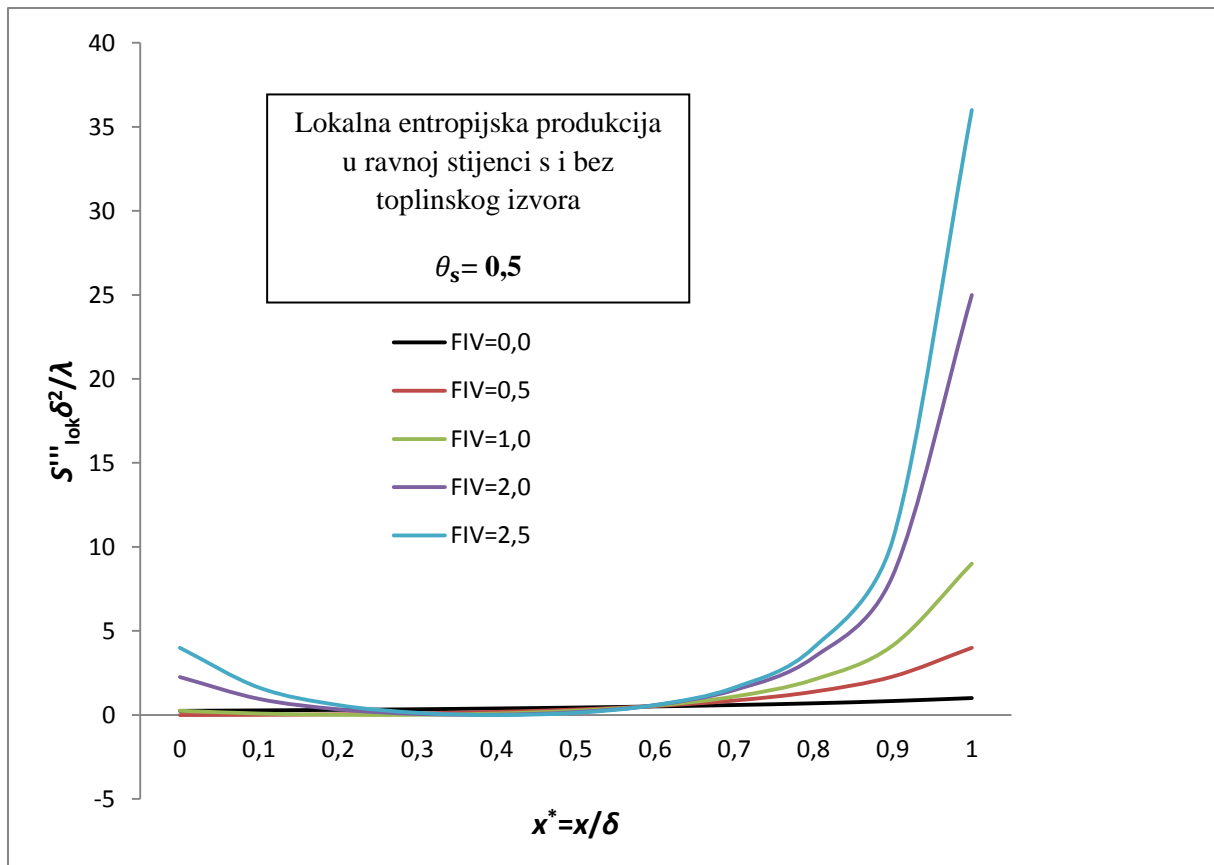
$$\Phi_{V1}^*(1 - 2x^*) + \theta_s - 1 = \Phi_{V2}^*(1 - 2x^*) + \theta_s - 1 \quad (18)$$

odakle slijedi da je

$$x^* = \frac{\Phi_{V2}^* - \Phi_{V1}^*}{2(\Phi_{V2}^* - \Phi_{V1}^*)} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad (19)$$

a što pokazuje i dijagramski prikaz na slici 4.

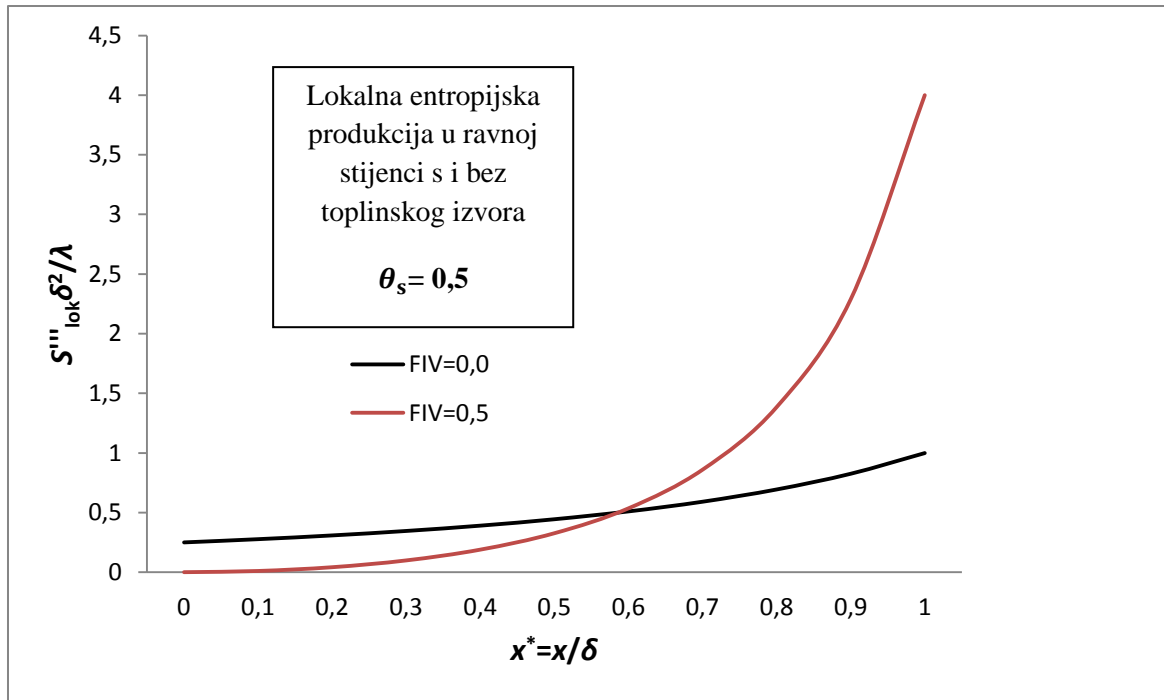
Dijagram na slici 5 prikazuje lokalnu entropijsku produkciju za gore navedeni slučaj, za  $0 \leq \Phi_V^* \leq 2,5$  i  $\theta_s = 0,5$ .



Slika 5. Bezdimenzijska lokalna entropijska produkcija generirana u ravnoj stijenci u ovisnosti o prostornoj koordinati  $x^*$  i bezdimenzijskim vrijednostima toplinskog izvora  $\Phi_V^*$  uz  $\theta_s = 0,5$

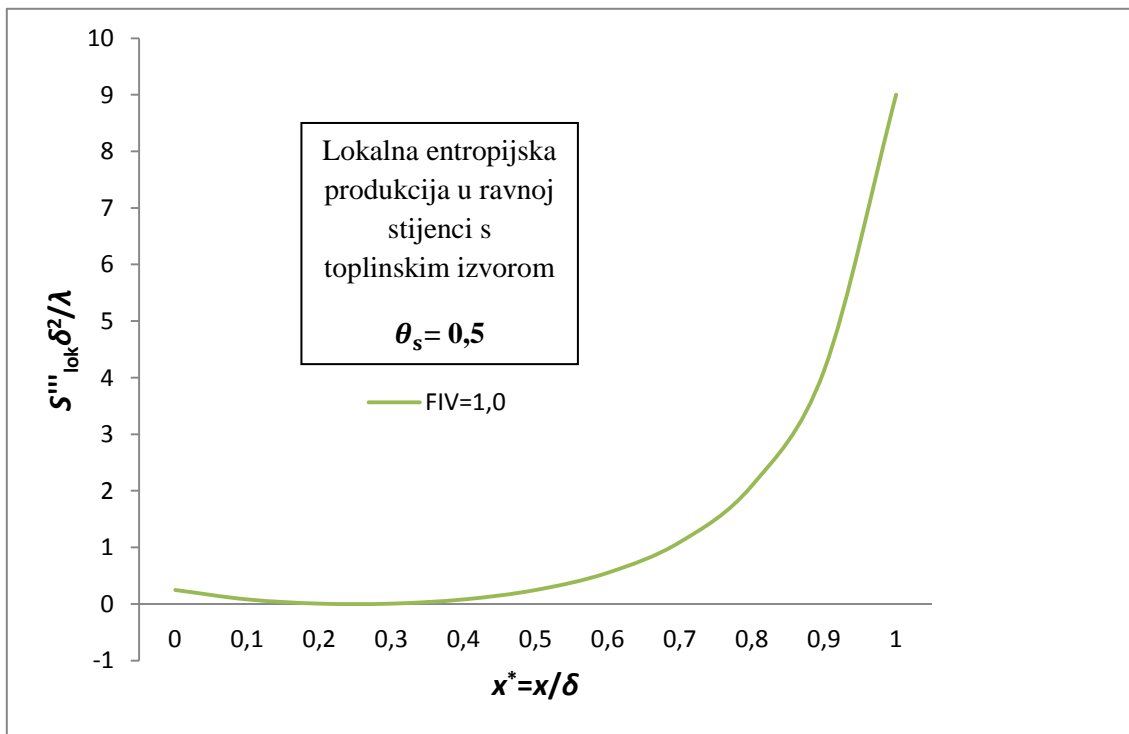
Dijagram jasno pokazuje da lokalna entropija raste s porastom toplinskog toka  $\Phi_V^*$ . Zbog bolje preglednosti i interpretacije dijagrama, na slikama 6, 7 i 8 prikazi su lokalne entropijske produkcije za pojedine slučajeve različitih vrijednosti toplinskih izvora.



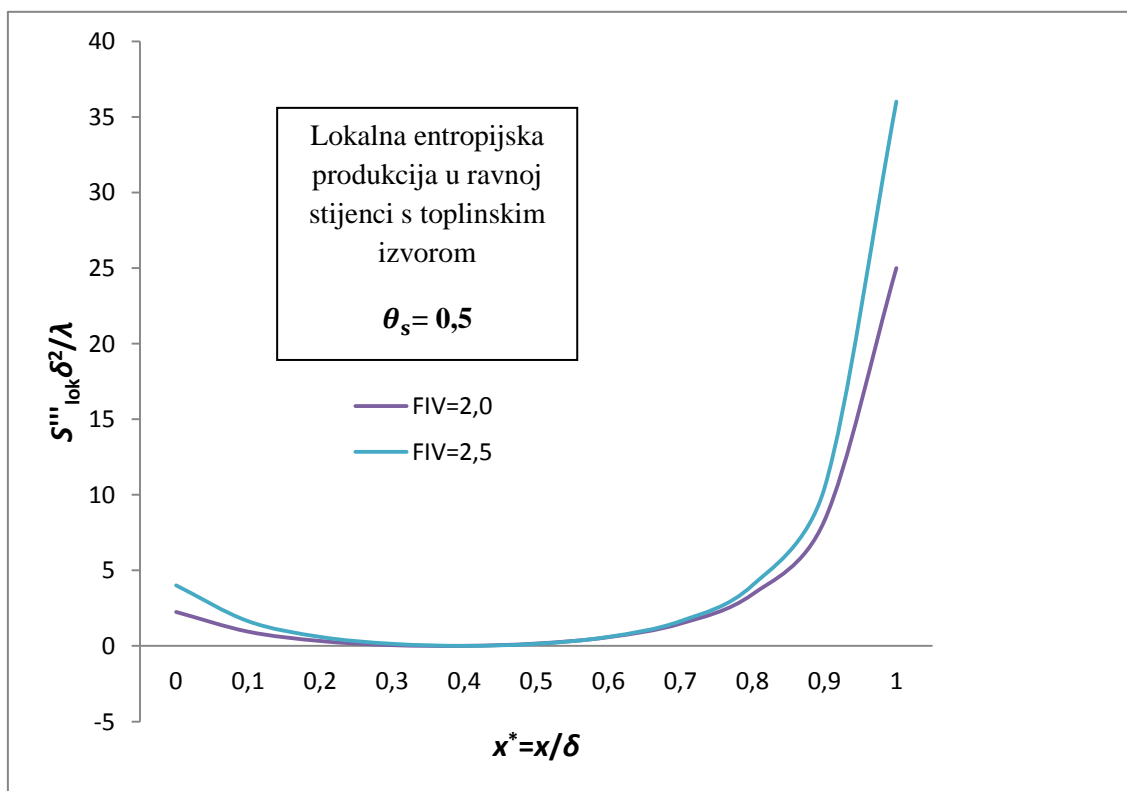


Slika 6. Bezdimenzijska lokalna entropijska produkcija generirana u ravnoj stijenci u ovisnosti o prostornoj koordinati i bezdimenzijskim vrijednostima toplinskog izvora  $\Phi_v^* = 0,0; 0,5$  uz uvjet  $\theta_s = 0,5$

Dijagram na slici 6 pokazuje da za  $\Phi_v^* = 0,0$  lokalna entropijska produkcija kontinuirano raste s povećanjem prostorne koordinate  $x^*$ . To i jest u skladu i s tijekom temperature odnosno tijekom temperaturnih gradijenata shodno njihovim vrijednostima danim na slikama 3 i 4. Iz tih se dijagrama vidi da za  $\Phi_v^* = 0,0$  temperatura kontinuirano pada, dok je temperaturni gradijent konstantna vrijednost pa shodno jednadžbi (13) dolazi do kontinuiranog rasta bezdimenzijske lokalne entropijske produkcije. Za  $\Phi_v^* = 0,5$  lokalna entropijska produkcija također kontinuirano raste, a što se pojašnjava sljedećim načinom: to znači da je u tom slučaju jače izraženo smanjenje temperature od smanjenja temperaturnog gradijenta u ravnoj stijenci.



Slika 7. Bezdimenzijska lokalna entropijska produkcija generirana u ravnoj stijenci u ovisnosti o prostornoj koordinati i bezdimenzijskim vrijednostima toplinskog izvora  $\Phi_V^* = 1,0$  uz uvjet  $\theta_s = 0,5$

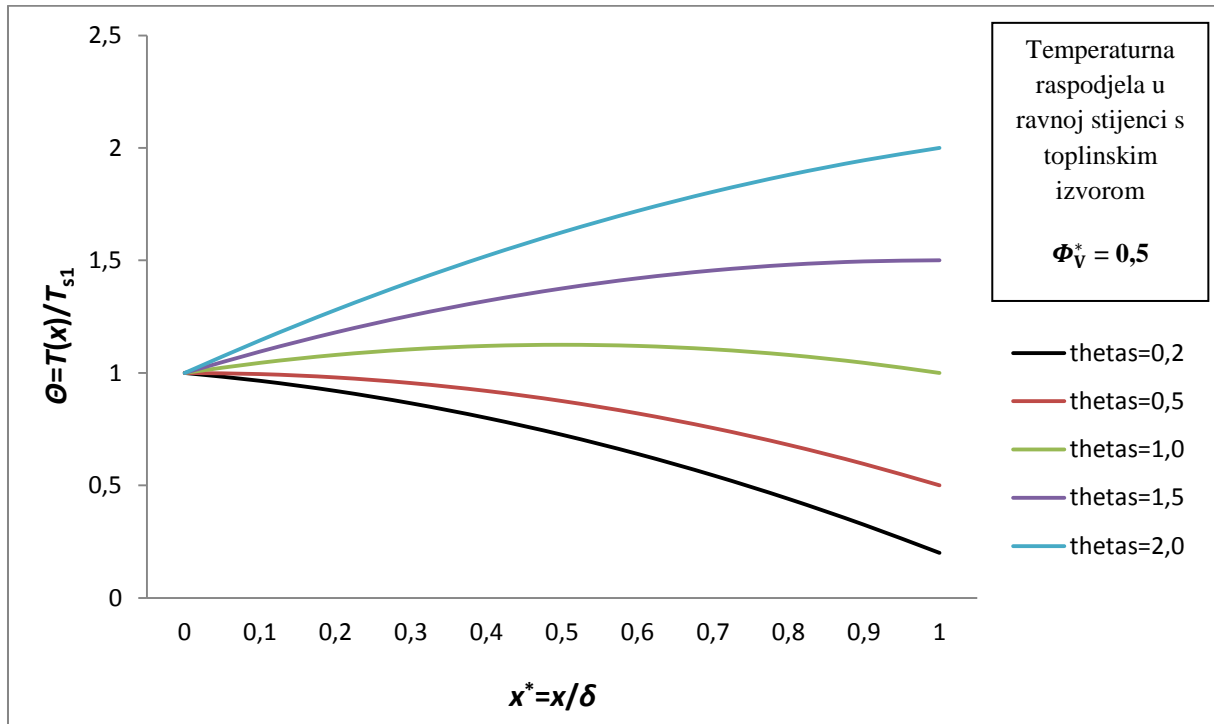


Slika 8. Bezdimenzijska lokalna entropijska produkcija generirana u ravnoj stijenci u ovisnosti o prostornoj koordinati i bezdimenzijskim vrijednostima toplinskog izvora  $\Phi_V^* = 2,0; 2,5$  uz uvjet  $\theta_s = 0,5$

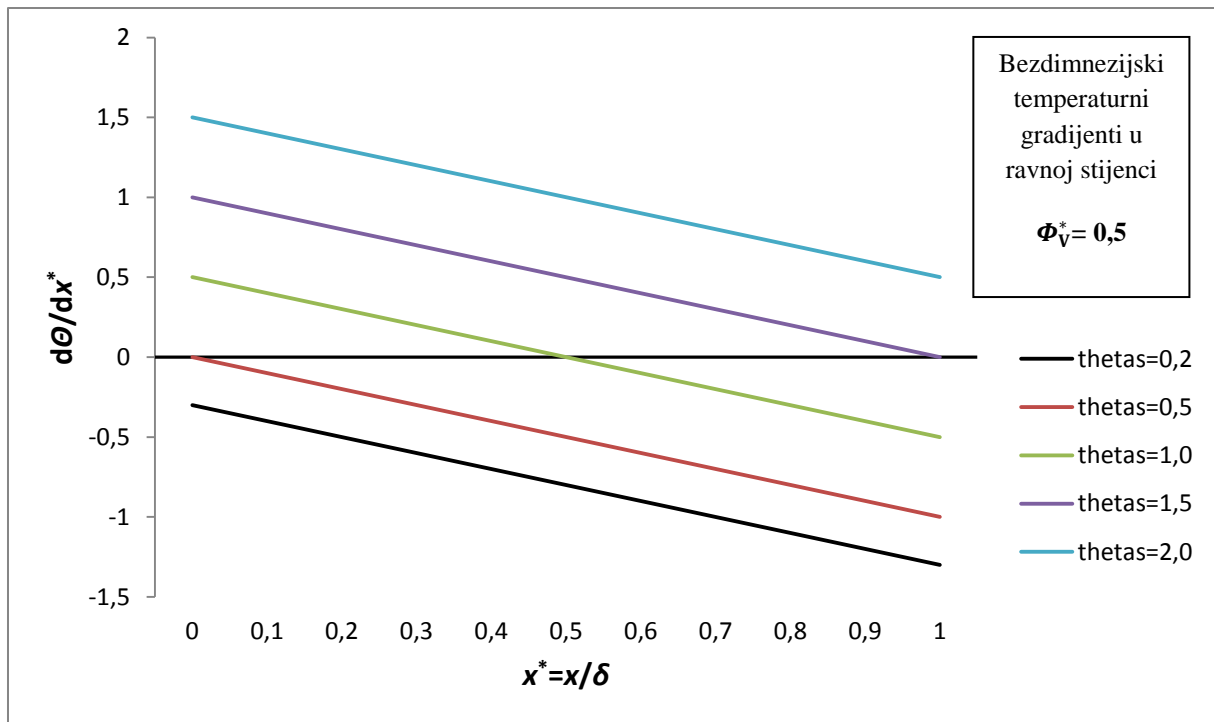


Kao drugi primjer uzet je slučaj da je  $\Phi_V^* = 0,5$ , a variran je iznos bezdimenzijskog omjera rubnih (graničnih) temperatura  $\theta_s$  unutar intervala  $0,2 \leq \theta_s \leq 2,0$ .

Dijagram na slici 10 predstavlja bezdimenzijsko temperaturno polje, dok dijagram na slici 11 prikazuje pripadajuće bezdimenzijske temperaturne gradijente.



Slika 10. Temperaturno polje u ravnoj stijenci u ovisnosti o prostornoj koordinati  $x^*$  i bezdimenzijskom omjeru rubnih (graničnih) temperatura  $\theta_s$  uz  $\Phi_V^* = 0,5$

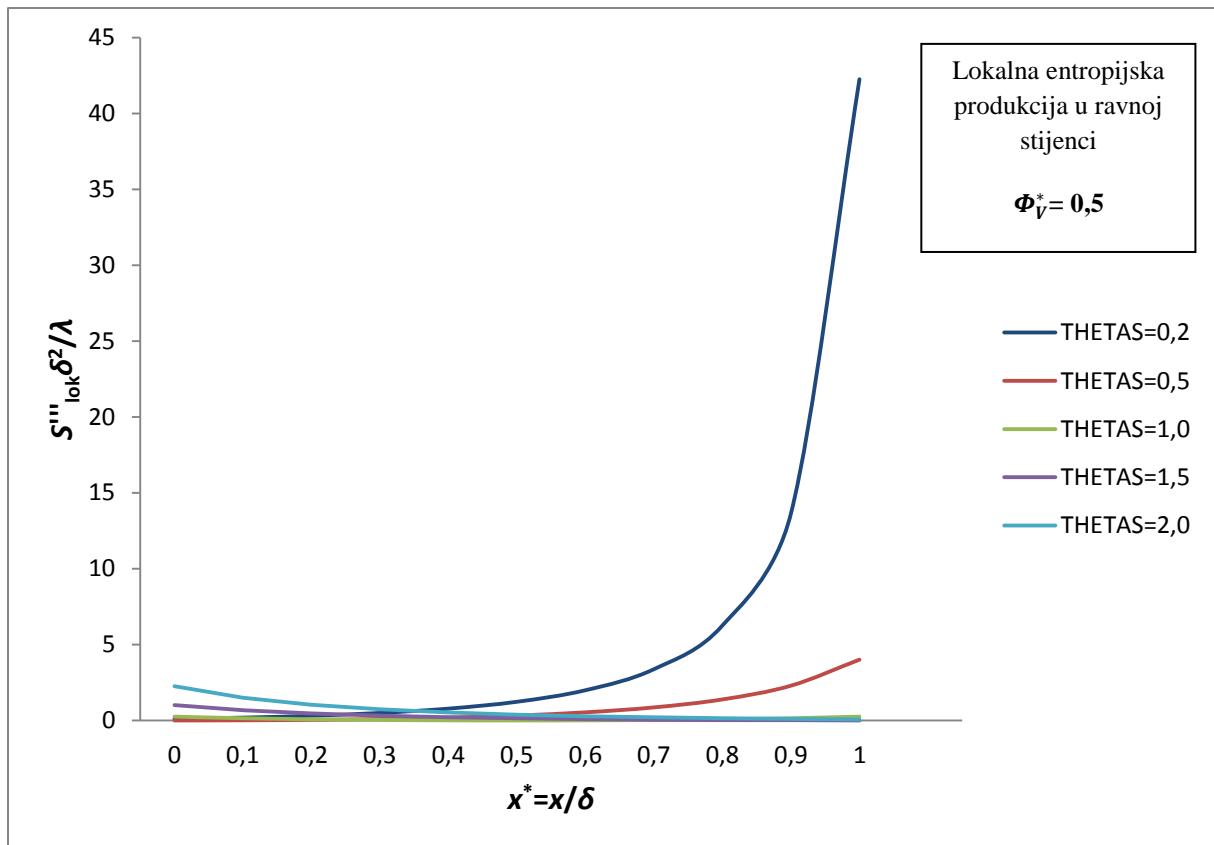


Slika 11. Prikaz bezdimezijskih temperaturnih gradijenata u ovisnosti o prostornoj koordinati  $x^*$  i bezdimezijskom omjeru rubnih (graničnih) temperatura  $\theta_s$  uz  $\Phi_v^* = 0,5$

Temperaturno polje za dane uvjete je kvadratna funkcija te je grafički prikaz takve funkcije kvadratna parabola kao što se vidi na slici 10. Za  $\theta_s = 0,2$  i  $\theta_s = 0,5$  temperatura monotonno pada jer je u tom slučaju toplinski tok usmjeren s lijevog ruba stijenske k desnom, tj. temperatura na desnom rubu ravne stijenske  $T_{s2}$  manja je od temperature na lijevom rubu  $T_{s1}$ . Za  $\theta_s > 1$ , temperatura monotono raste jer je u ovom slučaju  $T_{s2}$  veća od  $T_{s1}$ , dakle toplinski tok je usmjeren od desnog k lijevom rubu ravne stijenske.

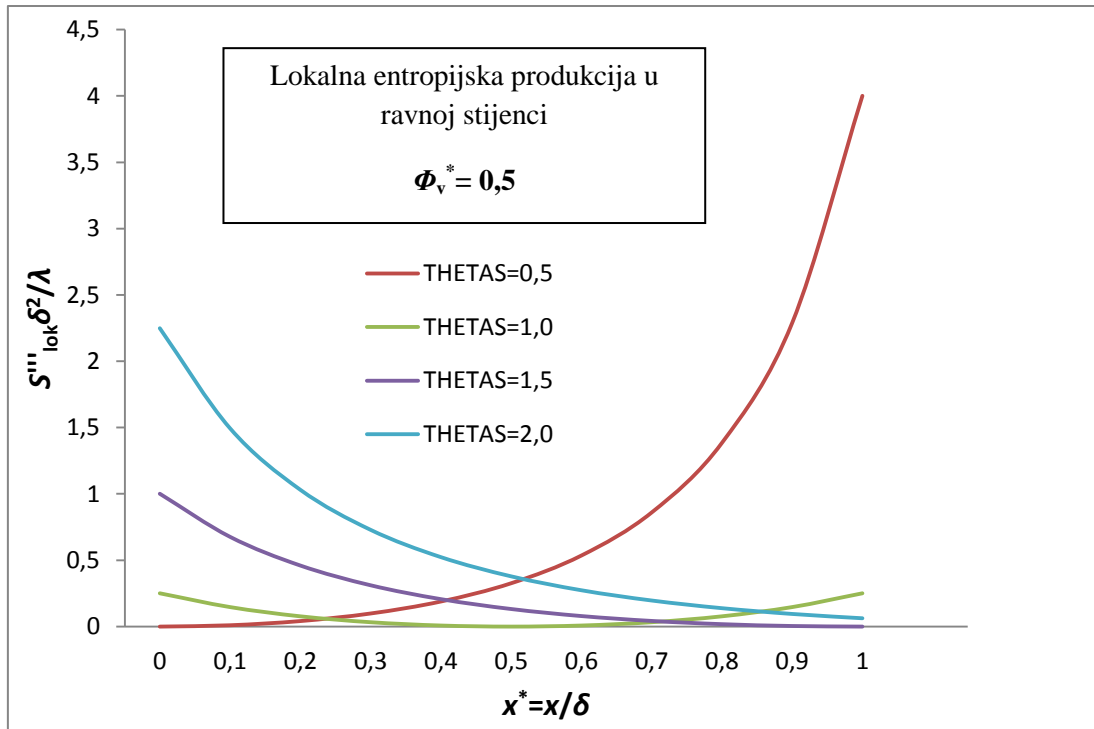
Dijagram na slici 11 prikazuje temperaturne gradijente koji su linearne funkcije te primjećujemo njihov kontinuiran pad. Nulte vrijednosti, a samim time i temperaturni lokalni ekstremi (maksimumi) su na  $x_{stac}^*$ , a u danom slučaju samo za  $\theta_s = 0,5$  i  $\theta_s = 1,0$  nalaze se unutar stijenske. Za  $\theta_s = 0,5$  temperaturni maksimum nalazi se na  $x_{stac}^* = 0,0$  i iznosi 1, dok se za  $\theta_s = 1,0$  nalazi na  $x_{stac}^* = 0,5$  i iznosi 1,125.

Dijagram na slici 12 prikazuje lokalnu entropijsku produkciju, za gore navedeni slučaj, u ovisnosti o  $\theta_s$  i uz  $\Phi_v^* = 0,5$ .

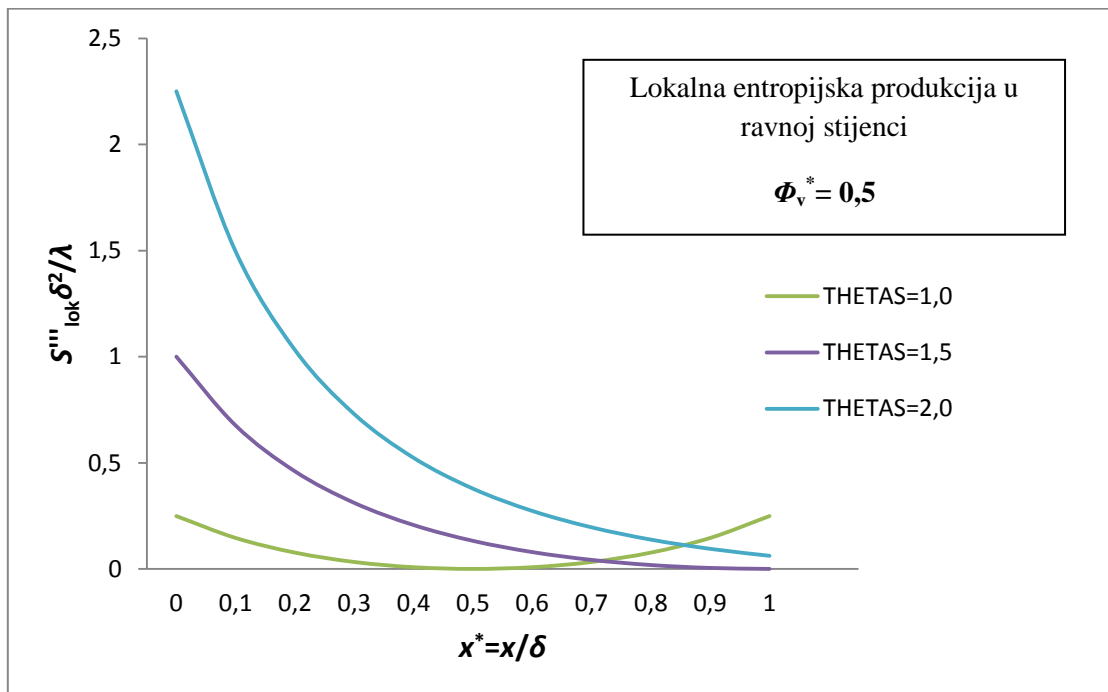


Slika 12. Bezdimenzijska lokalna entropijska produkcija generirana u ravnoj stijenci u ovisnosti o prostornoj koordinati i bezdimenzijskom omjeru rubnih (graničnih) temperatura  $\theta_s$  uz  $\Phi_v^* = 0,5$

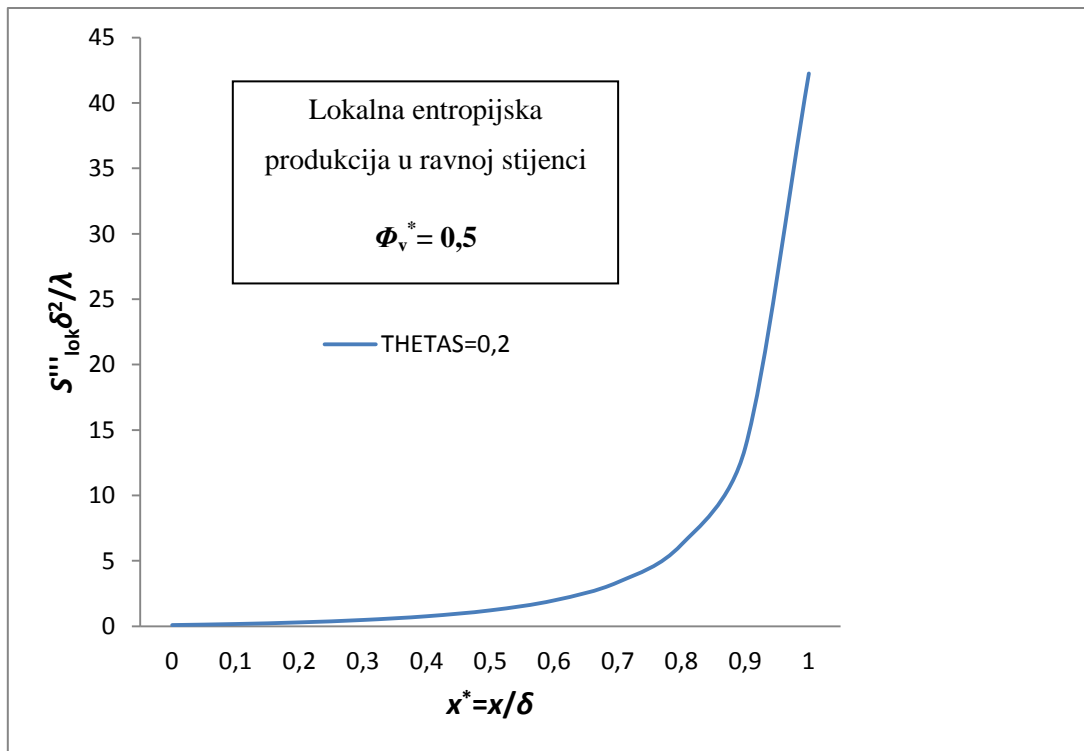
Zbog jasnije interpretacije dijagrama, na slikama 13, 14 i 15 dani su prikazi lokalne entropijske produkcije za pojedine naznačene vrijednosti bezdimenzijskog omjera  $\theta_s$  uz  $\Phi_v^* = 0,5$ .



Slika 13. Bezdimenzijska lokalna entropijska produkcija generirana u ravnoj stijenci u ovisnosti o prostornoj koordinati i bezdimenzijskom omjeru rubnih (graničnih) temperatura  $\theta_s = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$  uz  $\Phi_v^* = 0,5$



Slika 14. Bezdimenzijska lokalna entropijska produkcija generirana u ravnoj stijenci u ovisnosti o prostornoj koordinati i bezdimenzijskom omjeru rubnih (graničnih) temperatura  $\theta_s = 1,0; 1,5; 2,0$  uz  $\Phi_v^* = 0,5$

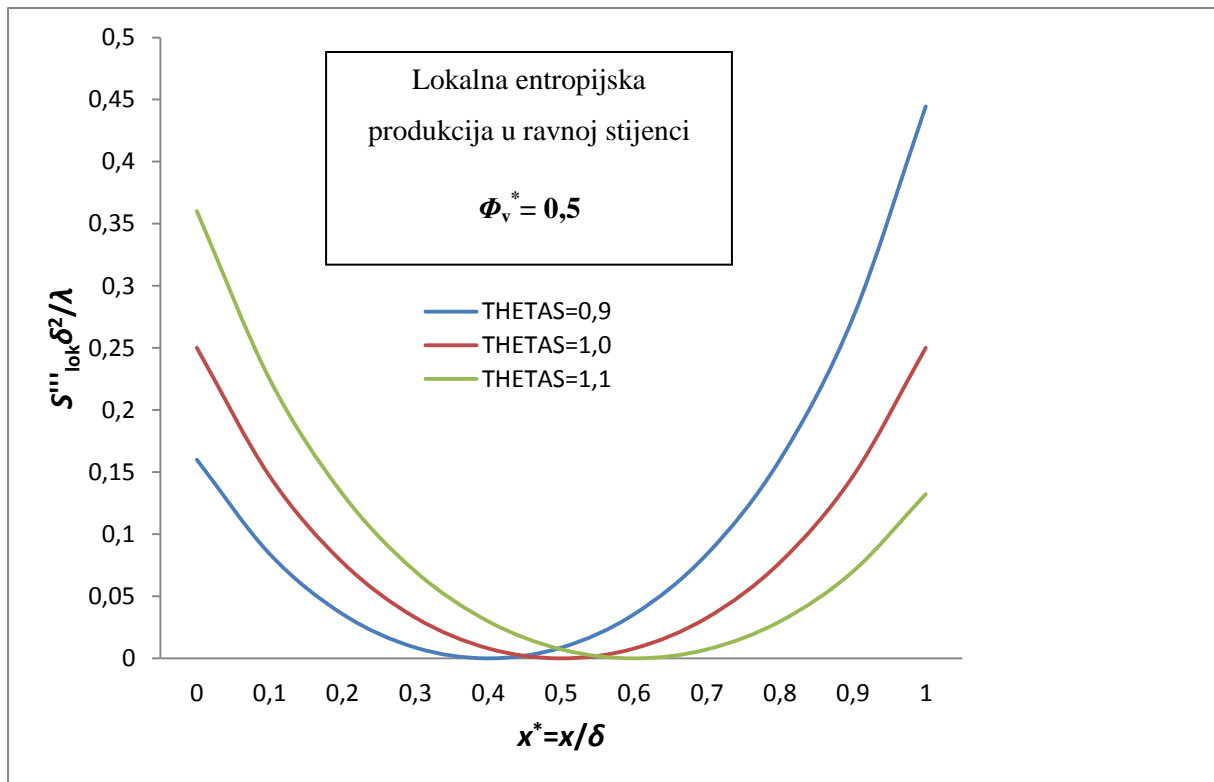


Slika 15. Bezdimenzijska lokalna entropijska produkcija generirana u ravnoj stijenci u ovisnosti o prostornoj koordinati i bezdimenzijskom omjeru rubnih (graničnih) temperatura  $\theta_s = 0,2$  uz  $\Phi_v^* = 0,5$

Dijagram na slici 15 pokazuje da za najveću razliku rubnih temperatura, tj. u našem slučaju za  $\theta_s = 0,2$ , lokalna entropijska produkcija naglo raste s povećanjem prostorne koordinate  $x^*$ . To i jest u skladu s temperaturnim tijekom na slici 10 te temperaturnim gradijentom na slici 11. Iz dijagrama na slici 11 vidi se da temperaturni gradijenti kontinuirano opadaju. Kako se u nazivniku u jednadžbi (11) nalazi kvadratni član temperature, tada taj član ima veći utjecaj na iznos lokalne entropijske produkcije pa smanjenjem temperature dolazi do naglog porasta bezdimenzijske lokalne entropijske produkcije. Analogni osvrt vrijedi i za slučaj kada je  $\theta_s = 0,5$ .

Na slici 14 dan je slučaj  $\theta_s > 1$  iz kojeg se vidi da lokalna entropijska produkcija naglo pada. To je također u skladu s temperaturnim tijekom i temperaturnim gradijentima. Za taj slučaj temperaturni gradijenti se smanjuju, a temperatura raste i to rezultira smanjenjem lokalne entropijske produkcije. Također se vidi da se za veće temperaturne razlike između lijevog i desnog ruba ravne stijenske postiže veći iznos lokalne entropijske produkcije.





Slika 16. Bezdimenzijska lokalna entropijska produkcija generirana u ravnoj stijenci u ovisnosti o prostornoj koordinati i bezdimenzijskom omjeru rubnih (graničnih) temperatura  $\theta_s = 0,9; 1,0; 1,1$  uz  $\Phi_v^* = 0,5$

Zanimljivo je analizirati dijagram na slici 16 u kojem su vrijednosti za  $\theta_s$  uzete 0,9; 1,0 odnosno 1,1. Vidi se da za  $\theta_s = 1,0$  lokalna entropijska produkcija ima minimum (lokalni) ekstrem na  $x_{stac}^* = 0,5$ , dakle na sredini stijenke. Za  $\theta_s = 0,9$  stacionarna se točka pomiče u lijevo i ima vrijednost  $x_{stac}^* = 0,4$ , dok se za  $\theta_s = 1,1$  stacionarna točka pomiče u desno i ima vrijednost  $x_{stac}^* = 0,6$ .

### 3.2. Dijagramski prikaz i pojašnjenje minimizacije ukupne entropijske produkcije

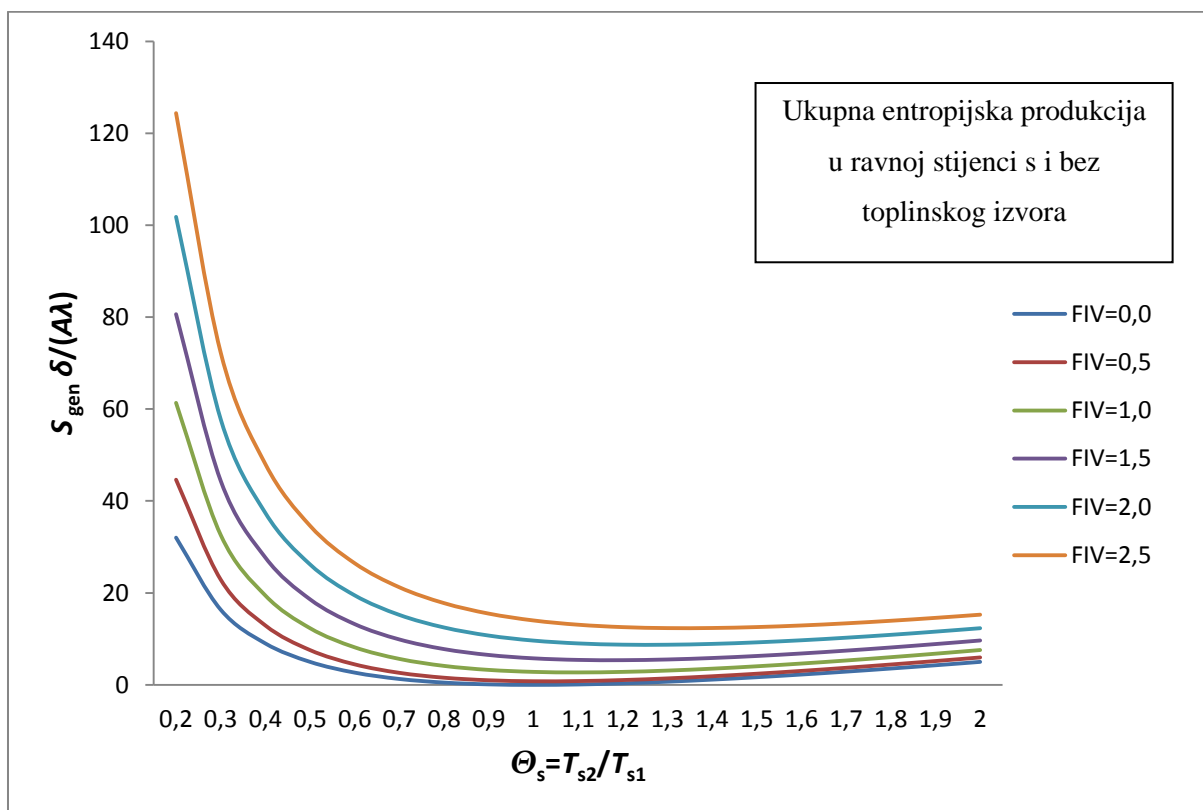
Ukupna entropijska produkcija dobiva se numeričkom integracijom jednadžbe (16). Za aproksimativno računanje integrala korišteno je klasično trapezno pravilo [13]. Algoritam za rješavanje tog integrala napisan je u programskom jeziku Fortran, a programski kod dan je u *Prilogu 1*.

Fortran kao standardni programski jezik za numeričko rješavanje problema provođenja topline navodi [14].

Jasno je da integracijom jednadžbe (16) iščezava varijabla  $x^*$  i ukupna entropijska produkcija je funkcija varijabli  $\Phi_v^*$  i  $\theta_s$ . Ako se želi istražiti uvjete minimuma ukupne entropijske

produkcije, to se svakako mora činiti numeričkim načinom, budući da nije moguće analitički riješiti integral u jednadžbi (16). Stoga se u načelu jedna od varijabli drži konstantnom, a drugu se varira te se na osnovu tako dobivenih rezultata izračuna ustanovi za koje vrijednosti varijabli  $\Phi_V^*$  i  $\theta_s$  ukupna entropijska produkcija postiže minimum.

Kako je prikazano na slici 17, ukupna entropijska produkcija prikazana je u ovisnosti o bezdimenzijskom omjeru rubnih temperatura  $\theta_s$ , koji se kreće u intervalu od 0,2 do 2,0 te o vrijednostima bezdimenzijskog toplinskog izvora  $\Phi_V^* = 0,0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5$ . Naravno, za svaku se situaciju u svrhu iznalaženja ukupne entropijske produkcije treba provesti, shodno jednadžbi (16), i odgovarajući izračun lokalne entropijske produkcije.

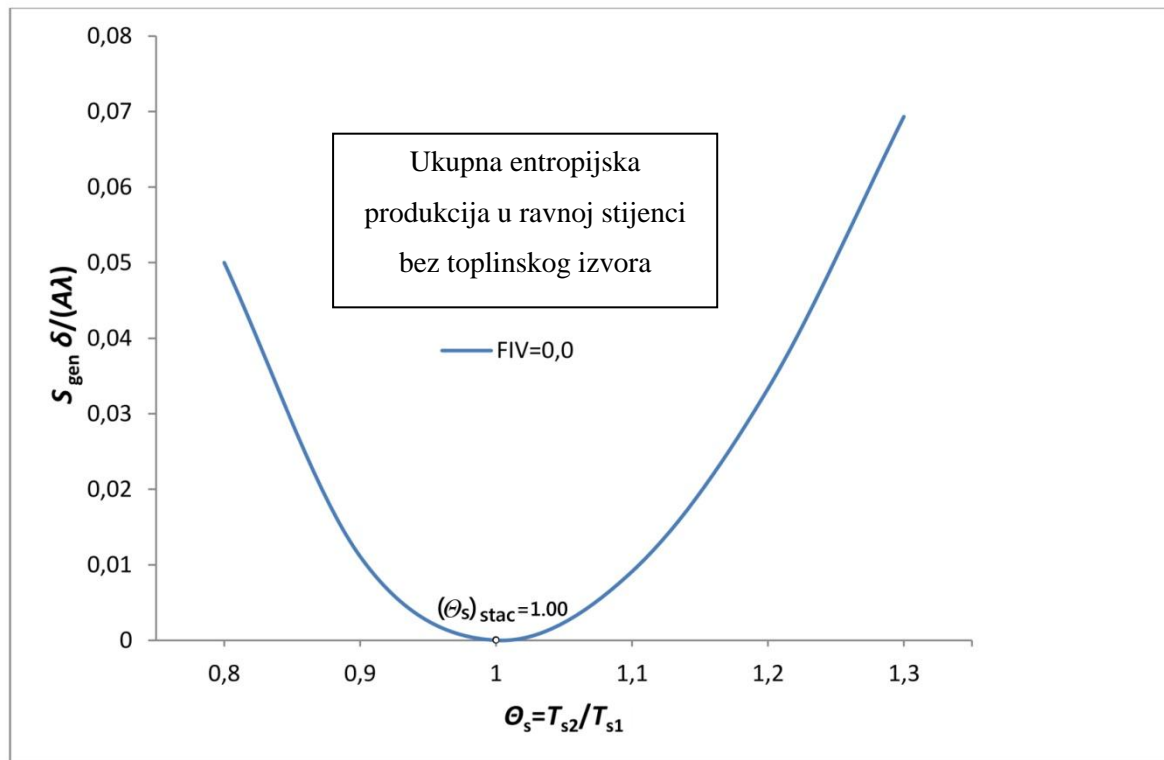


Slika 17. Bezdimenzijska ukupna entropijska produkcija u ravnoj stijenci u ovisnosti o  $\theta_s$  i  $\Phi_V^* = 0,0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5$

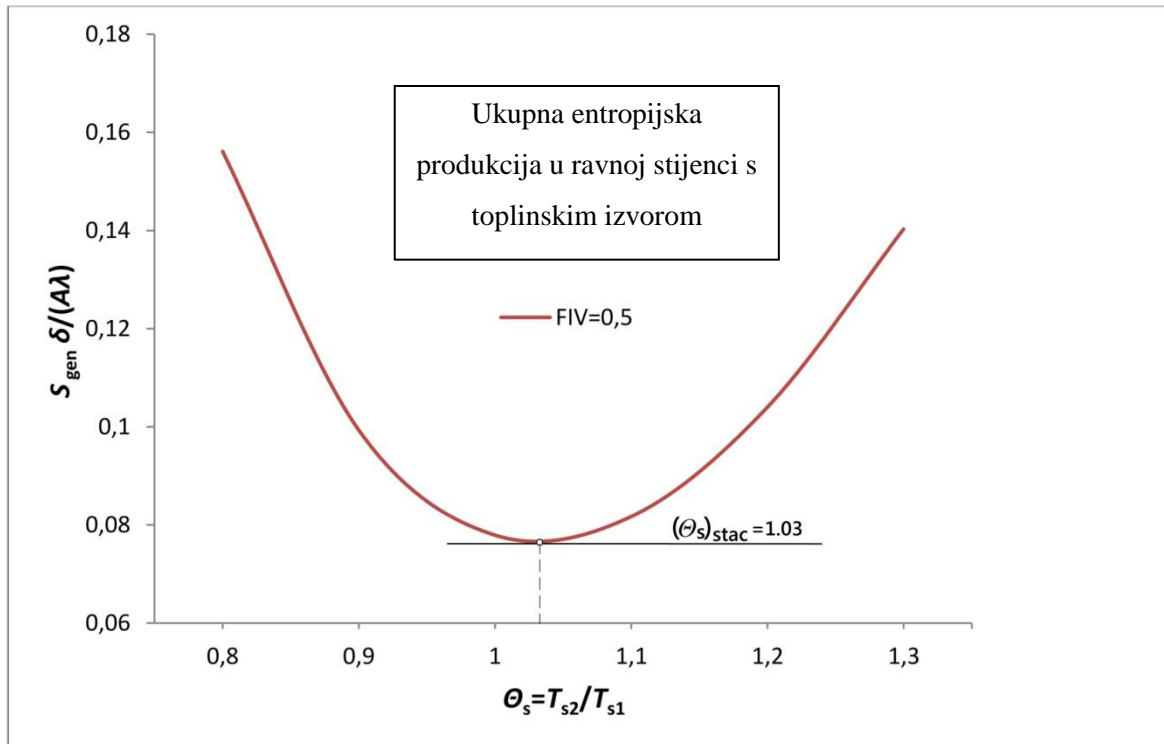
Iz dijagrama na slici 17 vidljivo je da za svaku parametarsku krivulju  $\Phi_V^* = \text{konst.}$  postoji temperaturni omjer  $\theta_s$ , za koji se postiže minimum entropijske produkcije i da se ta vrijednost povećava i povećanjem vrijednosti  $\Phi_V^*$ . Nadalje je za primijetiti da dolazi do naglog pada

entropijske produkcije za svaki  $\Phi_V^*$ , pri povećanju  $\theta_s$  od 0,2 do  $(\theta_s)_{stac}$ , a zatim s porastom  $\theta_s$  bitno je slabije izraženo povećanje ukupne producirane entropije.

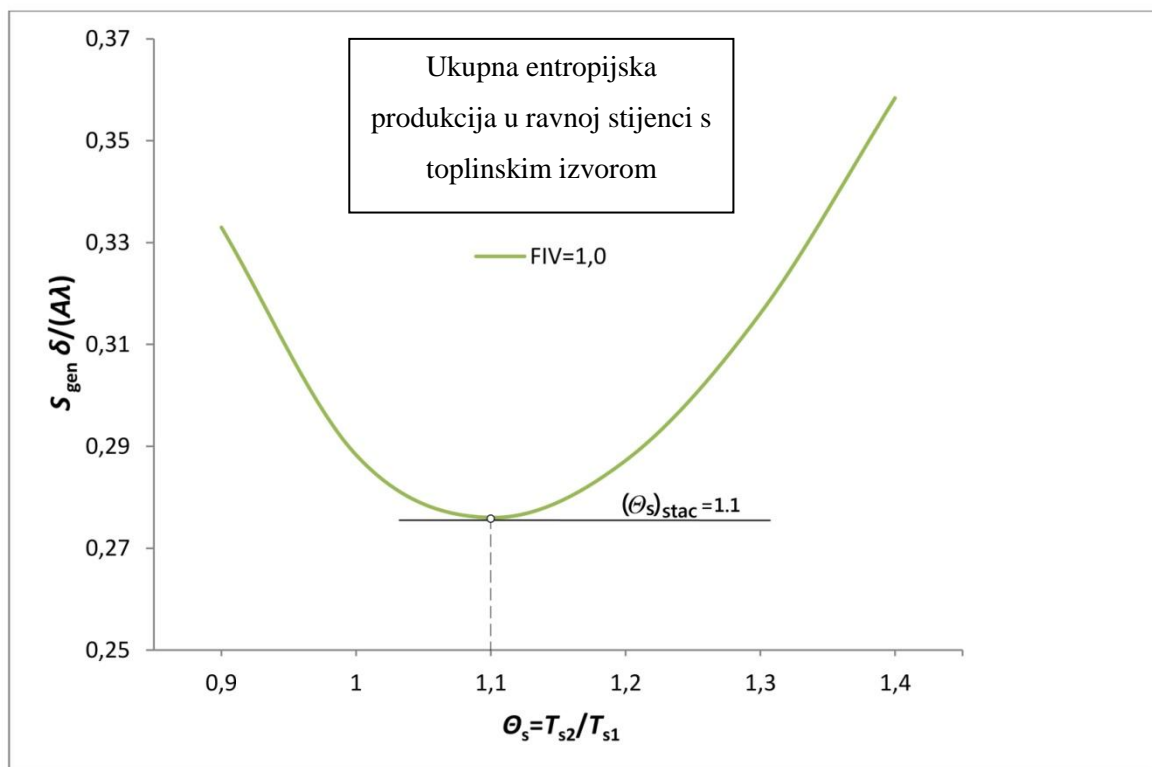
Zbog jasnijeg dijagramskog prikaza postizanja minimuma entropijske produkcije, gornji je dijagram podijeljen na sljedeće prikaze.



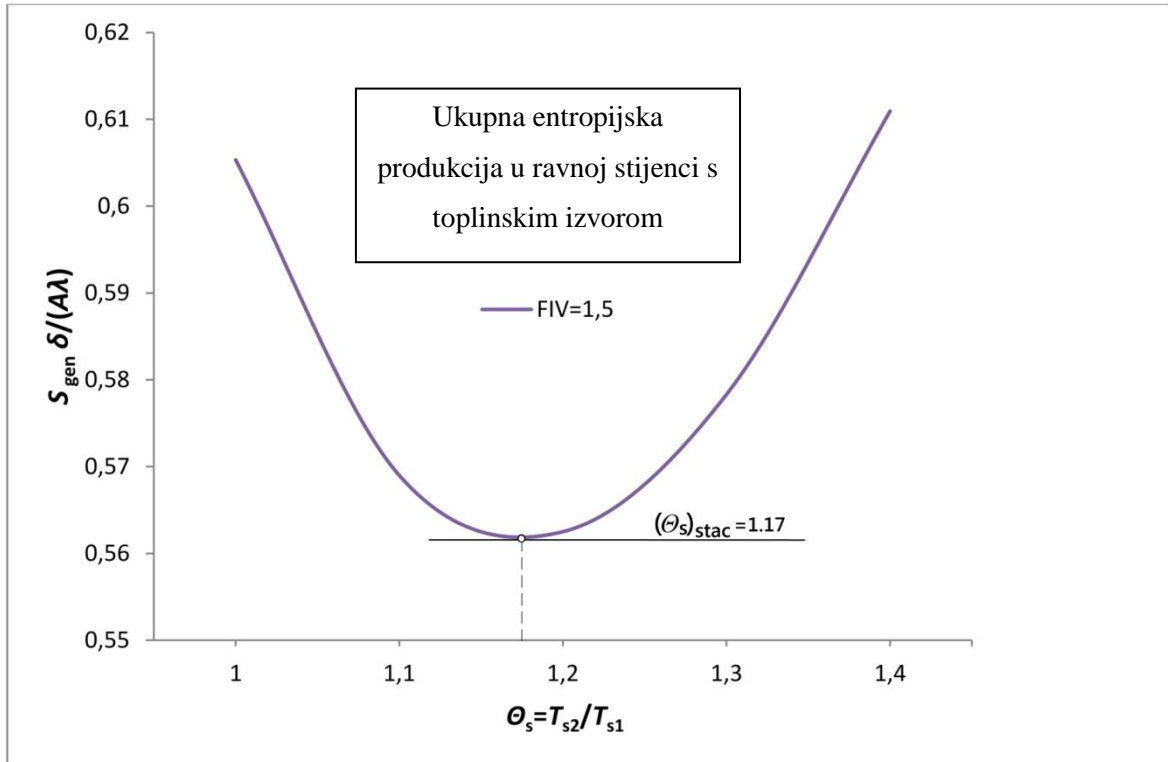
Slika 18. Bezdimenzijska ukupna entropijska produkcija u ravnoj stijenci u ovisnosti o  $\theta_s$  i  $\Phi_V^* = 0,0$



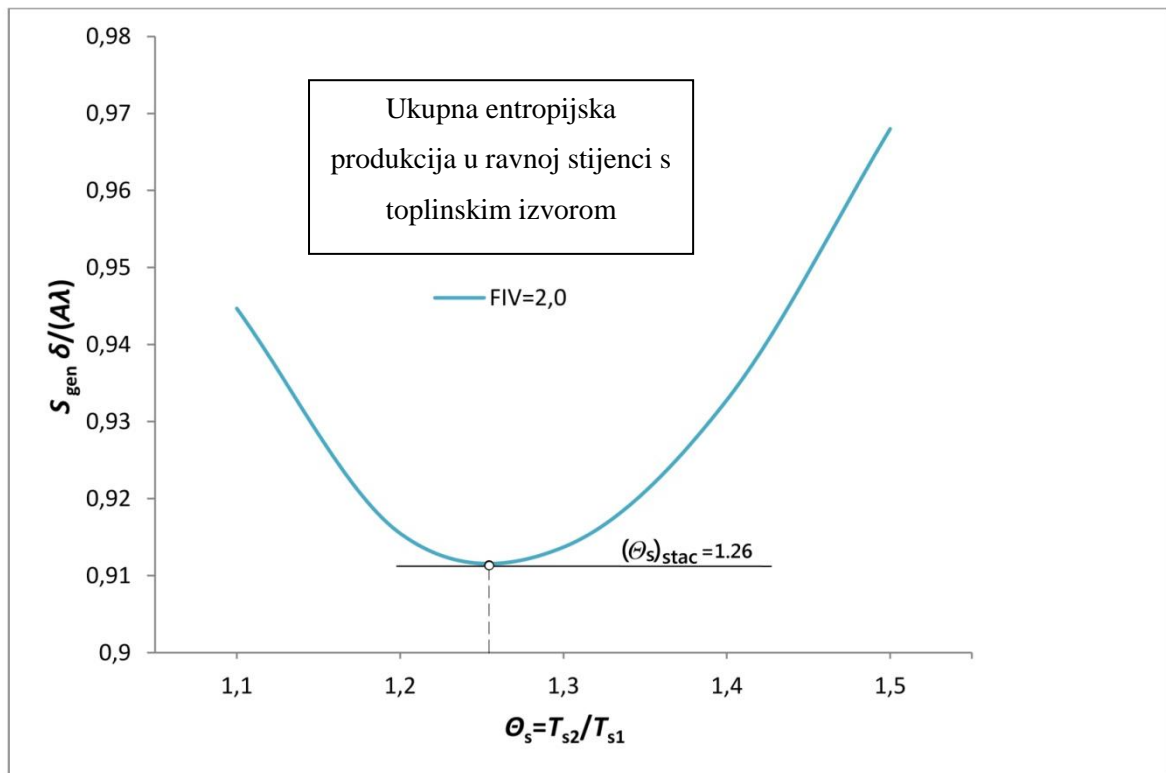
Slika 19. Bezdimenzijska ukupna entropijska produkcija u ravnoj stijenci u ovisnosti o  $\theta_s$  i  $\Phi_V^* = 0,5$



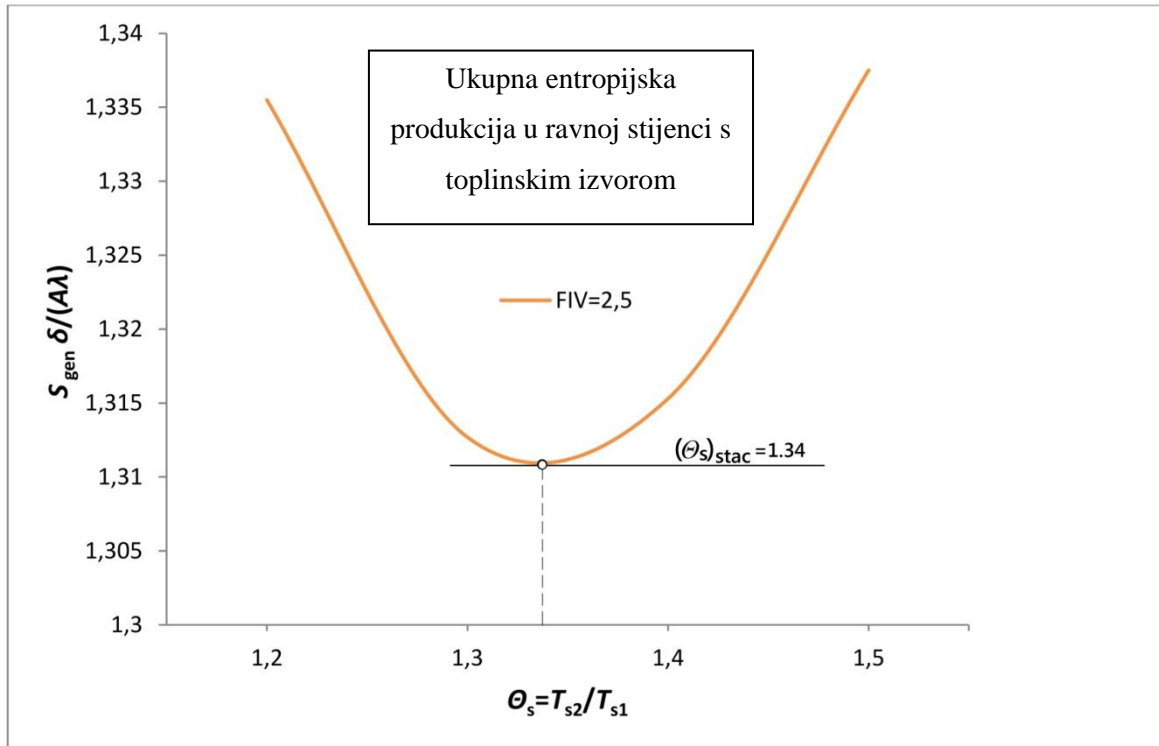
Slika 20. Bezdimenzijska ukupna entropijska produkcija u ravnoj stijenci u ovisnosti o  $\theta_s$  i  $\Phi_V^* = 1,0$



Slika 21. Bezdimenzijska ukupna entropijska produkcija u ravnoj stijenci u ovisnosti o  $\theta_s$  i  $\Phi_V^* = 1,5$



Slika 22. Bezdimenzijska ukupna entropijska produkcija u ravnoj stijenci u ovisnosti o  $\theta_s$  i  $\Phi_V^* = 2,0$



Slika 23. Bezdimenzijska ukupna entropijska produkcija u ravnoj stijenci u ovisnosti o  $\theta_s$  i  $\Phi_V^* = 2,5$

Dijagrami na slici 18, 19, 20, 21, 22 i 23 prikazuju ukupnu generiranu entropijsku produkciju za  $\Phi_V^* = 0,0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$  i  $2,5$ . Za te veličine vrijednosti minimalne entropijske produkcije iznose  $0,0; 0,0767; 0,276; 0,5619; 0,9116$  i  $1,3111$  uz pripadajuće vrijednosti  $(\theta_s)_{stac} = 1,0; 1,03; 1,1; 1,17; 1,26$  i  $1,34$ . To znači pomak minimuma k većim vrijednostima  $(\theta_s)_{stac}$ .

#### **4. Zaključak**

Provedena analiza pokazala je da postoje uvjeti pri kojima postoji minimalna entropijska produkcija, za stacionarni slučaj provođenja topline u ravnoj stijenci  $s$  i bez postojanja unutrašnjeg volumenskog toplinskog izvora. Pri tome se misli na minimum kao lokalni ekstrem izvedene jednadžbe (16) koja povezuje relevantne bezdimenzijske varijable: toplinski tok  $\Phi_V^*$  (koji može biti Jouleova ili apsorbirana toplina u stijenci), bezdimenzijski omjer površinskih temperatura stijenske  $\theta_s$  i same njezine geometrijske izmjere  $x^*$ . U radu je pokazano, dijagrami 17 – 23, da je kombinacijom nametnutog iznosa toplinskog izvora, nametnutih izotermnih rubnih uvjeta i nametnutih toplinskih i geometrijskih svojstava ravne stijenske, moguće pronaći vrijednosti dotičnih varijabli za koje se ostvaruje minimum entropijske produkcije. Izvedeni matematički model dan je u bezdimenzijskom obliku, čime sam model dobiva na svojoj općenitosti. Ograničenje modela leži u činjenici da su za rubne uvjete uzeti izotermni rubni uvjeti, a što znači da model traži poznavanje površinskih (rubnih) temperatura. Proširenje modela moguće je i na općenitiji slučaj, slučaj uzimanja rubnih uvjeta 3. vrste, a koji su opisani Newtonovim stavkom [15]. To zahtijeva nešto duži postupak i nešto više vremena, i to će svakako biti prioritetni cilj mojeg daljnjeg istraživanja tog područja. Jasno je da uvođenjem u model rubnih uvjeta 3. vrste, isti će biti općenitiji i njime će biti moguće prekontrolirati ove dobivene rezultate, kao specijalne slučajeve tog šireg modela. To mi svakako predstavlja daljnji izazov!

## 5. Prilog 1

C PROGRAM RJEŠAVA BEZDIMENZIJSKO TEMPERATURNO POLJE  
C BEZDIMENZIJSKU ENTROPIJSKU LOKALNU ENTROPIJSKU PRODUKCIJU  
C I BEZDIMENZIJSKU UKUPNU ENTROPIJSKU PRODUKCIJU U RAVNOJ  
STIJENCI

DIMENSION THETANUM(2000)

DIMENSION DTXNUM(2000)

DIMENSION DTDXNUM(2000)

DIMENSION SGENLOKNUM(2000)

DIMENSION SGENUK(2000)

DIMENSION XNUM(2000)

OPEN(UNIT=6, FILE='ENTRPRAVNA TIJENKA.DAT',STATUS='UNKNOWN')

C TEMPERATURNO POLJE, LOKALNA ENTROPIJSKA PRODUKCIJA

DO 10 THETAS=0.2,2.01,0.1

C WRITE(6,2) THETAS

DO 10 FIV=0.0,2.501, 0.5

C WRITE(6,3) FIV

XSTAC=(FIV-1+THETAS)/(2\*FIV)

C WRITE(6,4)XSTAC

DO 10 X=0., 1.0, 0.1



THETA=FIV\*(X-X\*\*2)+(THETAS-1)\*X+1

SGENLOK=FIV\*(1-2\*X)+THETAS-1

SGENLOK=(SGENLOK/THETA)\*\*2

WRITE(6,1)X,THETA,SGENLOK

10 CONTINUE

C NUMERIČKA INTEGRACIJA ZA UKUPNI PRIRAST ENTROPIJE

DO 13 I=1,11

SGENUK(I)=0.0

13 CONTINUE

DO 15 FIV=0.0,2.51,0.5

WRITE(6,3) FIV

DO 14 THETAS=0.2,2.001, 0.01

C WRITE(6,2) THETAS

XSTAC=(FIV-1+THETAS)/(2\*FIV)

C WRITE(6,3) FIV

DO 12 I=1,11

XNUM(I)=(I-1)\*0.1

THETANUM(I)=FIV\*(XNUM(I)-XNUM(I)\*\*2)+(THETAS-1)\*XNUM(I)+1

```

DTDXNUM(I)=FIV*(1-2*XNUM(I))+THETAS-1

SGENLOKNUM(I)=(DTDXNUM(I)/THETANUM(I))**2

C  WRITE(6,1)XNUM(I),THETANUM(I),SGENLOKNUM(I)

SGENUK(1)=0.0

IF(I.GT.1) THEN

SGENUK(I)=SGENUK(I-1)+0.5*(SGENLOKNUM(I)+SGENLOKNUM(I-1))*0.1

C  PRINT*,I,SGENUK(I)

ENDIF

12  CONTINUE

WRITE(6,1)THETAS,SGENUK(11)

14  CONTINUE

15  CONTINUE

1  FORMAT(2X,F5.2,2X,F8.4,2X,F8.4)

2  FORMAT(2X,'THETAS=',1X,F6.3,/)

3  FORMAT(2X,'FIV=',1X,F6.3,/)

4  FORMAT(2X,'XSTAC=',1X,F6.3,/)

STOP

END

```

## **6. Zahvala**

Srdačno zahvaljujem asistentu Nenadu Ferdeljiju s Katedre za tehničku termodinamiku na brojnim korisnim savjetima.

Profesorici Boženi Tokić s Katedre za tehničke strane jezike također dugujem zahvalnost jer mi je bila od velike pomoći oko prijevoda sažetka rada na engleski jezik.

Konačno, posebnu zahvalu dugujem svojem mentoru, profesoru Antunu Galoviću na mnogo preporučene literature te još više dobrih savjeta. Njegovo znanje, stručnost i velikodušnost pratili su me i bili poticaj tijekom izrade ovog rada.

## **7. *Popis literature***

- [1] Gouy, M. 1889. Sur l'energie utilisable. J. Phys. 8: 501
- [2] Stodola, A. 1910. Steam and Gas Turbines, McGraw-Hill, New York
- [3] Wark, K. 1983. Thermodynamics, Fourth edition, McGraw- Hill, New York
- [4] Bošnjaković, F. 1938. Kampf den Nichtumkehrbarkeiten, Archiv Waermewirtschaft und Dampfkessel, VDI – Verlag, 19
- [5] Bejan, A. 1995. Entropy Generation Minimization, CRC Press, New York
- [6] Fratscher, W., Brodjanskij, B. V., Michalek, K. 1986. Exergie Theorie und Anwendung, VEB Deutscher Verlag, Leipzig
- [7] Bejan, A. 1988. Advanced engineering thermodynamics, John Wiley & Sons, New York
- [8] Bošnjaković, F. 1978. Nauka o toplini, II dio, 5. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb
- [9] Galović, A. 2010. Termodinamika II, V. promijenjeno izdanje, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb
- [10] Wang, L., Zhou, X., Wei, X. 2008. Heat conduction, Mathematical models and analytical Solutions, Springer Verlag, Berlin
- [11] Bejan, A. 1982. Entropy Generation through Heat and Fluid Flow, John Wiley & Sons, New York
- [12] Cengel, Y. A., Boles, M. A. 2007. Thermodynamics, An engineering approach, sixth edition (SI units), McGraw-Hill, New York
- [13] Kreyszig E. 1993. Advanced engineering mathematics, Seventh edition, John Wiley & Sons, New York
- [14] Minkowycz, W. J., Sparrow, E.M., Murthy, J.Y. 2006. Handbook of numerical heat transfer, Second edition, John Wiley & Sons, New York
- [15] Baehr, H.D., Stephan, K. 2008. Wärme- und Stoffübertragung, 6. Auflage, Springer Verlag, Berlin

## ***Sažetak rada***

*Martina Rauch*

### ***Minimizacija entropijske produkcije pri stacionarnom provođenju topline kroz ravnu stijenku s toplinskim izvorom i izotermnim rubnim uvjetima***

U radu je razrađen problem minimizacije entropijske produkcije za model stacionarnog provođenja topline u ravnoj stijenci s toplinskim izvorom i nametnutim izotermnim rubnim uvjetima. Problem je riješen uvođenjem relevantnih bezdimenzijskih varijabli: bezdimenzijskog toplinskog izvora  $\Phi_v^*$ , bezdimenzijske debljine stijenke  $x^*$  te bezdimenzijskog omjera rubnih (graničnih) temperatura  $\theta_s$ . Pomoću tih veličina izvedeni su analitički izrazi za temperaturno polje, temperaturne gradijente i lokalnu entropijsku produkciju. Dan je izraz i za ukupnu entropijsku produkciju, koji je rješavan numerički. Pokazano je da se za kombinacije veličina  $\Phi_v^*$  i  $\theta_s$  ostvaruju minimumi ukupne entropijske produkcije.

Rezultati provedene analize prikazani su i obrazloženi u odgovarajućim dijagramima s bezdimenzijskim koordinatama.

*Ključne riječi: minimizacija entropijske produkcije, ravna stijenska, toplinski izvor, izotermni rubni uvjeti*

## ***Summary***

*Martina Rauch*

### ***Entropy generation minimization during steady - state heat conduction through a plane wall with a heat source and isothermal boundary conditions***

The paper presents the problem of entropy generation minimization for the model of steady-state heat conduction through a plane wall with a heat source and pre-determined isothermal boundary conditions. The problem is solved by introducing relevant non-dimensional variables: non-dimensional heat source  $\Phi_v^*$ , non-dimensional wall thickness  $x^*$  and non-dimensional ratio of boundary thermodynamic temperatures  $\theta_s$ . Analytical expressions for the temperature field, the temperature gradient and local entropy generation are derived by means of the aforementioned variables. An expression for total entropy generation, which is solved numerically, is also given. It is shown that the total entropy generation minimization is achieved for combinations of  $\Phi_v^*$  and  $\theta_s$ .

Analysis results are presented and explained in the appropriate diagrams with non-dimensional coordinates.

*Key words:* *entropy generation minimization, plane wall, heat source, isothermal boundary conditions*