

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Vedrana Baličević, Mirna Bokšić

Model samostabilizirajućeg vozila na jednom kotaču

Zagreb, svibanj 2011.

Ovaj rad izrađen je na Zavodu za elektroničke sustave i obradbu informacija Fakulteta elektrotehnike i računarstva pod vodstvom prof. dr. sc. Damira Seršića i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2010./2011.

Sadržaj

1. Uvod	1
2. Klasična mehanika	2
2.1. Koordinatni sustavi	2
2.1.1. Rotacija koordinatnog sustava u ravnini	3
2.1.2. Rotacija koordinatnog sustava u prostoru	4
2.2. Gibanje krutog tijela	5
2.2.1. Translacija krutog tijela	6
2.2.2. Rotacija krutog tijela.....	8
3. Lagrangeov formalizam	12
3.1. Veze, sile reakcije i generalizirane koordinate	12
3.1.1. Veze	13
3.1.2. Generalizirane koordinate.....	15
3.2. Zanimarivanje sila trenja.....	16
3.3. Virtualni pomak i virtualni rad	16
3.4. Generalizirane sile.....	17
3.5. D'Alembertov princip.....	18
3.6. Lagrangeove jednadžbe	19
3.6.1. Kinetička energija	21
3.6.2. Potencijalna energija	22
3.6.3. Općenite Lagrangeove jednadžbe	22
3.6.4. Najopćenitiji oblik Lagrangeovih jednadžbi.....	23
3.6.5. Invarijantnost Lagrangeovih jednadžbi pri koordinatnim transformacijama	23
3.6.6. Uvođenje sila trenja i otpora sustava	24

4. Sustavi s gibanjima u dvije dimenzije.....	25
4.1. Matematičko njihalo	25
4.1.1. Jednadžbe gibanja matematičkog njihala	25
4.1.2. Simulacija gibanja matematičkog njihala	27
4.2. Obrnuto njihalo na kolicima	28
4.2.1. Jednadžbe gibanja obrnutog njihala na kolicima	28
4.2.2. Simulacija gibanja obrnutog njihala na kolicima	30
4.3. Monocikl u dvije dimenzije	34
4.3.1. Jednadžbe gibanja monocikla u 2D	34
4.3.2. Simulacija gibanja monocikla	36
5. Sustavi s gibanjima u tri dimenzije.....	40
5.1. Gibanje kotača u tri dimenzije	40
5.1.1. Jednadžbe gibanja kotača.....	40
5.1.2. Simulacija gibanja kotača	46
5.2. Gibanje gornje mase u tri dimenzije	49
5.3. Gibanje monocikla u tri dimenzije	51
5.3.1. Jednadžbe gibanja monocikla u 3D	51
5.3.2. Simulacija gibanja monocikla u 3D	53
5. Zaključak	56
6. Zahvala	58
7. Literatura.....	59
8. Sažetak	60
9. Summary	62
10. Prvitak	64

1. Uvod

Gibanje bilo kojeg tijela u prostoru predstavlja sustav koji je moguće fizikalno objasniti i, prema tome, matematički formulirati njegovu dinamiku. Ipak, složenost sustava je ono što određuje uvjete, ograničenja i utjecajne veličine koje djeluju na gibanje.

Primjer takvog vrlo složenog sustava, koji je okosnica istraživanja ovog rada, jest samobalansirajuće vozilo na jednom kotaču. Radi se o konkretnom vozilu, koje je u postupku razvoja i izrade na Zavodu za elektroničke sustave i obradbu informacija Fakulteta elektrotehnike i računarstva, a koje bi služilo za prijevoz osoba.

Zbog spomenute složenosti sustava i razumijevanja gibanja koje se može očekivati od takvog vozila, bilo je potrebno krenuti od jednostavnijih sustava, modelirati i simulirati njihovo ponašanje u različitim uvjetima te postepeno nadograđivati model do željenog monocikla. U radu će se promatrati gibanje matematičkog njihala, obrnutog njihala na kolicima, monocikla u ravnini te konačno gibanje kotača i monocikla u stvarnom trodimenzionalnom prostoru. Sva promatrana tijela smatraju se idealnim krutim tijelima.

Kako se većina promatranih sustava sastoji od više međusobno povezanih krutih tijela, gibanje pojedinog dijela ovisi o gibanju svih drugih dijelova sustava, te se uvodi pojam tzv. veza. U ovakvim situacijama gotovo je nemoguće eksplicitno izraziti na koje načine sve sile utječu na sustav, pa je iz tog razloga jako teško proučavati dinamiku sustava u klasičnoj, tzv. Newtonovoj formulaciji mehanike, koju intuitivno razumijemo. Dinamika sustava se stoga proučava isključivo uz pomoć Lagrangeove reformulacije mehanike.

Lagrangeova reformulacija mehanike prilagođena je rješavanju problema sustava koji se sastoje od međusobno povezanih krutih tijela, odnosno sustava s vezama. Nakon prolaska kroz teoriju Lagrangeove reformulacije mehanike, teorija je primjenjena na prije spomenute sustave. Izvedeni su svi matematički proračuni, napisani programski kodovi, računalne sheme za simulaciju i dobiveni su željeni rezultati. Uz različite početne uvjete simulacije moguće je pratiti utjecaj pojedinih kutova, sila i drugih parametara na gibanje.

Ovaj rad dokumentira cjelokupni postupak u izradi i simulaciji željenog modela samostabilizirajućeg vozila, od teoretskih postavki do konačnog modela i odgovarajućih programskih kodova koji omogućuju njegovu simulaciju.

2. Klasična mehanika

2.1. Koordinatni sustavi

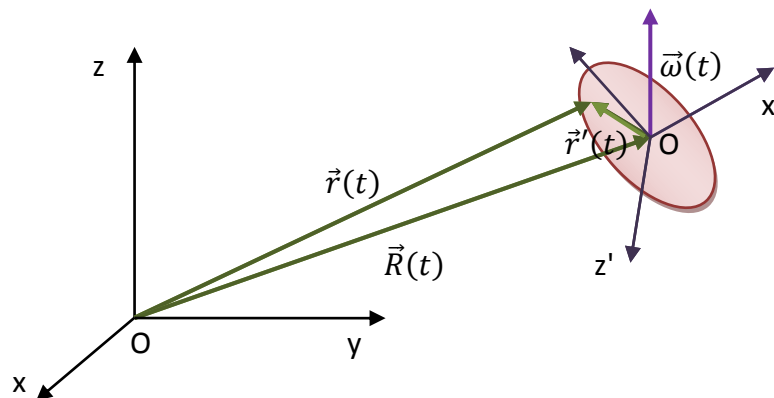
Za određivanje položaja bilo koje čestice u prostoru potrebno je specificirati koordinatni sustav. U ovome radu koristiti će se Kartezijev sustav, određen ishodištem O i trima međusobno okomitim koordinatnim osima X, Y i Z . Osi X i Y su dio horizontalne ravnine prostora, a os Z predstavlja vertikalnu os. Bazu Kartezijevog prostora čine tri jedinična vektora (2.1), koji zadovoljavaju uvjete ortogonalnosti i kompletnosti.

$$S: (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \quad (2.1)$$

Sustav S je referentni koordinatni sustav, no uz njega se može koristiti i koordinatni sustav tijela S' s vlastitim jediničnim vektorima (2.2). Sustav S' je čvrsto pričvršćen za promatrano kruto tijelo, što znači da se njegove osi x', y' i z' gibaju zajedno sa krutim tijelom

$$S': (\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}) \quad (2.2)$$

Sustav S' može se dobiti translacijom i/ili rotacijom pod određenim kutovima u odnosu na referentni sustav u prostoru. Ishodište O' tog sustava može se nalaziti u bilo kojoj točki toga tijela, ali u praksi je ono najčešće u centru mase tijela. Iz navedenog proizlazi da je položaj krutog tijela određen položajem koordinatnog sustava S' u odnosu na referentni sustav S , što objašnjava potrebu rada s dva koordinatna sustava [6].



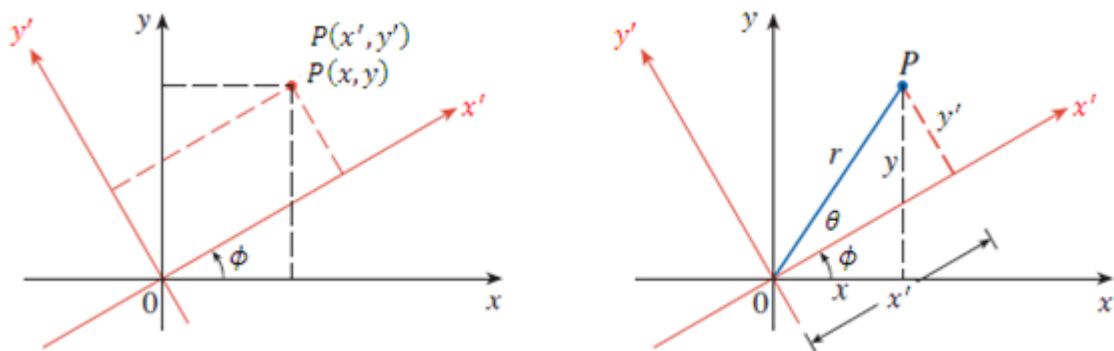
Slika 2.1. Veza referentnog koordinatnog sustava i sustava krutog tijela

Sustav S' se može gibati na sljedeće načine:

- **rotacija** → ako se jedna nepokretna točka sustava S' odabire za ishodište sustava S' i S , tada bilo koji pomak krutog tijela oko osi koja prolazi kroz zajedničko ishodište sustava predstavlja rotaciju sustava S' , a opisuje se trenutnom kutnom brzinom $\vec{\omega}(t)$.
- **translacija** → predstavlja gibanje ishodišta O' koordinatnog sustava tijela u odnosu na referentni sustav, a opisuje se translacijskim vektorom $\vec{R}(t)$.
- **rotacija i translacija** → proizvoljni pomak krutog tijela ekvivalentan je translaciji krutog tijela za translacijski vektor $\vec{R}(t)$ i rotaciji oko osi koja prolazi kroz ishodište. Vektor $\vec{R}(t)$ određen je s tri komponente, a rotacija uz pomoć tri generalizirane koordinate, iz čega proizlazi da je za ukupni opis gibanja krutog tijela potrebno 6 koordinata.

2.1.1. Rotacija koordinatnog sustava u ravnini

U ovom poglavlju ukratko ćemo objasniti rotaciju desno orijentiranog dvodimenzionalnog koordinatnog sustava za kut ϕ prema slici 2.2. Desna orijentacija znači da je kut pozitivan u smjeru obrnutom od kazaljke na satu [8].



Slika 2.2. Rotacija 2D koordinatnog sustava za kut ϕ

Za bilo koju rotaciju vrijedi da se nova os x'_i , gdje i predstavlja redni broj koordinatne osi, računa prema (2.3), gdje je a_{ij} kosinus kuta između nove i stare koordinatne osi:

$$x'_i = a_{ij}x_{ij} \quad (2.3)$$

Izračunavanjem svih koeficijenata a_{ij} , oni se mogu zapisati u obliku matrice R . U dvodimensionalnom koordinatnom sustavu svaka rotacijska matrica ima oblik:

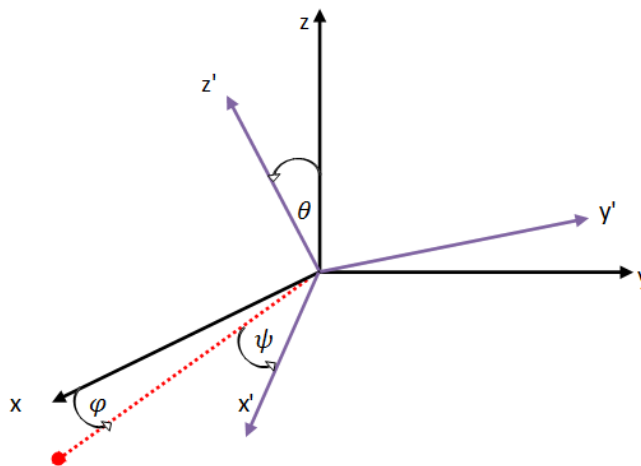
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

2.1.2. Rotacija koordinatnog sustava u prostoru

Kako se u ovom radu promatra monocikl u prostoru, rotacija u dvije dimenzije nije dovoljna, već su nam potrebne rotacije u tri dimenzije. Koordinatni sustav tijela dobije se rotacijom osnovnog koordinatnog sustava za točno određene kutove, a sve se veličine moraju izraziti u odnosu na referentni sustav S . U skladu s tim potrebno je komponente ω_i zamijeniti generaliziranim koordinatama koje jednoznačno određuju rotaciju krutog tijela [6].

Najčešće se kao generalizirane koordinate koriste Eulerovi kutovi $\{\varphi, \theta, \psi\}$. Eulerovi kutovi se definiraju kao kutovi triju sukcesivnih rotacija koje sustav S dovode do poklapanja sa sustavom S' :

- **Prva rotacija** → rotacija oko osi z za kut $\varphi \in [0, 2\pi]$
- **Druga rotacija** → rotacija oko nove osi x za kut $\theta \in [0, \pi]$
- **Treća rotacija** → rotacija oko nove osi z za kut $\psi \in [0, 2\pi]$



Slika 2.3. Rotacija koordinatnog sustava

Redoslijed rotacije je bitan, jer konačne rotacije ne komutiraju. Prva, druga i treća rotacija opisane su matricama rotacije $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ i $R^{(3)}$.

$$\begin{aligned}
 R^{(1)} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 R^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\
 R^{(3)} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sukcesivne rotacije dobiju se produktom ortogonalnih matrica svake pojedine rotacije. Ortogonalna matrica rotacije je jednaka:

$$R(\varphi, \theta, \psi) = R^{(1)}R^{(2)}R^{(3)} \tag{2.6}$$

Odnosno:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

2.2. Gibanje krutog tijela

Promatranje gibanja tijela zanemarivih dimenzija svodi se na promatranje gibanja materijalne točke. No, zahtjevi promatranog gibanja mogu biti takvi da se dimenzije tijela ne mogu zanemariti. U tom slučaju govori se o gibanju krutog ili elastičnog tijela, te je opis takvog gibanja znatno kompliciraniji od opisa gibanja točke [5].

Svako gibanje krutog tijela može se pokazati kao superpozicija translacijskog i rotacijskog gibanja. Po definiciji, udaljenost bilo koje dvije čestice i i j krutog tijela je nepromjenjiva, tj. za kruto tijelo tijekom gibanja vrijede idealne holonomne veze:

$$|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)| = c_{ij} = const, \quad \forall i, j, t \tag{2.8}$$

U prirodi ne postoje idealna kruta tijela jer se svako tijelo može deformirati pod utjecajem snažnih vanjskih sila. Ipak, u klasičnoj mehanici, idealno kruto tijelo je dobra aproksimacija za realna tijela čije su deformacije pod utjecajem sila vrlo malene u odnosu na njihove dimenzije.

Položaj tijela u prostoru određen je njegovim položajem u koordinatnom sustavu uz pomoć tri nekolinearne točke. Položaj prve točke u prostoru određen je s tri koordinate (x_1, y_1, z_1) , pa zato prva točka ima tri stupnja slobode. Gibanje druge točke ovisi o položaju prve točke, pa je ograničeno vezom (2.9). Zbog ove jedne veze druga čestica ima samo dva stupnja slobode [6].

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c_{21}^2 = 0 \quad (2.9)$$

Treća čestica je ograničena s dvije veze, jer je izbor treće koordinate ograničen izborom prethodne dvije (2.10), pa ona ima samo jedan stupanj slobode:

$$\begin{aligned} (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - c_{31}^2 &= 0 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - c_{32}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Opisane tri nekolinearne točke, koje opisuju kruto tijelo, zajedno daju ukupno 6 stupnjeva slobode gibanja. Od toga se tri stupnja odnose na rotacijsko gibanje, a preostala tri na translacijsko gibanje. No, ako je gibanje krutog tijela ograničeno nekim dodatnim vezama, npr. klizanjem ili kotrljanjem po nekoj podlozi, broj stupnjeva slobode će biti manji.

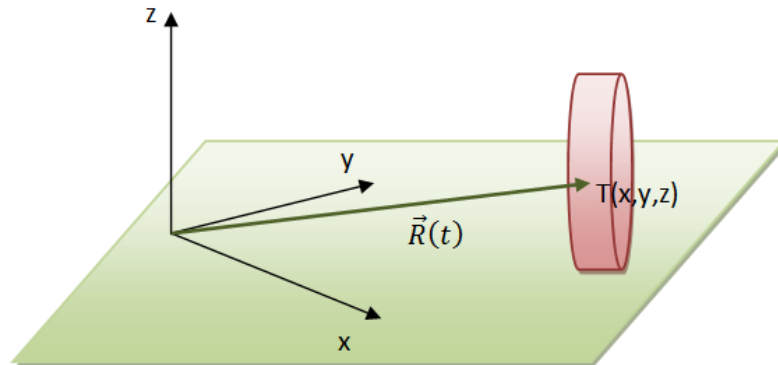
U nastavku će u kratko i općenito biti objašnjeno translacijsko i rotacijsko gibanje tijela, moment sile, kutni moment, tenzor inercije i moment inercije, tj. dinamičke veličine čije je razumijevanje nužno za izvođenje jednadžbi složenog gibanja željenog sustava.

2.2.1. Translacija krutog tijela

Za primjer translacije krutog tijela uzet će se translacija kotača. Kada se kotač giba mijenja se njegov položaj u horizontalnoj ravnini. Položaj kotača određuje se u odnosu na ishodište referentnog koordinatnog sustava, a predstavlja se vektorom translacije $\vec{R}(t)$ (2.11). Vektor položaja čestice je vektor čiji je početak u ishodištu, a kraj u točki u kojoj se u promatranom trenutku nalazi središte kotača. Kako je središte kotača u njegovom centru mase, može se umjesto $\vec{R}(t)$ pisati $\vec{r}_c(t)$.

$$\vec{R}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2.11)$$

Na slici 2.4. prikazan je položaj kotača u referentnom koordinatnom sustavu i translacijski vektor koji prikazuje pomak kotača u odnosu na ishodište sustava S [6].



Slika 2.4. Translacijsko gibanje kotača

Gibanjem kotača mijenja se njegov položaj u prostoru, pa se mijenjaju i koordinate centra mase. Ako se mijenjaju koordinate centra mase, onda se mijenja i translacijski vektor, pa slijedi da je translacijski vektor funkcija vremena $\vec{r}_c(t)$. Derivacija vektora položaja centra mase je brzina \vec{v} :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} \quad (2.12)$$

Pri računanju izraza (2.12) komponente derivacije translacijskog vektora se računaju prema formuli $\dot{\vec{r}}_{ci} = \sum_i (\dot{e}_i r_i + e_i \dot{r}_i)$, gdje su \vec{e} jedinični vektori. No, kako se sva promatranja vrše u Kartezijevom koordinatnom sustavu, sva tri jedinična vektora su konstantni vektori čije derivacije su nula. Konačno se može zaključiti da je smjer brzine gibanja tangenta na putanju u svakoj točki gibanja pa se može pisati:

$$\vec{v} = v\vec{r}_c \quad (2.13)$$

Kotač se ne mora gibati uvijek istom brzinom. Ako kotač usporava ili ubrzava, tada i brzina translacije postaje funkcija vremena $\vec{v}(t)$. Kako je brzina funkcija vremena, tada ubrzanje (akceleracija) nije jednako nuli, već se definira kao:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}_c \quad (2.14)$$

Za razliku od brzine akceleracija ima tangencijalnu i radijalnu komponentu:

$$\vec{a} = a_t \vec{t} + a_r \vec{n} = \dot{v} \vec{t} + \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad (2.15)$$

U jednadžbi (2.15) \vec{t} i \vec{n} predstavljaju jedinične vektore tangente i glavne normale na putanju, a R je radijus zakrivljenosti putanje.

Ukoliko na česticu, čiji je položaj u koordinatnom sustavu opisan vektorom \vec{r}_C , djeluje vanjska sila \vec{F} te uzrokuje njezin pomak za $d\vec{r}_C$, može se definirati diferencijal rada:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}_C = F \cdot dr \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{r}_C) \quad (2.16)$$

Izraz (2.16) daje rad na diferencijalnom dijelu puta. Na konačnom dijelu puta ukupan rad dobiva se integracijom po putanji od početne do konačne točke puta:

$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_P}^{\vec{r}_K} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_P}^{\vec{r}_K} M \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = M \int_{\vec{r}_P}^{\vec{r}_K} \vec{v} d\vec{v} = \frac{M\vec{v}^2}{2} \Big|_{\vec{v}_P}^{\vec{v}_K} \quad (2.17)$$

Kinetička energija jest energija koja potječe od gibanja čestice koje je rezultat obavljanja nekog rada. Rad predstavlja razliku kinetičkih energija, pa iz izraza (2.17) slijedi da je kinetička energija:

$$T_{translacija} = \frac{M}{2} \vec{v}^2 \quad (2.18)$$

Konačno slijedi i izraz za ukupnu translacijsku kinetičku energiju sustava (2.19), kao suma pojedinačnih kinetičkih energija translacije prije spomenutih triju nekolinearnih točaka koje karakteriziraju odabrano kruto tijelo:

$$T_{translacija} = \frac{M}{2} (\dot{r}_{c1}^2 + \dot{r}_{c2}^2 + \dot{r}_{c3}^2) = \frac{M}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (2.19)$$

2.2.2. Rotacija krutog tijela

Analogno izrazu (2.18) za kinetičku energiju translacije, za kinetičku energiju rotacije jedne čestice može se pisati:

$$T_{rotacija} = \frac{I}{2} \vec{\omega}^2 \quad (2.20)$$

Kod translacije tijela inercija (tromost) tijela izražena je masom M , no kod rotacije ulogu mase preuzima tenzor inercije tijela I . Što je moment inercije nekog tijela veći to ga je teže pokrenuti u rotaciju ili zaustaviti njegovu rotaciju. Također, kod translacije govorimo o translacijskoj brzini \vec{v} , dok u slučaju rotacije govorimo o kutnoj brzini $\vec{\omega}$.

Samo ako promatramo gibanje iz koordinatnog sustava tijela, tada se glavne osi rotacije podudaraju s osima koordinatnog sustava i može se pisati:

$$T_{rotacija} = \frac{I_{11}}{2}\omega_1^2 + \frac{I_{22}}{2}\omega_2^2 + \frac{I_{33}}{2}\omega_3^2 \quad (2.21)$$

Gledano iz referentnog koordinatnog sustava, izraz za kinetičku energiju rotacije nije ovako jednostavan, i u tu svrhu je potrebno razumjeti pojam tenzora inercije.

2.2.2.1. Tenzor inercije

Kada se na neko tijelo primjenjuje sila koja bi izazvala njegovo gibanje, tada se to tijelo odupire kretanju svojom inercijom. Pri translacijskom gibanju inercija tijela mjeri se masom, dok kod rotacije tu ulogu ima tenzor inercije. Tenzor inercije ovisi samo o raspodjeli mase krutog tijela u odnosu na ishodište koordinatnog sustava vezanog za tijelo, dakle tenzor inercije ne ovisi o gibanju krutog tijela [6].

Općeniti izrazi za računanje simetričnog tenzora inercije drugog reda je:

$$I_{ab} = \sum_i m_i (\bar{r}_i'^2 \delta_{ab} - r_{i_a}' r_{i_b}'), \quad (a, b = 1, 2, 3) \quad (2.22)$$

Ako tijelo ima kontinuiranu raspodjelu mase tada se za tenzor inercije može pisati:

$$I_{ab} = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') (\bar{r}'^2 \delta_{ab} - r_{i_a}' r_{i_b}') \quad (2.23)$$

Promatrani tenzor se može zapisati i u matičnom obliku (2.24). Matrica tenzora inercije je kvadratna matrica dimenzija 3×3 . Dijagonalni elementi matrice tenzora su momenti inercije, a nedijagonalni elementi se nazivaju produkti inercije.

$$I_{ab} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Ako tijelo rotira oko svog centra mase, tada će matrica tenzora inercije biti dijagonalna matrica, odnosno svi produkti inercije bit će jednaki nuli. Matrica tenzora inercije sada ima oblik:

$$I_{ab} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Moment inercije je rotacijska analogija mase, ali za razliku od mase, moment inercije nije nepromjenjiva veličina, već ovisi o tome oko koje osi tijelo rotira. Ako neko tijelo mase m rotira oko osi neke osi, npr. oko osi x , i ako je tijelo udaljeno za r od promatrane osi rotacije, tada je moment inercije tog tijela $I_{xx} = mr^2$. Ukupni moment inercije tijela kojeg čini N čestica i koje rotira oko neke osi je zbroj momenata inercije svih čestica promatranog tijela [11].

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad (2.26)$$

Ako se promatra neko kontinuirano tijelo tada je izraz za moment inercije:

$$I_{xx} = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV \quad (2.27)$$

Ako je gustoća tijela jednaka po cijelom volumenu, tada vrijedi:

$$I_{xx} = \rho \int r^2 dV = \rho \iiint r^2 dx dy dz \quad (2.28)$$

Momenti inercije kroz osi koje ne prolaze kroz centar promatranog tijela, ali su paralelne s glavnim osima tijela, računaju se pomoću Steinerovog teorema koji glasi: moment inercije tijela za neku os koja ne prolazi težištem jednak je zbroju vlastitog momenta inercije za os paralelnu s traženom osi i umnoška mase tijela s kvadratom udaljenosti težišta tijela od tražene osi:

$$I^C = I_x + mr^2 \quad (2.29)$$

Prethodne formule za moment inercije vrijede isključivo ako su osi oko kojih tijelo rotira paralelne glavnim osima tijela. Ako to nije ispunjeno, nije dovoljno raditi samo s momentima inercije već se potrebno vratiti na tenzor inercije.

Steinerov teorem omogućuje računanje tenzora inercije I_{ab} u odnosu na proizvoljni sustav S' . Tenzor inercije krutog tijela mase M u odnosu na sustav čije je ishodište na udaljenosti \vec{d} od centra mase je:

$$I_{ab} = I_{ab}^C + M(\vec{d}^2 \delta_{ab} - d_a d_b) \quad (2.30)$$

U prethodnom izrazu I^C pretstavlja tenzor inercije u odnosu na centar mase krutog tijela. A u slučaju da koordinatne osi ta dva sustava ipak nisu paralelne tada vrijedi:

$$I_{ab} = \sum_{c,d=1}^3 R_{ac}R_{bd}[I_{ab}^C + M(\vec{d}^2\delta_{ab} - d_a d_b)] \quad (2.31)$$

gdje je $R_{ij} = \cos \angle(\hat{e}_j^T, \hat{e}_i')$ matrica rotacije sustava S^C u sustavu čije su osi paralelne osima sustava S' .

Tenzor inercije ovisi o sustavu S' , odnosno o tome kako je izabrano ishodište koordinatnog sustava i same koordinatne osi. Tenzor inercije je linearan, pa prema tome i aditivan. Aditivnost tenzora inercije dovodi do zaključka da je tenzor inercije sustava tijela jednak zbroju tenzora inercije svakog pojedinog tijela.

2.2.2.2. Moment sile

Moment sile ili kraće moment je vektorska fizikalna veličina kojom se u mehanici opisuje rotacijska analogija sile. Moment je vektorski umnožak sile i udaljenosti pravca njezinog djelovanja od osi ili točke prema kojoj taj moment djeluje. Određen je veličinom i smjerom djelovanja. Može se reći i da je moment djelovanje sile na nekom kraku [9].

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.32)$$

Moment sile za neku os će biti nula kada pravac vektora sile siječe tu os ili kada je paralelan s njom. Ukupni moment s obzirom na neku os ili točku je jednak sumi komponentata svih momenata s obzirom na promatranu os.

$$M_{FR} = M_{F1} + M_{F2} + \dots + M_{Fn} = \sum M_F \quad (2.33)$$

2.2.2.3. Kutni moment

Kutni ili rotacijski moment je vektorski umnožak količine gibanja i udaljenosti pravca njezinog djelovanja od osi ili točke prema kojoj taj moment djeluje. Određen je veličinom i smjerom djelovanja. Kutni moment čestice mase m , koja se giba brzinom \vec{v} je:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (2.34)$$

Ukupni kutni moment promatranog sustava je suma kutnih momenata svih individualnih čestica koje čine promatrani sustav. Ako kruto tijelo rotira oko osi simetrije, kutni moment se može izraziti kao umnožak momenta inercije i kutne brzine tijela ($L = I\omega$) i na taj način povezati s izrazom za linearni moment I [14] [15].

3. Lagrangeov formalizam

Cilj ovog rada je modeliranje i simulacija gibanja samostabilizirajućeg monocikla. Prilikom analize bilo kojeg fizikalnog sustava, klasična ili Newtonova mehanika zahtijeva poznavanje svih sila koje djeluju na taj sustav. U konkretnom primjeru, gibanje monocikla je jako složeno i ograničeno vezama (eng. *constraints*), a kada je dinamika sustava ograničena vezama opis Newtonovim jednadžbama gibanja se uvelike komplicira.

U ovome radu koristit će se novija, općenitija formulacija mehanike, tzv. Lagrangeova mehanika, čija je glavna ideja očuvanje momenta i energije. Ova formulacija prilagođena je rješavanju problema sustava s vezama, pa je idealna za proračun dinamičkog gibanja monocikla. Temelj nove formulacije su Lagrangeove jednadžbe gibanja. S matematičkog stajališta Euler-Lagrangove jednadžbe su skup običnih diferencijalnih jednadžbi specifične strukture. Bazu prostora u kojem se giba promatrani sustav čine generalizirane koordinate [10].

3.1. Veze, sile reakcije i generalizirane koordinate

Lagrangeove jednadžbe se izvode za fizikalne, odnosno mehaničke sustave, a takvi se sustavi sastoje od međusobno povezanih krutih tijela. U nastavku teksta promatrat ćemo fizikalni sustav koji se sastoji od N čestica mase m i radijus vektora \vec{r}_i , ($i = 1, 2, \dots, N$). Kako se sustav sastoji od N međusobno povezanih čestica, njegovo gibanje je ograničeno vezama [6].

Da bi gibanje sustava bilo moguće na njega moraju djelovati određene sile. Po trećem Newtonovom zakonu može se zaključiti da ako postoje sile akcije, onda moraju postojati i sile reakcije. U Newtonovoj formulaciji mehanike sile reakcije predstavljaju problem, jer se ne može znati kakav utjecaj one imaju na pojedinu česticu promatranog tijela. Poznat je utjecaj sila reakcije na gibanje promatrane čestice, ali se ne može znati kako sile reakcije ovise o položaju i brzini čestice. Za sustave čije je gibanje ograničeno vezama Newtonova jednadžba za i -tu česticu ima oblik (3.1), gdje je \vec{F}_i ukupna sila akcije, a \vec{R}_i sila reakcije promatrane čestice.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (3.1)$$

Lagrange je uspio riješiti problem gibanja tijela bez potrebe za poznavanjem sila reakcije, što uvelike olakšava određivanje dinamičkog modela.

Prije nego se počnu izvoditi Lagrangeove jednačbe, potrebno je objasniti određene pojmove poput veza, generaliziranih koordinata, sila reakcije i sl. U nastavku teksta slijede objašnjenja spomenutih pojmova, a nakon toga i sam izvod Lagrangeovih jednačbi.

3.1.2. Veze

Veza je bilo kakvo ograničenje položaja ili brzine gibanja čestice. Ako je gibanje sustava ograničeno vezama tada postoji bar jedna točka u prostoru i/ili bar jedna vrijednost brzine koju čestica tijekom gibanja nikako ne može dostići. Iz toga proizlazi da tijekom gibanja na svaku česticu mora djelovati neka sila, koja osigurava nenarušavanje veze tokom gibanja. Takva sila se zove sila reakcije R . Postoji nekoliko različitih vrsta veza, one su navedene i ukratko objašnjene u nastavku [6].

3.1.2.1. Holonomne veze

Holonomne veze su veze koje se pojavljuju u većini fizikalnih sustava. Holonomnom vezom se naziva bilo koje ograničenje koje se može prikazati jednačbom koja uključuje položaje čestica i vrijeme, ali ne i brzine čestica. Ako je gibanje sustava koji se sastoji od N čestica ograničeno sa k holonomnih veza, znači da postoji k jednačbi oblika:

$$f_l(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad l \in \{1, 2, 3, \dots, k\} \quad (3.2)$$

Pri tome f_l predstavlja jednačbu jedne veze, a kako postoji ukupno k holonomnih veza, tako postoji i k jednačbi veze. Položaj promatranog fizikalnog sustava određen je s $3N$ koordinata, tako da je neovisno samo $3N-k$ komponenti sustava, odnosno sustav ima samo $n=3N-k$ stupnjeva slobode.

3.1.2.2. Neholonomne veze

Za razliku od ograničenja koja uključuju samo položaje čestica i vrijeme, postoje i ograničenja koja uključuju i brzine čestica ili ona koja se ne mogu prikazati algebarskim jednadžbama. Ograničenja koja se ne mogu prikazati algebarskim jednadžbama mogu se prikazati nejednadžbama ili diferencijalnim ili integrabilnim jednadžbama. Takve veze su neholonomne.

Homogene linearne diferencijalne veze su najjednostavniji oblik neholonomnih veza. Uz pomoć metode množitelja veza, tzv. Lagrangeovih multiplikatora (eng. *Lagrange multipliers*) takve se veze mogu uključiti u Lagrangeov formalizam.

Ponovo se promatra sustav od N čestica. Gibanje sustava je ograničeno s k holonomnih veza i s r homogenih linearnih diferencijalnih veza. Zbog postojanja neintegrabilnih veza sve generalizirane koordinate q_j više nisu nezavisne. Među koordinatama postoji r neintegrabilnih diferencijalnih relacija:

$$\sum_{j=1}^n a_{sj} dq_j + a_{st} dt = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r \quad (3.3)$$

Najpoznatiji i možda najvažniji primjer neholonomnih veza u mehanici je kotrljanje bez klizanja. Uvjet kotrljanja bez klizanja je takvo ograničenje brzine gdje trenutna brzina točke dodira tijela koje se giba i podloge mora biti nula. Važno je spomenuti da se kotrljanje bez klizanja ubraja u jednostavne neholonomne veze, odnosno homogene linearne diferencijalne veze.

3.1.2.3. Reonomne veze

Uz dosad spomenuta ograničenja položaja i brzine postoje i ograničenja vremena. Veze koje eksplicitno ovise o vremenu su reonomne veze.

3.1.2.4. Stacionarne ili skleronomne veze

Postoje i veze koje ne zavise eksplicitno o vremenu. Takve veze su stacionarne ili skleronomne veze.

3.1.2. Generalizirane koordinate

Kao temelj analitičke mehanike Lagrange uvodi pojam generaliziranih koordinata. Generalizirane koordinate su skup nezavisnih parametara koji jednoznačno definiraju položaj sustava u bilo kojem promatranom trenutku t . Generalizirane koordinate omogućavaju rješavanje problema dinamike u prostoru čija je geometrija prilagođena promatranom fizikalnom sustavu.

Za sustave s holonomnim vezama uvijek je moguće pronaći skup od $n=3N-k$ nezavisnih koordinata koje jednoznačno određuju položaj sustava, a ne pojavljuju se eksplicitno u jednadžbama veza. Kako se tih $3N-k$ koordinata ne pojavljuje eksplicitno u jednadžbama gibanja te koordinate potpuno slobodno variraju tijekom gibanja. Skup generaliziranih koordinata sustava definiran je preko radijus vektora čestica sustava. Položaj sustava je potpuno određen ako su poznati položaji svih čestica sustava [6].

$$q_j = q_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t), \quad j \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (3.4)$$

Generalizirane koordinate q_j su realne funkcije vremena $q_j(t)$ i ne moraju predstavljati stvarne koordinate neke od čestica sustava. Veze ne ograničavaju varijaciju generaliziranih koordinata, a skup generaliziranih koordinata za neki fizikalni sustav nije jednoznačno određen.

Poznavanje generaliziranih koordinata $q_j, (j = 1, 2, \dots, n)$ i jednadžbi veza ekvivalentno je poznavanju položaja svih čestica veze $\vec{r}_i, (i = 1, 2, \dots, N)$. To znači da se Descartesove koordinate mogu izraziti pomoću općenitih koordinata:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t), \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, N\} \quad (3.5)$$

U jednadžbi (3.5) $\vec{r}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ predstavlja vektor položaja pojedinih čestica. Pritom x_i, y_i i z_i predstavljaju koordinate promatrane točke. Kako su generalizirane koordinate funkcije vremena ($q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t) \dots q_n = q_n(t)$), onda su i vektori položaja funkcije vremena. S obzirom na to da je brzina derivacija položaja, deriviranjem prethodnog izraza dobiva se izraz za brzinu:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (3.6)$$

Na temelju navedenih izraza može se uočiti da vrijedi:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (3.7)$$

Mehaničko stanje promatranog sustava u promatranom trenutku određeno je položajem i brzinom svih čestica koje ga čine $\{\vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t)\}$. U mehanici poznavanje položaja i brzine čestica znači poznavanje generaliziranih koordinata i generaliziranih brzina $\{\vec{q}_i(t), \dot{\vec{q}}_i(t)\}$.

3.2. Zanemarivanje sila trenja

Kako se u ovome radu, zbog pojednostavljenja modela, zanemaruje utjecaj trenja, teorijski će se obraditi samo takvi slučajevi gibanja. Ako se u modelu zanemari postojanje trenja, tada su sile otpora podloge okomite na podlogu. Takve sile reakcije su idealne sile reakcije. Tijekom gibanja sustava ukupna idealna sila reakcije \vec{R}_l na l -tu česticu dobije se zbrajanjem svih komponenti duž pravaca $\nabla_i f_l$. Takva idealna sila osigurava valjanost svih holonomnih veza f_l .

$$\vec{R}_l = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla_i f_l, \quad l = 1, 2, \dots, k \quad (3.8)$$

U izrazu (3.8) ∇_i označava gradijent po komponentama vektora \vec{r}_i .

3.3. Virtualni pomak i virtualni rad

Zbog okomitosti idealnih sila reakcije na podlogu, rad sila je na svakom mogućem infinitezimalnom pomaku sustava jednak nuli. Sustav se u vremenu dt može pomicati u različitim smjerovima, a razlika dva infinitezimalno mala pomaka sustava u istom vremenu naziva se virtualnim pomakom $\delta \vec{r}_i$ [6] [12]:

$$\delta \vec{r}_i = d' \vec{r}_i - d \vec{r}_i \quad (3.9)$$

Rad koji sila obavi pri virtualnom pomaku čestice je virtualni rad:

$$\delta W = \vec{F} \delta \vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad (3.10)$$

Ako na promatrani sustav djeluje N različitih sila, odnosno $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$, i ako su hvatišta tih sila jednaka virtualnim pomacima, i ako su hvatišta tih sila jednaka virtualnim pomacima $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_N$, tada je virtualni rad sustava jednak:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta\vec{r}_i \quad (3.11)$$

Ako se mehanički sustav nalazi u stanju ravnoteže, odnosno ako su sile akcije i reakcije po iznosu jednake, vrijedi:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i) = 0 \quad (3.12)$$

Kako je rad umnožak sile u puta, da bi dobili izraz za rad gornja jednačba se množi s virtualnim pomakom $\delta\vec{r}_i$:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta\vec{r}_i = 0 \quad (3.13)$$

U slučaju promatranja idealnih sila reakcije (kada su sile otpora podloge okomite na podlogu), tada je rad sila reakcije na bilo kojem virtualnom pomaku sustava nula, pa je drugi član u izrazu (3.13) jednak nuli. Iz toga konačno slijedi izraz za virtualni rad:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \delta W_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0 \quad (3.14)$$

Sada se može zaključiti sljedeće: ako se sustav s idealnim vezama nalazi u ravnoteži, algebarski zbroj virtualnih radova aktivnih sila je nula.

3.4. Generalizirane sile

Pretpostavimo da na sustav koji se sastoji od N čestica mase m djeluju vanjske sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$. Da bi se odredile generalizirane sile potrebno je jednoj generaliziranoj koordinati, npr. q_1 dodati mali prirast δq_1 , a iznose ostalih generaliziranih koordinata ostaviti nepromijenjenima. Uvrštavanjem izraza (3.6) u (3.11) dobiva se [12]:

$$\delta W = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (3.15)$$

Generalizirane sile su konzervativne sile (sile čiji rad ne ovisi o putu, već samo o početnoj i konačnoj točki). Konačno slijedi i izraz za generalizirane sile sustava:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

3.5. D'Alembertov princip

D'Alembertov princip je postulat iz kojeg se izvode Lagrangeove jednačbe. Postulat se odnosi na sustav od N čestica i k idealnih holonomnih veza. Na promatrani sustav djeluju vanjske aktivne sile \vec{F}_i i sile reakcije \vec{R}_i , a tim silama pridružuje se još i sila inercije $\vec{F}_{Li} = -m_i \ddot{\vec{r}}_i$. Sve sile sustava su u ravnoteži, pa se može zapisati uvjet ravnoteže:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{Li} = 0 \quad (3.17)$$

Pomnoži li se izraz (3.17) s virtualnim pomakom $\delta \vec{r}_i$, dobiva se izraz (3.18) u kojem drugi pribrojnik predstavlja zbroj virtualnih radova reakcijskih veza u sustavu. Kako su veze idealne, virtualni rad mora biti jednak nuli. Uvrštavanjem nule u drugi član slijedi izraz (3.19) [12].

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{Li} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.18)$$

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \vec{F}_{Li}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.19)$$

Nakon uvrštavanja izraza za \vec{F}_{Li} u predhodnu jednačbu dobiva se:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.20)$$

Dobivena jednačba (3.20) ujedinjuje D'Alembertov princip i princip virtualnih radova i naziva se D'Alembertov-Lagrangeov princip, a često i opća jednačba dinamike. D'Alembertov princip je ekvivalentan Newtonovim zakonima. Razlika je u tome što on ne sadrži eksplicitno sile reakcije, pa je pogodan za razmatranje sustava s vezama.

3.6. Lagrangeove jednadžbe

Kod izvoda Lagrangeovih jednadžbi ponovo se razmatra sustav od N čestica mase m_1, m_2, \dots, m_N na koji djeluju sile akcije \vec{F}_i i sile reakcije veza \vec{R}_i . Promatrani sustav ima ukupno n stupnjeva slobode. Ako se za računanje dinamike krutoga tijela želi primjenjivati Lagrangeova mehanika, tada sve veličine moraju biti izražene u odnosu na referentni sustav S . Dakle, potrebno je eliminirati sve komponente definirane u koordinatnom sustavu tijela S^i i zamijeniti ih s generaliziranim koordinatama koje jednoznačno određuju rotaciju krutog tijela. Pri tome se kao generalizirane koordinate za rotaciju najčešće koriste tri Eulerova kuta $\{\varphi, \theta, \psi\}$ objašnjena u poglavlju 2.1.2. Čestice sustava gibaju se određenom brzinom, koja je derivacija vektora položaja. Brzina i -te čestice sustava je \vec{v}_i [6][10]:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\delta\vec{r}_i}{\delta q_j} \dot{q}_j \quad (3.21)$$

Deriviranjem gornje jednadžbe slijedi sljedeće svojstvo:

$$\frac{\delta\vec{v}_i}{\delta\dot{q}_j} = \frac{\delta\vec{r}_i}{\delta q_j} \quad (3.22)$$

Također vrijedi i jednakost:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta\vec{r}_i}{\delta\dot{q}_j} \right) = \frac{\delta}{\delta q_j} \left(\frac{\delta\vec{r}_i}{\delta t} \right) = \frac{\delta\vec{v}_i}{\delta\dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.23)$$

Prema II. Newtonovom zakonu jednadžba gibanja glasi [12]:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta r_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta r_i \quad (3.24)$$

Kako se u ovom radu promatraju samo idealne veze, a drugi član izraza predstavlja zbroj virtualnih radova, taj pribojnik ima vrijednost 0. Nadalje uvrštavanjem i sređivanjem izraza (3.24) dobiva se:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta r_i &= \sum_{j=1}^n m_i \vec{v}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_j} \delta q_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_j} \right) \right] \delta q_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\delta \vec{v}_i}{\delta q_j} \right] \delta q_j = \quad (3.25) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i - \frac{\delta}{\delta q_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right] \delta q_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_j} \right] \delta q_j
 \end{aligned}$$

Prebacivanjem svih članova iz (3.25) na desnu stranu znaka jednakosti dobiva se:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_j} \right] \delta q_j - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta r_i = 0 \quad (3.26)$$

Sile akcije mogu se zapisati preko izraza za generalizirane sile u sljedećem obliku:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta r_i = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (3.27)$$

Uvrštavanjem (3.27) u (3.26) slijedi:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.28)$$

Da bi izraz bio jednak nuli mora vrijediti sljedeća jednakost:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.29)$$

Navedeni izraz predstavlja Lagrangeove jednadžbe druge vrste za sustav čestica. Ako sada pretpostavimo da na mehanički sustav djeluju konzervativne sile, onda postoji funkcija $U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ iz koje se mogu odrediti komponente aktivnih sila:

$$F_{xi} = -\frac{\delta U}{\delta x_i}, \quad F_{yi} = -\frac{\delta U}{\delta y_i}, \quad F_{zi} = -\frac{\delta U}{\delta z_i} \quad (3.30)$$

Zapisivanjem izraza za generalizirane sile u skalarnom obliku slijedi:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left(F_{xi} \frac{\delta x_i}{\delta q_j} + F_{yi} \frac{\delta y_i}{\delta q_j} + F_{zi} \frac{\delta z_i}{\delta q_j} \right) \quad (3.31)$$

Daljnijm uvrštavanjem izraza (3.30) u izraz (3.31) dobiva se vrijednost generalizirane sile Q_j :

$$Q_j = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\delta U}{\delta x_i} \frac{\delta x_i}{\delta q_j} + \frac{\delta U}{\delta y_i} \frac{\delta y_i}{\delta q_j} + \frac{\delta U}{\delta z_i} \frac{\delta z_i}{\delta q_j} \right) = - \frac{\delta U}{\delta q_j} \quad (3.32)$$

Uvrštavanjem u izraz (3.29) proizlazi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_j} + \frac{\delta U}{\delta q_j} = 0 \quad (3.33)$$

Kako potencijalna energija ne ovisi o generaliziranim brzinama Lagrangeova jednadžba za konzervativne sustave (tzv. Euler-Lagrangeova jednadžba) konačno glasi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta L}{\delta q_j} = 0 \quad (3.34)$$

Pri tome L predstavlja Lagrangeovu funkciju, odnosno razliku kinetičke i potencijalne energije, $L = T - U$.

3.6.1. Kinetička energija

U izvodu (3.25) može se primijetiti uvođenje supstitucije dane s (3.35). U tom slučaju T predstavlja ukupnu kinetičku energiju sustava čestica [6].

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (3.35)$$

Međutim, prethodni izraz je izraz za ukupnu kinetičku energiju kada postoji samo translacijska kinetička energija. No kinetička energija ne mora se sastojati samo od translacijske komponente kinetičke energije, pa možemo pisati da je ukupna kinetička energija nekog sustava zbroj translacijske i rotacijske kinetičke energije.

$$T = T_{translacija} + T_{rotacija} \quad (3.36)$$

Ako je sustav S' , koji je vezan za kruto tijelo, sustav glavnih osi inercije, tada je tenzor inercije dijagonalan. Ako se za ishodište sustava S' odabere centar mase, tako da je $\vec{r}'_c = 0$, tada je ukupna kinetička energija tijela jednaka:

$$T = \frac{M}{2} (\dot{r}'_{c1}{}^2 + \dot{r}'_{c2}{}^2 + \dot{r}'_{c3}{}^2) + \frac{I_{11}}{2} \omega_1^2 + \frac{I_{22}}{2} \omega_2^2 + \frac{I_{33}}{2} \omega_3^2 \quad (3.37)$$

U navedenoj jednadžbi I_{ii} predstavlja glavne momente inercije, a ω_i komponente trenutne kutne brzine rotacije krutog tijela $\vec{\omega}(t)$ izražene u sustavu S' .

3.6.2. Potencijalna energija

Varijabla U koja se pojavljuje u izrazima predstavlja potencijalnu energiju promatranog sustava. S obzirom na to da se razmatraju samo konzervativni sustavi $\vec{F}_i = -\nabla_i U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, q_n)$, varijabla $U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ jest generalizirana potencijalna energija koja ovisi o položaju q_j i brzini \dot{q}_j .

3.6.3. Općenite Lagrangeove jednadžbe

Ako se promatraju sustavi u kojima generalizirane sile imaju i potencijalne i nepotencijalne komponente, tada se Lagrangeove jednadžbe ne mogu napisati na isti način kao i u prethodnom odlomku, već se mora koristiti općeniti izraz Lagrangeovih jednadžbi. Generalizirane sile koje djeluju na sustav mogu imati potencijalne i kinetičke komponente. Kinetička energija sustava se označava sa T , a generalizirana potencijalna energija u ovome slučaju s \tilde{U} . Ako se promatra fizikalni sustav sa n stupnjeva slobode on se može opisati Lagrangianom [6]:

$$L = T - \tilde{U} = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (3.38)$$

Euler-Lagrangeove jednadžbe sada poprimaju oblik:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.39)$$

Ako je sustav potencijalan Q_j^* je jednak 0 i tako se vraćamo opet na izraz za konzervativne sustave.

3.6.4. Najopćenitiji oblik Lagrangeovih jednadžbi

Najopćenitiji oblik zapisa Lagrangeovih jednadžbi bi bio slučaj u kojem se promatraju sustavi koji imaju i holonomne i neholonomne veze. Ako sustav ima N čestica i njegovo gibanje je ograničeno sa k holonomnih i s r neholonomnih veza, tada jednadžba gibanja ima oblik [6]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{s=1}^r \lambda_s a_{sj} &= Q_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n = 3N - k \\ \sum_{s=1}^r a_{sj} \dot{q}_j + a_{st} &= 0, \quad s = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3.40)$$

Navedene jednadžbe tvore sustav od $n + r$ običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda, pri čemu n predstavlja broj generaliziranih koordinata $q_j(t)$, $3N$ broj koordinata čestica, k broj holonomnih veza, a r broj Lagrangeovih multiplikatora $\lambda_s(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$. Lagrangeovi multiplikatori osiguravaju da koeficijenti uz r zavisnih varijacija generaliziranih koordinata δq_j budu jednaki nuli.

3.6.5. Invarijantnost Lagrangeovih jednadžbi pri koordinatnim transformacijama

Kako pri rješavanju različitih sustava nisu uvijek pogodne iste transformacije, a uz to se i isti sustav može opisati različitim generaliziranim koordinatama, tada je bitno napomenuti da Lagrangeove jednadžbe vrijede u bilo kojem sustavu generaliziranih koordinata. Lagrangeove jednadžbe su invarijantne pri proizvoljnoj transformaciji generaliziranih koordinata [6]:

$$q_j \rightarrow Q_j(q, t) \quad (3.41)$$

U skladu s navedenim, ako vrijedi izraz:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.42)$$

tada moraju vrijediti i Lagrangeove jednadžbe za transformirani Lagrangian:

$$L'(Q, \dot{Q}, t) = L[q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t] \quad (3.43)$$

3.6.6. Uvođenje sila trenja i otpora sustava

Do sada su se sva razmatranja vršila za sustave bez trenja ili sustavima sa zanemarenim trenjem. Takvo zanemarivanje je isključivo posljedica želje za pojednostavljenjem matematičkog računa. Kako u prirodi trenje ipak postoji i kako bi savršeno točan proračun dinamike sustava trebao uključivati trenje, u nastavku je kratko opisan način uvođenja trenja u promatrane sustave.

Sile otpora se promatraju s najniže razine, odnosno razine atoma i molekula. Sile otpora su rezultat ogromnog broja kompliciranih, uglavnom elektromagnetskih interakcija, između atoma (molekula). One su rezultat kvantno mehaničkih interakcija materijalnih objekata u relativnom gibanju. Ukupna sila otpora različita je za različite vrste atoma, a ovisi o obliku, stanju površine tijela i relativnoj brzini gibanja. Ako se u obzir uzmu i sile trenja, potrebno je poznavati i disipativnu funkciju sustava. Lagrangeova jednadžba tada dobiva sljedeći oblik:

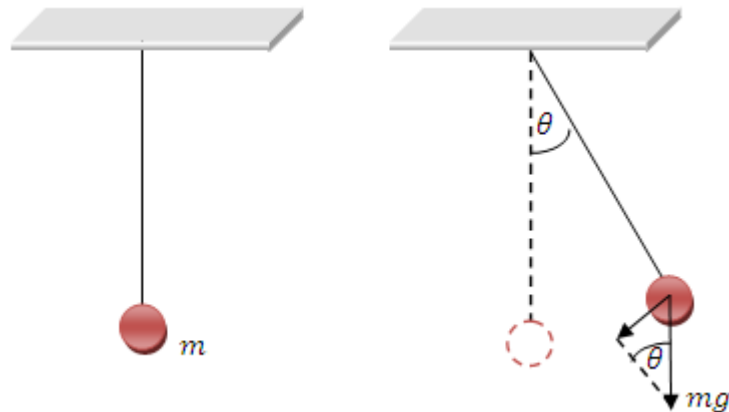
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.44)$$

4. Sustavi s gibanjima u dvije dimenzije

4.1. Matematičko njihalo

Iako rad nije izravno vezan za matematičko njihalo, shvaćanje načina rada matematičkog njihala temelj je razumijevanja i pisanja matematičkih izraza za obrnuto njihalo, a konačno i sam monocikl.

Matematičkim njihalom naziva se tijelo koje se sastoji od točkaste mase m obješene na donjem kraju niti duljine L . Nit je učvršćena na gornjem kraju i zanemarive je mase. U stvarnosti masa m nije koncentrirana u jednoj točki, već je raspodijeljena po cijelom volumenu kugle. No, uz uvjet da je polumjer kugle mnogo manji od duljine niti L , masu možemo smatrati koncentriranom u jednoj točki.



Slika 4.1. Matematičko njihalo u ravnotežnom položaju i pomaknuto iz ravnotežnog položaja

4.1.1. Jednadžbe gibanja matematičkog njihala

Njihanje započinje ako se tijelo izvede iz položaja stabilne ravnoteže. U novom položaju masa ima samo potencijalnu energiju, ali se zbog gravitacije ona želi vratiti u početni ravnotežni položaj. Zbog toga dolazi do gibanja mase m . Masa m se giba po kružnom luku radijusa L i pri tome prevaljuje put $s = L\theta$. Uz zanemarivanje trenja i otpora zraka, gibanje je oscilatorno oko početnog položaja, odnosno masa se njiše naprijed i natrag konstantnom amplitudom. Bez zanemarivanja oscilacije bi i dalje postojale, ali uz prigušenje, pa bi se njihalo nakon nekoga vremena zaustavilo u ravnotežnom položaju [7].

Kutna brzina kojom se njihalo njiše okomita je na ravninu xy u kojoj se događa gibanje i računa se kao $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$. Iz nje slijedi brzina translacije kao:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{\theta}\vec{k} \times (-L\vec{j}) = L\dot{\theta}\vec{i} \quad (4.1)$$

Za vrijeme njihanja masa m ima potencijalnu i kinetičku energiju, a njihovi iznosi ovise o trenutnom položaju njihala. Lagrangian kao razlika ovih dviju energija iznosi:

$$L = E_K - E_P = \frac{1}{2}mv^2 - mgL(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL \cos \theta + mgL \quad (4.2)$$

Prema Euler-Lagrangeovoj jednadžbi (4.3) dobije se nelinearizirana diferencijalna jednadžba njihala (4.4):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} mL^2\dot{\theta} - (-mgL \sin \theta) = mL^2\ddot{\theta} + mgL \sin \theta = 0 \quad (4.3)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta \quad (4.4)$$

Rješenje te diferencijalne jednadžbe u obliku kuta otklona θ u pojedinom trenutku računa se prema izrazu (4.5), u kojem θ_0 predstavlja početni kut otklona od vertikale. Otklon θ_0 ujedno je i amplituda titranja.

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) = \theta_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \phi\right) \quad (4.5)$$

Period titranja T predstavlja vrijeme potrebno da bi masa m napravila puni titraj, odnosno vratila se u početnu točku. Period titranja jednostavnog matematičkog njihala njihala veći je što je θ_0 veći. Ovisi o duljini niti L , gravitacijskoj konstanti g i početnom kutu otklona od vertikale θ_0 , a neovisan je o masi m . Računa se prema izrazu (4.6), iz kojeg se vidi kako period raste s porastom amplitude [16]:

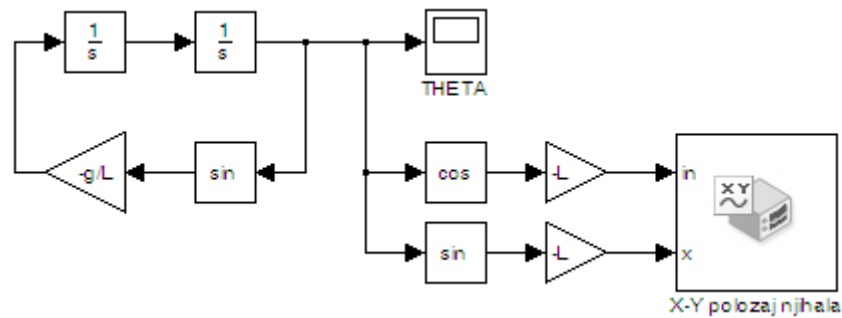
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \frac{173}{737280} \theta_0^6 + \frac{22931}{132120576} \theta_0^8 + \dots\right) \quad (4.6)$$

S obzirom na to da su potencije jako malog kuta zanemarive, izraz (4.6) se za mali početni otklon θ_0 može aproksimirati izrazom (4.7). U tom slučaju period titranja ne ovisi o amplitudi θ_0 . Zanemarenja dovode do pogreške, no uz manji otklon i pogreška je manja.

$$T \simeq 2\pi\sqrt{L/g}, \quad \text{za } \theta_0 \ll 1 \quad (4.7)$$

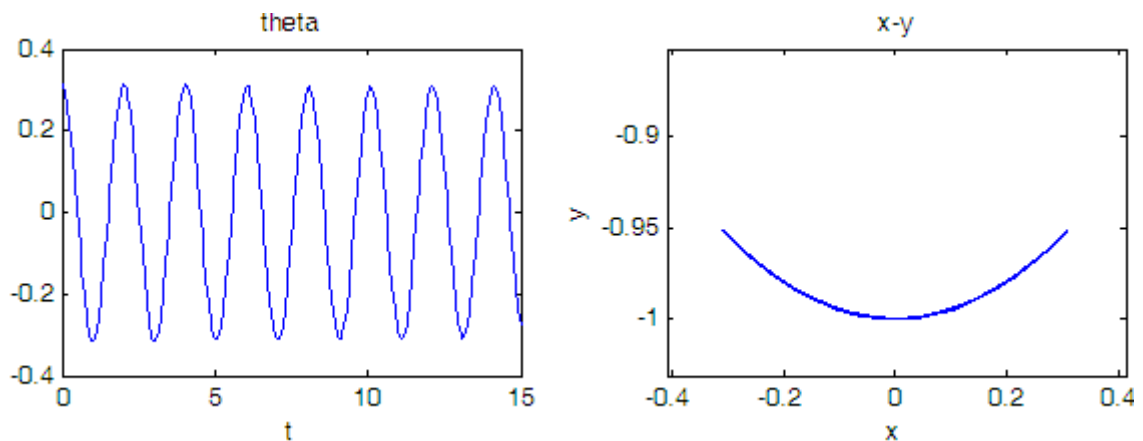
4.1.2. Simulacija gibanja matematičkog njihala

Matematičko njihalo implementirano je u Matlabu u obliku .m funkcije *mathematical_pendulum.m* koja se poziva solverom *ode23* za numeričku integraciju (programski kod funkcije je dostupan u prilogu), te Simulink modelom *mathematical_pendulum_simulink.mdl* koji je prikazan slikom 4.2. Navedeni funkcija i model implementiraju jednadžbu gibanja matematičkog njihala danu izrazom (4.4).



Slika 4.2. Simulink model jednostavnog matematičkog njihala

Rezultat simulacije koji se pojavljuje na zaslonu osciloskopa u Simulinku uz početni otklon $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i duljinu niti $L = 1$ prikazan je slikom 4.3. Oblik krivulje koja prikazuje otklon odgovara sinusoidi (kao što je prije navedeno) te je prikazan na lijevoj slici, dok se na desnoj vidi put koji kuglica opisuje prilikom njihanja, gledano iz perspektive osi okomite na ravninu njihanja.

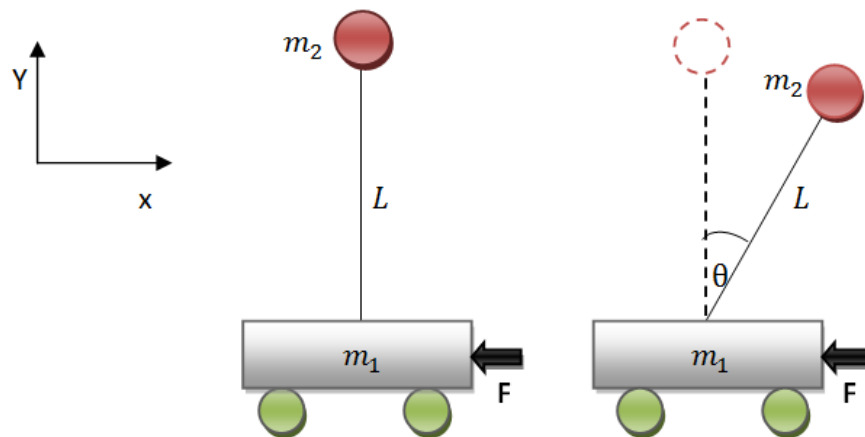


Slika 4.3. Rezultati simulacije jednostavnog matematičkog njihala za $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i $L = 1$

4.2. Obrnuto njihalo na kolicima

Nakon izvoda i objašnjenja matematičkog njihala obradit će se i obrnuto matematičko njihalo u dvije dimenzije, odnosno u xy koordinatnom sustavu. Promatrano njihalo nalazi se na platformi, tj. kolicima na koja može, ali i ne mora djelovati sila F . Zahvaljujući djelovanju sile F kolica se mogu gibati u smjeru osi x (naprijed i natrag), bez mogućnosti skretanja u smjeru osi z . No, do pomaka kolica također može doći i uslijed gibanja gornje mase, čak i ukoliko ne djeluje vanjska sila F , zbog razmjene kinetičke energije između ovih dvaju tijela.

Obrnuto njihalo na kolicima, prema slici 4.4., podrazumijeva da je za kolica mase m_1 vezana bestežinska nit duljine L , na čijem se kraju nalazi tijelo mase m_2 , u proračunima uzeto kao materijalna točka [3].



Slika 4.4. Obrnuto njihalo na kolicima ravnotežnom položaju i pomaknuto iz položaja ravnoteže

4.2.1. Jednadžbe gibanja obrnutog njihala na kolicima

U ravnotežnom položaju njihalo stoji okomito na platformu na kojoj se nalazi. Platforma se može samo gibati naprijed i natrag translacijskom brzinom v_1 .

$$\vec{v}_1 = v_1 \vec{i} = -\dot{x} \vec{i} \quad (4.8)$$

Otklanjanjem njihala za proizvoljni kut θ_0 od vertikalne osi, gornja masa m_2 započinje svoje gibanje, te za njenu kutnu brzinu ω_2 možemo pisati:

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\theta} \vec{k} \quad (4.9)$$

Uslijed rotacije gornje mase, dolazi i do translacije iste. Iz kutne brzine ω_2 izvodi se odgovarajuća translacijska brzina za gornju masu. Kako gornja masa rotira oko kolica koja se gibaju translacijskom brzinom v_1 , vektoru translacijske brzine uslijed njene rotacije potrebno je dodati vektor brzine translacije kolica:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ L \sin \theta & L \cos \theta & 0 \end{bmatrix} - \dot{x} \vec{i} = \vec{i}(-\dot{x} - \dot{\theta}L \cos \theta) + \vec{j}(\dot{\theta}L \sin \theta) \quad (4.10)$$

Za opis dinamike obrnutog njihala na kolicima koristit će se Lagrangian, koji predstavlja razliku svih kinetičkih i potencijalnih energija promatranog sustava. Ukupna kinetička energija sustava je zbroj kinetičkih energija translacije kolica i kinetičke energije translacije obrnutog njihala. Kolica se ne mogu gibati u smjeru y pa nemaju potencijalnu energiju. Gornja masa mijenja položaj u ovisnosti o kutu θ te ima potencijalnu energiju koja ovisi o trenutnom položaju mase m_2 . Konačno se može napisati i Langrangian:

$$L = E_K - E_P = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}_{E_K \text{ kolica translacija}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}_{E_K \text{ gornje mase translacija}} - \underbrace{m_2 g L \cos \theta}_{E_P \text{ gornje mase}} \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_1 + m_2) + m_2 L \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\theta}^2 - m_2 g L \cos \theta$$

Iz Lagrangiana se može uočiti da se cijeli sustav može opisati samo uz pomoć dvije varijable, odnosno preko x i θ . Euler-Lagrangeove jednadžbe po varijablama x i θ dane su sljedećim izrazima:

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 L \cos \theta \ddot{\theta} - m_2 L \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (4.12)$$

$$M_\theta = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m_2 L (\cos \theta \ddot{x} + L \ddot{\theta} - g \sin \theta) = 0$$

Matrični zapis prethodnih jednadžbi glasi:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 L \cos \theta \\ m_2 L \cos \theta & m_2 L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 L \sin \theta \dot{\theta}^2 + F_x \\ m_2 g L \sin \theta + M_\theta \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Ove jednadžbe u potpunosti opisuju gibanje obrnutog njihala na kolicima u dvije dimenzije.

4.2.2. Simulacija gibanja obrnutog njihala na kolicima

Matrični oblik jednadžbi, zapisan u prethodnom potpoglavlju, pogodan je za programsku simulaciju pomoću solvera za numeričku integraciju u Matlabu. Program koji rješava sustav jednadžbi (4.13) dostupan je u pravitku pod nazivom *inverted_pendulum_on_a_cart_2D.m*.

Kako promatrani sustav ovisi samo o dvije varijable, koje se pojavljuju u obje Euler-Lagrangeove jednadžbe, varijable se mogu izraziti jedna uz pomoć druge, te se ponašanje sustava može jednostavno izraziti samo jednom jednadžbom. Ako se u prvoj jednadžbi iz izraza (4.12) varijabla x izrazi preko varijable θ dobiva se izraz:

$$\ddot{x} = \frac{M_\theta - m_2 L \cos \theta \ddot{\theta} + m_2 L \dot{\theta}^2 \sin \theta}{(m_1 + m_2)} \quad (4.14)$$

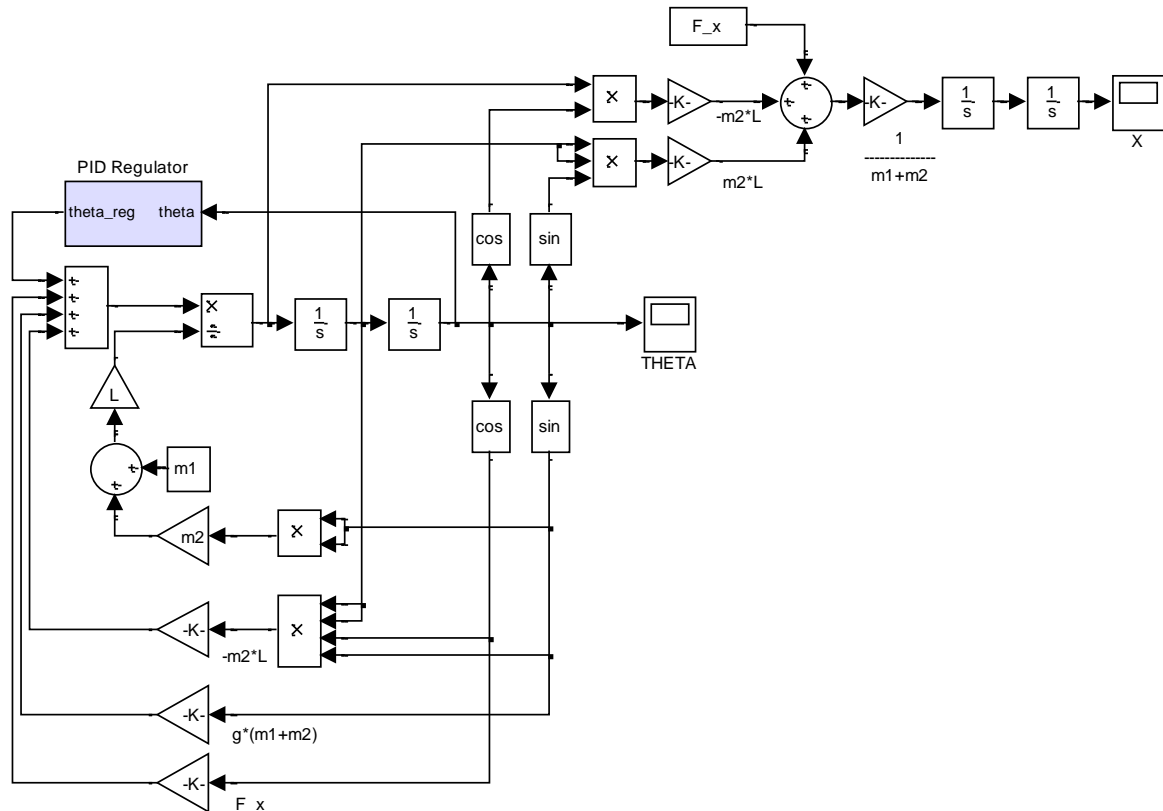
Uvrštavanjem u drugu jednadžbu iz (4.12) sustav postaje opisan samo varijablom θ , te nakon sređivanja nelinearna diferencijalna jednadžba drugog reda koja opisuje željeni sustav glasi:

$$\ddot{\theta} L \left(\frac{m_1 + m_2 \sin^2 \theta}{m_1 + m_2} \right) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta \sin \theta L \dot{\theta}^2 - g \sin \theta + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta F_x - M_\theta = 0 \quad (4.15)$$

Na slici 4.5. prikazana je implementacija ovog sustava u Simulinku. Riječ je o modelu nazvanom *inverted_pendulum_on_a_cart_2D_simulink.mdl*. U shemi se nalazi i PID regulator, koji se može uključiti ili isključiti iz simulacije. PID regulacija predstavlja proporcionalno-integralno-derivativni član koji regulira veličinu kuta θ (4.16). Regulatorom se izračunava "pogreška" kao razlika između izmjerene i željene vrijednosti promatrane varijable, a regulator pokušava minimizirati pogrešku vraćanjem izračunate razlike na ulaz.

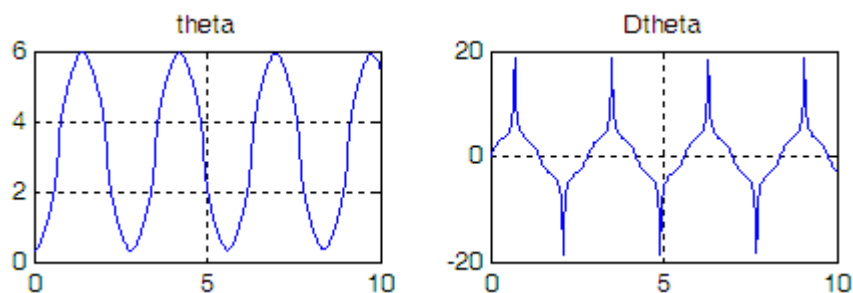
$$\theta_{error} = K_P \theta + K_I \int \theta d\theta + K_D \dot{\theta} \quad (4.16)$$

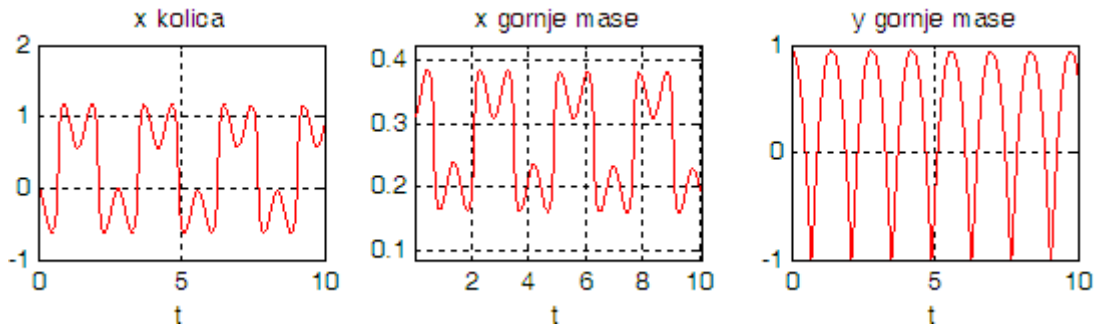
U danom primjeru odabrane su konstante $K_D = -3000$ i $K_P = -10000$. No, u ovom primjeru, kao i u svim ostalima s regulacijom gornje mase, razlika se oduzima od vrijednosti $\ddot{\theta}$, a ne θ , pa uz odabrane konstante K_D i K_P regulator $\ddot{\theta}$ nije PD već sadrži integracijske članove. Ipak, zbog jednostavnosti je odabran ovakav način zapisa.



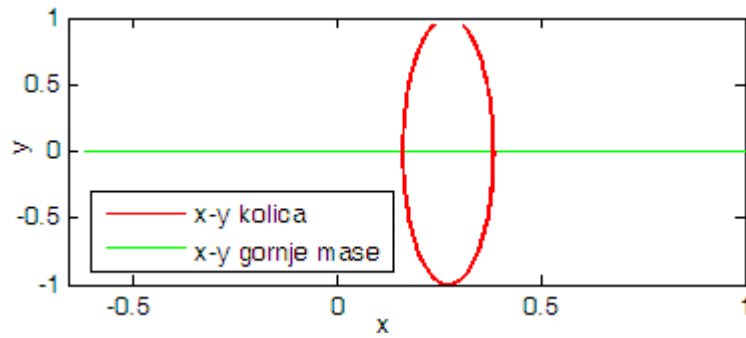
Slika 4.5. Simulink shema obrnutog njihala na kolicima

Simulacija je za početak pokrenuta bez regulacije za kolica mase $m_1 = 10$, njihalo mase $m_2 = 80$, nit duljine $L = 1$ i početni otklon $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$. S obzirom na to da je njihalo izvedeno iz položaja labilne ravnoteže, ono počinje titrati oko položaja stabilne ravnoteže u kojem je $\theta = \pi$, što je prikazano slikom 4.6.a. Kao što je već rečeno, pomak njihala izazvat će i translaciju kolica, prema slici 4.6.b. Radi jednostavnijeg razumijevanja je na slici 4.6.c prikazana i putanja njihala gledana iz perspektive okomite na ravninu sustava. Iako putanja ne prikazuje vremensku ovisnost, iz nje je također jasno da se radi o oscilatornom gibanju.

Slika 4.6.a) Rezultati simulacije za $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i $\dot{x} = 0$: kut i kutna brzina

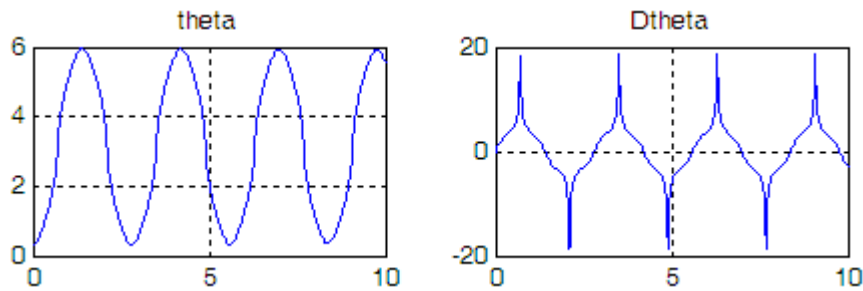


Slika 4.6.b) Rezultati simulacije za $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i $\dot{x} = 0$: koordinate kolica i gornje mase

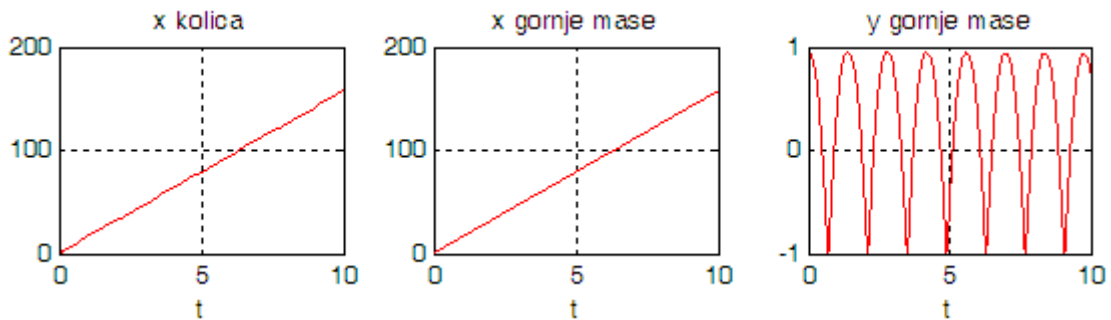


Slika 4.6.c) Rezultati simulacije za $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i $\dot{x} = 0$: putanja njihala

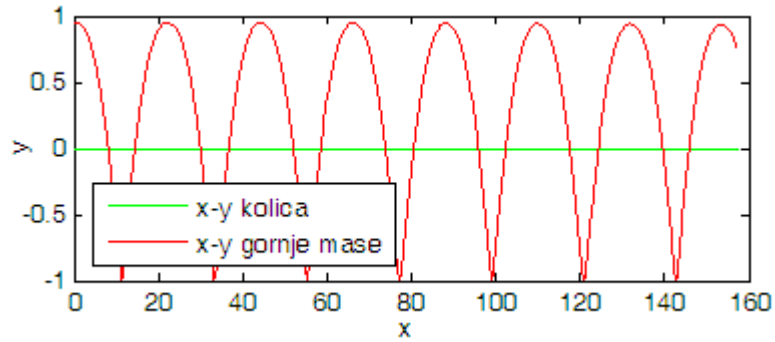
Nova simulacija bez regulatora, uz jednake parametre kao i prije, te uz početne uvjete $\theta_0 = \pi/10$ i $\dot{x} = 5\pi$, pokazuje sljedeće: kolica se kreću naprijed dok njihalo oscilira oko položaja $\theta_0 = \pi$, prema slici 4.7. Zaključak jest da bez obzira na to gibaju li se kolica ili ne, njihalo titra jednako, što potvrđuje očekivanja na temelju iskustava iz prakse.



Slika 4.7.a) Rezultati simulacije za $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i $\dot{x} = 5\pi$: kut i kutna brzina njihala

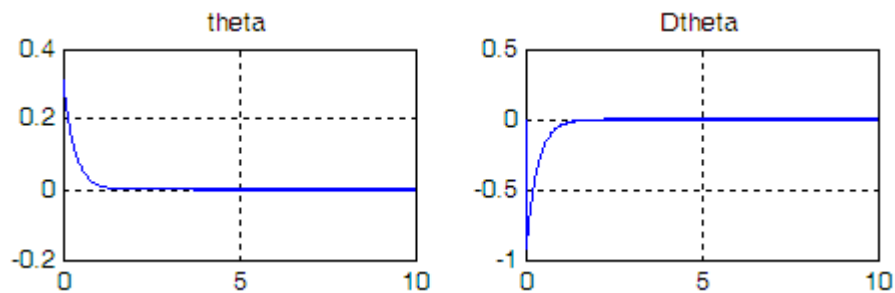


Slika 4.7.b) Rezultati simulacije za $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i $\dot{x} = 5\pi$: koordinate kolica i njihala

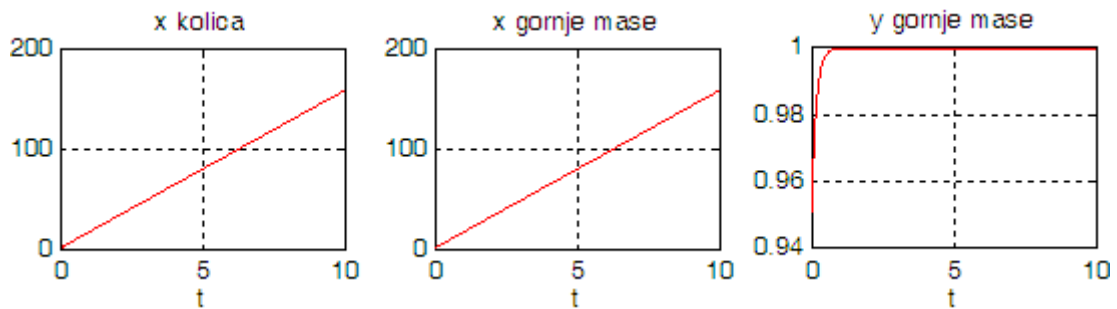


Slika 4.7.c) Rezultati simulacije za $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i $\dot{x} = 5\pi$: putanja njihala

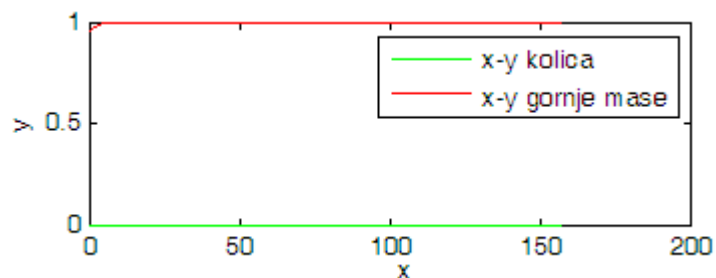
Sljedeći korak jest uključenje regulatora nagiba u simulaciju, uz početne uvjete $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i $\dot{x} = 5\pi$. Regulator brzo vraća njihalo u položaj labilne ravnoteže te, iako se kolica voze naprijed, njihalo održava u željenom položaju. Željeno ponašanje potvrđuju rezultati simulacije prikazani slikom 4.8.



Slika 4.8.a) Rezultati simulacije s regulatorom nagiba za $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i $\dot{x} = 5\pi$: kut i kutna brzina njihala



Slika 4.8.b) Rezultati simulacije s regulatorom nagiba za $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i $\dot{x} = 5\pi$: koordinate



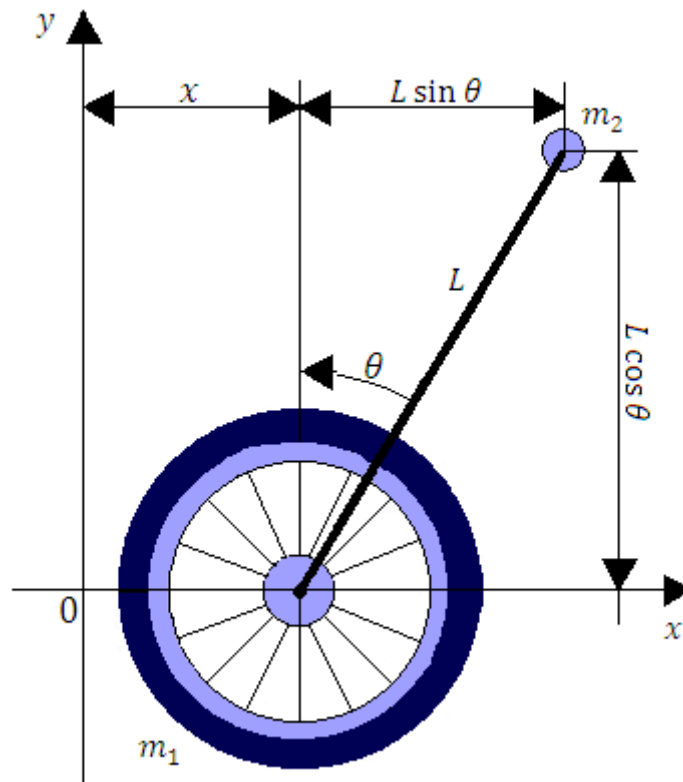
Slika 4.8.c) Rezultati simulacije s regulatorom nagiba za $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$ i $\dot{x} = 5\pi$: putanja

4.3. Monocikl u dvije dimenzije

4.3.1. Jednadžbe gibanja monocikla u 2D

Monocikl koji će biti obrađen u ovom poglavlju jest 2D model koji najviše nalikuje našem željenom modelu u tri dimenzije. U ovom slučaju monocikl se može gibati u smjeru osi x (naprijed i natrag), bez mogućnosti skretanja u smjeru osi z . Kotač je uvijek na istoj visini te za nju uvijek vrijedi $y = 0$, dok se visina gornje mase mijenja s njenom rotacijom. Pretpostavka je da se proklizavanje i trenje mogu zanemariti [3].

U promatranjima se pretpostavlja da se monocikl sastoji od kotača mase m_1 i radijusa R , točkaste mase m_2 i štapa duljine L , ali zanemarive mase, prema slici:



Slika 4.9. Monocikl u dvije dimenzije

U cilju postavljanja jednadžbe gibanja monocikla u planarnoj ravnini, najprije je potrebno izraziti kutnu brzinu kotača ω_1 i kutnu brzinu gornje mase ω_2 :

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_1 &= \dot{\gamma} \vec{k} \\ \vec{\omega}_2 &= \dot{\theta} \vec{k}\end{aligned}\tag{4.17}$$

S obzirom na to da uslijed rotacije nekog tijela dolazi i do njegove translacije, iz kutnih brzina daju se izvesti odgovarajuće translacijske brzine. Za kotač, koji rotira oko svog centra mase, translacijska brzina je:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \dot{\gamma} \vec{k} \times R \vec{j} = -\dot{\gamma} R \vec{i} \rightarrow x = \gamma R \quad (4.18)$$

Gornja masa rotira oko kotača koji ne miruje, pa je vektoru translacijske brzine te mase uslijed njene rotacije potrebno dodati vektor brzine translacije kotača uslijed njegove rotacije:

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \vec{v}_2' + \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ L \sin \theta & L \cos \theta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & R & 0 \end{bmatrix} \\ &= \vec{i}(-\dot{\gamma}R - \dot{\theta}L \cos \theta) + \vec{j}(\dot{\theta}L \sin \theta) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Za izračunavanje Lagrangiana (4.20) uzima se da se kinetička energija kotača sastoji od translacijske i rotacijske kinetičke energije, dok se za gornju masu uzima da je ona materijalna točka pa sadrži samo kinetičku energiju translacije. Potencijalna energija kotača je jednaka nuli, što znači da kotač ne može pasti, te da se ne može kretati u smjeru osi y . Gornja masa se ponaša kao inverzno njihalo, pa je njezina potencijalna energija izračunata je s obzirom na njezin položaj prema slici (4.9).

$$\begin{aligned} L = E_K - E_P &= \overbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}^{E_K \text{ kotača}} + \overbrace{\frac{1}{2} I_{z1} \omega_1^2}^{\text{rotacija}} + \overbrace{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}^{E_K \text{ gornje mase}} - \overbrace{m_2 g L \cos \theta}^{E_P \text{ gornje mase}} \\ &= \dot{\gamma}^2 R^2 \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) + m_2 R L \dot{\gamma} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\theta}^2 - m_2 g L \cos \theta \end{aligned} \quad (4.20)$$

Jedine dvije varijable u zadanom sustavu su γ i θ , tj. sustav se u potpunosti može opisati s te dvije varijable, dok se preostale varijable (kao što je pomak kotača ili gornje mase) mogu izračunati iz njih. Euler-Lagrangeove jednadžbe po varijablama γ i θ dane su sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} M_\gamma &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial L}{\partial \gamma} = (2m_1 + m_2) \cdot R^2 \ddot{\gamma} + m_2 R L \cos \theta \ddot{\theta} - m_2 R L \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ M_\theta &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m_2 R L \cos \theta \dot{\gamma} + m_2 L^2 \ddot{\theta} - m_2 g L \sin \theta \end{aligned} \quad (4.21)$$

Matrični zapis prethodnih dviju jednadžbi glasi:

$$\begin{bmatrix} (2m_1 + m_2)R^2 & m_2RL \cos \theta \\ m_2RL \cos \theta & m_2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2RL \sin \theta \dot{\theta}^2 + M_y \\ m_2gL \sin \theta + M_\theta \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Ove jednadžbe u potpunosti opisuju gibanje monocikla u dvije dimenzije.

4.3.2. Simulacija gibanja monocikla

Matrični oblik jednadžbi koje opisuju neki sustav pogodan je za programsku simulaciju pomoću solvera za numeričku integraciju u Matlabu. Program koji rješava sustav jednadžbi (4.22) dostupan je u privitku pod nazivom *unicycle_2D.m*.

S obzirom da sustav sadrži samo dvije varijable, lako ih je izraziti jednu pomoću druge te opisati sustav jednom jednadžbom. Prvu jednadžbu iz izraza (4.21) izrazimo preko varijable θ :

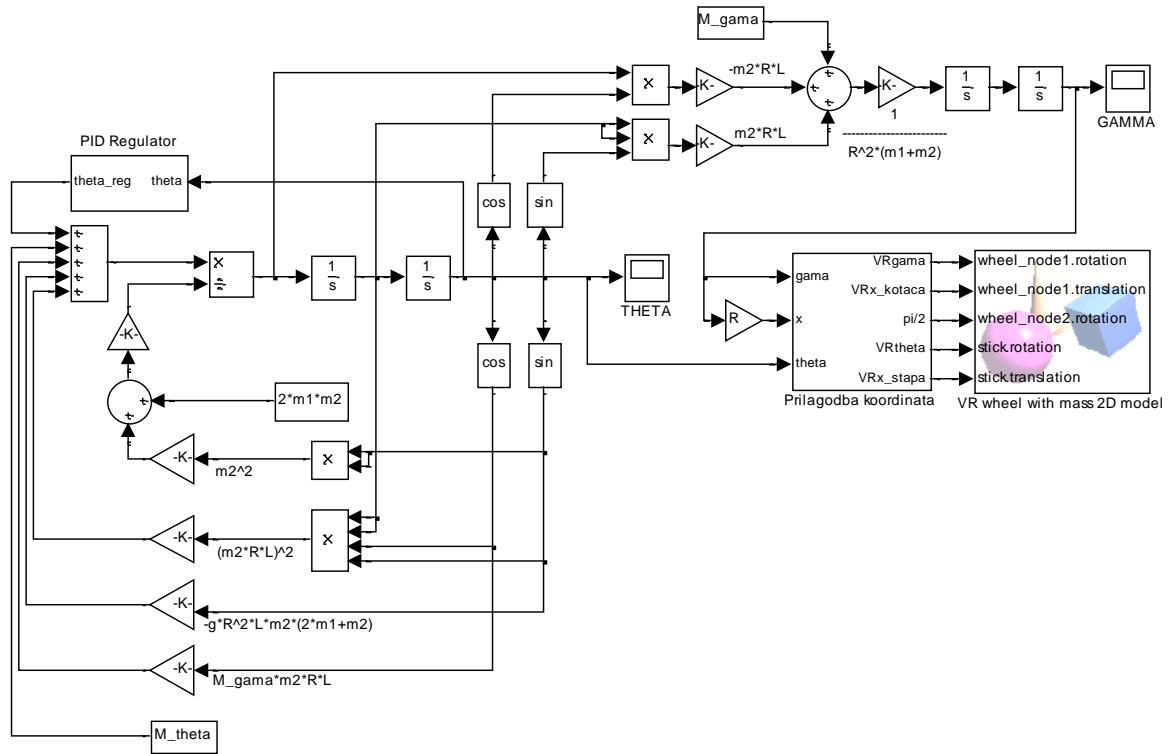
$$\ddot{y} = \frac{M_y - m_2RL \cos \theta \ddot{\theta} + m_2RL \dot{\theta}^2 \sin \theta}{(2m_1 + m_2) \cdot R^2} \quad (4.23)$$

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu iz (4.21) sustav postaje opisan samo varijablom θ , te nakon sređivanja nelinearna diferencijalna jednadžba drugog reda koja opisuje željeni sustav glasi:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} L^2 R^2 (2m_1 m_2 - m_2^2 \sin^2 \theta) + \dot{\theta}^2 m_2^2 R^2 L^2 \cos \theta \sin \theta \\ - m_2 g L R^2 (2m_1 + m_2) \sin \theta + M_y m_2 R L \cos \theta - M_\theta = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

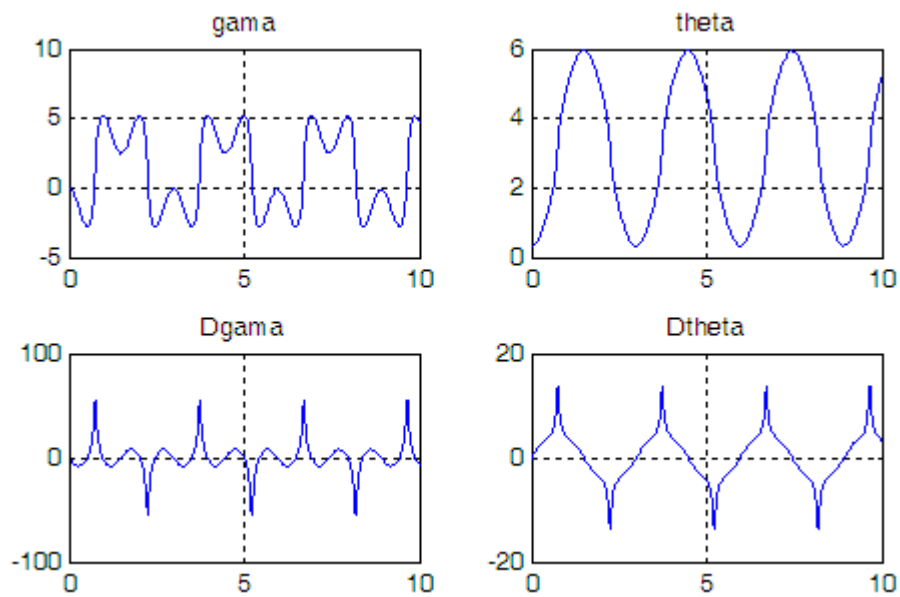
Slikom 4.10. prikazana je implementacija ovog sustava u Simulinku. Riječ je o modelu nazvanom *unicycle_2D_simulink.mdl*. PID regulator spojen u shemi jest regulator s koeficijentima $K_P = -200$, $K_I = 0$ i $K_D = -1500$.

Za razliku od prethodnih modela, ovaj model sadrži i VRML (Virtual Reality) blok za vizualizaciju sustava, tako da je gibanje moguće dodatno promatrati kroz animaciju.

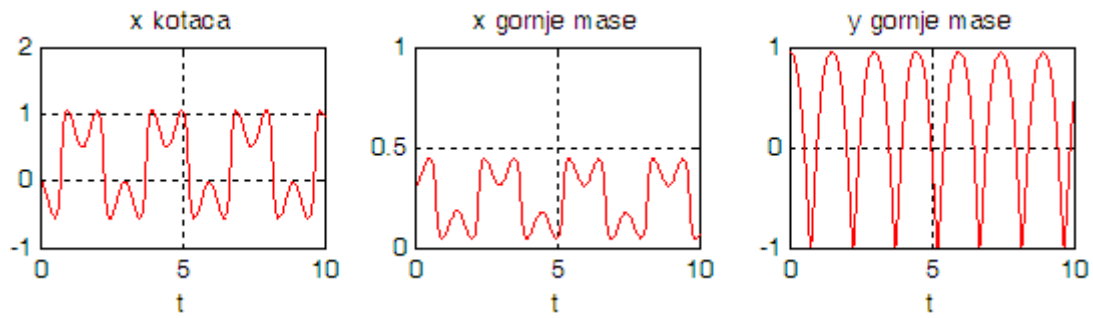
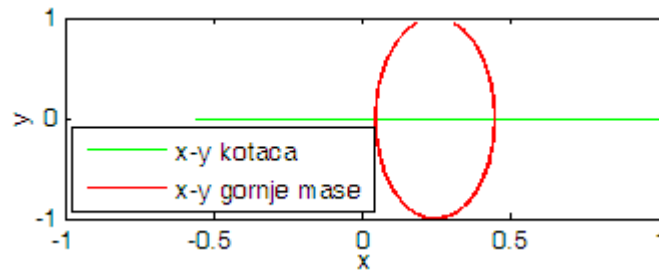


Slika 4.10. Simulink model monocikla u 2D

Simulacija je pokrenuta za duljinu niti $L = 1$, radijus kotača $R = 0.2$, masu kotača $m_1 = 10$, masu njihala $m_2 = 80$ te početni otklon $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$. Rezultati simulacije prikazani su slikom 4.11.



Slika 4.11.a) Rezultati simulacije uz $\dot{\gamma}_0 = 0$ i $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$: kutovi i kutne brzine

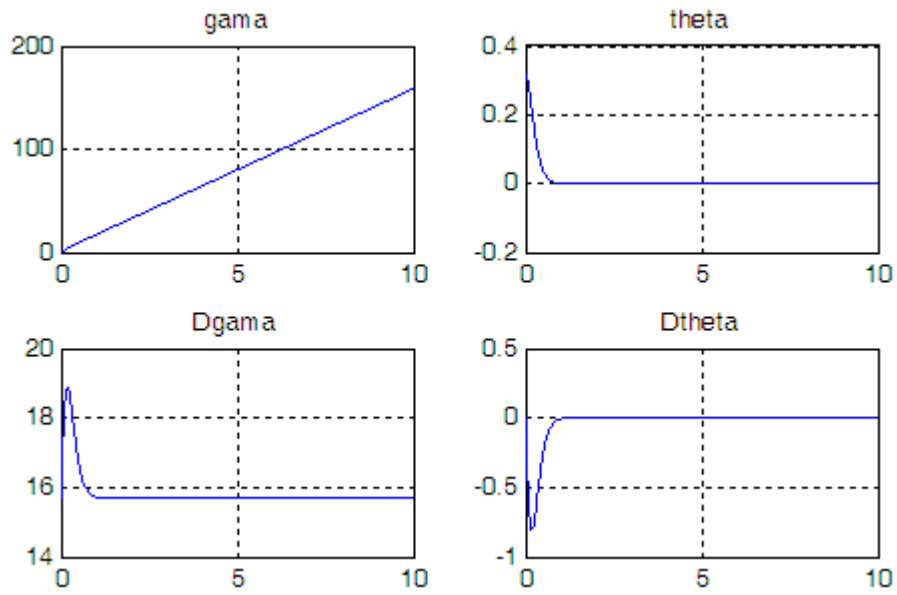
Slika 4.11.b) Rezultati simulacije uz $\dot{\gamma}_0 = 0$ i $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$: koordinateSlika 4.11.c) Rezultati simulacije uz $\dot{\gamma}_0 = 0$ i $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$: putanja

Iako kotaču nije dana početna brzina, zbog pomaka gornje mase dolazi do promjene kutne brzine kotača $\dot{\gamma}$, a zbog toga i do njegove translacije po osi x . Kut koji opisuje gornja masa se približno sinusoidalno mijenja u rasponu od θ_0 do $2\pi - \theta_0$, odnosno od 0.314 do 5.969. Kut nije savršena sinusoida upravo iz razloga što kotač ne stoji na mjestu već se translacija ovisno o položaju gornje mase. Iz istog razloga gornja masa ne opisuje kružni luk već se x i y gornje i donje mase mogu prikazati na jednom grafu slikom 4.11.c.

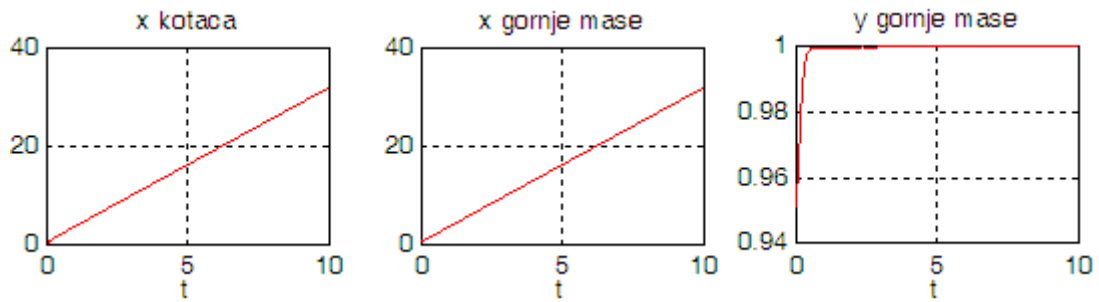
Nakon što je postignuto prirodno gibanje monocikla kao obrnutog njihala, cilj je stabilizirati točkastu masu m_2 u položaju (labilne) ravnoteže, odnosno osigurati da masa m_2 nikada ne padne. Upravo to je i ostvareno odabranim regulatorom, realiziranim kako je prije opisano.

Uz uključenje regulatora, za iste ulazne parametre, rezultati simulacije se mijenjaju na način da se otklon gornje mase brzo dovodi u položaj $\theta = 0$, nakon čega se, u slučaju da je kotaču dana početna brzina $\dot{\gamma}_0$, kotač nastavlja gibati s gornjom masom u položaju labilne ravnoteže, a u slučaju kada je $\dot{\gamma}_0 = 0$ monocikl se zaustavlja. Rezultati simulacije su prikazani za slučaj $\dot{\gamma}_0 = 5\pi$, jer nam je zanimljivije promatrati što će se dogoditi ukoliko se monocikl kreće uz postojanje početne brzine. Rezultati su prikazani slikom 4.12., te

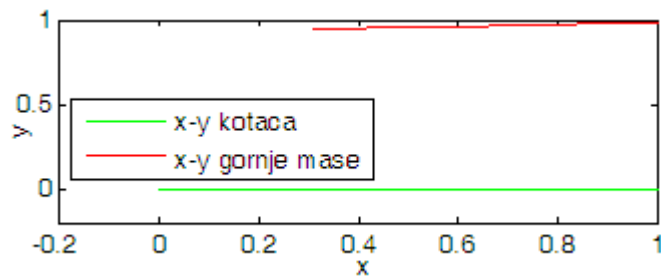
potvrđuju ideju da će se uz odabrani regulator monocikl ispraviti i nastaviti voziti jednoliko.



Slika 4.12.a) Rezultati simulacije s regulatorom nagiba: kutovi i kutne brzine



Slika 4.12.b) Rezultati simulacije s regulatorom nagiba: koordinate



Slika 4.12.c) Rezultati simulacije s regulatorom nagiba: putanja

5. Sustavi s gibanjima u tri dimenzije

5.1. Gibanje kotača u tri dimenzije

5.1.1. Jednadžbe gibanja kotača

Prije nego se krene na opis gibanja konačnog monocikla poželjno je prvo promotriti gibanje kotača u prostoru. Ovaj korak uvelike je olakšao razumijevanje i nastanak matematičkog modela te simulacije gibanja monocikla.

U ovom poglavlju promatra se kotač oblika punog valjka čiji su momenti inercije izvedeni za potrebe ovog rada, a iznose:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}m_1(3R^2 + h^2), \quad I_{zz} = \frac{1}{2}m_1R^2 \quad (5.1)$$

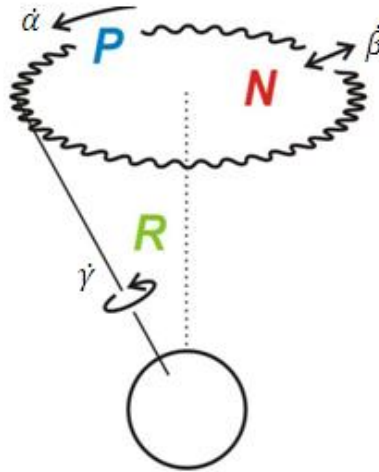
Način rada i orijentacija sustava preuzeta je iz rada [1], u kojem je obrađen sličan problem s kotačem u obliku polukugle.

Promatrani kotač ima mogućnost translacije u 3 smjera i mogućnost rotacije oko 3 koordinatne osi. Rotaciju je lakše promatrati iz perspektive rotirajućeg tijela, i u tom slučaju se, prema Euleru i Chalesu, svako gibanje krutog tijela može definirati kao superpozicija translatornog gibanja s proizvoljnom točkom tijela i sfernog gibanja oko te točke.

Sferno gibanje u sustavu rotirajućeg tijela može se opisati s tri kuta:

- zakret α oko nepomične osi z naziva se kut precesije, dok se kutna brzina $\dot{\alpha}$ naziva **precesija**;
- odklon β osi z_1 od nepomične osi z naziva se kut nutacije, dok se kutna brzina $\dot{\beta}$ naziva **nutacija**.
- zakret γ oko pomične osi z naziva se kut rotacije, dok se kutna brzina $\dot{\gamma}$ naziva **rotacija**;

Radi se o kutovima kod sfernog gibanja koji se koriste za opisivanje složenih gibanja kao što su sferno gibanje Zemlje ili zvrka. Ovi kutovi se pojavljuju i kod sfernog gibanja kotača, a radi jednostavnijeg razumijevanja dana je slika 5.1 [13].



Slika 5.1. Rotacija, nutacija i precesija zvrka

S obzirom na to da se nakon bilo koje rotacije koordinatni sustav tijela više ne podudara s referentnim koordinatnim sustavom XYZ , najprije je potrebno dovesti u vezu ta dva koordinatna sustava. Referentni sustav XYZ i koordinatni sustav kotača $x_1y_1z_1$ podudaraju se samo u početnom trenutku koji ćemo nazvati *položaj 0*. Nakon točno određenih rotacija, kotač se nalazi u *položaju 1*. Rotacija oko osi z za kut $\frac{\pi}{2} + \alpha$ i nakon toga rotacija oko osi y za kut β dovode kotač iz *položaja 0* u *položaj 1* [1]:

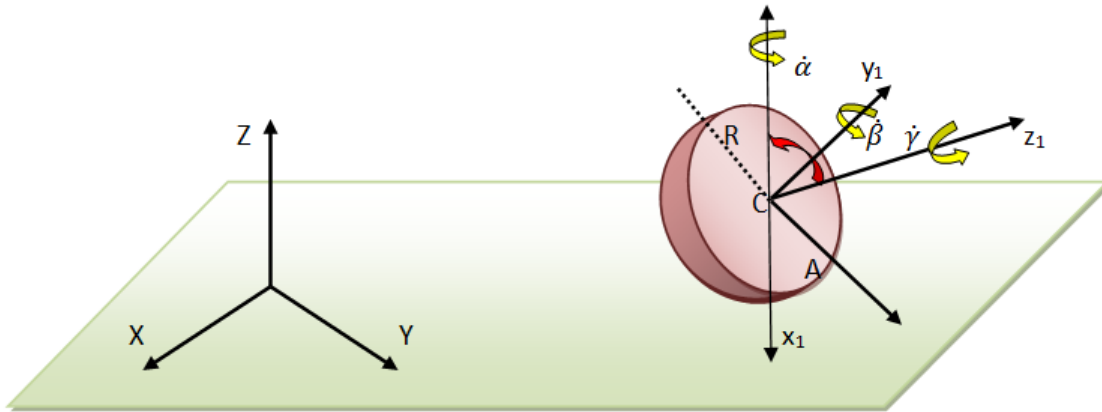
$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) & \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) & 0 \\ -\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) & \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & \sin(-\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Ukupna matrica rotacije $R = R_2R_1$ opisuje vezu između ta dva koordinatna sustava, odnosno pripadajućih jediničnih vektora, pri čemu su \vec{i}, \vec{j} i \vec{k} jedinični vektori u referentnom koordinatnom sustavu, a \vec{l}, \vec{m} i \vec{n} jedinični vektori u koordinatnom sustavu kotača:

$$\begin{bmatrix} \vec{l} \\ \vec{m} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Položaji kotača opisani zadanom rotacijom dani su slikom 5.2.



Slika 5.2. Gibanje kotača u 3D prostoru i kutovi koji ga opisuju

Vektor kutne brzine kotača u njegovom koordinatnom sustavu (5.4) slijedi iz gornje slike. S obzirom da je nutacija vezana za nepomičnu (referentnu) os Z , njezin utjecaj se dobiva projekcijama kutne brzine $\dot{\alpha}$ s osi z na osi x_1 , y_1 i z_1 (utjecaj na rotaciju oko osi y_1 se gubi jer se radi o okomitim osima).

$$\vec{\omega}_1 = \omega_{x_1} \vec{l} + \omega_{y_1} \vec{m} + \omega_{z_1} \vec{n} = (-\dot{\alpha} \sin \beta) \vec{l} + (\dot{\beta}) \vec{m} + (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \vec{n} \quad (5.4)$$

Translacijska brzina kotača se tada računa prema (5.5), gdje brzina \vec{v}_T predstavlja brzinu podloge u odnosu na centar kotača, te je jednaka nuli uz uvjet da nema proklizavanja.

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_B \times \vec{R} + \vec{v}_T, \quad \vec{v}_T = 0 \quad (5.5)$$

Uz zadani uvjet slijedi da je brzina kotača u sustavu $x_1 y_1 z_1$:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_B \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{l} & \vec{m} & \vec{n} \\ -\dot{\alpha} \sin \beta & \dot{\beta} & \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta \\ -R & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{m} R_W (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) + \vec{n} (R_W \dot{\beta}) \quad (5.6)$$

Prebacivanje u referentni koordinatni sustav se izvodi jer promatranje položaja u tom sustavu ima više smisla prilikom simulacije. Proizlazi da je translacijska brzina kotača:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= R(\dot{\gamma} \cos \alpha + \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta) \vec{i} \\ &\quad + (\dot{\gamma} \sin \alpha + \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta) \vec{j} + (\dot{\beta} \cos \beta) \vec{k} \\ &= \dot{X} \vec{i} + \dot{Y} \vec{j} + \dot{Z} \vec{k} \end{aligned} \quad (5.7)$$

U gornjem izrazu uvedene su varijable \dot{X}, \dot{Y} i \dot{Z} , koje se u postupku derivacije Lagrangiana tretiraju kao nezavisne varijable, i zato predstavljaju veze (ograničenja) prilikom računanja Lagrangeovih multiplikatora.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= R(\dot{\gamma} \cos \alpha + \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta) \\ \dot{Y} &= R(\dot{\gamma} \sin \alpha + \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta) \\ \dot{Z} &= R\dot{\beta} \cos \beta\end{aligned}\quad (5.8)$$

Kako je izraz za \dot{Z} u ovom slučaju integrabilan, tj. rješenje $Z = R \sin \beta$ je vidljivo iz same diferencijalne jednadžbe za \dot{Z} , taj se izraz može izostaviti iz ograničenja.

Kinetička energija kotača sastoji se od kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije i dana je izrazom (5.9). Potencijalna energija kotača (5.10) lako se izvodi iz položaja kotača na slici 5.2., gdje se vidi da se visina centra mase mijenja po zakonu $R \sin \beta$.

$$\begin{aligned}E_{K1} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2 + \dot{Z}_1^2) + \frac{1}{2} (I_{xx1} (-\dot{\alpha} \sin \beta)^2 + I_{yy1} (\dot{\beta})^2 + I_{zz1} (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta)^2)\end{aligned}\quad (5.9)$$

$$E_{P1} = m_1 g R \sin \beta \quad (5.10)$$

Iz navedenih energija slijedi izraz za Lagrangian kao razlika izraza za kinetičku i potencijalnu energiju:

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} \left[m_1 (\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2 + \dot{Z}_1^2) + I_{xx1} \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + I_{yy1} \dot{\beta}^2 \right. \\ &\quad \left. + I_{zz1} (\dot{\gamma}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta) \right] - m_1 g R \sin \beta\end{aligned}\quad (5.11)$$

Ovako opisan sustav sadrži 5 stupnjeva slobode, pa je Lagrangian, prema Euler-Lagrangeovim formulama, potrebno derivirati po tih 5 varijabli $q_i = (X_1, Y_1, \alpha, \beta, \gamma)$. Dobiva se sljedećih pet jednadžbi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} - \frac{\partial L}{\partial X_1} = m_1 \ddot{X}_1 \quad (5.12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_1} - \frac{\partial L}{\partial Y_1} = m_1 \ddot{Y}_1 \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \ddot{\alpha}(I_{xx1} + (I_{zz1} - I_{xx1}) \cos^2 \beta) + 2(I_{xx1} - I_{zz1})\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \sin \beta \\ &\quad + I_{zz1}\dot{\gamma} \cos \beta - I_{zz1}\dot{\beta}\dot{\gamma} \sin \beta \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial \beta} = I_{yy1}\ddot{\beta} + (I_{zz1} - I_{xx1})\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + I_{zz1}\dot{\alpha}\dot{\gamma} \sin \beta + m_1 g R \cos \beta \quad (5.15)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial L}{\partial \gamma} = I_{zz1}(\dot{\gamma} + \ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta) \quad (5.16)$$

S obzirom na postojanje ograničenja, jednačbe gibanja prelaze u oblik (5.17), odnosno još je potrebno izvesti desnu stranu jednačbe.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_{s=1}^{m-n} \lambda_s A_{sj} \quad (5.17)$$

Ako ograničenja zapišemo u njihovom općem obliku $\sum A_{si} \dot{q}_i = 0$, u slučaju dva ograničenja raspisivanje opće jednačbe glasi:

$$\begin{aligned} A_{11}\dot{X} + A_{12}\dot{Y} + A_{13}\dot{\alpha} + A_{14}\dot{\beta} + A_{15}\dot{\gamma} + a_1 &= 0 \\ A_{21}\dot{X} + A_{22}\dot{Y} + A_{23}\dot{\alpha} + A_{24}\dot{\beta} + A_{25}\dot{\gamma} + a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

U skladu s gore navedenim, iz (5.8) proizlaze sljedeći izrazi:

$$\begin{aligned} \dot{X} - \dot{\alpha}R \cos \alpha \cos \beta + \dot{\beta}R \sin \alpha \sin \beta - \dot{\gamma}R \cos \alpha &= 0 \\ \dot{Y} - \dot{\alpha}R \sin \alpha \cos \beta - \dot{\beta}R \cos \alpha \sin \beta - \dot{\gamma}R \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Usporedbom tih izraza slijedi matrica koeficijenata A_{sj} koji množe Lagrangeove multiplikatore:

$$A_{sj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -R \cos \alpha \cos \beta & R \sin \alpha \sin \beta & -R \cos \alpha \\ 0 & 1 & -R \sin \alpha \cos \beta & -R \cos \alpha \sin \beta & -R \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Uz uvrštena ograničenja jednačbe (5.12)-(5.16) prelaze u sljedeće jednačbe:

$$m_1 \ddot{x} = \lambda_1 \quad (5.21)$$

$$m_1 \ddot{y} = \lambda_2 \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(I_{xx1} \sin^2 \beta + I_{zz1} \cos^2 \beta) + 2(I_{xx1} - I_{zz1})\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \sin \beta + I_{zz1}\dot{\gamma} \cos \beta \\ - I_{zz1}\dot{\beta}\dot{\gamma} \sin \beta = -\lambda_1 R \cos \alpha \cos \beta - \lambda_2 R \sin \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} I_{yy1}\ddot{\beta} + (I_{zz1} - I_{xx1})\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + I_{zz1}\dot{\alpha}\dot{\gamma} \sin \beta + m_1 g R \cos \beta \\ = \lambda_1 R \sin \alpha \sin \beta - \lambda_2 R \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$I_{zz1}(\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta) = -\lambda_1 R \cos \alpha - \lambda_2 R \sin \alpha \quad (5.25)$$

Uvrštavanjem (5.21) i (5.22) u preostale 3 jednačbe dobiva se sustav triju jednačbi s 3 nepoznanice (α, β i γ):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(I_{xx1} + (I_{zz1} - I_{xx1} + m_1 R^2) \cos^2 \beta) + \ddot{\gamma}(I_{zz1} + m_1 R^2) \cos \beta \\ = 2(I_{zz1} - I_{xx1} + m_1 R^2) \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \sin \beta + I_{zz1} \dot{\beta} \dot{\gamma} \sin \beta \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}(I_{yy1} + m_1 R^2 \sin^2 \beta) = -(m_1 R^2 + I_{zz1} - I_{xx1}) \\ - m_1 R^2 \dot{\beta}^2 \cos \beta \sin \beta - (I_{zz1} + m_1 R^2) \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta - m_1 g R \cos \beta \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\ddot{\alpha}(I_{zz1} + m_1 R^2) \cos \beta + \ddot{\gamma}(I_{zz1} + m_1 R^2) = (I_{zz1} + 2m_1 R^2) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \quad (5.28)$$

Izraz za $\ddot{\beta}$ pokazuje da ta varijabla ne ovisi o $\ddot{\alpha}$ niti o $\ddot{\gamma}$, pa je podsustav koji sadrži samo $\ddot{\alpha}$ i $\ddot{\gamma}$ zapisan matrično u obliku:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{xx1} + (I_{zz1} - I_{xx1} + MR^2) \cos^2 \beta & (I_{zz1} + MR^2) \cos \beta \\ (I_{zz1} + MR^2) \cos \beta & I_{zz1} + MR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2(I_{zz1} - I_{xx1} + MR^2) \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \sin \beta + I_{zz1} \dot{\beta} \dot{\gamma} \sin \beta \\ (I_{zz1} + 2MR^2) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Množenjem gornjeg izraza s inverzom ulazne matrice $\ddot{\alpha}$ i $\ddot{\gamma}$ se mogu eksplicitno izraziti izrazima (5.30) i (5.32), dok se izraz za $\ddot{\beta}$ (5.31) dobiva neposredno iz (5.27):

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{I_{xx1} \sin \beta} [(I_{zz1} - 2I_{xx1}) \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta + I_{zz1} \dot{\beta} \dot{\gamma}] \quad (5.30)$$

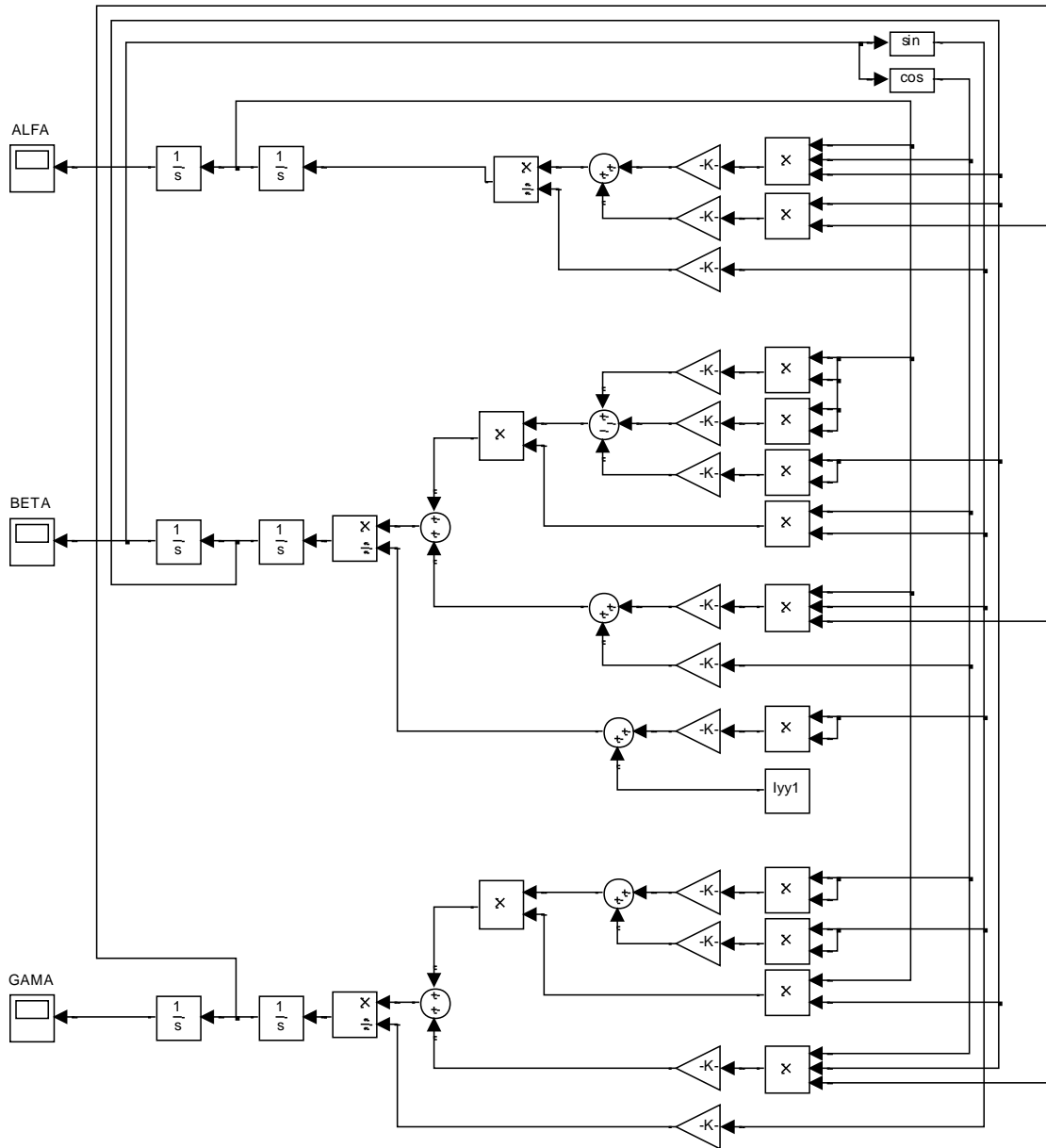
$$\begin{aligned} \ddot{\beta} = \frac{((I_{xx1} - I_{zz1}) \dot{\alpha}^2 - m_1 R^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)) \cos \beta \sin \beta \\ - (I_{zz1} + m_1 R^2) \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta - m_1 g R \cos \beta}{I_{yy1} + m_1 R^2 \sin^2 \beta} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{\dot{\alpha} \dot{\beta} \left((2I_{xx1} - I_{zz1}) \cos^2 \beta + I_{xx1} \frac{I_{zz1} + 2m_1 R^2}{I_{zz1} + m_1 R^2} \sin^2 \beta \right) - I_{zz1} \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \beta}{I_{xx1} \sin \beta} \quad (5.32)$$

Prethodne jednačbe pokazuju koliku složenost unosi prijelaz sa sustava koji ima mogućnost gibanja u dvije dimenzije na sustav koji ima mogućnost gibanja u tri dimenzije.

5.1.2. Simulacija gibanja kotača

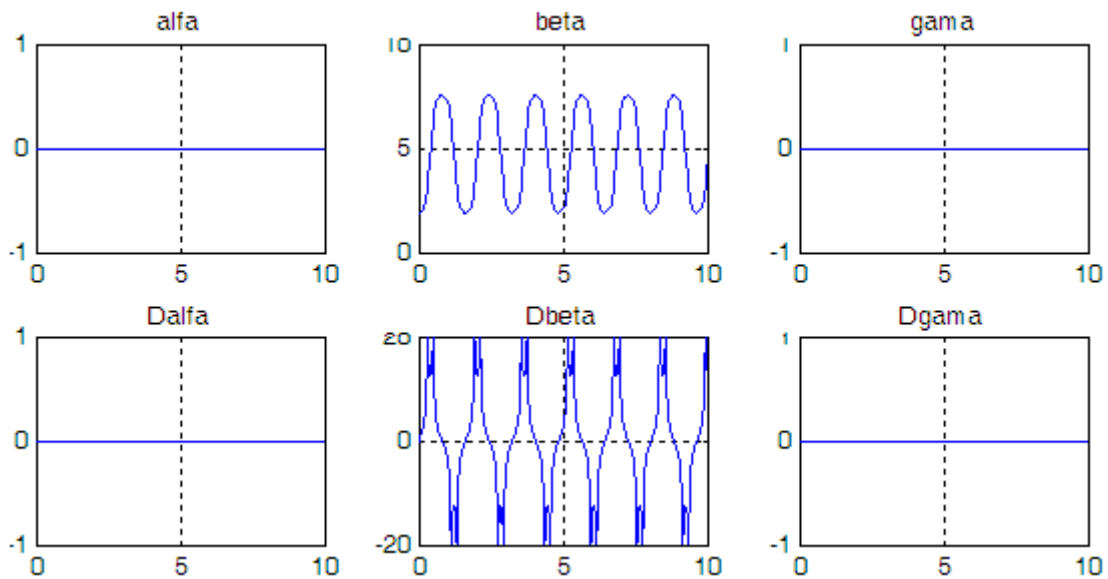
Jednadžbe (5.30)-(5.32) implementirane su u Matlabu u obliku Simulink modela nazvanog *wheel_3D_simulink.mdl*, koji je prikazan slikom 5.3., te *wheel_3D.m* funkcije koja se poziva *ode23 solverom* za numeričku integraciju, a čiji se kod nalazi u privitku.



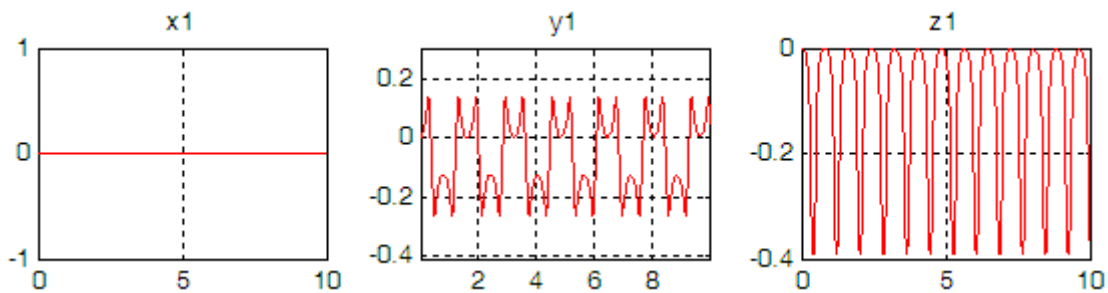
Slika 5.3. Simulink model gibanja kotača u 3D prostoru

Uz parametre $g = 9.81$, $m_1 = 10$, $R = 0.2$, momente inercije I_{xx1} , I_{yy1} i I_{zz1} koji su izračunati za disk, te početnu kutnu brzinu $\dot{\gamma} = 0$ i početni otklon $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$, koji predstavlja nagib kotača u njegovu lijevu ili desnu stranu u odnosu na vertikalnu za $\frac{\pi}{10}$,

dobivaju se rezultati prikazani slikom 5.4. Kotač se u ovom slučaju ponaša kao njihalo s hvatištem u točki dodira kotača i podloge.



Slika 5.4.a) Rezultati simulacije uz $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ i $\dot{\gamma} = 0$: kutovi i kutne brzine



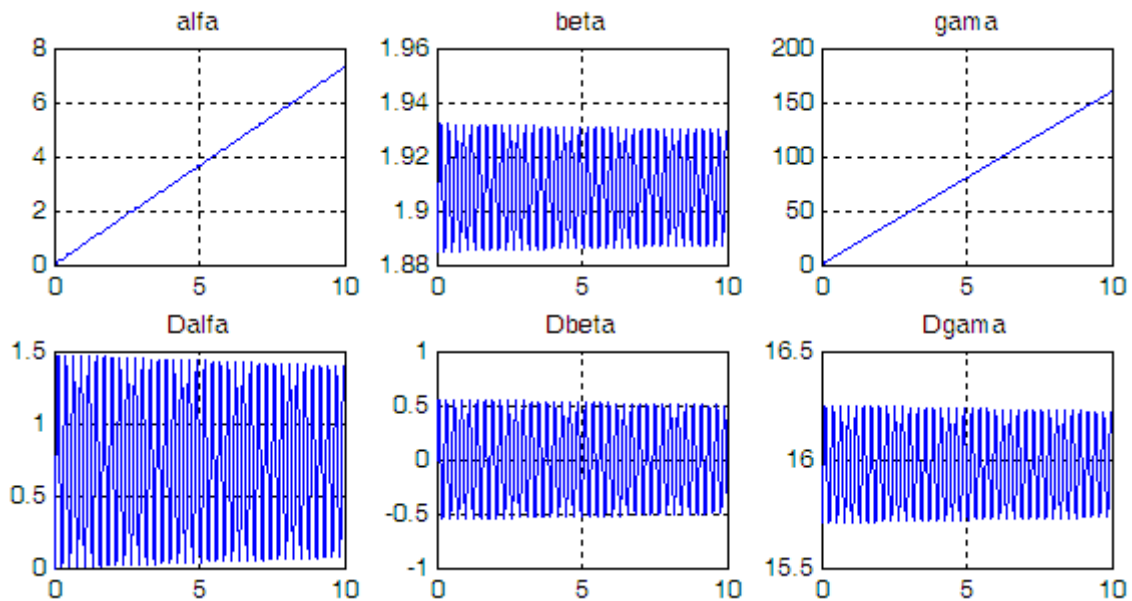
Slika 5.4.b) Rezultati simulacije uz $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ i $\dot{\gamma} = 0$: položaj kotača

Uz jednake parametre, ali uz početni otklon $\beta = \frac{\pi}{2}$ te početnu kutnu brzinu $\dot{\gamma} = 5\pi$ kotač se kreće naprijed, pa kut γ linearno raste, a u skladu s tim i prijeđeni put u smjeru osi x . Zanimljiviji slučaj ipak predstavlja situacija gdje uz početnu kutnu brzinu $\dot{\gamma} = 5\pi$ postoji i početni otklon $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$, pa su rezultati ove simulacije grafički prikazani slikom 5.5. U danim uvjetima događa se sljedeće: kotač je nagnut u odnosu na vertikalnu za $\frac{\pi}{10}$, no zbog početne brzine $\dot{\gamma}$ kojom je gurnut naprijed kotač ne pada na tlo već se sam stabilizira, odnosno vraća u uspravan položaj ($\beta = \frac{\pi}{2}$). Amplituda oscilacija koje se pritom javljaju su zanemarive, te se smanjuju s povećanjem početne brzine.

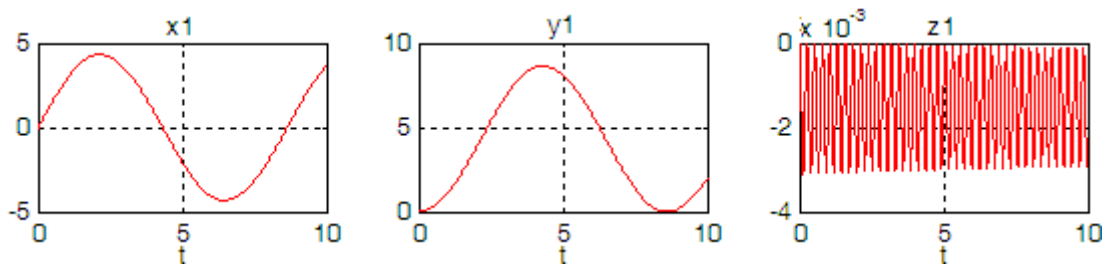
Ovo se događa zbog očuvanja kutne količine gibanja, koja nije eksplicitno izražena, već je implicitno sadržana u Lagrangeovoj formulaciji, kao što je objašnjeno u teoretskom

dijelu rada. Također, poznato je da koliko je kotač nagnut, za jednako toliko on skreće u prostoru, zbog zakona očuvanja energije. Iz toga proizlazi da će kotač konstantno skretati u istu stranu, te zbog toga njegova putanja predstavlja kružnicu, prema slici 5.5.c.

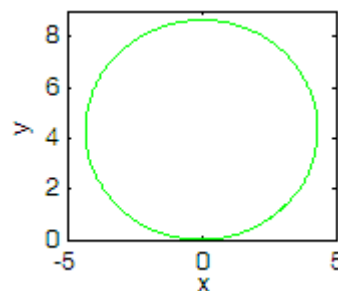
Ovakvu stabilizaciju, za koju nije potreban regulator, te gibanje kotača u krug jednostavno je potvrditi upravo ovakvim eksperimentom: gurnemo li kotač naprijed, ali nagnut na jednu stranu, on će se sam ispraviti i nastaviti kotrljati po kružnici. U idealnom slučaju, kad ne bi bilo trenja, kotač nikad ne bi pao na tlo, što pokazuje i simulacija.



Slika 5.5.a) Rezultati simulacije uz $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ i $\dot{\gamma} = 5\pi$: kutovi i kutne brzine



Slika 5.5.b) Rezultati simulacije uz $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ i $\dot{\gamma} = 5\pi$: koordinate kotača



Slika 5.5.c) Rezultati simulacije uz $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ i $\dot{\gamma} = 5\pi$: putanja kotača

5.2. Gibanje gornje mase u tri dimenzije

Dodavanje gornje mase u sustav značajno usložnjava jednadžbe gibanja, te su iz tog razloga, kao i zbog preglednosti postupka, u ovom poglavlju jednadžbe napisane isključivo za gornju masu (bez kotača). Konačni Lagrangian za monocikl dobit će se kao zbroj Lagrangiana za kotač i Lagrangiana za gornju masu, što je moguće napraviti zbog svojstva aditivnosti Lagrangiana.

Značajna aproksimacija koja se uvodi u ovom koraku jest upravo u načinu modeliranja gornje mase. Gornja masa je ono što u konačnici treba predstavljati čovjeka, međutim, čovjeka je jako teško uzeti u razmatranje, jer je njegova masa na različitim dijelovima drugačija, a i njegova visina mijenja visinu težišta monocikla, pa je problem određivanja momenta inercije čovjeka riješen zamjenom čovjeka točkastom masom [2].

Gibanje gornje mase je dijelom ograničeno gibanjem kotača, odnosno jedino neovisno gibanje gornje mase m_2 u odnosu na gibanje kotača je kutna brzina oko glavne osi kotača. Prema tome, uzme li se proizvoljno da je masa m_2 zakrenuta za kut θ u odnosu na kotač i da je $\dot{\theta}$ kutna brzina rotacije mase m_2 oko glavne osi kotača, ukupni vektor kutne brzine mase m_2 iznosi:

$$\vec{\omega}_2 = \omega_{x2} \vec{l} + \omega_{y2} \vec{m} + \omega_{z2} \vec{n} = -\dot{\alpha} \sin \beta \vec{l} + \dot{\beta} \vec{m} + (\dot{\theta} + \dot{\alpha} \cos \beta) \vec{n} \quad (5.33)$$

Brzina translacije se izvodi iz kutne brzine kao:

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{v}_1 \quad (5.34)$$

Gdje je vektor položaja gornje mase:

$$\vec{r}_2 = L \cos \theta \vec{l} + L \sin \theta \vec{m} \quad (5.35)$$

Kao i za kotač, prilikom izvoda brzine translacije moguće je uvesti nove varijable X_2, Y_2 i Z_2 , te tada se brzinu translacije može pisati:

$$\vec{v}_2 = \dot{X}_2 \vec{i} + \dot{Y}_2 \vec{j} + \dot{Z}_2 \vec{k} \quad (5.36)$$

Takav račun uzima u obzir sljedeće supstitucije, do kojih se došlo razvojem jednadžbe (5.34):

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_2 &= \dot{X} + L\dot{\alpha}(L\dot{\alpha} \sin \alpha \sin \theta - \cos \alpha \cos \beta \cos \theta) + L\dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta \cos \theta \\
 &\quad + L\dot{\theta}(\sin \alpha \cos \beta \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta) \\
 \dot{Y}_2 &= \dot{Y} - L\dot{\alpha}(\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \beta \cos \theta) - L\dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta \cos \theta \\
 &\quad - L\dot{\theta}(\cos \alpha \cos \beta \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) \\
 \dot{Z}_2 &= \dot{Z}_1 - L\dot{\beta} \cos \theta \cos \beta + L\dot{\theta} \sin \theta \sin \beta
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Dodatno, koordinate položaja gornje mase u referentnom koordinatnom sustavu mogu se izraziti kao:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + R_{O \rightarrow B} \begin{bmatrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

Ukoliko se zanemari kinetička energija rotacije i uzme u obzir samo kinetička energija translacije, što je aproksimacija kojom se ne gubi značajno na točnosti, za Lagrangian kao razliku kinetičke i potencijalne energije gornje mase može se pisati:

Iz gornjih izraza može se izvesti brzina translacije u referentnom koordinatnom sustavu:

$$L = \frac{1}{2} m_2 (\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2 + \dot{Z}_2^2) - m_2 g (R \sin \beta - L \cos \theta \sin \beta) \tag{5.39}$$

5.3. Gibanje monocikla u tri dimenzije

5.3.1. Jednadžbe gibanja monocikla u 3D

Monocikl, koji se matematički modelira u ovom poglavlju, jest pojednostavljena verzija stvarnog monocikla. Riječ je o konkretnom samostabilizirajućem monociklu koji je u procesu razvoja na Zavodu za elektroničke sustave i obradbu informacija na Fakultetu elektrotehnike i računarstva. Stvarni monocikl ima dva motora: jedan se nalazi u središtu kotača i služi za vrtnju kotača, odnosno omogućuje gibanje monocikla, a drugi motor se nalazi na kratkoj osovini iznad kotača i služi za skretanje u željenom smjeru. Također, uz centar kotača fiksirane su i pedale na kojima čovjek stoji na monociklu. Promatrana pojednostavljena verzija ovog vozila sastoji se od kotača i gornje mase [4].

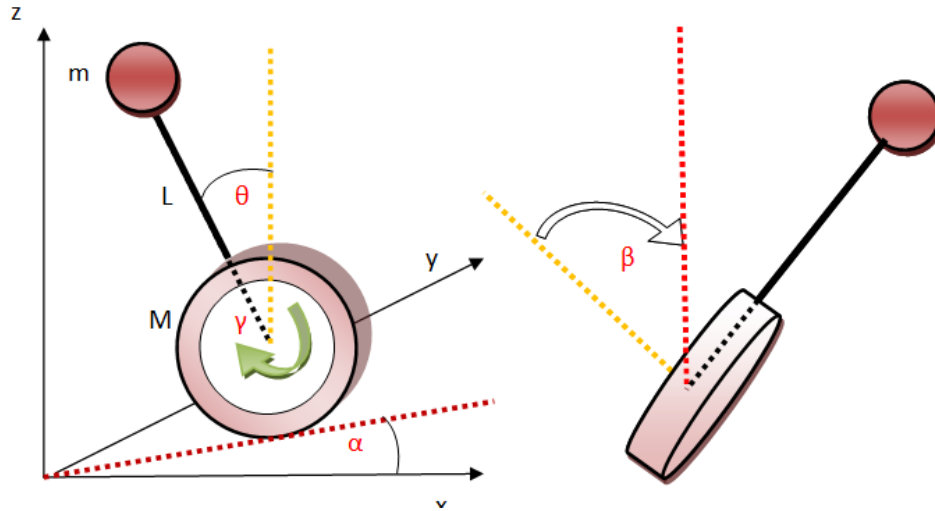
Zanemarivanje svih dijelova koji su u potpunosti fiksno vezani uz kotač (donji motor i pedale), kao i dijelova koji su fiksno vezani uz gornju masu (štap, tj. kratka osovina) ne utječu značajno jer je riječ o tijelima koja nemaju vlastita gibanja već se u jednadžbama gibanja pojavljuju isključivo kroz momente inercije donje i gornje mase, odnosno kroz konstante. Postojanje gornjeg motora bi omogućilo dodatni stupanj slobode gornje mase, no u ovom trenutku uzima se da je dovoljan dosad promatrani jedan stupanj slobode u odnosu na kotač. Izuzimanje pogona motorima također nije značajno, u okvirima gibanja koja nas zanimaju.

Pri promatranju se zanemaruju sile trenja, mogućnost proklizavanja kotača i smatra se kotač ima samo jednu dodirnu točku s podlogom.

Da bi se promatrani sustav u potpunosti moglo opisati nužne su najmanje 4 različite varijable α, β, γ i θ . α, β i γ predstavljaju iste veličine koje su objašnjene u slučaju gibanja kotača u tri dimenzije, dok je kut θ kut opisan prilikom uvođenja gornje mase m_2 , a predstavlja rotaciju mase m_2 naprijed ili natrag. Cjelokupni sustav prikazan je slikom 5.6.

Kao što je prije rečeno, aditivnost Lagrangiana omogućuje nam jednostavno povezivanje kotača m_1 i gornje mase m_2 u jedinstven sustav.

$$L = L_{\text{kotač}} + L_{\text{gornje mase}} \quad (5.40)$$



Slika 5.6. Gibanje monocikla u prostoru

Rastavom na komponente koje prikazuju sadržaj energije Lagrangian je:

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1^2}_{\text{translacija}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_{z1}\omega_1^2}_{\text{rotacija}} + \underbrace{\frac{1}{2}m_2v_2^2}_{\text{translacija}} - \underbrace{m_1gR \sin \beta}_{E_P \text{ kotača}} - \underbrace{m_2g \sin \beta (R - L \cos \theta)}_{E_P \text{ gornje mase}} \quad (5.41)$$

Uvrštavanjem svih veličina koje smatramo nezavisnim varijablama dobiva se sljedeći izraz:

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2 + \dot{Z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2 + \dot{Z}_2^2) + \frac{1}{2}(I_{xx1}\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + I_{yy1}\dot{\beta}^2 + I_{zz1}(\dot{\gamma}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta)) - m_1gR \sin \beta - m_2g(R \sin \beta - L \cos \theta \sin \beta) \quad (5.42)$$

Kako $\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1, \dot{X}_2, \dot{Y}_2$ i \dot{Z}_2 zapravo nisu nezavisni već ovise o α, β, γ i θ , izrazi kojima je dana ta ovisnost predstavljaju veze koje je potrebno uzeti u obzir kod raspisivanja desne strane Euler-Lagrangeovih jednadžbi.

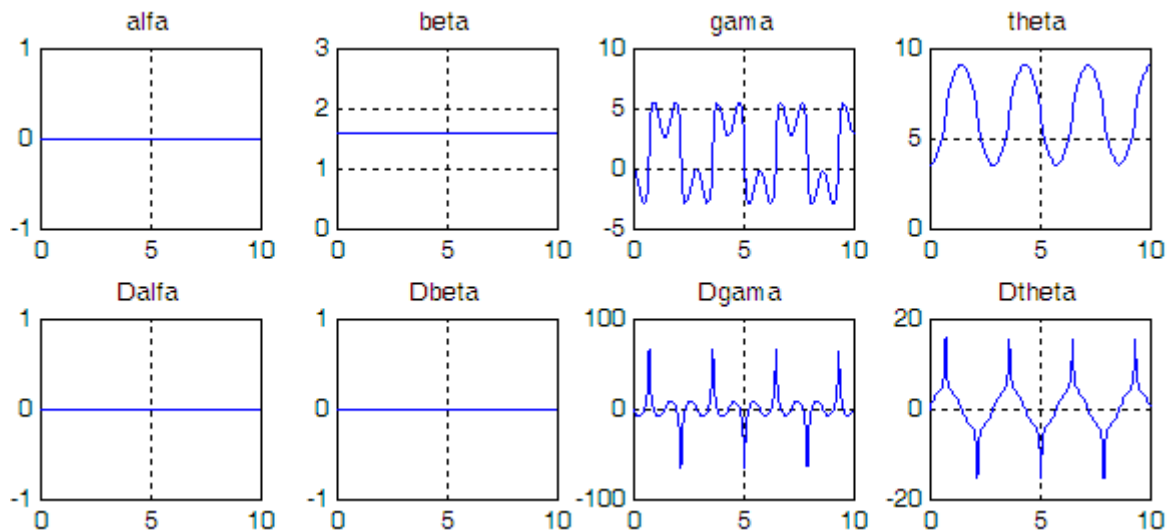
S obzirom na to da se jednadžbe znatno usložnjavaju i produžuju, izvod, kao ni konačne jednadžbe koje opisuju gibanje sustava, neće biti raspisivane u ovom dijelu rada. Ipak, cijeli postupak je izveden, te je programska izvedba postupka dostupna u prilogu. U ovom slučaju je, zbog jednostavnijeg rada sa simboličkim varijablama, korišten programski paket Mathematica.

5.3.2. Simulacija gibanja monocikla u 3D

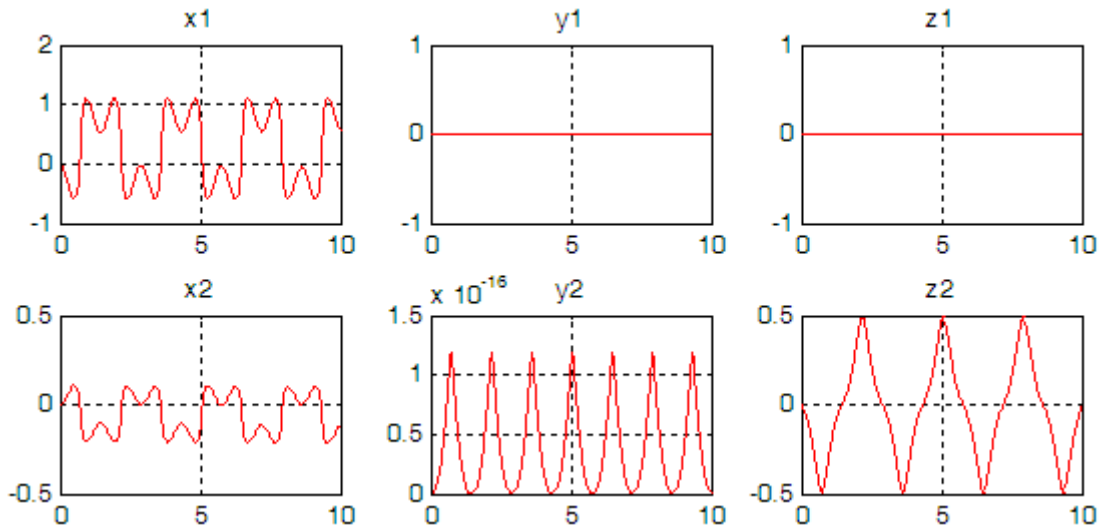
Rezultati dobiveni Mathematicom upotrijebljeni su za kreiranje .m funkcije u Matlabu za numeričku integraciju. Funkcija je nazvana unicycle_3D.m te je dostupna u prilogu.

Regulator za regulaciju nagiba gornje mase, upotrijebljen unutar ove funkcije, je PID regulator s koeficijentima $K_P = 15000$, $K_I = 0$ i $K_D = 1500$.

Simulacija je pokrenuta uz parametre $g = 9.81$, $m_1 = 10$, $R = 0.4$, momente inercije I_{xx1} , I_{yy1} i I_{zz1} koji su izračunati za disk, početni otklon $\beta_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$, početni nagib $\theta_0 = \pi + \frac{\pi}{10}$, početnu brzinu kotača $\dot{\gamma}_0 = 0$ i početnu brzinu precesije $\dot{\alpha}_0 = 0$. Rezultati simulacije su prikazani slikom 5.7. Rezultati se u potpunosti podudaraju s rezultatima za monocikl u dvije dimenzije iz poglavlja 4.3.2., što je očekivano s obzirom na to da se eliminacijom kuta β gubi dimenzija dubine.

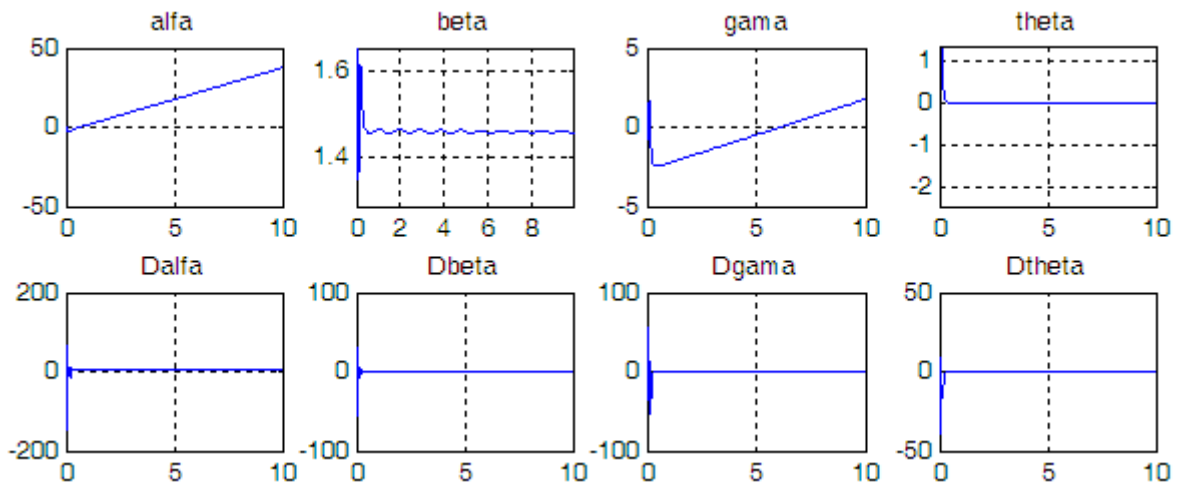


Slika 5.7.a) Rezultati simulacije uz $\dot{\alpha}_0 = 0$, $\beta_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$, $\dot{\gamma}_0 = 0$, $\theta_0 = \pi + \frac{\pi}{10}$: kutovi i kutne brzine

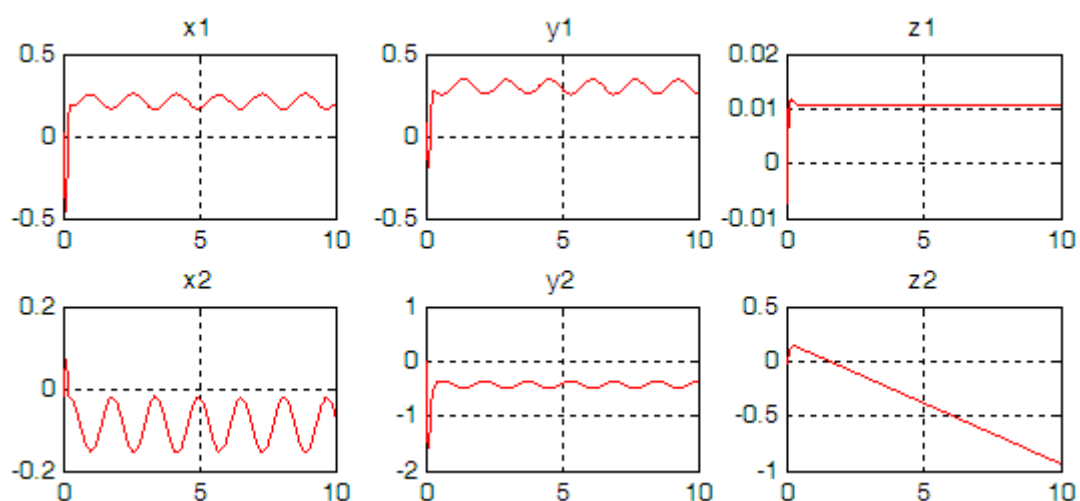


Slika 5.7.b) Rezultati simulacije uz $\dot{\alpha}_0 = 0, \beta_0 = \frac{\pi}{2}, \dot{\gamma}_0 = 0, \theta_0 = \pi + \frac{\pi}{10}$: koordinate

Uz početne uvjete simulacije $\dot{\alpha}_0 = 0, \beta_0 = \frac{\pi}{2}, \dot{\gamma}_0 = 0, \theta_0 = \pi + \frac{\pi}{10}$ te uključen regulator nagiba dobivaju se rezultati prikazani slikom 5.9. Kut β se sam stabilizira oko $\frac{\pi}{2}$, kao što je objašnjeno u poglavlju 5.1.2. Na slici 5.8.a) se, zbog mjerila, ne vidi kako se oscilacije kuta β koje su u početku reda veličine 10^{-2} blago smanjuju s istekom vremena. Ipak, zbog oscilacija kuta β se, kao i prije, događaju sinusoidalne promjene koordinata x i y kotača, pa on počinje opisivati kružnicu. Istovremeno, regulator nagiba vrlo brzo vraća gornju masu u ravnotežni položaj. Pritom je stabilizacija ostvarena oko ravnotežnog položaja $\theta = 0$. Za položaj $\theta = \pi$ vrijedilo bi isto, jer se sustav jednako kreće u uvjetima labilne i stabilne ravnoteže, no kako program puno brže računa za slučaj $\theta = 0$, odabrano je ovo rješenje.



Slika 5.8.a) Rezultati simulacije uz $\dot{\alpha}_0 = 0, \beta_0 = \frac{\pi}{2}, \dot{\gamma}_0 = 0, \theta_0 = \pi + \frac{\pi}{10}$: kutovi i kutne brzine



Slika 5.8.b) Rezultati simulacije uz $\dot{\alpha}_0 = \mathbf{0}$, $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\gamma}_0 = \mathbf{0}$, $\theta_0 = \pi + \frac{\pi}{10}$: koordinate

Stabilizacija sustava, koju potvrđuju slike, predstavlja upravo željeno ponašanje samobalansirajućeg vozila na jednom kotaču.

5. Zaključak

Samostabilizirajuće osobno vozilo ili monocikl, modeliran u ovom radu, jest pojednostavljena verzija konkretnog električnog monocikla koji je u postupku razvoja, a planiran je kao osobno vozilo za prijevoz ljudi. Analizirani pojednostavljeni model promatran je kao jedinstven sustav sastavljen od dvaju idealnih krutih tijela: kotača i gornje mase. U razmatranjima su zanemareni svi dijelovi koji su u potpunosti fiksno vezani uz kotač kao i dijelovi koji su fiksno vezani uz gornju masu, jer oni utječu isključivo kroz konstante u konačnim jednadžbama gibanja.

Jedina važnija aproksimacija modela leži u modeliranju gornje mase. Gornja masa je ono što u konačnici treba predstavljati čovjeka, međutim, čovjeka je jako teško uzeti u razmatranje, jer je njegova masa na različitim dijelovima drugačija, a njegova visina mijenja visinu težišta monocikla. U ostvarenom modelu monocikla čovjek je predstavljen točkastom masom, koja ima jedan stupanj slobode u odnosu na kotač.

Direktan razvoj matematičkog modela čak i ovakve, pojednostavljene inačice monocikla, pokazuje se kao jako složen zadatak. Zato su najprije izvedeni matematički modeli i simulacije nekih jednostavnijih sustava u dvije i tri dimenzije, da bi se u konačnici došlo i do modela samoga monocikla u prostoru.

Promatrani monocikl ima mogućnost translacije u 3 smjera i mogućnost rotacije oko 3 koordinatne osi. U gibanju se monocikl može naginjati u stranu, naprijed-natrag, može skretati u prostoru ili se jednostavno gibati samo naprijed. Takvo gibanje u prostoru se može opisati s minimalno četiri kuta, α, β, γ i θ , koji predstavljaju kut otklona u horizontalnoj ravnini, nagib kotača u odnosu na vertikalnu os, kut rotacije, odnosno zaokreta oko pomične osi z , te nagib monocikla naprijed ili natrag u odnosu na vertikalnu.

Promatrani sustav bez regulacije je nestabilan, no uvođenjem regulatora sustav se može dovesti u uspravno stanje, tj. stanje labilne ravnoteže. Vožnja stvarnog monocikla bez padanja na zemlju bit će moguća upravo zahvaljujući regulatorima, koji će služiti za ispravljanje neželjenih nagiba monocikla i postizanje ravnoteže, a samim time i sigurne vožnje monocikla.

Dinamičko gibanje monocikla najbolje se može razumjeti iz simulacija. Simulacije su jednostavan i brz grafički prikaz dinamičkog gibanja promatranog sustava za željene parametre. U simulacijama se mogu postavljati željeni početni kutovi, zadavati razne kutne brzine, mijenjati iznos gornje mase, duljine štapa, pa čak i iznos gravitacije i zatim promatrati gibanje sustava za izabrane parametre. Simulacije su jako praktične, jer na jednostavan način omogućuju promjenu uvjeta i promatranje i razumijevanje utjecaja pojedinog parametra na sustav, one ubrzavaju razvoj modela i smanjuju troškove razvoja.

U simulacije je također ugrađena mogućnost regulacije sustava, odnosno držanja sustava u labilnoj ravnoteži i njegovo željeno gibanje u prostoru, čime je ostvaren i konačni cilj ovog rada.

6. Zahvala

Zahvaljujemo našem mentoru, prof. dr. sc. Damiru Seršiću, na pomoći pri realizaciji ovog rada te na svim konstruktivnim i korisnim savjetima i sugestijama.

Hvala i svim kolegama i kolegicama sa ZESOI-a na razumijevanju i spremnosti za bilo kakvu pomoć, koja je omogućila uspješno privođenje rada kraju.

7. Literatura

- [1] Nandy, G.; Xu, X. Dynamic Model of A Gyroscopic Wheel. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Leuven, Belgium (1998).
- [2] Zenkov, D. V.; Bloch, A. M.; Marsden, J. E. The Lyapunov–Malkin theorem and stabilization of the unicycle with rider. *Systems & Control Letters*. 45 (2002), str. 293 – 302.
- [3] Lee, J., Stanford University, 14. prosinac 2007., *Unicycle and Inverted Pendulum*, <http://large.stanford.edu/courses/2008/ph210/lee2>, 3. ožujak 2011.
- [4] Brkić, K. Modeliranje i izgradnja samobalansirajućeg mobilnog robota s dva paralelna pogonska kotača. Diplomski rad. Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2008.
- [5] Mahmood, W; Shamim, S; Zia, W; Anwar, S. Rotational Motion of Rigid Bodies. Skripta. LUMS School of Science and Engineering. (2009)
- [6] Antunović, Ž. Klasična mehanika. Skripta. Prirodoslovno - matematički fakultet, Sveučilišta u Zagrebu.
- [7] Šikić, Z. Diferencijalne jednačbe. Skripta. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu.
- [8] Rotation matrix, 28. lipanj 2007.
http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix, 13. travanj 2011.
- [9] Moment sile, 20. veljače 2011.,
http://hr.wikipedia.org/wiki/Moment_sile, 5. ožujak 2011.
- [10] Lagrangian mechanics, 17. ožujak 2011.,
http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_mechanics, 25. ožujak 2011.
- [11] Moment of inertia, 30 veljača 2011.,
http://en.wikipedia.org/wiki/Moment_of_inertia, 15. ožujak 2011.
- [12] Milić, Z. Upravljanje mehaničkim sustavima zasnovano na pasivnosti. Seminarski rad. Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2008.
- [13] Rotation (mathematics), 14. Veljače 2011.,
http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_%28mathematics%29, 21. Ožujak 2011.
- [14] Angular momentum, 5. ožujak 2011
http://en.wikipedia.org/wiki/Angular_momentum, 15. travanja 2011.
- [15] Angular Momentum of a Particle,
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/amom.html>, 10. ožujak 2011.
- [16] Pendulum (mathematics), 5. ožujak 2011.
http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_%28mathematics%29, 10. ožujak 2011.

8. Sažetak

Vedrana Baličević, Mirna Bokšić:

Model samostabilizirajućeg vozila na jednom kotaču

Tijela u prirodi mogu imati različite oblike, mase, dimenzije i mogu se gibati na različite načine, stoga dinamički opis sustava može biti jako složen. Kako Newtonova mehanika zahtijeva poznavanje svih sila koje djeluju na fizikalni sustav, jako je nepraktična i složena za sustave s vezama.

Lagrangeova mehanika prilagođena je rješavanju problema sustava s vezama. Glavna ideja Lagrangeove reformulacije klasične mehanike je očuvanje momenta i energije. Zbog navedenih prednosti u ovome se radu za proračun dinamike svih obrađenih sustava koristi upravo Lagrangeova mehanika.

Konačni cilj je razumjeti i opisati gibanje monocikla u tri dimenzije, bez i sa regulacijom nagiba. Riječ je o monociklu koji se izrađuje na Zavodu za elektroničke sustave i obradu informacija Fakulteta elektrotehnike i računarstva, te se ovim radom ostvaruje njegova računalna simulacija. Složenost željenog sustava zahtijevala je obradu nekih jednostavnijih modela, koji su ipak povezani s konačnim problemom, odnosno koji predstavljaju pojednostavljenja istog. Kako je opis gibanja u dvodimenzionalnom prostoru puno jednostavniji od opisa gibanja u stvarnome trodimenzionalnom prostoru, za početak su izvedene jednadžbe gibanja matematičkog njihala, obrnutog njihala a zatim i monocikla u dvije dimenzije. Nakon izvoda jednadžbi gibanja sustavi su simulirani u Matlabovom grafičkom alatu Simulinku, a napisane su i vlastite .m funkcija koje se pozivaju *solverom* za numeričku integraciju i služe za potvrdu rezultata dobivenih u Simulinku.

Prilikom prijelaza na trodimenzionalna gibanja najprije je obrađeno gibanje kotača, a nakon toga i gibanje čovjeka na monociklu. U gibanju se monocikl može naginjati u stranu, naprijed-natrag, može skretati u prostoru ili se jednostavno gibati samo naprijed. Složenosti modela proizlazi iz mnoštva različitih načina gibanja, mnoštva kutova na koje se mora paziti i uzimati ih u obzir. Nakon numeričkih proračuna gibanja su ponovo

simulirana i iz različitih simulacija se može uočiti kakav utjecaj na gibanje ima promjena određenih kutova i drugih parametra.

Svi spomenuti modeli imaju mogućnost regulacije nagiba gornje mase, odnosno stabilizacije čovjeka na vozilu. Ovo upravljanje nagibom održava čovjeka u uspravnom stanju tijekom vožnje i tako stabilizira inače nestabilan sustav, čime se uspješno ostvaruje željeno gibanje u prostoru.

Ključne riječi: monocikl, inverzno njihalo, Lagrangeova mehanika, kinetička energija, potencijalna energija, rotacija, translacija, regulacija nagiba, samobalansiranje

9. Summary

Vedrana Baličević, Mirna Bokšić:

Model of the selfbalancing unicycle

Rigid bodies can have different shapes, weight, dimensions and can move in different ways, therefore, the dynamical descriptions of the corresponding systems can be very complex. Newton's mechanics requires knowledge of all the forces acting on the physical system, therefore it's impractical and complex for systems with constraints.

Lagrange's mechanics is ideal for studying motion of dynamical systems with constraints. Lagrangian mechanics is a re-formulation of classical mechanics that combines conservation of momentum with conservation of energy. Because of all these advantages, we have used Lagrange's mechanics for calculating the dynamics of all our systems.

The ultimate goal of this paper was to understand and describe the motion of an unicycle in three dimensions, with and without tilt control. The analyzed unicycle is being developed at the Department of Electronic Systems and Information Processing on the Faculty of Electrical Engineering and Computing in Zagreb. This paper describes mathematical background of unicycle's specific motion and provides its computer simulation. The complexity of the desired system required the processing of some simple models, which are associated with a finite problem and represent the simplification of the desired system. The description of motion in two dimensions is much easier than that of the motion in the real three-dimensional space, so the first systems to analyze were a simple mathematical pendulum, an inverted pendulum on a cart and a unicycle (inverted pendulum on a wheel) in two dimensions. After we derived their equations of motion, corresponding systems were simulated in Matlab's graphical tool Simulink. Equivalent .m functions, which are used along with the solver for numerical integration, have been written to confirm the results obtained with Simulink.

Finally, observations were made in three-dimensional space. First we observed the motion of a wheel, and then motion of a man on the unicycle. Driving the unicycle can be

quite complex because the unicycle can be tilted to one or another side, back and forth, it can turn in space, or simply move ahead. The complexity of the model is a result of a variety of modes of motion, and multiple angles, which must be considered. After solving all numerical equations we've simulated motion of our unicycle in three dimensions. Simulations show impact of changes in angles and other parameters on the movement of observed system.

All of these models have built-in tilt control of the (human) body on the vehicle. It keeps a man in an upright position while driving the vehicle and thus stabilizes system which is otherwise unstable. With tilt control models achieve stability and desired motion in space.

Key Words: unicycle, inverted pendulum, Lagrange mechanics, kinetic energy, potential energy, rotation, translation, tilt control, selfbalancing

10. Prvitak

10.1. Programski kodovi za sustave u 2D

9.1.1. Matematičko njihalo

mathematical_pendulum.m

```
function [dx,y] = mathematical_pendulum(t, x, g, L, varargin)
% Vedrana Balicevic, Mirna Boksic, 2011.
% Example:
%     [t,y] = ode23(@mathematical_pendulum,[0 15],[pi/3 0], 1, 9.81, 1);
%     mathematical_pendulum_plots

% Output equations:
y = x(1);

% State equations:
dx = [x(2); ...           % Angular position.
      -(g/L)*sin(x(1))]; % Angular velocity.
```

mathematical_pendulum_plots.m

```
% mathematical_pendulum_plots
% Vedrana Balicevic, Mirna Boksic, 2011.

Figure
set(gcf,'color','white')
subplot(121), plot(t,y(:,1))
xlabel('t'), title('theta')
x_m = -1*sin(y(:,1));
y_m = -1*cos(y(:,1));
subplot(122), plot(x_m,y_m),
xlabel('x'), title('x-y'), ylabel('y')
```

9.1.2. Obrnuto njihalo na kolicima

inverted_pendulum_on_a_cart_2D

```
function dx = inverted_pendulum_on_a_cart_2D(t, x, m1, m2, L, grav, control,
varargin)
% Vedrana Balicevic, Mirna Boksic, 2011.
% Example:
%     grav = 9.81; m1 = 10; m2 = 80; L = 1;
%     [t,y]=ode23(@inverted_pendulum_on_a_cart_2D, [0 10],[0 0 pi/10 0], ...
%         odeset('MaxStep',1e-2,'AbsTol',1e-3,'RelTol',1e-3), ...
%         m1, m2, L, grav, 'TiltControlON');
%     inverted_pendulum_on_a_cart_2D_plots

F_x = 0;
M_theta = 0;

dx = x(2);
th = x(3);
dth = x(4);

if strcmp(control, 'TiltControlON')
    Kd = -3000;
```

```

    Kp = -10000;
    TiltControl = Kd*dth + Kp*th;
else
    TiltControl = 0;
end

% Input matrix
IN(1,1) = m1+m2;
IN(1,2) = m2*L*cos(th);
IN(2,1) = m2*L*cos(th);
IN(2,2) = m2*L^2;

% Output matrix
OUT(1) = m2*L*sin(th)*dth^2 + F_x;
OUT(2) = m2*grav*L*sin(th) + M_theta + TiltControl;
OUT = OUT';

% Output equations
D2 = IN\OUT;

d2x = D2(1);
d2th = D2(2);

dx = [dx; d2x; dth; d2th];

end

```

inverted pendulum on a cart 2D plots

```

% inverted_pendulum_on_a_cart_2D_plots
% Vedrana Balicevic, Mirna Boksic, 2011.

x1 = y(:,1);
dx1 = y(:,2);
th = y(:,3);
dth = y(:,4);

figure
set(gcf, 'color', 'white')
subplot(121), plot(t,th), grid, title('theta')
subplot(122), plot(t,dth), grid, title('Dtheta')

% KOORDINATE:
y1 = zeros(length(x1),1);
x2 = x1 + L*sin(th);
y2 = L*cos(th);

figure
set(gcf, 'color', 'white')
subplot(131), plot(t,x1, 'r'), grid, title('x kolica'), xlabel('t')
subplot(132), plot(t,x2, 'r'), grid, title('x gornje mase'), xlabel('t')
subplot(133), plot(t,y2, 'r'), grid, title('y gornje mase'), xlabel('t')

% PUTANJE
figure
set(gcf, 'color', 'white')
plot(x1,y1, 'g'), hold on, plot(x2,y2, 'r')
xlabel('x'), ylabel('y')
legend('x-y kolica', 'x-y gornje mase')

```

9.1.3. Monocikl (obrnuto njihalo na kotaču)

unicycle_2D

```
function [dx] = unicycle_2D(t, x, m1, m2, R, L, grav, control, varargin)
% Vedrana Balicevic, Mirna Boksic, 2011.
% Example:
%     grav = 9.81; m1=10; m2=80; R=0.2; L=1;
%     [t,y]=ode23(@unicycle_2D, [0 10], [0 0 pi/10 0], ...
%         odeset('MaxStep',1e-2,'AbsTol',1e-1,'RelTol',1e-1), ...
%         m1, m2, R, L, grav,'TiltControlON');
%     unicycle_2D_plots

M_gama = 0;
M_theta = 0;

g = x(1);
th = x(3);
dg = x(2);
dth = x(4);

if strcmp(control, 'TiltControlON')
    Kd = -200;
    Kp = -1500;
    TiltControl = Kd*dth + Kp*th;
else
    TiltControl = 0;
end

% Input matrix
IN(1,1) = (2*m1+m2)*R^2;
IN(1,2) = m2*R*L*cos(th);
IN(2,1) = m2*R*L*cos(th);
IN(2,2) = m2*L^2;

% Output matrix
OUT(1) = m2*R*L*sin(th)*dth^2 + M_gama;
OUT(2) = m2*grav*L*sin(th) + M_theta + TiltControl;
OUT = OUT';

% Output equations
D2 = IN\OUT;

d2g = D2(1);
d2th = D2(2);

dx = [dg; d2g; dth; d2th];

end
```

unicycle_2D_plots

```
% unicycle_2D_plots
% Vedrana Balicevic, Mirna Boksic, 2011.

g = y(:,1);
dg = y(:,2);
th = y(:,3);
dth = y(:,4);

figure
set(gcf, 'color', 'white')
subplot(221), plot(t, g), grid, title('gama')
subplot(222), plot(t, th), grid, title('theta')
subplot(223), plot(t, dg), grid, title('Dgama')
```

```

subplot(224), plot(t, dth), grid, title('Dtheta')

% KOORDINATE:
x1 = g*R;
y1 = zeros(length(x1),1);
x2 = x1 + L*sin(th);
y2 = L*cos(th);

figure
set(gcf,'color','white')
subplot(131), plot(t,x1,'r'), grid, title('x kotaca'), xlabel('t')
subplot(132), plot(t,x2,'r'), grid, title('x gornje mase'), xlabel('t')
subplot(133), plot(t,y2,'r'), grid, title('y gornje mase'), xlabel('t')

% PUTANJE:
figure
set(gcf,'color','white')
plot(x1,y1,'g'), hold on, plot(x2,y2,'r')
xlabel('x y'), ylabel('y'), axis([-1 1 -1 1])
legend('x-y kotaca','x-y gornje mase')

```

9.2. Programski kodovi za sustave u 3D

9.2.1. Kotač

wheel 3D.m

```

function [dx] = wheel_3D(t, x, M, R, grav, Ixx1, Iyy1, Izz1, varargin)
% Vedrana Balicevic, Mirna Boksic, 2011.
% Example:
%   grav = 9.81; M=10; R=0.2;
%   Ixx1 = 1/12*m1*(3*R^2+0.1^2); Iyy1 = Ixx1; Izz1 = m1*R^2/2;
%   [t,y] = ode23(@wheel_3D,[0 10],[0 0 pi/2+pi/10 0 0 0], ...
%               odeset('MaxStep',1e-2), M, R, grav, Ixx1, Iyy1, Izz1);
%   wheel_3D_plots

% Output equation.
y = [x(1) x(3) x(5)];

% State equations.
d1a = x(2);
d1b = x(4);
d1g = x(6);
d2a = ((Izz1-2*Ixx1)*x(2)*x(4)*cos(x(3))+Izz1*x(4)*x(6)) / (Ixx1*sin(x(3)));
d2b = ( ((Ixx1-Izz1)* x(2)^2 - M*R^2*(x(2)^2+x(4)^2))*cos(x(3))*sin(x(3)) ...
        - (Izz1+M*R^2)*x(2)*x(6)*sin(x(3)) - M*grav*R*cos(x(3)) ) ...
        / (Iyy1 + M*R^2*sin(x(3))^2);
d2g = (x(2)*x(4)*((2*Ixx1-Izz1)*cos(x(3))^2 ...
        + Ixx1*(Izz1+2*M*R^2)/(Izz1+M*R^2)*sin(x(3))^2) ...
        - Izz1*x(4)*x(6)*cos(x(3)) ) / (Ixx1*sin(x(3)));

d2a = round2(d2a,1e-5);
d2b = round2(d2b,1e-5);
d2g = round2(d2g,1e-5);

dx = [d1a; d2a; d1b; d2b; d1g; d2g];

```

wheel_3D_plots.m

```

% wheel_3D_plots
% Vedrana Balicevic, Mirna Boksic, 2011.

a = y(:,1);
b = y(:,3);
g = y(:,5);
da = y(:,2);
db = y(:,4);
dg = y(:,6);

figure
set(gcf, 'color', 'white')
subplot(231), plot(t, a), grid, title('alfa')
subplot(232), plot(t, b), grid, title('beta')
subplot(233), plot(t, g), grid, title('gama')
subplot(234), plot(t, da), grid, title('Dalfa')
subplot(235), plot(t, db), grid, title('Dbeta')
subplot(236), plot(t, dg), grid, title('Dgama')

% Wheel velocity equations
xd = R.*(dg.*cos(a) + da.*cos(a).*cos(b) - db.*sin(a).*sin(b));
yd = R.*(dg.*sin(a) + da.*sin(a).*cos(b) + db.*cos(a).*sin(b));
zd = R.*db.*cos(b);

% COORDINATES
sim wheel_3D_coordinates.mdl
ta = xl.time; % new time axes

% wheel_coordinates
x1 = xl.signals.values;
y1 = y1.signals.values;
z1 = z1.signals.values;

% plot wheel coordinates
figure
set(gcf, 'color', 'white')
subplot(131), plot(ta, x1, 'r'), grid, title('x1'), xlabel('t')
subplot(132), plot(ta, y1, 'r'), grid, title('y1'), xlabel('t')
subplot(133), plot(ta, z1, 'r'), grid, title('z1'), xlabel('t')

```

9.2.2. Monocikl

unicycle_3d.m

```

function [dx] = unicycle_3D(t, x, m1, m2, R, L, grav, Ix1, Iy1, Iz1, control,
varargin)
% Vedrana Balicevic, Mirna Boksic, 2011.
% Example:
%   grav = 9.81; m1 = 10; m2 = 80; R = 0.2; L = 1;
%   Ix1 = 1/12*m1*(3*R^2+0.1^2); Iy1 = Ix1; Iz1 = m1*R^2/2;
%   [t,y]=ode23(@unicycle_3D,[0 10],[0 0 pi/2 0 0 0 pi+pi/10 0],...
%       odeset('MaxStep',1e-2,'AbsTol',1e-1,'RelTol',1e-1),...
%       m1, m2, R, L, grav, Ix1, Iy1, Iz1, 'TiltControlOFF');
%   unicycle_3D_plots

if strcmp(control, 'TiltControlON')
    Kd = 1500;
    Kp = 15000;
    TiltControl = Kd*x(8) + Kp*x(7);
else
    TiltControl = 0;
end

```



```

a = x(1);
b = x(3);
g = x(5);
t = x(7);
Da = x(2);
Db = x(4);
Dg = x(6);
Dt = x(8);

Cb = cos(b);
Ct = cos(t);
Sb = sin(b);
St = sin(t);
S2b = sin(2*b);
C2b = cos(2*b);
C2t = cos(2*t);
S2t = sin(2*t);

% Output matrix

OUT(1)=(1/2)*(2*L*m2*Cb*(-R + L*Ct)*St*Db^2 ...
+ 2*L*m2*R*Cb*St*Dt*(Dg + Dt) ...
- 2*Sb*Db*(Iz1 + (m1 + m2)*R^2 - L*m2*R*Ct)*Dg ...
+ 2*L^2*m2*St^2*Dt) ...
+ Da*((2*Ix1 - 2*Iz1 - L^2*m2 - 2*m1*R^2 - 2*m2*R^2 ...
+ 4*L*m2*R*Ct - L^2*m2*C2t)*S2b*Db ...
+ 2*L*m2*(2*R*Cb^2*St + L*Sb^2*S2t)*Dt) ;

OUT(2)=grav*Cb*((m1 + m2)*R - L*m2*Ct) ...
- (1/4)*(2*Ix1 - 2*Iz1 - L^2*m2 - 2*m1*R^2 - 2*m2*R^2 ...
+ 4*L*m2*R*Ct - L^2*m2*C2t)*S2b*Da^2 ...
- 2*L*m2*(-R + L*Ct)*St*Db*Dt ...
+ Sb*Da*((Iz1 + (m1+m2)*R^2 - L*m2*R*Ct)*Dg + 2*L*m2*Ct*(-R + L*Ct)*Dt) ;

OUT(3) = L*m2*R*St*Dt^2 ...
- Da*((Iz1 + (m1 + m2)*R^2 - L*m2*R*Ct)*Sb*Db ...
- L*m2*R*Cb*St*Dt) ;

OUT(4) = (-1/2)*L*m2*((2*R*Cb^2*St + L*Sb^2*sin(2*t))*Da^2 ...
- 2*St*(grav*Sb + (-R + L*Ct)*Db^2) ...
+ Da*(-4*Ct*(R - L*Ct)*Sb*Db + 2*R*Cb*St*Dg))+TiltControl ;

OUT=-OUT';

% Input matrix

IN(1,1) = (1/8)*(4*Ix1 + 4*Iz1 + 6*L^2*m2 + 4*m1*R^2 + 4*m2*R^2 ...
+ (-4*Ix1+4*Iz1+2*L^2*m2 + 4*m1*R^2 + 4*m2*R^2)*cos(2*b) ...
+ L^2*m2*cos(2*(b - t)) - 4*L*m2*R*cos(2*b - t) ...
- 8*L*m2*R*Ct - 2*L^2*m2*C2t ...
+ L^2*m2*cos(2*(b + t))- 4*L*m2*R*cos(2*b + t));
IN(1,2) = L*m2*(-R + L*Ct)*Sb*St;
IN(1,3) = Cb*(Iz1 + (m1 + m2)*R^2 - L*m2*R*Ct);
IN(1,4) = L*m2*Cb*(L - R*Ct);

IN(2,1) = L*m2*(-R + L*Ct)*Sb*St;
IN(2,2) = (Iy1 + (L^2*m2)/2 + m1*R^2 + m2*R^2 - 2*L*m2*R*Ct ...
+ (1/2)*L^2*m2*C2t);
IN(2,3) = 0;
IN(2,4) = 0;
IN(3,1) = Cb*(Iz1 + (m1 + m2)*R^2 - L*m2*R*Ct);
IN(3,2) = 0;
IN(3,3) = (Iz1 + (m1 + m2)*R^2);
IN(3,4) = - L*m2*R*Ct;

IN(4,1) = L*m2*Cb*(L - R*Ct);
IN(4,2) = 0;
IN(4,3) = - L*m2*R*Ct;

```

```

IN(4,4) = L^2*m2;

% Output equation:

D2 = IN\OUT;
D2 = round2(D2,1e-5); % round to 5 decimal places

D2a = D2(1);
D2b = D2(2);
D2g = D2(3);
D2t = D2(4);

dx = [Da; D2a; Db; D2b; Dg; D2g; Dt; D2t];

end

```

unicycle 3d plots

```

% unicycle_3D_plots
% Vedrana Balicevic, Mirna Boksic, 2011.

a = y(:,1);
b = y(:,3);
g = y(:,5);
th = y(:,7);
da = y(:,2);
db = y(:,4);
dg = y(:,6);
dth = y(:,8);

% PLOT ANGLES
figure
set(gcf,'color','white')
subplot(241), plot(t, a), grid, title('alfa')
subplot(242), plot(t, b), grid, title('beta')
subplot(243), plot(t, g), grid, title('gama')
subplot(244), plot(t, th), grid, title('theta')
subplot(245), plot(t, da), grid, title('Dalfa')
subplot(246), plot(t, db), grid, title('Dbeta')
subplot(247), plot(t, dg), grid, title('Dgama')
subplot(248), plot(t, dth), grid, title('Dtheta')

% VELOCITY EQUATIONS

% Wheel velocity
xd = R.*(dg.*cos(a) + da.*cos(a).*cos(b) - db.*sin(a).*sin(b));
yd = R.*(dg.*sin(a) + da.*sin(a).*cos(b) + db.*cos(a).*sin(b));
zd = R.*db.*cos(b);

% Upper mass velocity
xd2 = xd + L*da.*(sin(a).*sin(th) - cos(a).*cos(b).*cos(th)) ...
      + L.*db.*sin(a).*sin(b).*cos(th) ...
      + L*dth.*(sin(a).*cos(b).*sin(th)-cos(a).*cos(th));

yd2 = yd - L*da.*(cos(a).*sin(th) + sin(a).*cos(b).*cos(th)) ...
      - L.*db.*cos(a).*sin(b).*cos(th) ...
      - L*dth.*(cos(a).*cos(b).*sin(th)-sin(a).*cos(th));
zd2 = zd + L*sin(b).*sin(th)-L*cos(b).*cos(th);

% COORDINATES
sim unicycle_3D_coordinates.mdl
ta = x1.time; % new time axes

% wheel_coordinates
x1 = x1.signals.values;

```

```
y1 = y1.signals.values;
z1 = z1.signals.values;

% Upper mass coordinates
x2 = x2.signals.values;
y2 = y2.signals.values;
z2 = z2.signals.values;
% PLOT COORDINATES
figure
set(gcf, 'color', 'white')
subplot(231), plot(ta,x1, 'r'), grid, title('x1')
subplot(232), plot(ta,y1, 'r'), grid, title('y1')
subplot(233), plot(ta,z1, 'r'), grid, title('z1')
subplot(234), plot(ta,x2, 'r'), grid, title('x2')
subplot(235), plot(ta,y2, 'r'), grid, title('y2')
subplot(236), plot(ta,z2, 'r'), grid, title('z2')
```