

Sveučilište u Zagrebu

Građevinski fakultet

Suzana Ereiz

ODREĐIVANJE SILA U ZATEGAMA POVIJESNIH GRAĐEVINA

Zagreb, 2019.

*Ovaj rad izrađen je na Zavodu za tehničku mehaniku, katedra za mehaniku materijala i ispitivanje konstrukcija pod vodstvom doc.dr.sc. Ivana Duvnjaka, dipl. ing. građ. i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2018./2019.*

## Popis kratica

<b>M</b>	matrica masa
<b>C</b>	matrica prigušenja
<b>K</b>	matrica krutosti
<b><math>\Phi</math></b>	modalna matrica (matrica vlastitih vektora)
<b>q</b>	vektor modalnih koordinata
<b>u</b>	vektor pomaka
<b><math>\dot{u}</math></b>	vektor brzine
<b><math>\ddot{u}</math></b>	vektor ubrzanja
<i>m</i>	masa
<i>f</i>	frekvencija
$\lambda$	valna duljina
<i>EI</i>	savojna (fleksijska) krutost
$\rho$	duljina
$\omega_n$	kružna frekvencija
MAC	kriterij modalne ortogonalnosti
A	površina poprečnog presjeka
$\kappa$	bezdimenzionalni koeficijent oblika titranja
$N_{cr,E}$	Eulerova kritična sila
EMA	eksperimentalna modalna analiza
OMA	operacionalna modalna analiza
$\varphi_i$	modalni oblik pri diskretnim frekvencijama
$\varphi_r$	referentni modalni oblik
$\sigma$	naprezanje
$\varepsilon$	relativna deformacija
$\alpha_T$	koeficijent toplinskog istežanja

# SADRŽAJ

SAŽETAK.....	I
SUMMARY .....	III
1. UVOD.....	1
1.1. Povijesni pregled .....	4
1.1.1. Povijesni pregled u svijetu .....	4
1.1.2. Povijesni pregled u Hrvatskoj .....	7
2. MOTIVACIJA I CILJEVI .....	17
3. TEORIJSKA PODLOGA .....	19
3.1. Titranje tanke žice .....	19
3.2. Jednadžba poprečnih oscilacija grede opterećene uzdužnom silom.....	22
3.3. Eksperimentalne procjene vlačnih sila u zategama .....	24
3.3.1. Osnovne jednadžbe eksperimentalne procjene vlačne sile.....	25
4. LABORATORIJSKO ISPITIVANJE.....	28
4.1. Uvod .....	28
4.2. Postavke eksperimenta .....	28
4.2.1. Opis opreme .....	29
4.3. Metodologija analize rezultata.....	32
4.3.1. Modalna analiza .....	32
4.3.2. Usporedba modalnih oblika korištenjem MAC faktora .....	36
4.4. Model zatege sa upetim rubnim uvjetima.....	37
4.5. Model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima.....	41
4.6. Numerički model .....	45
4.6.1. Model zatege sa upetim rubnim uvjetima .....	45
4.6.2. Model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima .....	47
4.7. Usporedba rezultata laboratorijskog ispitivanja i numeričkog modela .....	49
4.8. Analiza rezultata i procjena koeficijenta $\kappa$ .....	53
4.9. Zaključak provedenih ispitivanja u laboratoriju .....	54
5. PRIMJENA METODOLOGIJE NA REALNOJ GRAĐEVINI.....	55
5.1. Uvod u ispitivanje.....	55
5.2. Opis i metoda ispitivanja .....	57
5.3. Rezultati ispitivanja .....	58
5.4. Inicijalni numerički model zatege na terenu.....	60
5.4.1. Uvod .....	60
5.4.2. Model zatege sa upetim rubnim uvjetima .....	60

5.4.3.	Model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima .....	62
5.4.4.	Usporedba rezultata mjerenja i numeričkog modela.....	63
5.5.	Poboljšani numerički model .....	69
5.5.1.	Simulacija rubnih uvjeta zatege 6BC .....	69
5.5.2.	Simulacija rubnih uvjeta zatege C34.....	72
5.6.	Proračun sile u zategama .....	75
5.7.	Zaključak provedenih ispitivanja na realnoj građevini.....	75
6.	ZAKLJUČAK .....	76
	Zahvala .....	77
	Literatura .....	78
	Popis slika .....	80
	Popis tablica .....	85

# SAŽETAK

**Autor:** Suzana Ereiz

**Naslov:** Određivanje sila u zategama povijesnih građevina

U uvodnom dijelu rada opisana je motivacija i ciljevi prikazanog istraživanja te je dan povijesni pregled u svijetu i Hrvatskoj. U povijesnom pregledu dani su i osnovni podaci o konstrukciji katedrale sv. Jakova u Šibeniku na kojoj je primijenjena metodologija procjene sila u zategama opisana u radu.

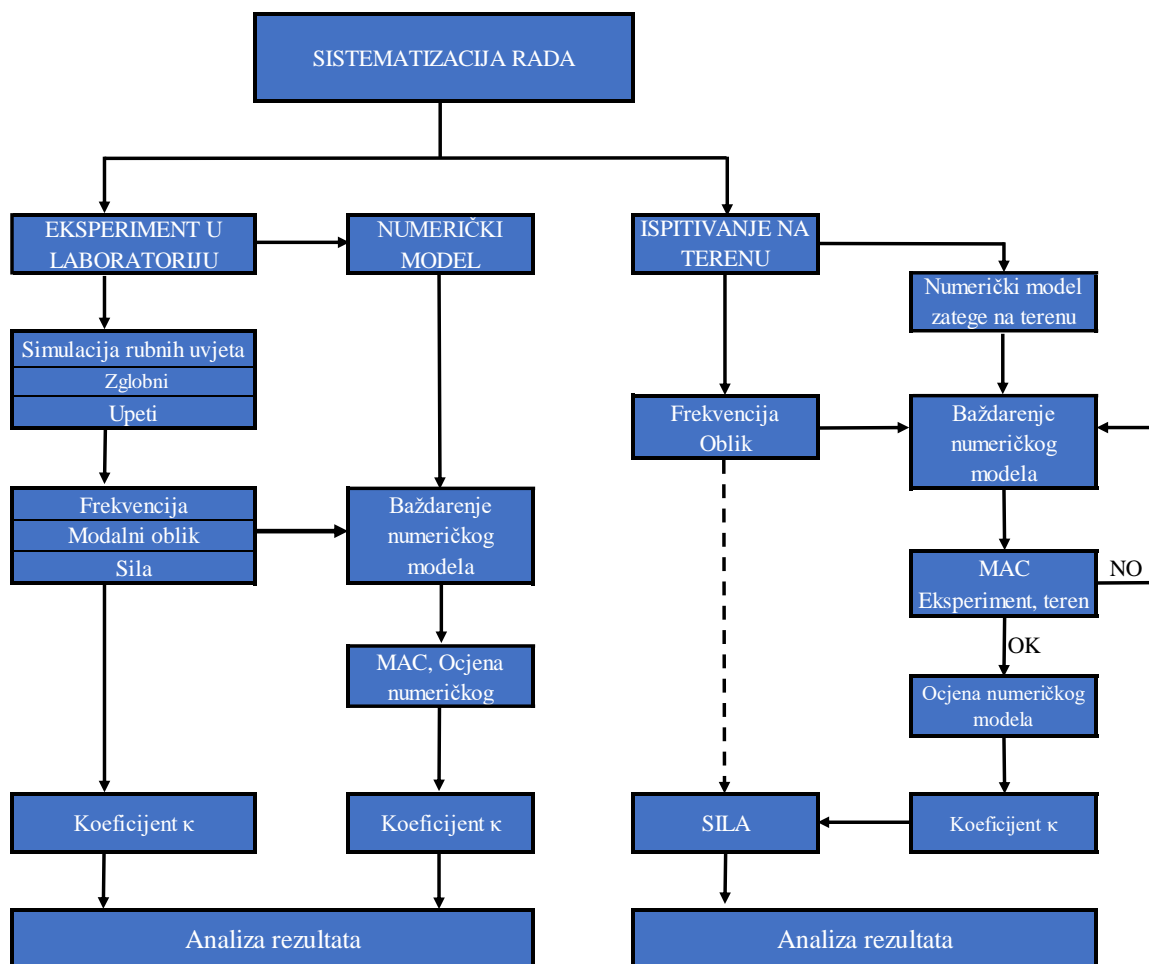
Radi jednostavnosti rješenja diferencijalne jednadžbe poprečnih oscilacija grede opterećene uzdužnom silom, u literaturi je definiran koeficijent  $\kappa$ . Njegova vrijednost ovisna je o rubnim uvjetima i obliku titranja. Kako bi odredili primjenjivost i univerzalnost koeficijenta  $\kappa$  najprije je proveden eksperiment u laboratoriju. U laboratorijskim uvjetima simulirani su različiti rubni uvjeti te su određeni dinamički parametri- frekvencija i modalni oblici. Za ispitivani model u laboratoriju izrađen je numerički model koji je baždaren na temelju dinamičkih parametara dobivenih laboratorijskim ispitivanjem. Provedena je usporedba dobivenih modalnih oblika te ocjena numeričkog modela prema kriteriju modalne ortogonalnosti (MAC faktor). Nakon ocjene numeričkog modela određena je vrijednost koeficijenta  $\kappa$  te njegovo odstupanje u odnosu na vrijednost danu u literaturi.

Ista metodologija primijenjena u laboratoriju u idealnim uvjetima, primijenjena je na realnoj građevini gdje uvjeti nisu idealni. Kao dobar primjer povijesne građevine uzeta je katedrala Sv. Jakova u Šibeniku na čijim zategama su određeni dinamički parametri (frekvencije i oblici titranja). Radi jednostavnosti i preglednosti rada od ispitivanih zatega na terenu dvije su uzete kao referentne te su na njima provedene detaljne analize. Kao referente zatege uzete su jedna čelična zatega i jedna aluminijska zatega. Za svaku od zatega izrađen je numerički model koji je baždaren na temelju dinamičkih parametara dobivenih u sklopu istražnih radova. Provedena je usporedba modalnih oblika dobivenih iz numeričkog modela i ispitivanja na terenu. Za svaku od prethodnih usporedbi provedena je ocjena numeričkog modela prema kriteriju ortogonalnosti (MAC faktor). Nakon ocjene numeričkog modela određena je vrijednost koeficijenta  $\kappa$  te njegovo odstupanje u odnosu na vrijednost danu u literaturi. Nakon dobivenog

prihvatljivog odstupanja vrijednosti koeficijenta  $\kappa$  određena je vrijednost sila u pripadnim zategama .

Na temelju prikazanih rezultata i analiza može se zaključiti da je pri određivanju sila u zategama povijesnih građevina potrebno pristupiti individualno za svaku građevinu. Posebnu pozornost treba svrnuti na problem rubnih uvjeta. Taj problem posebno je istaknut kod povijesnih građevina gdje često dokumentacija o građevini koja bi olakšala njihovo definiranje nije dostupna. Stoga, jedni oslonac i glavna smjernica za rješavanje problema mogu biti rezultati eksperimentalnih ispitivanja.

U nastavku je dana sistematizacija rada s koracima provedenim tijekom ovog istraživanja.



**Ključne riječi:** zatega, monitoring, vlastita frekvencija, modalni oblici, kriterij modalne ortogonalnosti

## SUMMARY

**Author:** Suzana Ereiz

**Title:** Determination of forces acting in tension braces in historical building

A brief description of the motivation and objectives of the research with historical review in the world and in Croatia are given in the introduction. Basic data about the structure of the Cathedral of St. James in Šibenik where the methodology of determination of forces in tie beams was applied are given in the historical review.

For the sake of simplicity of the differential equation of transverse oscillations of the beam loaded with longitudinal force, coefficient  $\kappa$  is defined in the literature. Its value depends on boundary conditions and the modal shapes. Firstly, laboratory experiment was performed to determine the applicability and universality of coefficient  $\kappa$ . Different boundary conditions are simulated in laboratory conditions and dynamic parameter - frequencies and modal shapes are defined. For the model studied in the laboratory, a numerical model was created which was calibrated based on dynamic parameters obtained by laboratory testing.

Comparison of the obtained modal shapes and the evaluation of the numerical model according to the modal assurance criterion (MAC) was performed. After evaluating of numerical model the value of the coefficient  $\kappa$  and its deviation from the value given in the literature are determined.

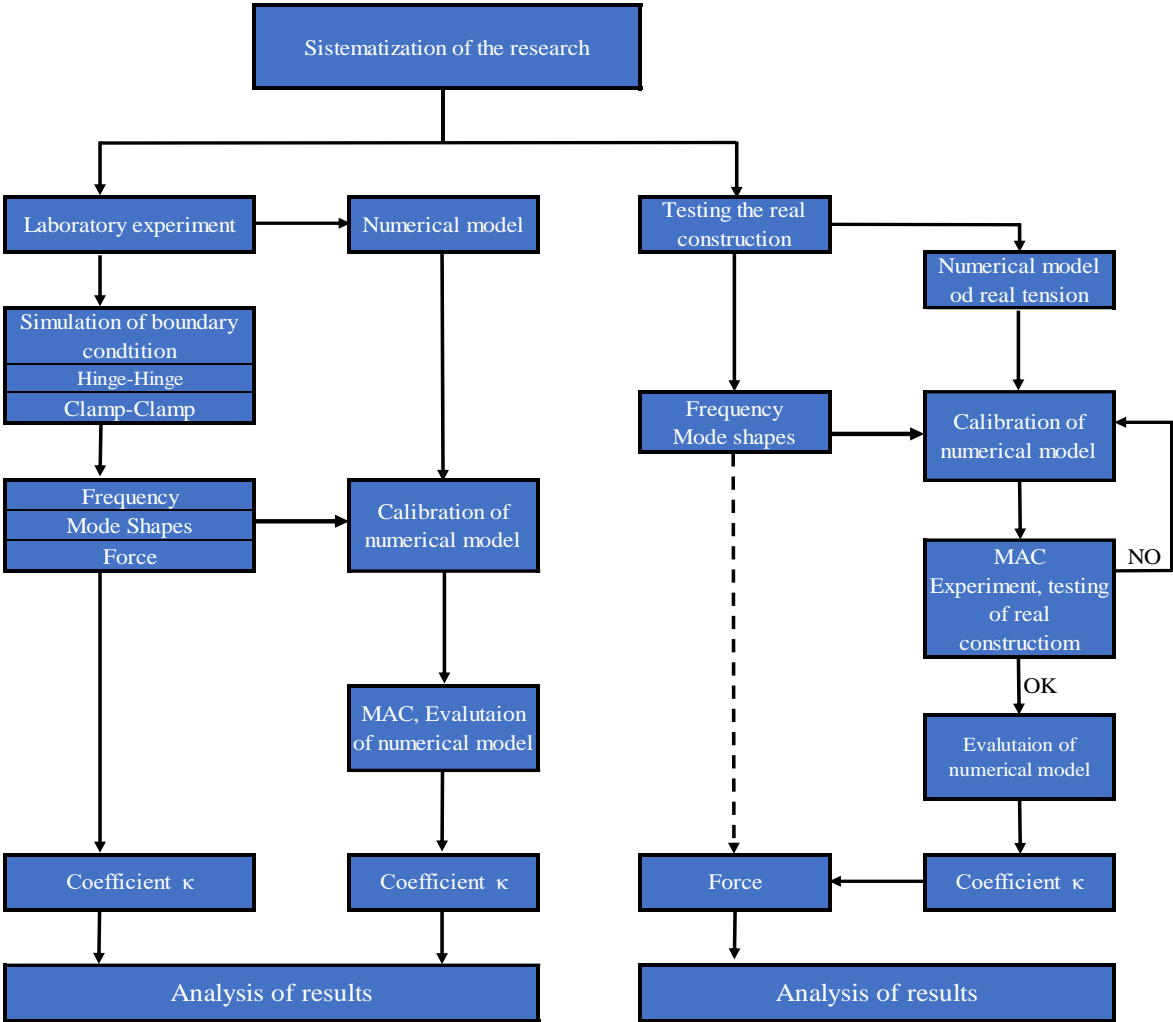
The same methodology applied to the laboratory in ideal conditions has been applied to a real building where conditions are not ideal. The cathedral of St. James is taken as good example of historical building on whose tension braces dynamic parameters (frequencies and modal shapes) are defined. For the sake of simplicity and visibility of the tested tie beams, two of them were taken as reference and detailed analysis were carried out on them. One steel and one aluminium tension brace is used as referenced tension braces. For each of them, numerical model was created which was calibrated based on dynamic parameters obtained in the framework of investigative works. Comparison of modal shapes obtained from numerical models and field tests was performed. For each of the previous comparisons, an evaluation of numerical model was performed according to the modal assurance criterion (MAC). After the evaluation of numerical model the value of the coefficient  $\kappa$  and its deviation from the value



given in the literature are determined. After obtaining an acceptable deviation of the value of coefficient  $\kappa$ , the forces acting in corresponding tie beams was determined.

Based on the presented results and analysis, it can be concluded that the determination of forces acting in tension braces in historical building requires individual access to each building. Particular attention should be paid to the problem of boundary conditions. This problem has especially been highlighted in historical structure where often project documentation that would facilitate their definition is not available. Therefore, the only support and major guidelines for solving these problems can be a result of experimental testing.

Below is the systematization of work with the steps taken during this research



**Key words:** tension braces, monitoring, eigenfrequency, modal shapes, modal assurance criterion

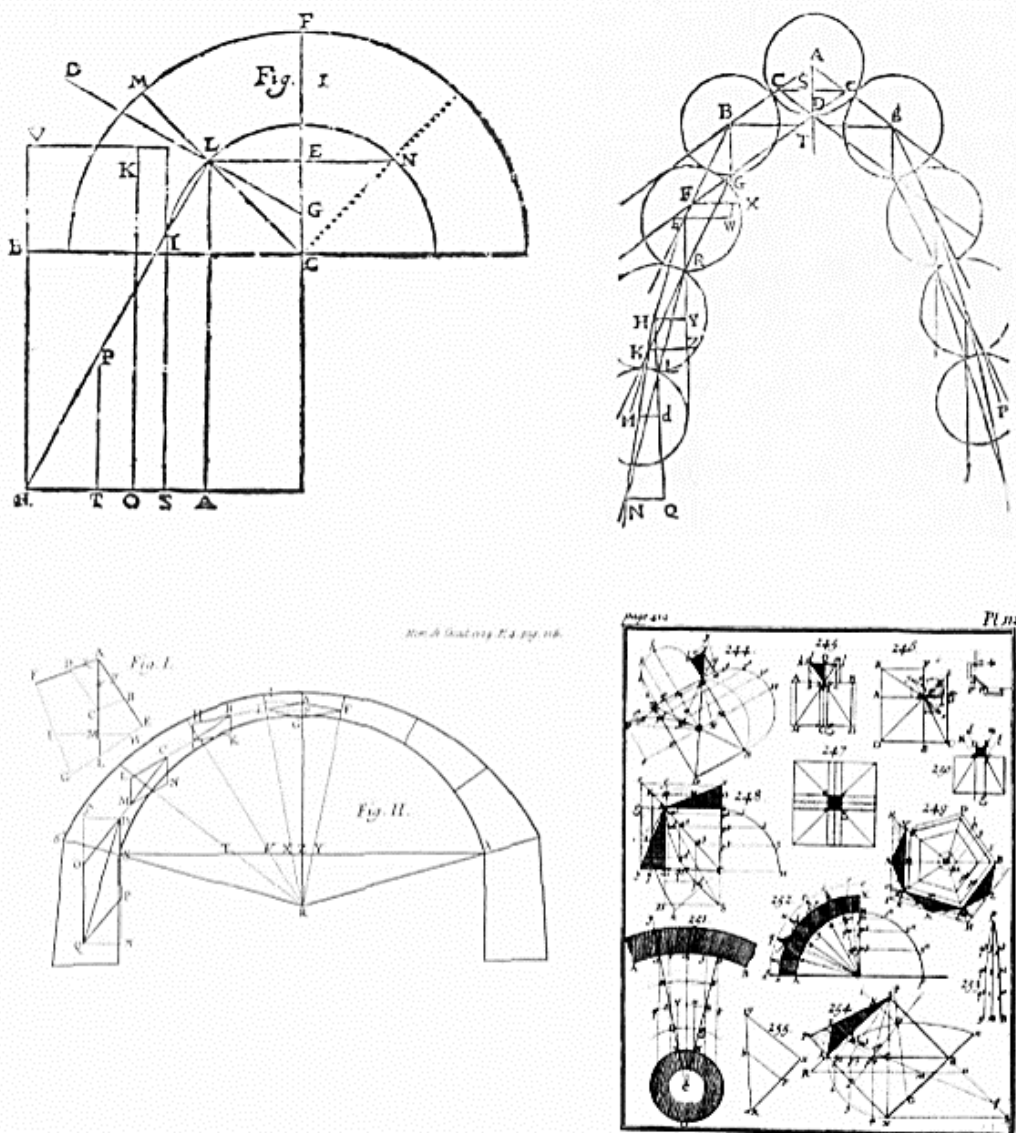
## 1. UVOD

Primjena kamenih i opečnih elemenata u izgradnji građevina jedne su od najstarijih tehnika koje se koriste i danas. Neke od najstarijih građevina koje su izgradili ljudi su zidane kamene kolibe u obliku kruga pronađene u blizini jezera Hullen u Izraelu koje datiraju iz razdoblja između 9.000-8.000 g.pr.Kr. Prva izdanja konstrukcija od kamena bile su zapravo samo hrpe prirodnog kamena. Kako su ljudi postajali vještiji i sposobniji te započeli koristiti alate za zidanje, građevine su počele poprimati simetričniji oblik. Kasnije, ljudi su naučili izrađivati elemente od blata i gline ostavljajući ih da se suše na zraku, a nakon toga su ih pekli u peći. Opeke su bile jake, ujednačene i jednostavne za izradu. Osim toga, poboljšanja u tehnikama izrade rezultirala su da su se u različitim kulturama počeli primjenjivati stupovi različitih visina, grede, lukovi i kupole, kako bi se savladali različiti rasponi i različite visine. Trajnost takvih građevina dokazuje se brojem istih koje se koriste još i danas nakon stotina pa čak i tisuća godina. Neki primjeri građevina koje su postale simbol određenih kultura su egipatske piramide (2800.god.pr.Kr.), Partenon u Grčkoj (5.st.pr.Kr.), Koloseum u Rimu (1.st.pr.Kr.).[1]



*Slika 1. Kamene građevine kao simboli određenih kultura[1]*

Zbog svoje velike mase, unutar elemenata kamenih građevina javlja se problem velikih tlačnih sila. Taj problem posebno je zanimljiv kod kamenih građevine čije su rasponske konstrukcije luk, svod ili kupola. Kose reakcije, koje se javljaju u takvim rasponskim konstrukcijama koje se oslanjaju na zidove (potporne konstrukcije), one predaju zidovima. Zid ih mora prenijeti na način da se u materijalu ziđa javi samo tlačno naprezanje. To se postiže na način da potporne konstrukcije budu znatno veće težine, odnosno debljine. Kako bi se ipak te veličine zadržale unutar određenih granica karakterističnih za ziđe, horizontalne komponente tlačnih sila eliminiraju se korištenjem željeznih zatega.



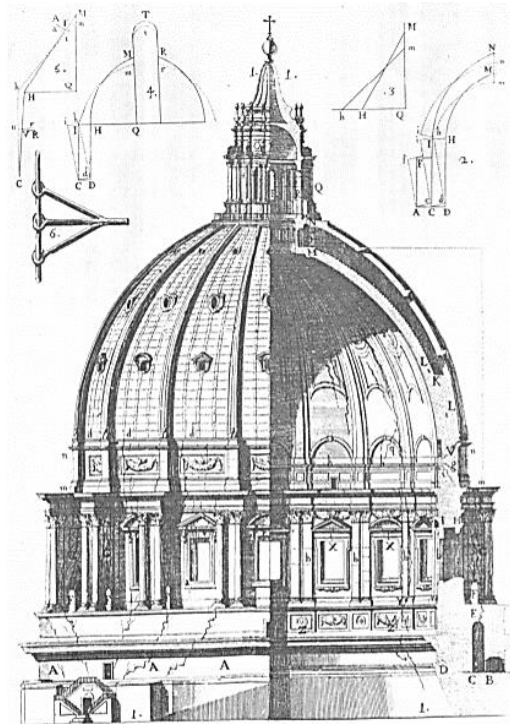
Slika 2. Teorije lukova, svodova i kupola, La Hire (1712.), Stirling (1717.), Couplet (1729.), Frézier (1737.-39.) - od gornjeg lijevog do donjeg desnog kuta [2]

Efikasnosti djelovanja zatege ovisi o njenom sidrenju u stupove (zidove) što predstavlja konstruktivni problem. S estetske strane, postavljanje zatega koje prolaze kroz unutrašnjost prostora vrlo je nepovoljno zbog zapreke slobodnim vizurama. Kako bi se ti problemi riješili, kroz dugi niz godina ulagalo se mnogo truda u pronalaženje kvalitetnijih i uspješnijih rješenja koja bi uklonila vidljive zatege iz unutrašnjeg prostora. Razvoj gotske arhitekture, rezultirao je jednim od najvećih dostignuća u tom cilju, gdje se tlačne sile lučnih konstrukcija preuzimaju potpornim konstrukcijama- kontraformnim sustavima koji se smještaju sa vanjske strane prostora koji rasponska konstrukcija premošćuje.

## 1.1. Povijesni pregled

### 1.1.1. Povijesni pregled u svijetu

Kako je ranije navedeno, problem kosih reakcija koje se javljaju u rasponskim konstrukcijama svoda, luka ili kupole rješavao se korištenjem čeličnih zatega. Koncept tog sustava zatega kroz povijest se mijenjao ovisno o rasponu koji premošćuju kao i samim dimenzijama rasponskih konstrukcija. Najčešće se interveniralo tek kada je došlo do značajnijih oštećenja same rasponske konstrukcije. Najpoznatiji primjer je kupola katedrale sv. Petra u Rimu gdje su 1742.godine primijećene ozbiljne pukotine, da se i sam papa Benedikt XIV. odlučio na proučavanje stabilnosti kupole i pronalaženje rješenja kako kupolu ojačati.

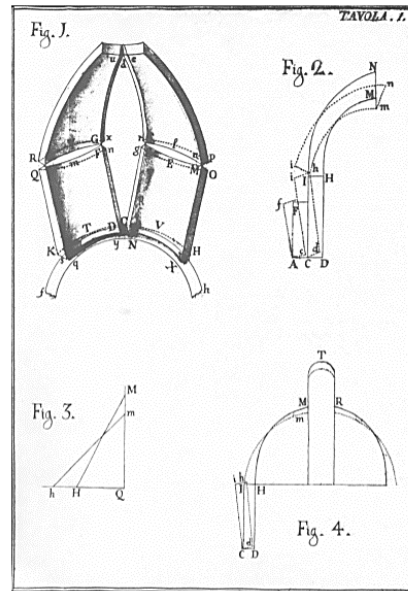


*Slika 3. Prikaz pukotina i statička analiza kupole sv.Petra, Rim  
(Le Seur, Jacquier i Bošković 1743.) [2]*

Tehničko izvješće tada postojeće situacije napisala su tri poznata matematičara među kojima je bio i naš Ruđer Bošković. Njihov Parere objavljen je 1743. godine. Prema njihovom proračunu kupola je bila u vrlo opasnom stanju te je njihov prijedlog bio da se oko nje postave željezni prsteni. Sukob se javio kada su drugi znanstvenici, zabrinuti oko zaključka donesenog Precom, donijeli svoja vlastita izvješća. Benedikt XIV. tada je konzultirao Giovannija Polenija koji je 1743. napisao dva izvješća u kojima je objasnio uzrok pukotina i način na koji će se



sigurnost kupole povećati. Godine 1748. objavljen je njegov rad *Memorie*. U njemu je naveo informacije o pukotinama i način njihove sanacije. Također, priložio je sažetak gotovo trideset izvješća koja su objavljena u tom razdoblju i analizu ravnoteže kupole. U toj analizi prvi je puta primijenio teoreme granične analize .



*Slika 4. Analiza statičkog sustava prema Le Seur, Jacquier i Boškoviću iz Prerea [2]*

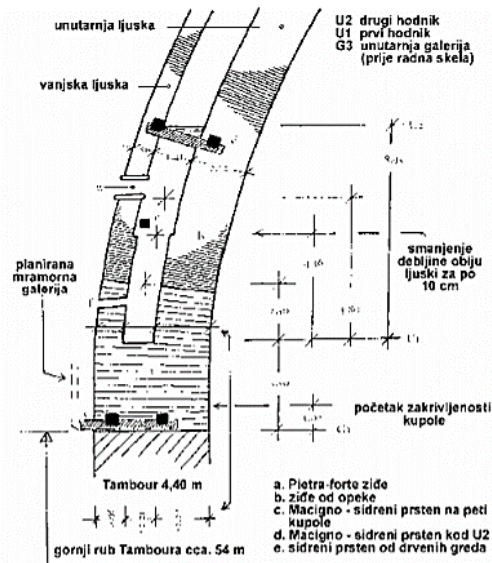
Još jedan problem vrlo sličan problemu katedrale sv.Petra u Rimu jest kupola crkve St. Maria del Fiore u Firenci (15.st.).



*Slika 5. Pogled na kupolu crkve St.Maria del Fiore, Firenca [3]*

Još u ranoj fazi projekta Nerija di Fioravantija prisutno je njegovo razmišljanje da se horizontalne sile prihvate vlačnom zategom u obliku zatvorenoga prstena od željeza ili drveta.

Iako je sam po sebi projekt bio specifičniji i horizontalne sile potiska kupole vrlo male, postavljanje kružnih čeličnih prstena bilo je nužno. Čelični prsteni koji bi se danas koristili u to doba nisu postojali. Brunelleschi je stoga predvidio kamene zatege položene na pragove. Obje kamene zatege povezane su pocinčanim željeznim kukama. Donja se zatega nalazi u peti kupole, a druga, slična zatega nalazi se oko 13 metara iznad prve. Dodatno uz obje kamene zatege ugrađeni su i drveni prsteni, vidljivi u prostoru između vanjske i unutarnje ljuske kupole (Slika 6.) [3].



Slika 6. Presjek donjeg dijela kupole (lijevo) i prikaz drvenog sidrenog prstena (desno) [3]

### 1.1.2. Povijesni pregled u Hrvatskoj

Hrvatska kulturna baština prepuna je različitih primjera u kojima je korišten isti ili sličan koncept rješavanja problema prijenosa velikih tlačnih sila. Krenuvši od samoga juga i Kneževog dvora u Dubrovniku, Peristila u Splitu, katedrale sv. Jakova u Šibeniku, sve prema sjeveru do Velikog tabora u Hrvatskom zagorju. Ovo su samo neki od značajnijih primjera na prostoru Hrvatske iako ih je još jako puno.

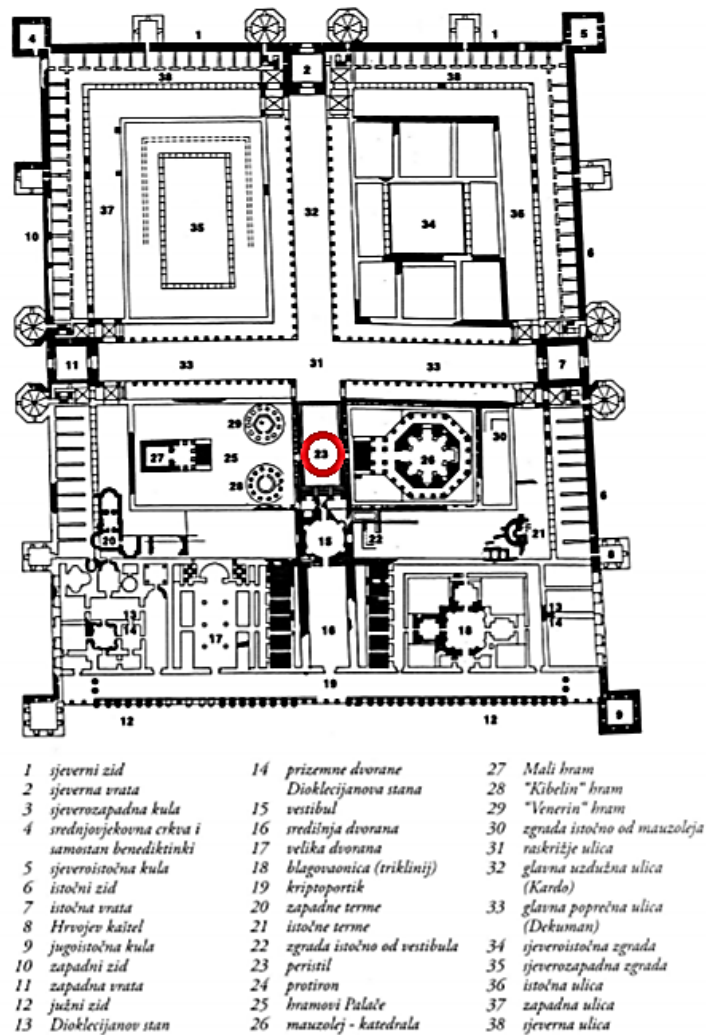


*Slika 7. Sustavi zatega : Peristil (Split), Knežev dvor (Dubrovnik), Veliki Tabor(Hum Košnički), katedrala sv. Jakova (Šibenik)- s lijeva na desno*



### 1.1.2.1. Dioklecijanova palača u Splitu

Dioklecijanova palača u Splitu jedna je od najvećih znamenitosti po kojim se sam grada ističe. Datira iz razdoblja Rimskog Carstva i vremena vladavine cara Dioklecijana. Podijeljena je na 38 dijelova (Slika 8.) gdje se na samom raskrižju glavnih ulica Karda i Dekumanusa uz katedralu ističe Peristil kao središnji gradski trg Palače.



Slika 8. Tlocrt Dioklecijanove palače sa numeriranim glavnim dijelovima [4]

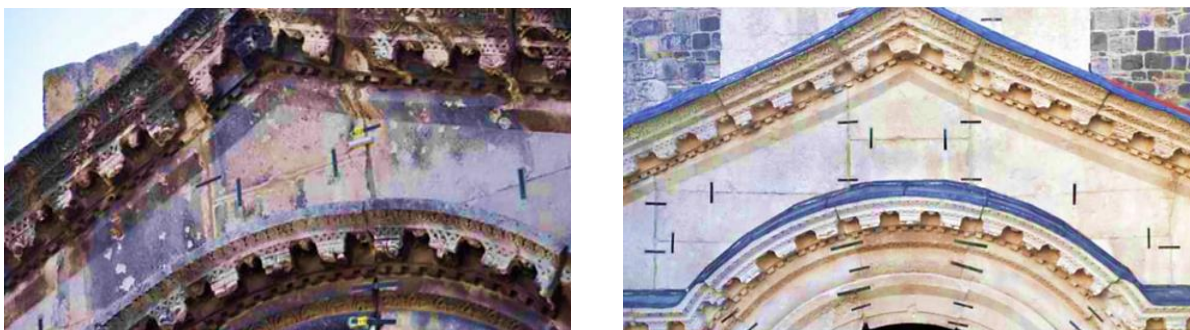
U sedamnaest stoljeća svoje povijesti nebrojeno puta njegova je arhitektura pregrađivana, obogaćivana novim stilovima i značajnim sadržajima vjerskoga i svjetovnog karaktera [5]. Tijekom povijesti i kod Peristila su se javili različiti konstruktivni problemi koje su zahtijevali sanacije i obnove, ali su se rješavali postepeno. Početkom dvadesetog stoljeća nekoliko stupova istočne kolonade demontirano je i ponovo montirano, a dva stupa sanirana su tašeliiranjem.

Velike deformacije koje su se javile pokušale su se zaustaviti povezivanjem blokova luka i zida nad njima bakrenim kopčama te postavljanjem zatega. Zatege su povezale zid zabata s masom Vestibula u dvije razine. Daljnji razvoj deformacija konstrukcije Protirona pokušao se spriječiti različitim neinvazivnim zahvatim. Analizom računalnog modela konstrukcije pokazalo se kako je neophodno povezati zabat Protirona sa Vestibulom. Također, potrebno je bilo da se krov Protirona zamjeni novim, ali da se on iskoristi za ukrućivanje cjelokupnog konstruktivnog sustava [5]. Zatege koje su prije postavljene zbog dotrajalosti, zamijenjene su novima.



*Slika 9. Zatege na zabatu Protirona [5]*

Bakrene kopče (*Slika 10.*) postavljene su u dvadesetom stoljeću kako bi povezale kamene blokove zabata na njegovom vanjskom i unutarnjem licu te radi sprječavanja otvaranja sljubnica. Tijekom ispitivanja pokazalo se da su one još uvijek pod naponom pa nisu uklonjene. Veliki rasteretni luk iznad portala koji vodi iz Protirona u Vestibul, još u srednjem vijeku djelomično je podzidan kamenim blokovima u mortu zbog teškog oštećenja. Nakon toga, luk je rekonstruiran jer se težina zida iznad luka prenosila na kamenu arhitrav iznad portala koji je uslijed prijenosa sila puknuo.



*Slika 10. Zabat Protirona prije i nakon zahvata [5]*

### 1.1.2.2. Veliki Tabor

Na sjeverozapadnom dijelu Hrvatske kao jedno od kulturnih dobara ističe se dvorac Veliki Tabor (*Slika 11.*). Godine 1502. darovnicom Ivaniša Korvina dolazi u posjed obitelji Ratkaj u čijem je posjedu sve do 1793. To razdoblje ujedno je i razdoblje najznačajnije izgradnje Velikog Tabora. Jezgra dvorca je peterokutna, trokatna kula- Palas i jedna je od najstarijih i najbolje sačuvanih srednjovjekovnih stambenih građevina na području kontinentalnog dijela Hrvatske. Palas je okružen zidovima četiriju polukružnih kula (dvije jednokatne i dvije dvokatne) i zidovima dvokatne zgrade sjevernog krila.



*Slika 11. Dvorac Veliki Tabor*

Zatege su postavljene u ravninama svih lukova iznad kapitela stupova u prizemlju te na prvom i drugom katu (*Slika 12.*). Iznad gotovo svih kapitela stupova izvedene su zatege okomite na ravnine lukova. U povijesti dvorca javljali su se problemi sa zategama koji su uzrokovali razna oštećenja. Prije svega, najveći problem uzrokovala je korozija zatega i sidrenih križeva na pročeljima. Dodatni problem predstavljalo je izvlačenje zatega iz obodnih zidova. Ono je uzrokovalo stvaranje pukotina u svodovima prizemlja i prvog kata trijema.



*Slika 12. Unutrašnjost dvorca - pogled na lukove, stupove i zatege*

Zanimljiva činjenica jest ta, da su se na zategama uočile deformacije koje su upućivale da su one umjesto vlačnim, opterećene tlačnim silama. Te deformacije najviše su uočene na zategama drugog kata. Stoga se kao dio pripremnih i pratećih radova predvidio program opažanja i mjerenja deformacija posebno iznad kapitela. Tamo je bilo potrebno definirati silu podupiranja kod koje će doći do rasterećenja stupa, odnosno početka podizanja pete lukova pripadajućeg stupa. Zajedno sa spojnim vijcima sustava drvenih greda donji dio stupa i njegova baza pridržani su horizontalnim zategama. Te horizontalne zatege koje se protežu u dva smjera sidrene su u zidove vanjske kule. Različite visine ugrađenih zatega, nejednake visine i rasponi lukova te nepravilnosti u građenju galerije još su neki od razloga oštećenja i dotrajalosti dvorišne galerije dvorca [6].

### 1.1.2.3. Knežev dvor u Dubrovniku

Knežev dvor (*Slika 13.*) palača je u Dubrovniku, sagrađena kao sjedište upravnih tijela – Velikoga vijeća, Malog vijeća, Senata, te kao prebivalište kneza. Povijest samog Dvora prate brojne obnove i popravci zbog oštećenja koja su bila uzorkovana požarima (1435.,1816.), eksplozijama (1463.), potresima (1520.,1667.,1843.,1997.), udarima groma (1610.),... Kao jednog od obnovitelja Dvora bitno je istaknuti Juraja Dalmatinca koji je bio aktivan na području Dubrovnika 1460.-tih godina.



*Slika 13. Knežev dvor Dubrovnik*

Jedan od većih problema, kako u prošlosti, tako i danas jest potresno opterećenje, budući da se sam grad nalazi na potresom ugroženom području. Potres 6. travnja 1667.godine prouzročio je



velike štete na cijeloj građevini Dvora. Urušila se galerija atrija, prvog kata zapadnog, južnog i istočnog krila, pročelje se nagnulo prema trgu, a oštećen je bio i knežev stan. Nakon potresa, najprije se krenulo na sanaciju porušenih dijelova Dvora. Tijekom sanacije unutarnji raspored prostorija se sačuvao, a na mjestu Onofrijeve oružanice sagradila se nova dvorana. Na prvom katu stari zidovi su srušeni i promijenjen je raspored prostorija. Potresi su također obilježili 1843.godinu gdje su nakon toga radovi bili usmjereni na učvršćivanje i stabilizaciju objekta.

Glavni projekt obnove Dvora temeljen je na nužnosti statičke sanacije objekta i osiguranja od potresa koji bi u budućnosti mogao oštetiti građevinu. Prema nekim tadašnjim procjenama idući jači potres jačine 9 stupnjeva prema MCS mogao bi se dogoditi tijekom sljedećih 170 godina. Iz toga razloga bilo je potrebno ojačati građevinu armiranobetonskim pločama u svim stropovima sjeverozapadne i jugozapadne kule te je izvršena dilatacije zgrade Dvora od zgrade gradske uprave. Ojačani su temelji Dvora na način da su temeljne trake povezane ugradnjom armiranobetonskih greda. Ujednačen prijenos opterećenja sa konstrukcije na stupove osiguran je podlijevanjem stupova pročelja mortom kako bi se ispunile šupljine u sljubnicama [7].



*Slika 14. Knežev dvor, atrij*

Povezivanje postojećih stropnih konstrukcija u stropovima prizemlja izvedeno je čeličnim sponama (zategama). Njihovo povećanje krutosti ostvarilo se zatezanjem dviju točaka kamenog zida napinjalkama. Čeličnim sidrima stropne konstrukcije međukata i prvog kata povezane su sa vodoravnim armiranobetonskim serklažima. Svi serklaži povezani su kako međusobno, tako i sa novom armiranobetonskom pločom pomoću armature. Budući da se na taj način znatno povećala krutost same konstrukcije na više mjesta izvedene su čelične dijagonalne spone (na drugom katu serklaži sa sponama izvedeni su samo na jugoistočnoj kuli). Iako se građevina Dvora dodatno, različitim metoda, ukutila, uočeno je kako i pri manjim podrhtavanjima i slijeganjima tla dolazi do nepravilne distribucije sila po cijeloj građevini. Nepravilna

distribucija dovodi do pucanja pojedinih zidova i dijelova kamene plastike. Tijekom radova 1981. i 1982. godine zatege koje su bile postavljene na pročelju, koje se smatralo najosjetljivijom zonom, zamijenjene su novima [7].

Knežev dvor nije ostao pošteđen ni tijekom Domovinskog rata i agresije na Dubrovnik. Na krovnu terasu izravno je bačena minobacačka granata koja je oštetila popločenje i slojeve hidroizolacije. Njene krhotine oštetile su krovne prozore, zapadno i južno pročelje, oluke, dijelove kamenih kanala... Godine 1993. sklapanjem primirja sanirana je terasa trijema i dijelovi pokrova nad južnim krilom zgrade. Istočna terasa, terasa iznad atrija te zapadni i južni krov sanirani su tijekom radova 2001.godine, a 2008.godine sanirani su zidovi i svodovi u atriju. Prva faza nove sanacije Dvora izvođena je od kraja 2015. do kraja ožujka 2016.godine. Tijekom te sanacije zamijenjeno je nekoliko stupova i kapitela stupova trijema na prvom katu. Učestale seizmičke aktivnosti manjih intenziteta rezultiraju različitim oštećenjima na najkrhkijim točkama spomenika. Uslijed toga dolazi i do zamora materijala i brzog propadanja kamene plastike.



*Slika 15. Kneže dvor danas [8]*

#### 1.1.2.4. Katedrala sv. Jakova u Šibeniku

Šibenska katedrala posvećena sv. Jakovu jedinstveno je arhitektonsko djelo čija je gradnja započela 1431.godine i trajala gotovo stotinu godina. Cijela katedrala građena je isključivo od kamena i mramora, bez opeke, drva i betona kao vezivnog materijala. Juraj Dalmatinac koji je njenu gradnju nastavio 1441.godine smislio je montažnu gradnju kakva se primjenjuje u drvenoj gradnji, a riječ je o sustavu na utor pero. Na taj način dobio je jedinstvo izgleda unutarnjeg prostora i vanjskog izgleda, gdje se unutarnji prostor u potpunosti otkriva vanjskom izgledu. Godine 2001. katedrala je uvrštena u svjetsku baštinu UNESCO-a.



*Slika 16. Katedrala sv. Jakova u Šibeniku*

Katedrala je oblika latinskog križa gdje izvorno nije planirana kao takva nego je to bio prijedlog Juraja Dalmatinca. Sama konstrukcija katedrale jedinstvena je i originalna, u sebi objedinjuje gotički i renesansni stil. Katedrala je duga 38 metara, široka 14, srednja lađa visoka je 19, a kupola 31 metar. Glavna i poprečna lađa imaju polubačvast, dok bočne lađe imaju četverobačvasti krov koji je izrađen od vodoravno postavljenih međusobno žljebovima povezanih i olovom nalivenih velikih kamenih ploča. Kamene ploče poprijeko su nagnute na pojasne lukove, te kao обручи na bačvi opasuju krov.



*Slika 17. Katedrala sv. Jakova u Šibenik*

Koncept osmerokutne kamene kupole vrlo je sličan onomu u Firenci na crkvi St. Maria del Fiore, a razlikuju je od nje prozori. Današnja kupola koja se nalazi na katedrali nije originalna, već je rekonstruirana u 19. stoljeću gdje je tada u cijelosti bila demontirana. Kupola ima osam ploha i osam rebara. Plohe su formirane od 13 kamenih ploča promjenjive debljine. Gornji rub ploče debeo je oko 10 cm, a donji oko 15 cm. Na donjem rubu formiran je zub presjeka 40x45 milimetara koji pokriva donju ploču. Tako je onemogućen prodor vode na spojevima ploča [9].



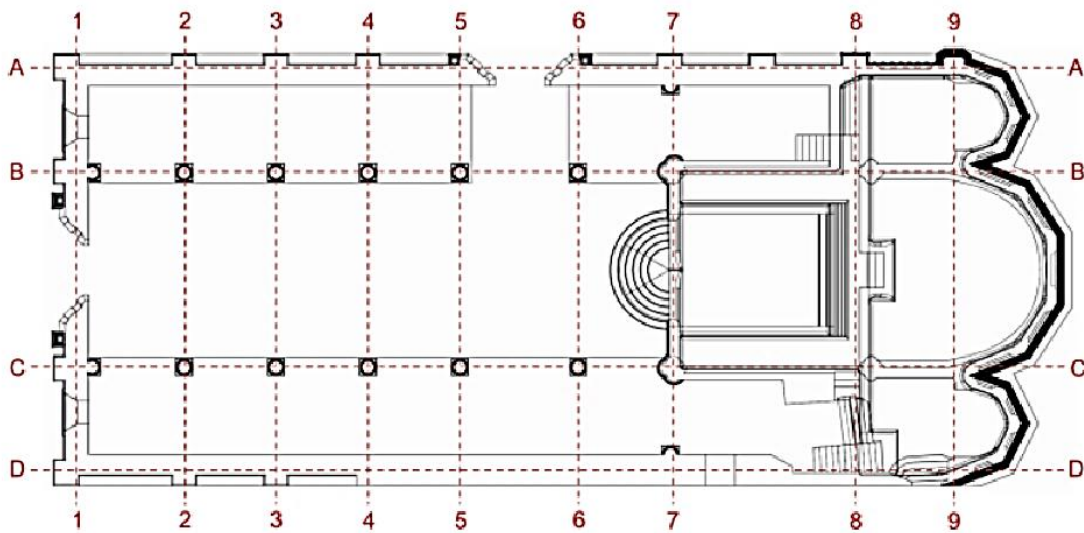
*Slika 18. Obnova kupole*

Stabilnost kupole osigurana je na način da su u utore postavljeni kamene klinovi te su se tako spriječili i radijalni i tangencijalni pomaci. Zbog pojave pukotina i prodiranja vode, kupola je nekoliko puta tijekom povijesti sanirana na različite načine krpanjem i demontažom. Krpanje je relativno jednostavnija metoda za realizaciju jer isključuje demontažu. Ključno pitanje je: je li to način na koji se radi kulturno dobro i jedan od najvrjednijih spomenika graditeljstva u



Europi? Nedostatak metode jest taj što u određenom vremenu može doći do pojave statičkih problem. Stoga, ploče su se mogle jedino na takav način zamijeniti jer bi svaki drugi oblik rada mogao izazvati dodatna oštećenja. To su neki od načina koji su bili izneseni kao prijedlozi sanacije. Metoda krpanja bila je primijenjena polovicom 19. stoljeća. Tada su izvedeni značajni radovi. Rekonstruirani su svodovi nad svim brodovima katedrale i kupola, izrađene su nove zatege i obnovljena je kamena plastika na portalima katedrale. Tada su uočeni statički problemi čije je rješavanje u tom trenutku bilo odgođeno.

Sustav zatega Šibenske katedrale sastoji se od aluminijskih zatega i zatega od kovanog željeza. U podnožju centralnog svoda nalazi se 9 spojenih zatega, a svodove stupova i svodove galerija spaja 36 zatega koje su nešto kraće.



*Slika 19. Tlocrt Šibenske katedrale*

## 2. MOTIVACIJA I CILJEVI

Kroz životni vijek građevina potrebno je njihovo kontinuirano održavanje kako kroz preglede i praćenja, tako i kroz eventualne popravke. To je posebno bitno kod objekata koji su od kulturnog značaja. Uslijed nepredviđenih događaja i neizbježnih vremenskih utjecaja, na samoj građevini i pored redovitog održavanja može doći do pojave oštećenja. Svjedoci smo, posebno u posljednje vrijeme, raznih katastrofalnih oštećenja i urušavanja građevina. Od, nedavno požarom pogođene katedrale Notre Dame u Parizu, rušenja mosta Morandi u Italiji pa sve do sličnih slučajeva zabilježenih u povijesti. Takva oštećenja izazvala su značajnije probleme. Zbog navedenih problema potrebno je raznim intervencijama i tehnološkim postupcima produžiti životni vijek građevina, posebno ako gledamo sa aspekta kulturološkog značaja.



a)

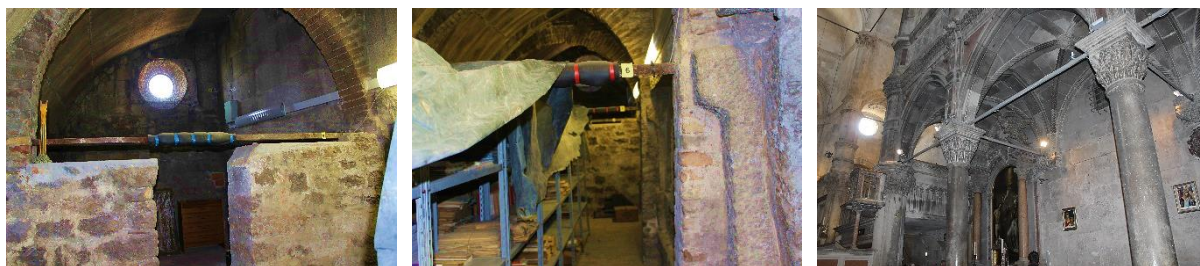


b)

Slika 20. a) Notre Dame, Pariz [10], b) Most Morandi, Genova [11]

Kao što je navedeno u prethodnom poglavlju, kod sustava zatega javljaju se problemi konstruktivnog i estetskog karaktera. Konstruktivni problem predstavlja način sidrenja zatega u zidove i stupove o čemu ovisi i njihova učinkovitost. Navedeni problem, kroz povijest se poboljšanjem tehnika izgradnje i inovacija na području materijala rješavao na razne načine. Iz konstruktivnog problema dodatno se javlja problem definiranja rubnih uvjeta kod takvih elemenata. Prilikom izrade numeričkog modela to može biti vrlo zahtjevno [12]. Zbog činjenice da rasipanje rezultata za slučaj različitih rubnih uvjeta može biti vrlo veliko bitno je ispravno ih definirati .

Na *Slici 21.* prikazani su neki od načina sidrenja zatega u katedrali sv. Jakova u Šibeniku. Na njima se može se primijetiti kako su zatege sidrene na različite načine. Prilikom izrade



*Slika 21. Šibenska katedrala – sidrenje zatega*

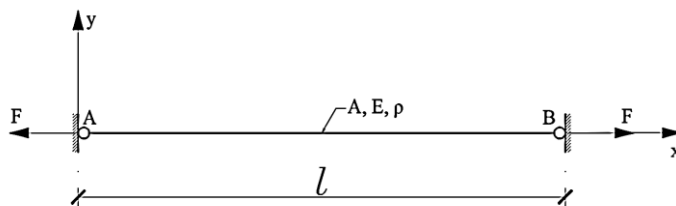
numeričkog modela to predstavlja veliki problem i veliki izazov jer se sami sustav sastoji od ukupno 45 zatega i za svaku od njih potrebno je definirati rubne uvjete. Postavlja se pitanje kako ih ispravno definirati da bi se na temelju numeričkog modela mogla odrediti vrijednost unutarnjih sila u zategama. Navedeno potvrđuje koliko definiranje rubnih uvjeta može biti zahtjevno. Kao najbolja kontrola i ujedno i pomoć prilikom definiranja rubnih uvjeta koriste se nam mogu ponuditi odgovor na prethodno postavljena pitanja i dovesti nas do ispravnih zaključaka.

Posljednjih desetljeća predložene su različite metode za eksperimentalnu procjenu vlačnih sila u zategama lukova i svodova. Štoviše, statički i dinamički pristupi su formulirani su za procjenu kritične tlačne aksijalne sile i savojne krutosti krajnjih ograničenja. Glavni cilj ovog rada jest predložiti metodologiju određivanja vrijednosti unutarnjih sila u zategama na temelju eksperimentalno određenih dinamičkih (modalnih) parametara . Također, cilj je utvrditi univerzalnosti primjene koeficijenta  $\kappa$  danog u literaturi za ispitivanje u laboratoriju i primjenu u konkretnim realnim slučajevima.

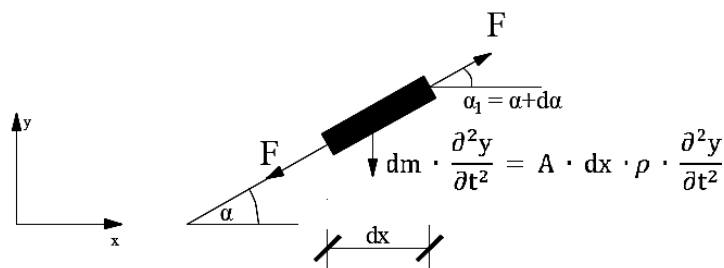
### 3. TEORIJSKA PODLOGA

#### 3.1. Titranje tanke žice

Mjerenjem vlastite frekvencije titranja uzorka možemo doći do podataka kako o deformaciji i naprezanju tako i o vrijednosti unutarnje sile u samom uzorku. Promatramo titranje žice koja je napeta između točaka A i B :



Slika 22. Žica napeta između točaka A i B



Slika 23. Element žice duljine dx u stanju titranja

Za promatrani element žice u stanju titranja primjenom D'Alembertova [13] principa dobivamo:

$$\sum y = 0 \rightarrow F \cdot \sin \alpha - F \cdot \sin (\alpha + d\alpha) - A \cdot dx \cdot \rho \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = 0 \quad (1)$$

Za male kutove :

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta y}{\delta x} \quad (2)$$

$$\sin (\alpha + d\alpha) \approx \operatorname{tg} (\alpha + d\alpha) = \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{\delta y}{\delta x} \right) \cdot dx = \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \cdot dx \quad (3)$$

Ako izraze (1) i (2) uvrstimo u (3) dobit ćemo:

$$F \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - F \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - F \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - A \cdot dx \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

Sređivanjem izraza dobivamo jednadžbu titranja žice :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (5)$$

gdje je  $\sigma = \frac{F}{A}$  naprezanje u žici, a  $\rho$  gustoća materijala žice u  $[kg/m^3]$ .

Opće rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe (4) tražimo u obliku :

$$y(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (6)$$

Jedno rješenje je :

$$y = a \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (7)$$

gdje je :  $\lambda$  – duljina vala

$T$  – period titranja

Ako izraz (7) deriviramo i uvrstimo u (5), dobit ćemo :

$$-a \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t = \frac{\sigma}{\rho} \cdot a \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (8)$$

Iz izraza (8) dobivamo :

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \quad (9)$$

Brzina vala je je  $v = \frac{\lambda}{T}$ , pa izraz (9) prima oblik :

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (10)$$

ili:

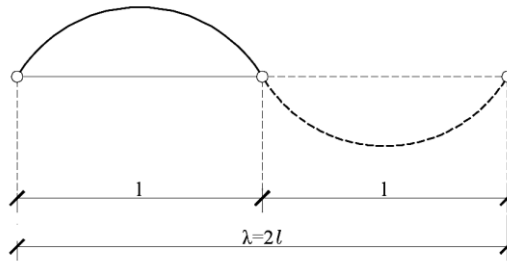
$$\frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (11)$$

Budući da je frekvencija vala  $f = \frac{1}{T}$ , izraz (11) možemo pisati u obliku :

$$\lambda \cdot f = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (12)$$

Naprezanje u žici je :

$$\sigma = \lambda^2 \cdot \rho \cdot f^2 \quad (13)$$



Slika 24. Duljina vala titranja žice

U izrazu (13)  $f$  je vlastita frekvencija titranja žice, a duljina vala  $\lambda = 2l$  (Slika 24.) pa izraz za naprezanje u žici oblika je :

$$\sigma = 4 \cdot l^2 \cdot \rho \cdot f^2 \quad (14)$$

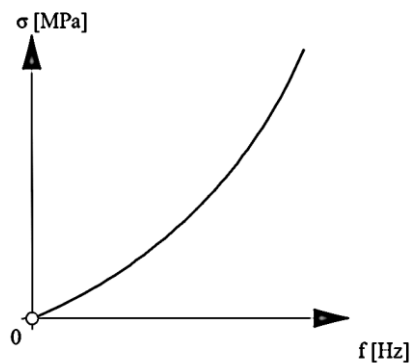
gdje su :  $\sigma$ -naprezanje u žici [MPa]

$l$  –duljina žice [m]

$\rho$  - gustoća materijala žice [kg/m<sup>3</sup>]

$f$ – vlastita frekvencija titranja žice [Hz]

Izraz (13) može se i grafički prikazati :



Slika 25. Grafički prikaz izraza (13)

### 3.2. Jednadžba poprečnih oscilacija grede opterećene uzdužnom silom

Ako zanemarimo nelinearni učinak krutosti na savijanje i početnog progiba žice (kabela) jednadžba osciliranja je linearna. Učinak krutosti na savijanje može se zanemariti ako je odnos debljine i duljine žice dovoljno velik. U slučaju kada se debljina žice poveća ili duljina skрати dolazi do pojave odstupanja stvarnih rezultata od linearne teorije. Što se tiče početnog provjesa žice, ako je dovoljno mali, njegov utjecaj na linearnu teoriju titranja žice može se zanemariti, dok se u slučaju njegova povećanja taj utjecaj uzima u obzir.

Uzdužna sila koja se u javlja u  $n$ -tom obliku titranja, za slučaj idealne žice zanemarive krutosti na savijanje i mase  $m$ , može se izraziti oblikom [14]:

$$N_n = \left(\frac{2f_n l}{n}\right)^2 m \quad (15)$$

Ako zanemarimo početni provjes (kabela) i uzmemo u obzir utjecaj krutosti na savijanje diferencijalna jednadžba oscilacije bit će oblika:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \quad (16)$$

gdje je:  $EI$  - krutost na savijanje

$m$  - masa kabela

$y$  - pomak u poprečnom smjeru

Rješenje gornje diferencijalne jednadžbe ovisi o početnim, odnosno rubnim uvjetima. U slučaju slobodno oslonjene grede, izraz za uzdužnu silu bit će oblika:

$$N = \left(\frac{2f_n l}{n}\right)^2 m - EI \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \frac{m}{\kappa_{pp,n}^2}, \quad (17)$$

dok će rješenje za kružnu frekvenciju biti:

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{N}{m} + \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{m}, \quad (18)$$

gdje je:  $\omega$  - kružna frekvencija  $\omega = 2\pi f$

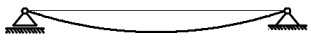
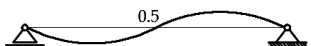


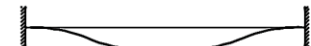
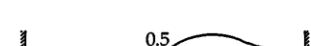



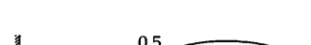



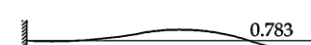
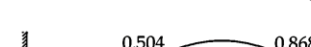
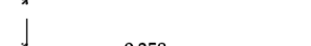
Za ostale rubne uvjete, rješenje gornje diferencijalne jednadžbe puno je složenije i zahtjeva različite aproksimacije. U konačnici, izrazi za frekvenciju  $n$ -tog oblika titranja glasi [15]:



$$f_n = \frac{\kappa^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \sqrt{1 \pm \frac{Fl^2}{EI\pi^2 n^2}}, \quad (19)$$

gdje je  $\kappa$  bezdimenzionalni koeficijent ovisan o rubnim uvjetima.

Tablica 1. Vrijednost koeficijenta  $\kappa$  za prve četiri vlastite frekvencije u ovisnosti o rubnim uvjetima[15]

OSLONCI	OBLIK TITRANJA I ČVOROVI	$\kappa$
Zglob-zglob	1 	3.1416
	2 	6.283
	3 	9.425
	4 	12.566 $\approx n\pi$
Upet – upet	1 	4.730
	2 	7.853
	3 	10.996
	4 	14.137 $\approx \frac{(2n + 1)\pi}{2}$
Upet - zglob	1 	3.927
	2 	7.069
	3 	10.210
	4 	13.352 $\approx \frac{(4n + 1)\pi}{4}$
Upet - slobodan	1 	1.875
	2 	4.694
	3 	7.855
	4 	10.996 $\approx \frac{(2n - 1)\pi}{2}$



### 3.3. Eksperimentalne procjene vlačnih sila u zategama

Ako je poznata savojna krutost i masa po jedinici dužine grede s konstantnim poprečnim presjekom, usvajanjem Euler - Bernoullijevog modela grede, mogu se odrediti aksijalno opterećenje i savojna krutost krajnjih ograničenja pomoću jedne frekvencije i triju komponenata odgovarajućih oblika titranja.

Mnoge inženjerske primjene odnose se na određivanje aksijalnog opterećenja slobodno oslonjenih greda uz prisutnost krajnjih rotacijskih elastičnih rubnih uvjeta. U [16] opisani su prijedlozi eksperimentalnih tehnika za procjene vlačnih sila u zategama lukova i svodova. Neki od autora također su predložili eksperimentalne tehnike za procjenu kritičnih sila greda s nepoznatim rotacijskim uvjetima. Obično, geometrijska svojstva greda mogu se izravno procijeniti s dovoljnom točnošću, dok ograničenje savojne krutosti ili aksijalne sile ne može se lako dobiti izravnim mjerenjem. Neki od autora također su predložili formulacije konačnih elemenata (FE) u kombinaciji s predloženim tehnikama za grede i okvire uz prisutnost obaju translacijskih i rotacijskih elastičnih oslonaca. Međutim, u tim formulacijama može nastati neujednačenost procijenjenih parametara. Konkretno, za procjenu vlačnih sila koje djeluju u zategama, predložene su statičke i dinamičke metode. Statičke metode koriste pomake i deformacije zatega koje se nalaze pod djelovanjem jedne ili više koncentriranih sila. Suprotno tomu, dinamičkim metodama, vrši se ispitivanje vibracija korištenjem parametara grede. Predložena je također približna metoda, koja koristi statičke progibe i frekvencije titranja za procjenu uzdužne sile u zategama. Korištenjem prvih triju modalnih frekvencija, predložena numerička metoda [16] bazira se na minimizaciji odgovarajuće funkcije pogreške iz čega se dobiva vlačna sila i savojna krutost.

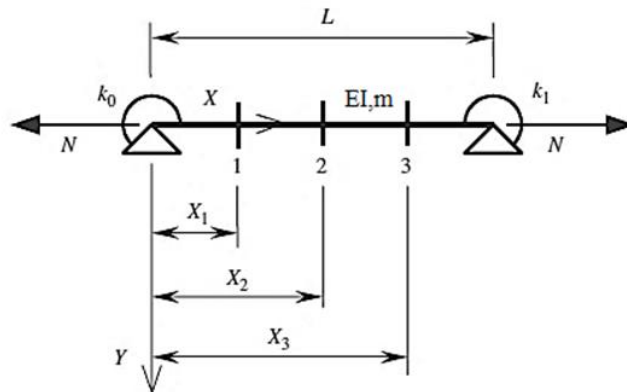
Pokazano je da se korištenjem bilo koje prirodne frekvencije i tri komponente pomaka odgovarajućeg oblika titranja, mogu lako dobiti i uzdužna opterećenja i savojna krutost krajnje opruge grede koja je izložena vlačnim i tlačnim silama. Štoviše, određeni su i odnosi između pomaka za određeni oblik titranja i uzdužne rezultante, kako bi se procijenili odgovarajući uvjeti za fizikalno ispravno definiranje nepoznatih parametara. Ispravnost ove tehnike dobivena je laboratorijskim i in-situ testovima. Konkretno, predložena metoda je više puta primijenjena u konsolidacijskom dizajnu svodnih arkada monumentalnih građevina gdje su bile potrebne zamjene oštećenih zatega.

### 3.3.1. Osnovne jednađbe eksperimentalne procjene vlačne sile

Problem prizmatične jednorasponske grede podvrgnute konstantnom uzdužnom opterećenju sa krajnjim elastičnim rotacijskim ograničenjima bila je predmetom opsežne studije proteklih godina [17]. Referentni model čini slobodno oslonjena greda pravokutnog poprečnog presjeka duljine  $L$ , ograničena s dvije krajnje elastične opruge  $k_0$  i  $k_1$ , podvrgnuta uzdužnom opterećenju  $N$  gdje pozitivna vrijednost predstavlja vlačnu silu. Youngov modул elastičnosti  $E$ , masa po jedinici dužine  $m$  i moment tromosti poprečnog presjek  $I$  pretpostavljeni su kao konstante koje su poznate. Kružne frekvencije,  $\omega$  i oblici titranja,  $u(x)$ , određuju se sljedećim problemom svojstvenih vrijednosti uz korištenje bezdimenzionalne koordinate  $x = X/L$  i zanemarivanje rotacijske inercije i posmičnih deformacija :

$$u''''(x) - nu''(x) + \lambda^4 u(x) = 0 \text{ za } 0 < x < 1, \quad (20)$$

$$u(0) = 0, \quad u''(0) - \beta_0 u'(0) = 0 \text{ za } x = 0,$$



Slika 26. Greda sa krajnjim fleksijskim ograničenjima i položajem presjeka [17]

$$u(1) = 0, \quad u''(1) - \beta_1 u'(1) = 0 \text{ za } x = 1, \quad (21)$$

gdje prethodni izraz predstavlja derivaciju po  $x$ , a

$$n = \frac{NL^2}{EI}, \lambda^4 = \omega^2 \frac{mL^4}{EI}, \beta_0 = \frac{k_0 L}{EI}, \beta_1 = \frac{k_1 L}{EI} \quad (22)$$

Rješenje prve dvije jednađbe daje:

$$u(x) = C_1 \cos q_1 x + C_2 \sin q_1 x + C_3 \cosh q_2 x + C_4 \sinh q_2 x, \quad (23)$$

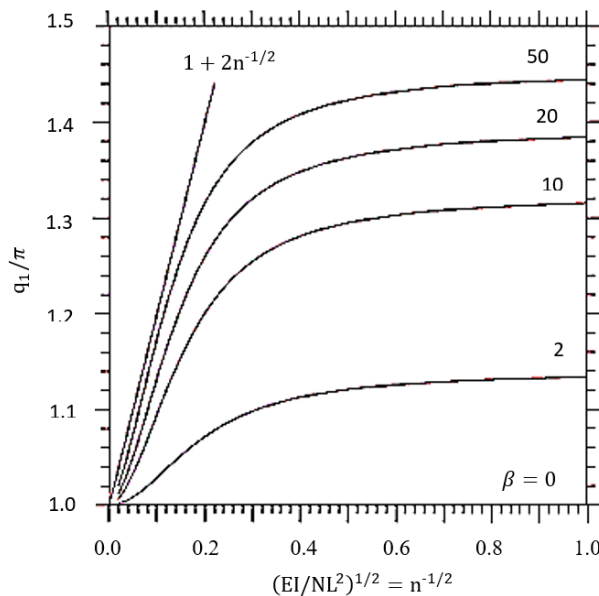
gdje :

$$q_1^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{n^2 + 4\lambda^4} - n) \quad q_2^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{n^2 + 4\lambda^4} + n) = q_1^2 + n \quad (24)$$

Korištenjem izraza (22) i (24) bilo koja kružna frekvencija može se zapisati u obliku :

$$\omega = 2\pi f = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = q_1 q_2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = q_1^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \sqrt{1 + \frac{n}{q_1^2}} = q_1 \sqrt{\frac{N}{mL^2}} \sqrt{1 + \frac{q_1^2}{n}} \quad (25)$$

Za gredu sa simetričnim rubnim uvjetima podvrgnutu vlačnoj sili, s obzirom na prvu vlastitu frekvenciju titranja, (Slika 27.) prikazuje graf odnosa  $q_1$  i  $1/\sqrt{n}$ .



Slika 27. Prva frekvencija titranja: prikaz odnosa  $q_1$  u odnosu na  $1/\sqrt{n}$  za različite vrijednosti savojne krutosti  $\beta$  krajnjih ograničenja

Kada krutost krajnjeg ograničenja,  $\beta$ , ode na nulu, koeficijent  $q_1$  teži  $\pi$  i više nije ovisan o  $n$ . Stoga, jednadžba (25) postaje:

$$\omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \sqrt{1 + \frac{N}{N_{cr,E}}} \quad (26)$$

gdje  $N_{cr,E} = \pi^2 EI/L^2$  predstavlja Eulerovu kritičnu silu. Koeficijent  $q_1$  približava se vrijednosti  $\pi$  (za bilo koji  $\beta$ ) kada je  $1/\sqrt{n}$  dovoljno mali. Drugim riječima, ako je vlačna sila vrlo visoka, frekvencija ne ovisi o rubnim uvjetima i greda se ponaša kao da se radi o napetoj

žici. Stoga, supstitucijom prve (eksperimentalne) frekvencije  $\omega_1$  u jednadžbu (26) dobivamo nepoznatu uzdužnu silu:

$$N = N_{cr,e} \left( \frac{\omega_1^2}{\pi^4} \frac{mL^4}{EI} - 1 \right) = N_{cr,e} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\pi} \right)^4 - 1 \right] \quad (27)$$

Za gredu koja je upeta na oba kraja ( $\beta_0 = \beta_1 = \beta = \infty$ ) kada uzdužna sila iščezne ( $n=0$ ), koeficijent  $q_1$  postiže maksimalnu vrijednost za prvu frekvenciju, tj.  $q_1 = 1,506 * \pi = 4.730$ .

Koeficijenti jednadžbe (23),  $C_1, C_2, C_4$  linearne su funkcije tri (eksperimentalne) amplitude  $u_1, u_2, u_3$ , i ovise o nepoznatom parametru  $n$  i konstanti  $\lambda$  kroz koeficijente  $q_1$  i  $q_2$  iskazane u jednadžbama. S druge strane  $\lambda$  ovisi o eksperimentalnoj kružnoj frekvenciji  $\omega$ . Uvrštavanjem rubnih uvjeta  $u(l) = 0$  dobiva se transcendentna jednadžba koja ovisi on nepoznatoj konstanti  $n$ . Ona osigurava vrijednosti  $n$  koje odgovaraju bilo kojoj eksperimentalnoj vrijednosti  $\lambda$ . Štoviše, ako prvi oblik titranja daje  $u_1 = u_3$  ili drugi oblik  $u_2 = 0$ , tada su granični uvjeti simetrični.

Karakteristična frekvencijska jednadžba, dobije se sređivanjem prethodnih jednadžbi i izraza:

$$\begin{aligned} & (q_1^2 + q_2^2) \sin q_1 \operatorname{sh} q_2 + (\beta_0 + \beta_1) + (q_1^2 + q_2^2) (q_2 \sin q_1 \operatorname{ch} q_2 - q_1 \cos q_1 \operatorname{sh} q_2) + \\ & \beta_0 \beta_1 [2q_1 q_2 (1 - \cos q_1 \operatorname{ch} q_2) + (q_1^2 + q_2^2) \sin q_1 \operatorname{sh} q_2] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

## 4. LABORATORIJSKO ISPITIVANJE

### 4.1. Uvod

U ovom poglavlju primijenjen je sustav monitoringa na modelu zatege u laboratoriju. Na njemu je provedeno mjerenje dinamičkih parametara- frekvencije i oblika titranja. Navedeni dinamički parametri mjereni su za slučaj slobodno oslonjenih (zglobnih) i obostrano upetih rubnih uvjeta i opterećenja zatege različitim vrijednostima vlačnih sila. Prilikom opterećenja vlačnom silom, istodobno su mjereni naprezanje i deformacija modela. Nakon mjerenja rezultati su analizirani i međusobno uspoređeni.

### 4.2. Postavke eksperimenta

Prije početka ispitivanja bilo je potrebno adekvatno odrediti parametre modela zatege. Cilj je bio napraviti model čijim će se ispitivanjem dobiti frekvencija odziva i modalni oblici što sličniji realnoj zatezi. Dimenzije zatege približno su određene tako da odnos omjera  $\frac{EI}{L}$  modela, odgovara istom odnosu stvarne zatege. Budući da su stvarne zatege čelične za izradu modela korišten je čelik kao materijal (*Tablica 2*). Ograničenja prilikom izrade modela te prilikom samog ispitivanja bili su duljina modela, njegova velika krutost, te simulacija rubnih uvjeta. Prije konačnog odabira modela zatege napravljen je numerički model u programskom paketu Abaqus 6.17-4. Razradom različitih mogućnosti i obradom rezultata numeričkog modela usvojeni su najoptimalniji parametri dimenzija i materijala kako bi se zadovoljile potrebe rada. Dodatan opis modela za pojedine rubne uvjete dan je u sljedećim poglavljima (*4.4.*, *4.5.*). U nastavku je dan opis korištene opreme prilikom ispitivanja te metodologija analize rezultata dobivenih ispitivanjem.

*Tablica 2. Karakteristike materijala korištenog prilikom izrade modela*

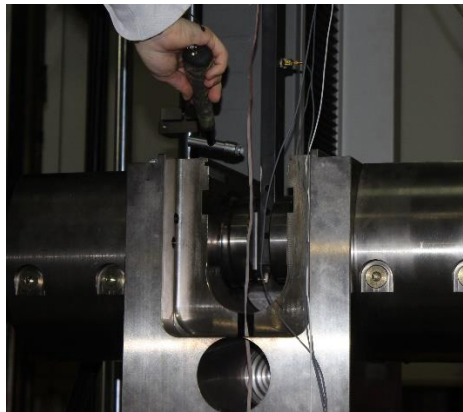
Karakteristike	Oznaka	Vrijednost
Modul elastičnosti	E	190 000 MPa
Specifična gustoća	$\rho$	7850 kg/m <sup>3</sup>
Poissonov koeficijent	$\nu$	0,3

### 4.2.1. Opis opreme

Oprema predstavlja značaj faktor o kojem ovisi pristup prikupljanju i obradi podataka. Sva oprema koja se koristi, mora biti prilagođena opsegu karakteristika konstrukcije za čije se ispitivanje oprema koristi. Osim adekvatne opreme, potrebno je osigurati registriranje i prijenos podataka. Registriranjem i prijenosom podataka uklanjaju se svaki dodatni signali koji u analizi mogu uzrokovati poteškoće i netočnosti [18]. U nastavku je dan popis opreme korištene u ovom istraživanju s kratkim opisom.

- **Pobuđivač**

Pravilan izbor pobude jedan je od uvjeta uspješne provedbe dinamičkog ispitivanja. Primjena vrste pobude ovisi o nizu faktora, a svaka od njih ima svoje prednosti i nedostatke. Korištenjem pobuđivača tijekom eksperimentalne modalne analiza osigurava se kontrola nanošenja funkcije pobude. Pobuđivač može biti hidraulički, elektromagnetski s rotirajućom masom, i sl. U ovom slučaju pobuda je umjetno inducirana impulsnim udarom čekića. Impulsni udar je i najčešće primjenjivana tranzijentna pobuda, a opseg frekvencija ovisi o udarnoj masi i krutosti kontaktne površine između udarne mase i konstrukcije. Odgovor konstruktivnog sistema blizak je njegovoj karakteristici u vremenskoj i frekventnoj domeni.

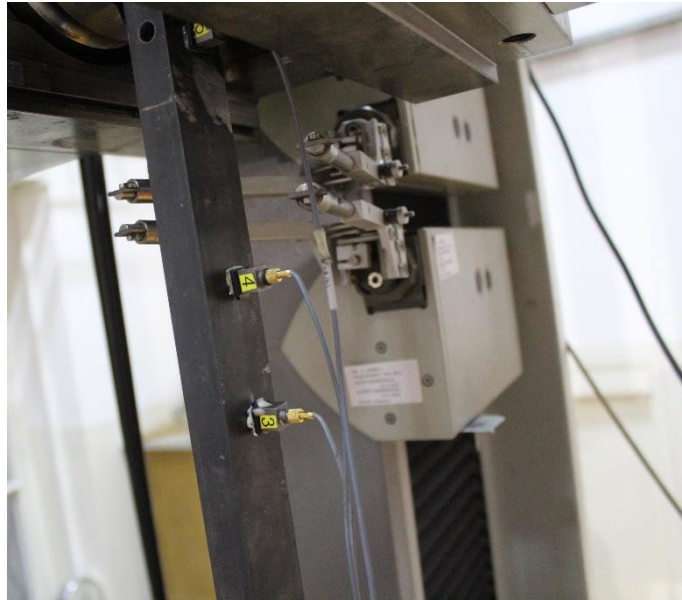


*Slika 28. Nanošenje pobude gumenim čekićem*

- **Osjetilo**

Osjetilom se osigurava da mehaničko gibanje ostvareno korištenjem pobuđivača pretvori u električni signal. U eksperimentalnoj modalnoj analizi najčešće se koriste akcelerometri koji u sebi sadrže piezoelektrične kristale pomoću kojih se generiraju

električni naboji prilikom deformacije. Oni zapravo pokrivaju vrlo širok spektar frekvencija tijekom kojeg se ponašaju linearno, a istodobno ostaju dobrih karakteristika kroz dugi period. Tijekom ispitivanja modela zatege također su kao osjetila korišteni akcelerometri.



*Slika 29. Akcelerometri na modelu zatege s obostrano upetim rubnim uvjetima*

Akceleometre čine dvije mase pri čemu je jedna od njih pričvršćena na konstrukciju osjetila i odvojena je od druge mase piezoelektričnim materijalom. Piezoelektrični materijala ponaša se poput opruge što uzrokuje postojanje rezonantne frekvencije akcelerometra. Sila koja djeluje na neko tijelo proporcionalna je njegovom ubrzanju i masi. Masa koja se nalazi u središtu akcelerometra giba se djelovanjem vibracija i na taj način unosi određenu silu na piezoelektrični materijal proporcionalnu akceleraciji [19]. Za ovo ispitivanje korišteni su akcelerometri tipa Brüel & Kjær 4508B osjetljivosti  $10\text{mV/ms}^{-2}$  s amplitudnim područjem frekvencija od 0,3 Hz do 8 kHz.

- **Sustav za prikupljanje podataka**

Korištenjem sustava za prikupljanje podataka vrši se filtriranje, kondicioniranje i pojačanje signala te njegova pretvorba u digitalni oblik. Filtriranjem se uklanjaju neželjene frekvencije koje prilikom pojačanja signala mogu uzrokovati šumove. Kondicioniranjem se ostvaruje priprema analognog signala za pretvorbu u digitalni oblik pomoću analogno digitalnog pretvarača ( eng. Analog Digital Converter, ADC).

Pojačavanje signala ima dvije funkcije: 1. Povećanje rezolucije ulaznog signala 2. Povećanje omjera signala i šuma. Izlazni signal osjetila (napon, struja, električni naboj) u većini je slučajeva prenizak za direktnu obradu u analogno digitalnom pretvaraču te je potrebno povećati razinu signala radi ostvarenja analogno digitalne konverzije [20]. Za potrebe ovog ispitivanja korišten je sustav za prikupljanje podataka tipa Brüel & Kjær 3560C koji ima 5 ulaznih kanala.



*Slika 30. Analogno Digitalni pretvarač*

- **Analizator**

Analizator je posljednja komponenta kojom se vrši obrada i analiza signala. U današnje vrijeme obrada i analiza signala obavlja se različitim programskim sustavima na osobnom računaru. Za potrebe ovoga ispitivanja korišten je programski sustav „Pulse-LabShop“ .

- **Elektrootporni tenzometri- EOT**

Rad elektrootpornih tenzometara bazira se na promjeni električnog otpora struje koja teče uslijed promjene duljine i poprečnog presjeka pri deformiranju. Sastoje se od tankih žica savijenih po nekoliko puta i nosećeg elementa na kojeg je žica zalijepljena. Njihov rad se temelji na linearnom odnosu promjene električnog otpora u odnosu na promjenu deformacije na mjestu zalijepljene trake na konstrukciji. Za potrebe ovog ispitivanja postavljena su dva elektrootporna tenzometra spojena u polumosnu konfiguraciju na sredini modela zatege kako bi se bilježila deformacija modela prilikom vlačnog ispitivanja.





*Slika 31. Elektrootporni tenzometri u polumosnoj konfiguraciji*

### **4.3. Metodologija analize rezultata**

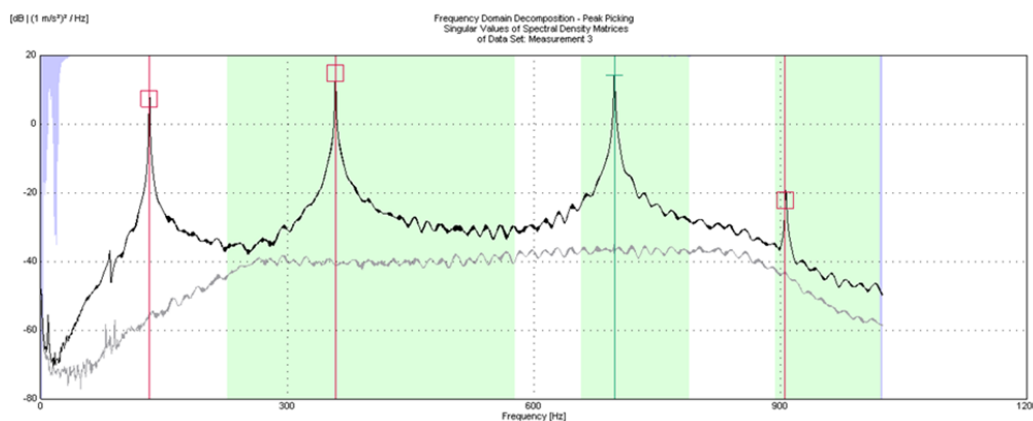
U nastavku su dane osnovne postavke, temeljene na teoriji za određivanje dinamičkih parametara konstrukcije i određivanje korelacije modalnih oblika korištenjem MAC faktora. Navedena teorijska podloga koristit će se za analizu rezultata dobivenih laboratorijskim ispitivanjem te za usporedbu rezultata ispitivanja sa rezultatima numeričkog proračuna.

#### **4.3.1. Modalna analiza**

Modalna analiza je proces određivanja modalnih parametara (prirodnih frekvencija, faktora prigušenja i modalnih oblika) iz izmjerenih podataka o vibracijama. Budući da izmjereni podaci mogu biti u obliku ili funkcija frekvencijskog odziva ili odziva impulsa, postoje modalna analiza frekvencijske domene i modalna analiza vremenske domene.[21]

Ako konstrukciju opterećujemo konstantnom silom čija vrijednost oscilira tako da joj se frekvencija mijenja tijekom vremena, odgovor konstrukcije na danu pobudu mijenjat će se. Pri određenim frekvencijama taj odgovor u vidu pomaka, brzine i akceleracije postizat će maksimalne vrijednosti. Upravo te frekvencije pri kojima se maksimalne vrijednosti odgovora postižu odgovaraju rezonantnim frekvencijama konstrukcije. Ako provedemo Fourierovu transformaciju odgovora konstrukcije iz vremenske u frekvencijsku domenu, na mjestu rezonantnih frekvencija primjećujemo vrhove (eng.peak) [22]. Modalni oblik predstavlja režim

gibanja pri pojedinim rezonantnim frekvencijama kao da je on izdvojen od svih ostalih modova sustava.



Slika 32. Funkcija odgovora konstrukcije u frekvencijskoj domeni

Eksperimentalna modalna analiza podrazumijeva eksperimentalno određivanje dinamičkih parametara i može se provoditi na modelima ili gotovim konstrukcijama. Eksperimentalna i teorijska podloga modalne analize bazira se na tome da je dinamički sustav linearan i da je dinamički proces stacionaran. Razlikujemo dvije osnovne metode eksperimentalne modalne analize: klasična eksperimentalna modalna analiza (EMA) i operacionalna modalna analiza (OMA). Razlika između eksperimentalne i operacionalne modalne analize jest da je kod eksperimentalne modalne analize potrebno znati parametre pobude. S druge strane, za provedbu operacionalne modalne analize mogu se koristiti ambijentalne vibracije (vjetar, promet, sl.) što predstavlja jeftinije i jednostavnije provođenje ispitivanja te neometano korištenje konstrukcije tijekom ispitivanja. [21]

### Modalna transformacija

Realne konstrukcije su uglavnom višestupanjske, a samo neke se mogu aproksimirati kao jednostupanjske što predstavlja idealizaciju dinamičkog sustava. Gibanje višestupanjskog sustava može se zapisati skupom diferencijalnih jednadžbi drugog reda u matričnom obliku:

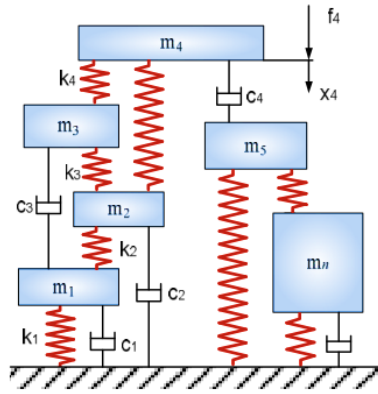
$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad (29)$$

gdje su :

$M, C, K$ - matrica masa, prigušenja i krutosti

$\ddot{u}, \dot{u}, u$  – vektori ubrzanja, brzine i pomaka

$F$  – vektor vanjskog opterećenja



Slika 33. Gibanje višestupanjskog sustava[18]

Modalnom transformacijom možemo doći do  $n$  međusobno neovisnih diferencijalnih jednadžbi. Svaka od jednadžbi može se rješavati zasebno. Kako bi se omogućilo zasebno rješavanje matrice masa, prigušenja i krutosti potrebno je dijagonalizirati. Vektor pomaka  $u$  pri modalnoj transformaciji moguće je izraziti kao linearnu kombinaciju amplituda vlastitih oblika titranja:

$$u = \Phi q \quad (30)$$

gdje  $\Phi$  predstavlja modalnu matricu, odnosno matricu vlastitih vektora :  $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]$ , a  $q$  vektor modalnih koordinata. Modalna matrica neovisna je o vremenu, pa su vektori brzine i ubrzanja oblika :

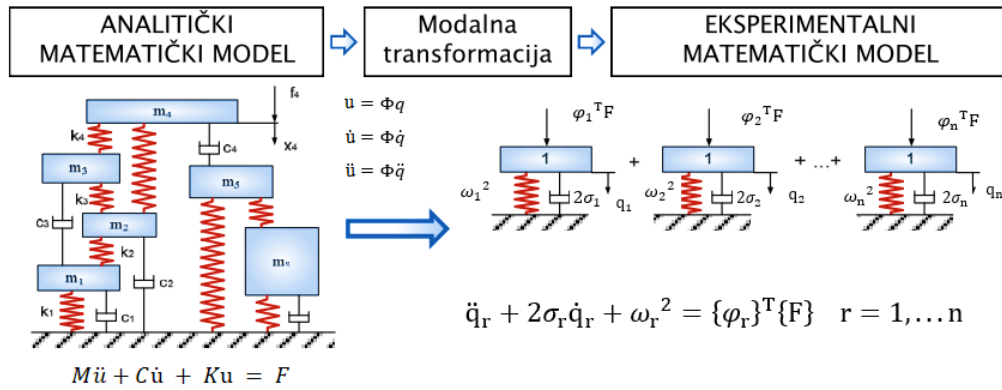
$$\dot{u} = \Phi \dot{q}, \ddot{u} = \Phi \ddot{q} \quad (31)$$

Uvrštavanjem izraza (31) u diferencijalnu jednadžbu (29) i množenjem izraza transponiranom modalnom matricom,  $\Phi^T$ , dobit ćemo transformiranu jednadžbu gibanja:

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q} + \Phi^T C \Phi \dot{q} + \Phi^T K \Phi q = \Phi^T F \quad (32)$$

matrice  $M^* = \Phi^T M \Phi$  i  $K^* = \Phi^T K \Phi$  su dijagonalne što proizlazi iz ortogonalnosti vlastitih oblika.

Transformacijom u modalni prostor dobijemo  $n$  nezavisnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda. Svaka od tih jednadžbi predstavlja jednadžbu gibanja neovisnog jedostupanjskog sustava i predstavlja gibanje pri jednom od modalnih oblika [18].



Slika 34. Modalna transformacija višestupanjskog sustava u modalni prostor [18]

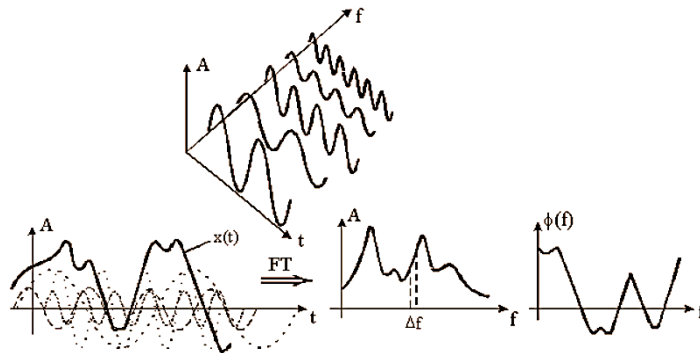
### Fourierove transformacije

Kao što je navedeno u poglavlju 4.3.1. svaki dinamički proces možemo prikazati u vremenskom i frekventnom području. Stoga, mora postojati prijelaz iz jednog u drugo područje. Prijelaz se vrši pomoću Fourierovih transformacija. One nam omogućavaju da se svaki fizikalno realan signal može jedinstveno rastaviti na sumu sinusnih i kosinusnih članova odgovarajućih frekvencija. Fourierove transformacije vrše se pomoću Fourierovog transformacijskog para:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-2\pi ft} df$$

gdje  $x(t)$  predstavlja vremensku funkciju, a  $X(f)$  Fourierovu transformaciju funkcije  $x(t)$ .



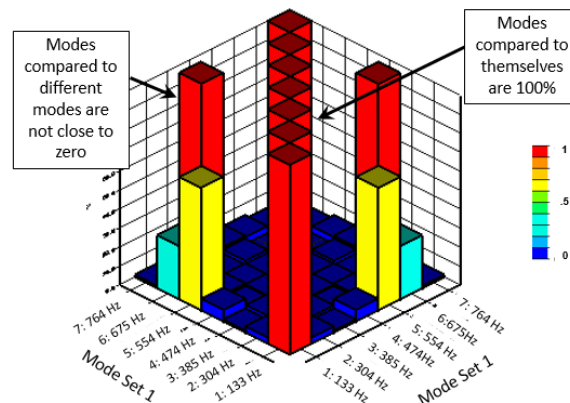
Slika 35. Razlaganje signala na ortogonalne komponente (amplituda frekvencija, faza) [24]

### 4.3.2. Usporedba modalnih oblika korištenjem MAC faktora

Prilikom definiranja korelacije modalnih oblika koristi se MAC faktor. Pomoću njega utvrđuje se u kojoj mjeri pojedini modalni oblik pri diskretnim frekvencijama ( $\varphi_i$ ) oko vrha funkcije oblikom odgovara referentnom modalnom obliku ( $\varphi_r$ ) određenom za sam vrh funkcije spektralne gustoće snage [25]. MAC se računa kao normalizirani skalarni produkt dvaju skupa vektora ( $\varphi_i$ ) i ( $\varphi_r$ ). Rezultantni skalari raspoređeni su u MAC matricu gdje se može prepoznati oblik funkcije koherencije, što ukazuje na vezu između ( $\varphi_i$ ) i ( $\varphi_r$ ).

$$MAC = \frac{|\varphi_r^T \varphi_i|^2}{\{\varphi_r^T \varphi_r\}\{\varphi_i^T \varphi_i\}}$$

Njegova vrijednost ograničena je između 0 i 1. Pri tomu 1 označava potpuno konzistentne oblike. Vrijednosti blizu 0 označavaju da oblici titranja nisu konzistentni. Sve vrijednosti veće od 0,9 ukazuju na dosljednu podudarnost [26].

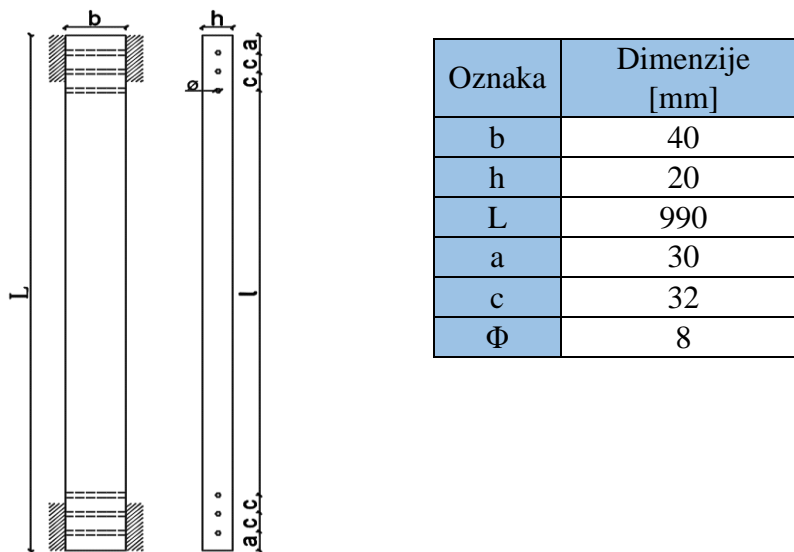


Slika 36. MAC matrica za usporedbu 9 oblika titranja [27]

Kako bi se odredila korelacija između oblika titranja dobivenih laboratorijskim ispitivanjem modela zatega i oblika titranja dobivenih modalnom analizom numeričkog modela u radu će se koristiti prethodno opisana metodologija usporedbe. Ista metodologija primijenit će se i za pomoć pri definiranju realnih rubnih uvjeta zatega na primjeru katedrale sv. Jakova u Šibeniku.

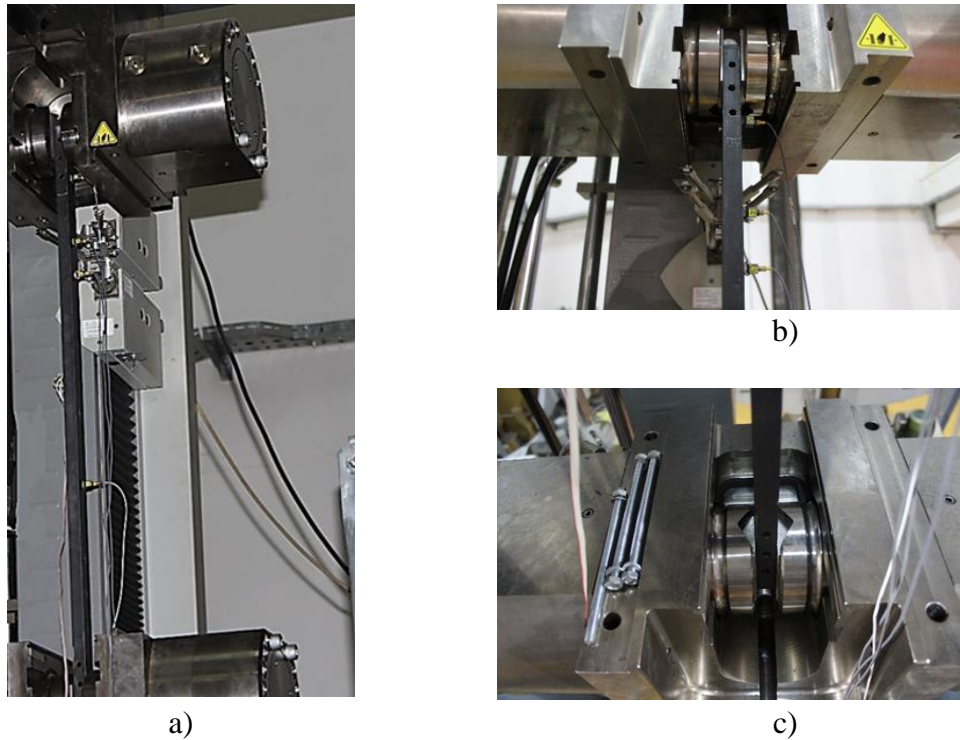
#### 4.4. Model zatege sa upetim rubnim uvjetima

Na *Slici 37.* prikazan je nacrt modela zatege sa pripadajućim dimenzijama za upete rubne uvjete. Model je izrađen od čeličnog punog pravokutnog profila dimenzija poprečnog presjeka 20x40 mm ukupne duljine 990 mm. Na model su postavljena 4 akcelerometra od kojih se jedan proglašio referentnim. Udaram čekića između postavljenih akcelerometara, te mjerenjem odgovora modela na pobudu, modalnom analizom određeni su oblici titranja. Na modelu su napravljena 4 mjerenja sa seljenjem triju akcelerometara, pri čemu je u 4.mjerenju pomaknut samo jedan akcelerometar. Na taj način dobiveno je ukupno 11 mjernih točaka, te 2 krajnje za koje se pretpostavilo da su nepomične.



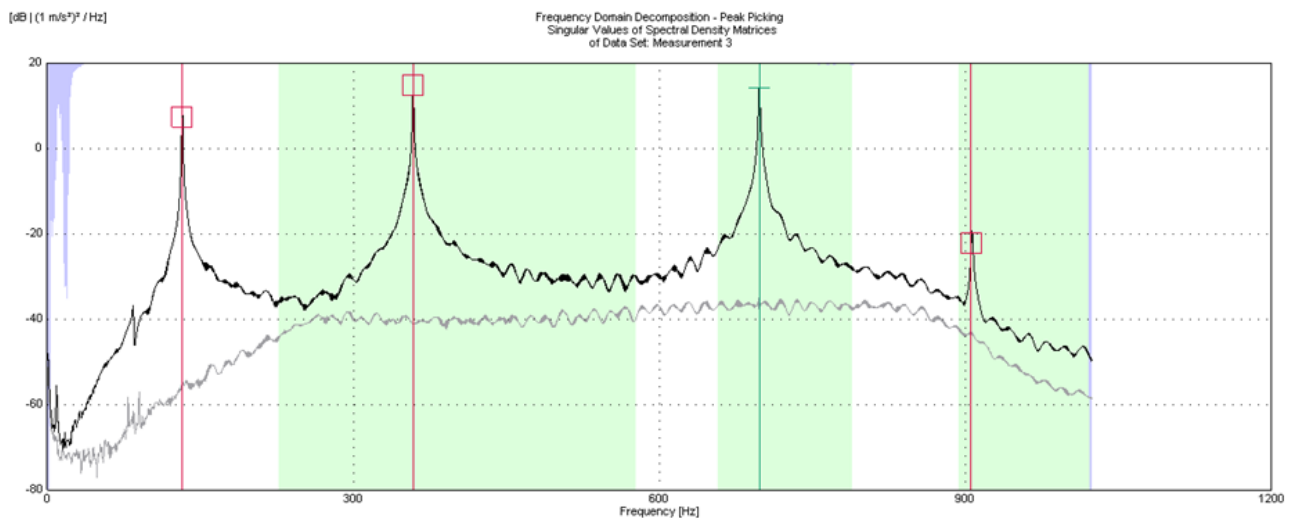
*Slika 37. Nacrt modela zatege sa dimenzijama za upete rubne uvjete*

Na *Slici 38. a)* prikazan je ispitivani model zatege sa upetim rubnim uvjetima sa detaljima spoja gornjeg i donjeg dijela modela (*Slici 38.b) i c)*). Upeti rubni uvjeti simulirani su prihvatom u čeljust statičke preše na ukupnoj duljini od 110 mm od krajeva (po 55 mm na svakom kraju).



Slika 38. a) Ispitivani model zatege sa obostrano upetim rubnim uvjetima  
 b) Upeti rubni uvjeti- detalj spoja gornjeg dijela modela;  
 c) Upeti rubni uvjeti - detalj spoja donjeg dijela modela

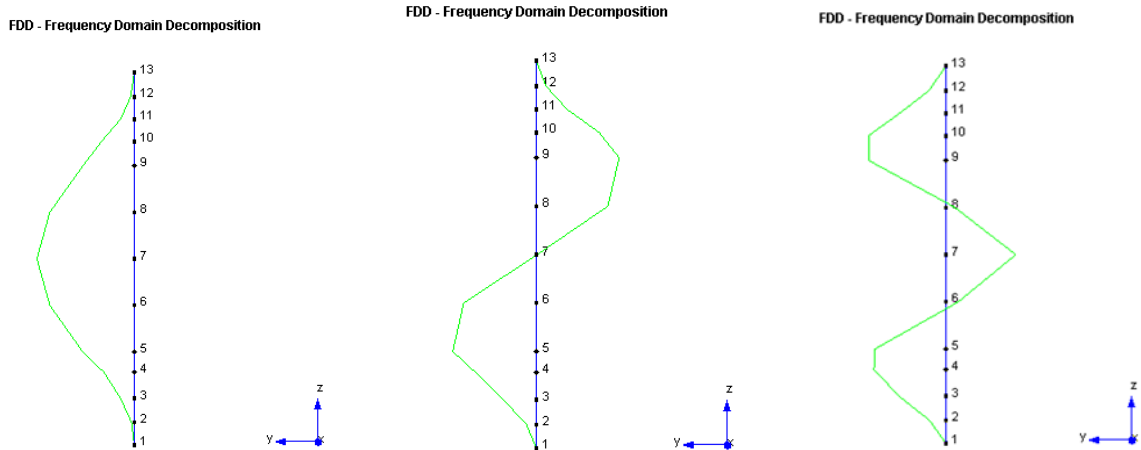
Na karakterističnom zapisu vlastitih frekvencija (Slika 39.) jasno su istaknute vrijednosti prve tri (četiri) vlastite frekvencije titranja za opterećenje silom od 8 kN. Ostale vrijednosti prvih triju frekvencija titranja za različite vrijednosti sila dane su u Tablici 3. Prva 3 oblika titranja zatege za neopterećeno stanje prikazani su na Slici 40.



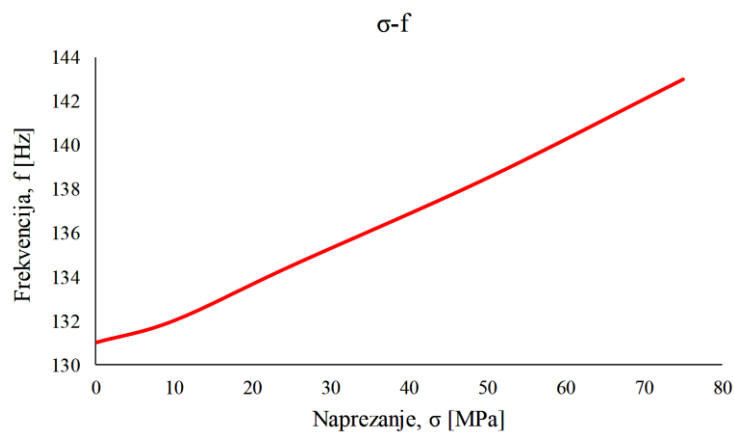
Slika 39. Karakteristični zapis vlastitih frekvencija za upete rubne uvjete

Tablica 3. Eksperimentalno izmjerena promjena frekvencije za različite vrijednosti sila (naprezanja) za upete rubne uvjete

Sila [kN]	0	8	20	40	60	80
Naprezanje[MPa]	0	10	25	50	75	100
1.frekvencija[Hz]	131	132	134,5	138,5	143	147
2.frekvencija[Hz]	357	358,5	361	366	372,5	380
3.frekvencija[Hz]	697	698	699,5	704,5	711	719



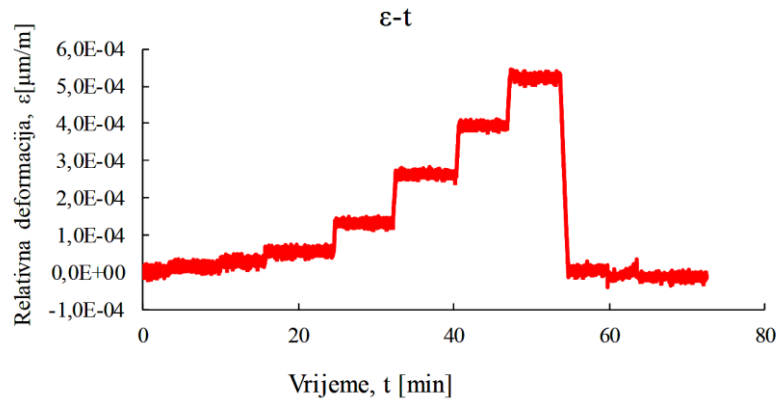
Slika 40. Prva tri oblika titranja za upete rubne uvjete- rasterećeno stanje



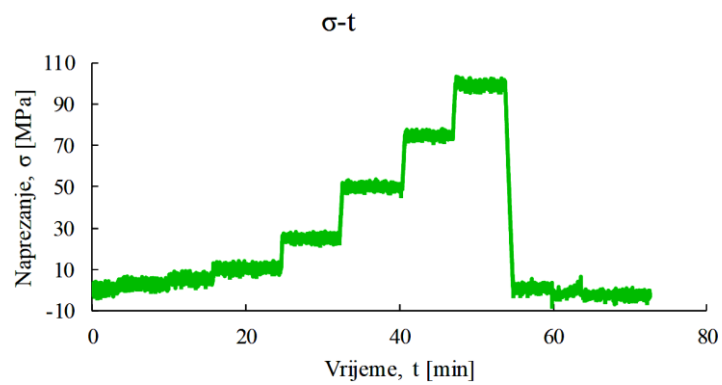
Slika 41. Odnos promjene naprezanja i prve frekvencije titranja za upete rubne uvjete

Na prethodnoj Slici 41. vidljivo je da je odnos promjene frekvencije u odnosu na promjenu naprezanja gotovo linearan, a linearnost je posebno izražena pri većim vrijednostima naprezanja ( $>20$  MPa). U nastavku, na slikama (Slika 42., Slika 43) prikazane su promjene relativne deformacije, odnosno naprezanja u vremenu. Na njima se jasno ističu područja i vremenski intervali unutar kojih je ispitivani model opterećen, odnosno rasterećen.





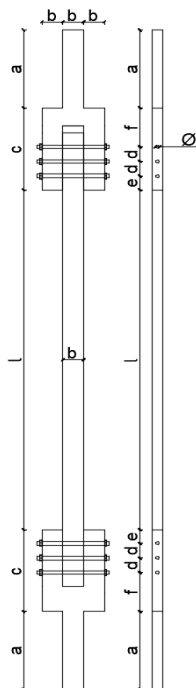
Slika 42. Promjena relativne deformacije u vremenu za upete rubne uvjete



Slika 43. Promjena naprezanja u vremenu za upete rubne uvjete

#### 4.5. Model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima

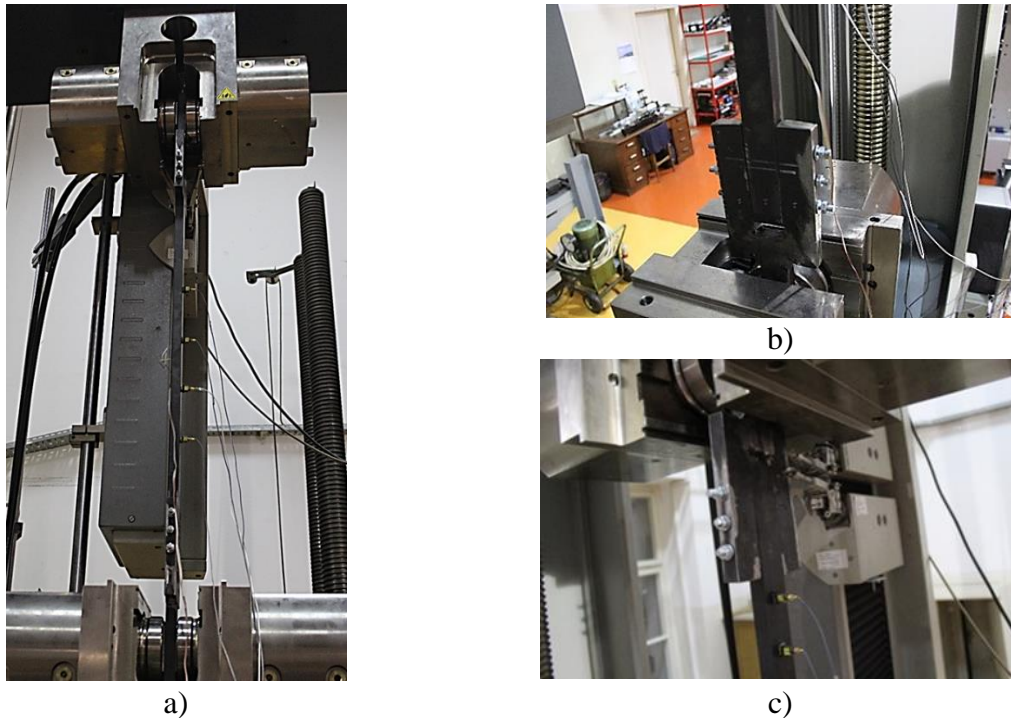
Na *Slici 44.* prikazan je nacrt modela zatege sa zglobnim rubnim uvjetima sa pripadajućim dimenzijama. Za izradu modela poslužili smo se modelom korištenim za aproksimaciju upetih rubnih uvjeta. Na istom modelu postavljeni su prihvat prikazani na *Slici 44.* sa pripadajućim dimenzijama. Ukupna duljina modela zatege zajedno sa prihvatima iznosi 1440 mm. Prihvati su izrađeni od istog materijala kao i zatega, a na model su spojeni navojnom šipkom promjera 8mm i maticama. Navedenim prihvatom aproksimirani su zglobni rubni uvjeti. Na model su postavljena 4 akcelerometra na isti način kao i na modelu na kojemu su aproksimirani upeti rubni uvjeti. Jedan od akcelerometara proglašen je referentnim. Udarom čekića između postavljenih akcelerometara, te mjerenjem odgovora modela na pobudu, modalnom analizom određeni su oblici titranja. Na modelu su napravljena 4 mjerenja sa seljenjem triju akcelerometara, pri čemu je u 4. mjeranju pomaknut samo jedan akcelerometar. Na taj način dobiveno je ukupno 11 mjernih točaka, te 2 krajnje za koje se pretpostavilo da su nepomične.



Oznaka	Dimenzije [mm]
b	40
h	20
l	990
a	179
c	170
d	32
e	30
f	85
Φ	8

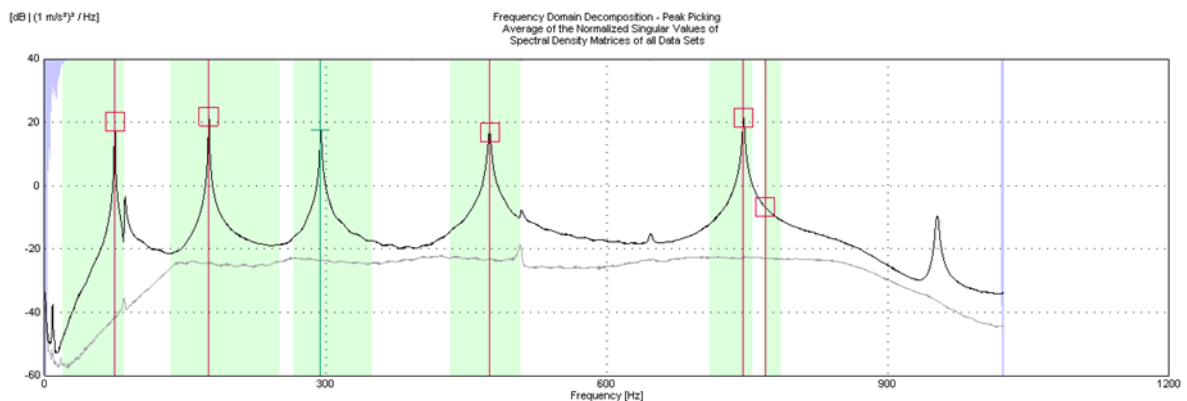
*Slika 44. Nacrt modela zatege sa dimenzijama za zglobne rubne uvjete*

Na sljedećoj slici (*Slika 45.a*) prikazan je ispitivani model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima sa detaljima spoja gornjeg i donjeg dijela modela (*Slika 45.b* i *c*).



a) Ispitivani model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima  
 b) Zglobni rubni uvjeti- detalj spoja gornjeg dijela modela;  
 c) Zglobni rubni uvjeti - detalj spoja donjeg dijela modela

Na karakterističnom zapisu vlastitih frekvencija (Slika 46.), kao i za slučaj zapisa za upete rubne uvjete, jasno su istaknute vrijednosti prvih pet vlastitih frekvencija titranja za opterećenje silom od 8 kN. Također, vidljivo je da su te frekvencije nešto manje u odnosu na slučaj upetih rubnih uvjeta što je zapravo i očekivano. Ostale vrijednosti prvih triju frekvencija titranja za različite vrijednosti sila dane su u *Tablica 4*. Prva 3 oblika titranja zatege za neopterećeno stanje prikazani su na *Slici 47*.

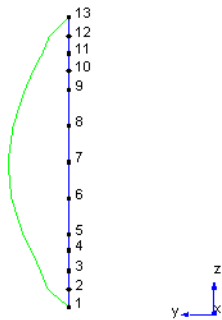


Slika 46. Karakteristični zapis vlastitih frekvencija za zglobne rubne uvjete

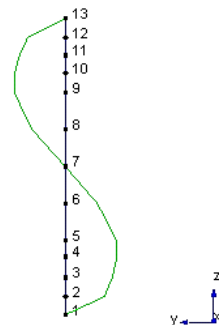
Tablica 4. Promjena frekvencije za različite vrijednosti sila (naprezanja) za zglobne rubne uvjete

Sila [kN]	8	10	20	40	50	60
Naprezanje[MPa]	10	12,5	25	50	62,5	75
1.frekvencija[Hz]	72,5	72,5	75	76,5	79,5	80,5
2.frekvencija[Hz]	172,5	173	175	177,5	182	87,5
3.frekvencija[Hz]	286,5	287,5	294,5	299,5	306,5	184,5

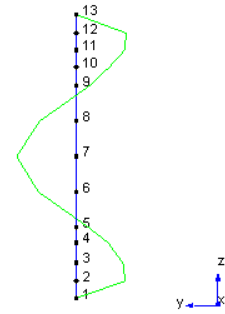
FDD - Frequency Domain Decomposition



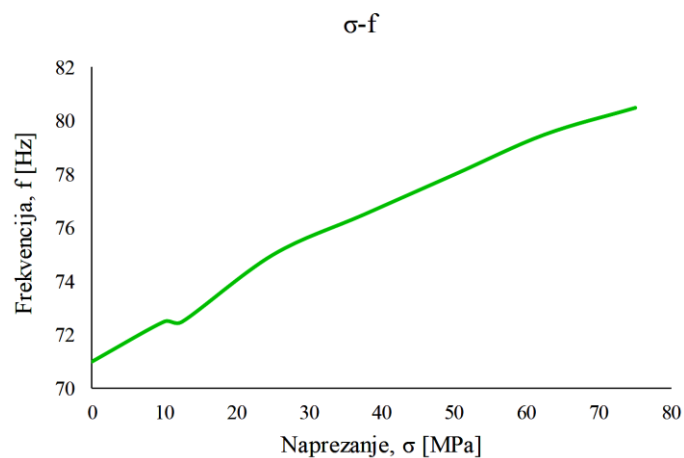
FDD - Frequency Domain Decomposition



FDD - Frequency Domain Decomposition



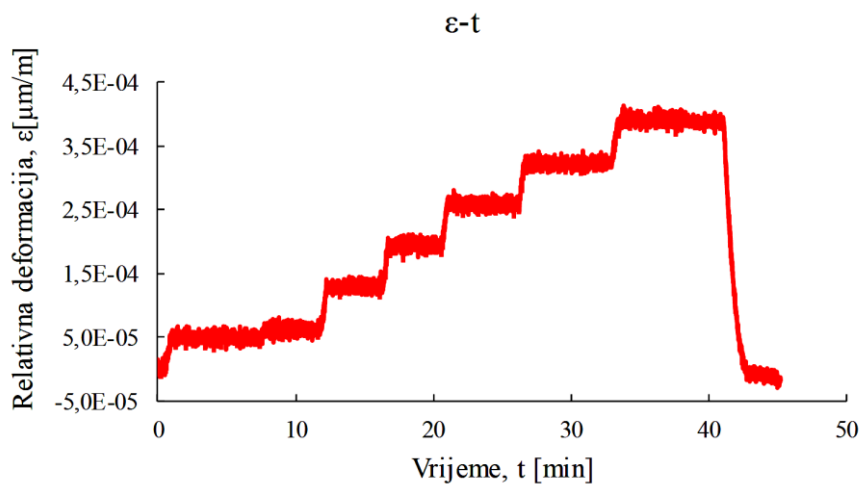
Slika 47. Prva tri oblika titranja za zglobne rubne uvjete – rasterećeno stanje



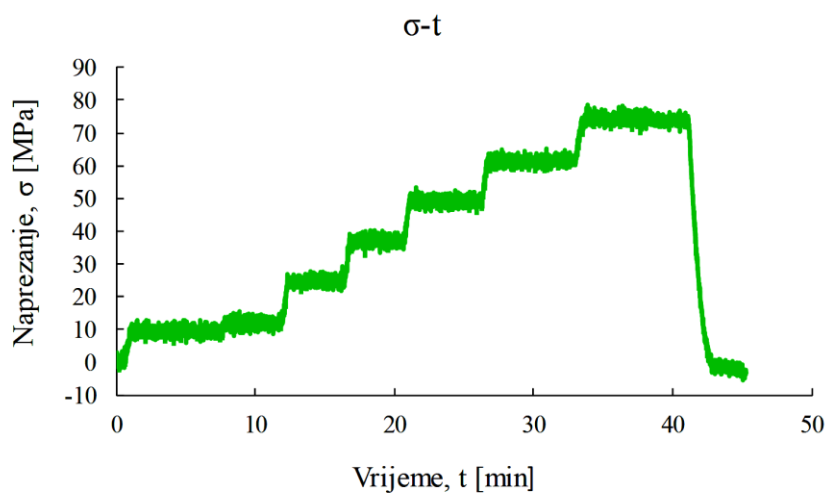
Slika 48. Odnos promjene naprezanja i prve frekvencije titranja za zglobne rubne uvjete

Na prethodnom prikazu (Slika 48.) vidljivo je da odnos promjene frekvencije u odnosu na promjenu naprezanja više nije linearan kao za slučaju upetih rubnih uvjeta. Ističe se vrlo nepravilna linija, ali pri višim vrijednostima naprezanja linearnost se ipak nazire. Mogući uzrok odstupanja od linearnog odnosa jesu rubni uvjeti koji u ovom slučaju ipak nisu idealno zglobni, već su samo aproksimirani kao takvi. U nastavku, na slikama (Slika 49., Slika 50.) prikazane su

promjene relativne deformacije, odnosno naprezanja u vremenu. Na njima se jasno ističu područja i vremenski intervali unutar kojih je ispitivani model opterećen, odnosno rasterećen.



Slika 49. Promjena relativne deformacije u vremenu za zglobne rubne uvjete



Slika 50. Promjena naprezanja u vremenu za zglobne rubne uvjete

## 4.6. Numerički model

Eksperimentom određeni dinamički parametri- frekvencija i modalni oblici korišteni su za baždarenje numeričkog modela. Numerički model izrađen je u programskom paketu Abaqus 6.17-4. Zatega je modelirana kao štapni element na kojemu su mijenjani rubni uvjeti kako bi oblik titranja i frekvencija numeričkog modela približno odgovarali onim koji su eksperimentalno određeni. Model je podijeljen na konačne elemente čiji se broj mijenja u ovisnosti o rubnim uvjetima radi što boljeg podudaranja sa rezultatima eksperimenta. Materijal korišten prilikom izrade numeričkog modela je čelik, modula elastičnosti  $E = 190 \text{ GPa}$ , gustoće  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ . U numeričkom modelu provedena je modalna analiza kojom su dobiveni modalni oblici i vlastite frekvencije modela za različite veličine naprezanja koje su zatim uspoređene s rezultatima eksperimenta u laboratoriju. U nastavku su prikazani numerički modeli za svaki od rubnih uvjeta te pripadajući rezultati numeričkog proračuna.

### 4.6.1. Model zatege sa upetim rubnim uvjetima

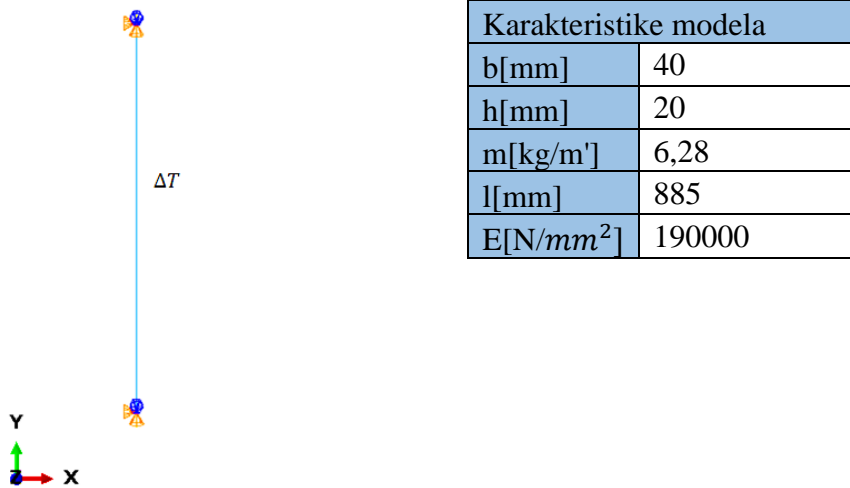
Na *Slici 51.* prikazan je numerički model zatege sa upetim rubnim uvjetima sa pripadajućim karakteristikama modela. Kako bi numerički model odgovarao modelu ispitivane zatege, korišteni materijal je čelik, kako je i ranije navedeno. Ukupna duljina modela je 885 mm, a na krajevima su upeti rubni uvjeti aproksimirani sprječavanjem rotacijskih i translacijskih pomaka. Da bi numerički model frekvencijama i oblicima odgovarao modelu zatege koji je ispitivan, naprezanje u numeričkom modelu inicirano je promjenom temperature  $\Delta T$  čija je vrijednost određena na temelju poznatih izraza (33) i (34).

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{EA} \quad (33)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha_T \cdot \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{\Delta l}{l \cdot \alpha_T} \quad (34)$$

Vrijednost sile  $F$ , u izrazu (33) uzeta je kao vrijednost kojom je opterećen model zatege u laboratoriju. Kako su nam u izrazu (33) poznate sve vrijednosti, možemo odrediti produljenje zatege  $\Delta l$ . Na temelju poznatog produljenja prema izrazu (34) možemo odrediti deformaciju,  $\varepsilon$ . Budući da je vrijednost deformacije istodobno jednaka umnošku promjene temperature ( $\Delta T$ ) i

koeficijenta toplinskog istezanja ( $\alpha_T$ ), koji nam je poznat, možemo odrediti promjenu temperature.

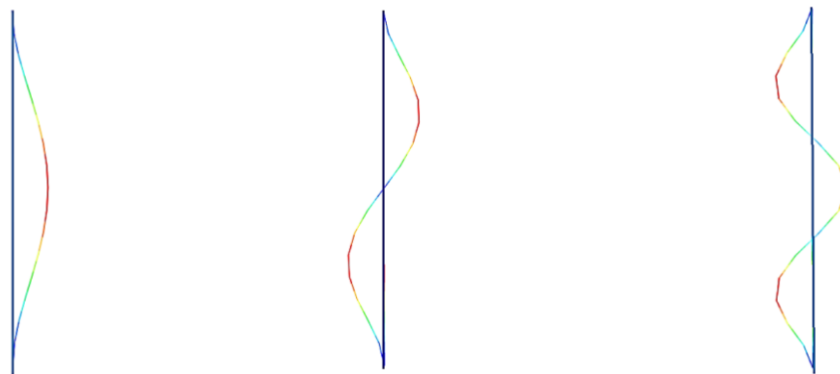


Slika 51. Numerički model zatege sa upetim rubnim uvjetima

Nakon što su određene svi potrebni parametri za izradu numeričkog modela zatege provedena je modalna analiza u programskom paketu Abaqus 6.17-4. Na temelju modalne analize dobivene su frekvencije i oblici titranja. Dobivene vrijednosti prve tri frekvencije prikazane su u *Tablica 5*. Također, u tablici su dane i vrijednosti naprezanja i pripadajuće vrijednosti sila. Na *Slici 52*. dan je prikaz prva tri oblika titranja numeričkog modela za rasterećeno stanje.

Tablica 5. Promjena frekvencije titranja numeričkog modela zatege za različite vrijednosti sila (naprezanja) za upete rubne uvjete

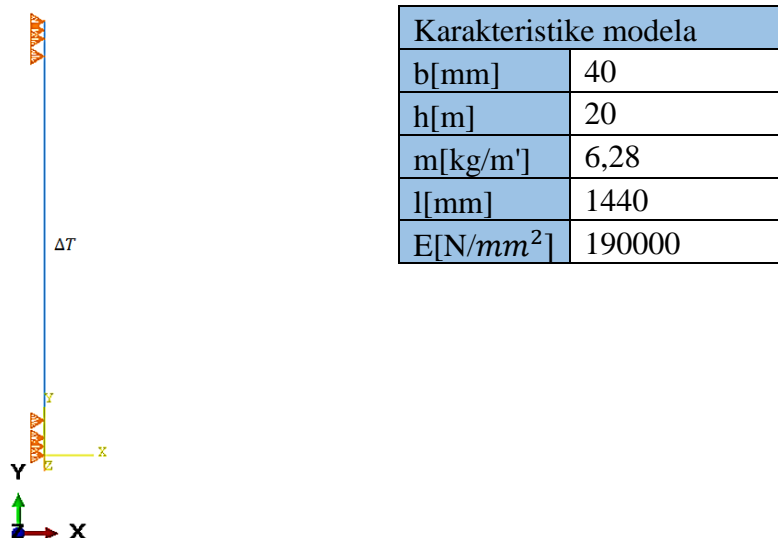
Sila [kN]	0	8	20	40	60	80
Naprezanje[MPa]	0	10	25	50	75	100
1.frekvencija[Hz]	128,95	132,74	138,21	146,82	151,58	158,52
2.frekvencija[Hz]	353,48	359,70	367,20	379,34	391,07	402,41
3.frekvencija[Hz]	690,61	698,25	706,20	719,60	732,60	745,36



Slika 52. Prva tri oblika titranja numeričkog modela zatege za upete rubne uvjetore rasterećeno stanje

#### 4.6.2. Model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima

Na Slici 53. prikazan je numerički model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima sa pripadajućim karakteristikama modela. Kako bi numerički model odgovarao modelu ispitivane zatege, korišteni materijal je čelik, kako je i ranije navedeno. Ukupna duljina modela određena je tako da odgovara ukupnoj duljini ispitivanog modela (zajedno sa prihvatima). Da bi se uzeli u obzir prihvat na modelu zatege koji je ispitivan, na numeričkom modelu na svaki od krajeva postavljena su po četiri nepomična ležaja. Krajnji ležajevi simuliraju zglobne rubne uvjete, a unutarnja tri ležaja mjesta na kojima je prihvat pričvršćen navojnom šipkom i maticama na model. Razmaci između unutarnja tri nepomična ležaja u numeričkom modelu odgovaraju razmaku navojnih šipki na ispitivanom modelu. Naprezanje u numeričkom modelu inicirano je na isti način kao i kod numeričkog modela sa upetim rubnim uvjetima.



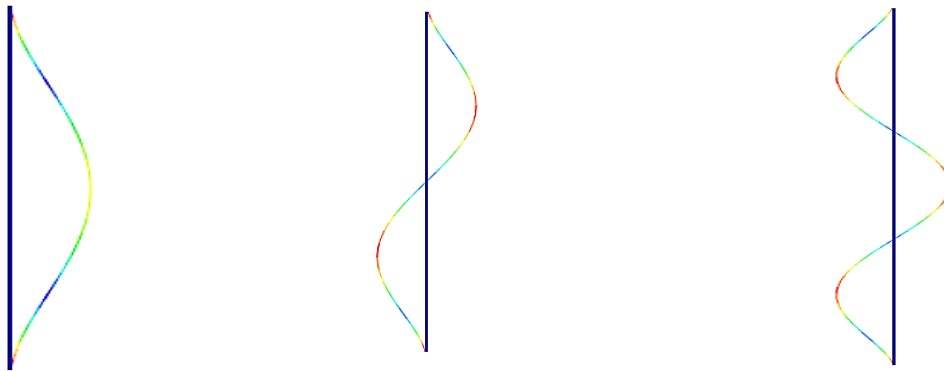
Slika 53. Numerički model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima



Nakon što su određene svi potrebni parametri za izradu numeričkog modela zatege provedena je modalna analiza u programskom paketu Abaqus 6.17-4. Na temelju modalne analize dobivene su frekvencije i oblici titranja. Dobivene vrijednosti prve tri frekvencije prikazane su u *Tablica 6*. Također, u tablici su dane i vrijednosti naprezanja i pripadajuće vrijednosti sila. Na *Slici 54*. dan je prikaz prva tri oblika titranja numeričkog modela za rasterećeno stanje.

*Tablica 6. Promjena frekvencije titranja numeričkog modela zatege za različite vrijednosti sila (naprezanja) za zglobne rubne uvjete*

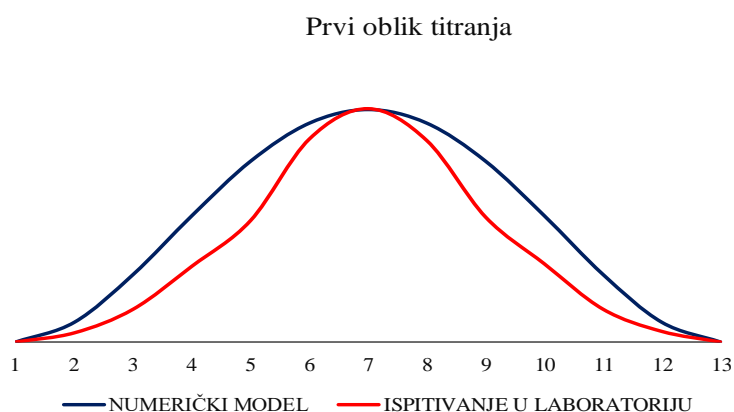
Sila [kN]	0	8	20	40	60	80
Naprezanje[MPa]	0	10	25	50	75	100
1.frekvencija[Hz]	64,39	65,30	69,65	73,71	77,54	84,62
2.frekvencija[Hz]	172,14	173,42	179,67	186,69	191,50	202,51
3.frekvencija[Hz]	332,52	333,94	340,94	347,79	354,50	367,54



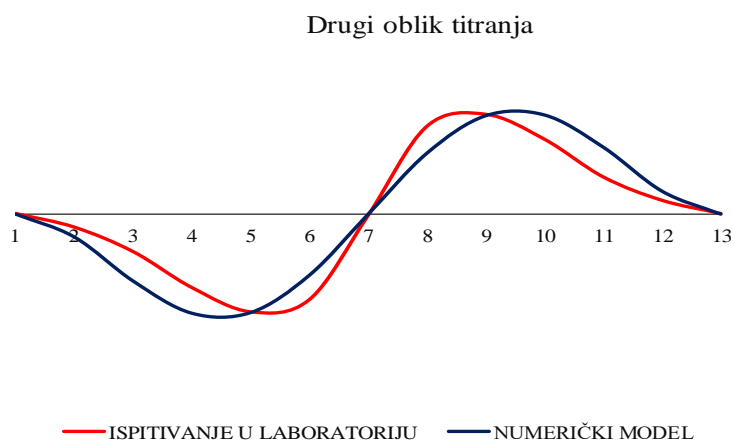
*Slika 54. Prva tri oblika titranja numeričkog modela zatege za zglobne rubne uvjete-rasterećeno stanje*

#### 4.7. Usporedba rezultata laboratorijskog ispitivanja i numeričkog modela

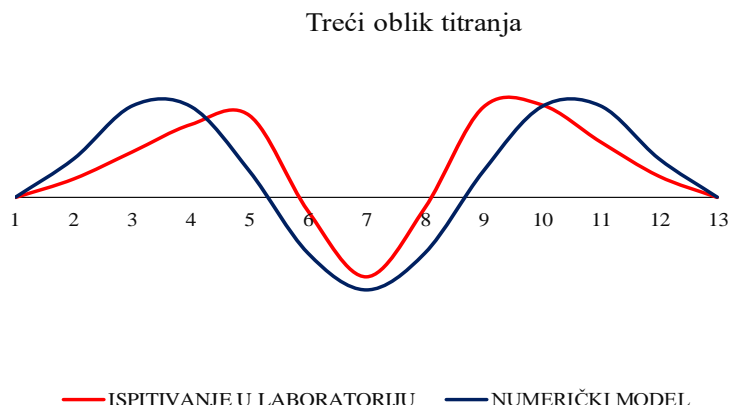
S obzirom na rubne uvjete čija aproksimacija u laboratoriju nije idealna, u nastavku su dane usporedbe prva tri oblika titranja pripadnog ispitanog i numeričkog modela. Za upete rubne uvjete, usporedbe prva tri oblika titranja dane su na *Slici 55.-57.* Kako bi odredili korelaciju pripadnog ispitanog i numeričkog modela određen je MAC faktor (*Slika 58.*). Radi jednostavnosti, u radu su prikazane samo usporedbe oblika za vrijednost naprezanja  $\sigma = 10 \text{ MPa}$ .



*Slika 55. Usporedba prvog oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za upete rubne uvjete*



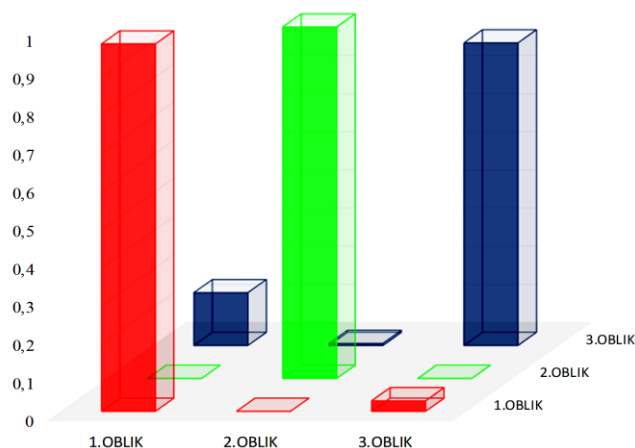
*Slika 56. Usporedba drugog oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za upete rubne uvjete*



Slika 57. Usporedba trećeg oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za upete rubne uvjete

$$MAC_{NI}^U = \begin{bmatrix} 0,963 & 0 & 0,138 \\ 0 & 0,921 & 0,005 \\ 0,027 & 0 & 0,793 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Prethodno prikazani MAC faktor ( $MAC_{NI}^U$ ) dan je za usporedbu oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za upete rubne uvjete. Njegov grafički prikaz dan je u nastavku (Slika 58.).

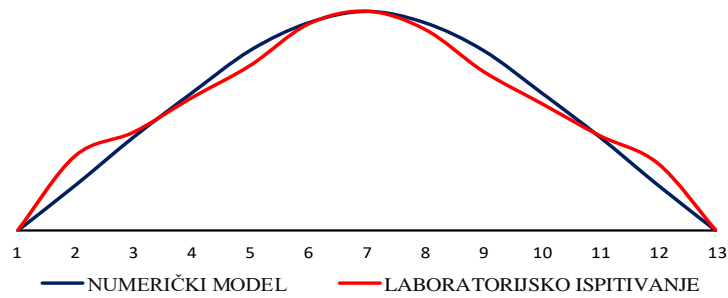


Slika 58. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa obostrano upetim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih laboratorijskim ispitivanjem

Iz matričnog zapisa MAC faktora (35) na temelju vrijednosti dijagonalnih članova možemo zaključiti da ispitani i numerički model sa upetim rubnim uvjetima imaju relativno dobru korelaciju. Posebno je to istaknuto za prva dva oblika titranja gdje su vrijednosti MAC faktora veće od 0,9.

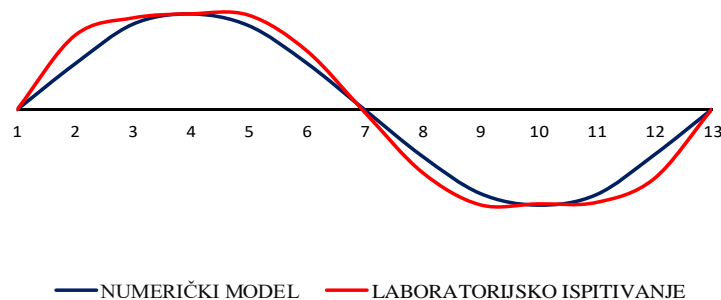
Na isti način kao i za slučaj upetih rubnih uvjeta uspoređena su i prva tri oblika titranja za zglobne rubne uvjete (Slika 59.-61.). Također, određena je korelacija pripadnog ispitanog i numeričkog modela pomoću MAC faktor (Slika 62.). Radi jednostavnosti, u radu su kao i za upete rubne uvjete prikazane samo usporedbe oblika za vrijednost naprezanja  $\sigma = 10\text{MPa}$ .

Prvi oblik titranja



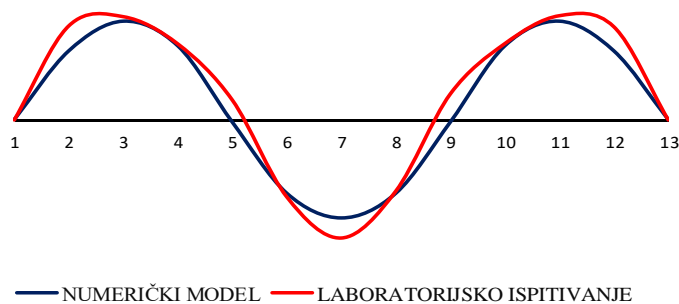
Slika 59. Usporedba prvog oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za zglobne rubne uvjete

Drugi oblik titranja



Slika 60. Usporedba drugog oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za zglobne rubne uvjete

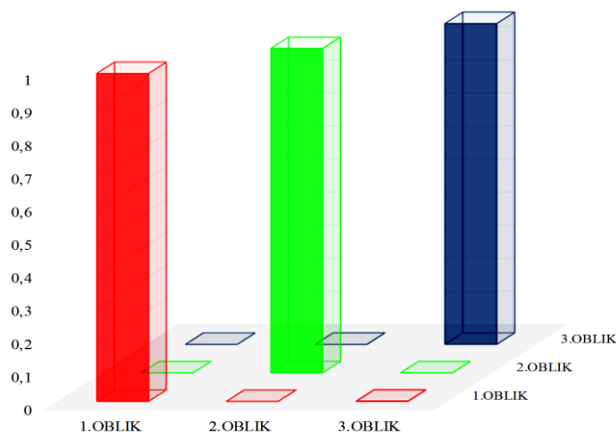
Treći oblik titranja



Slika 61. Usporedba trećeg oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za zglobne rubne uvjete

$$MAC_{NI}^Z = \begin{bmatrix} 0,992 & 0 & 0 \\ 0 & 0,981 & 0 \\ 0 & 0 & 0,970 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Prethodno prikazani MAC faktor ( $MAC_{NI}^Z$ ) dan je za usporedbu oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za zglobne rubne uvjete. Njegov grafički prikaz dan je u nastavku (Slika 62.).



Slika 62. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa zglobnim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih laboratorijskim ispitivanjem

Iz matričnog zapisa MAC faktora (36) na temelju vrijednosti dijagonalnih članova možemo zaključiti da ispitani i numerički model sa zglobnim rubnim uvjetima imaju odličnu korelaciju, puno bolju nego za slučaj upetih rubnih uvjeta. Sva tri dijagonalna člana matrice imaju vrijednost veću od 0,97. Navedeno predstavlja vrlo dobru korelaciju numeričkog modela s provedenim ispitivanjem.

U nastavku rada, na temelju dosadašnjih spoznaja dodatno će se analizirati dobiveni rezultati te dati procjena vrijednosti koeficijenta  $\kappa$ .

#### 4.8. Analiza rezultata i procjena koeficijenta $\kappa$

Na temelju poznatih analitičkih izraza (19) i poznatih frekvencija titranja modela zatege ispitanog u laboratoriju provedena je analiza rezultata.

U sljedećoj tablici (Tablica 7.) dane su vrijednosti naprezanja i frekvencija za svaki od promatranih oblika za upete rubne uvjete. Nadalje, za iste oblike izračunat je koeficijent  $\kappa$  te uspoređen s vrijednostima danima u literaturi (poglavlje 3.2.). Iz Tablice 7. možemo primjeriti značajno odstupanje za prvi oblik (7,50 %). Za drugi i treći oblik titranja odstupanje je prihvatljivo jer je njegov iznos manji od 1%.

Tablica 7. Vrijednost koeficijenta  $\kappa$  dobivenog proračunom i usporedba sa vrijednošću danom u literaturi za upete rubne uvjete

Naprezanje [MPa]	1.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 1.oblik	2.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 2.oblik	3.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 3.oblik
10	131	4,698	357	7,932	697	11,132
25	132	4,532	358,5	7,858	698	11,081
50	134,5	4,331	361	7,744	699,5	10,999
75	138,5	4,27	366	7,735	704,5	10,998
100	143	4,168	372,5	7,69	711	10,971
	$\kappa_{\text{ekspserimentalno}}$	<b>4,40</b>	$\kappa_{\text{ekspserimentalno}}$	<b>7,79</b>	$\kappa_{\text{ekspserimentalno}}$	<b>11,04</b>
	$\kappa_{\text{analitički}}$	4,73	$\kappa_{\text{analitički}}$	7,85	$\kappa_{\text{analitički}}$	11,00
	<b>ODSTUPANJE</b>	<b>7,50%</b>	<b>ODSTUPANJE</b>	<b>0,79%</b>	<b>ODSTUPANJE</b>	<b>0,36%</b>

U Tablici 8. dane su vrijednosti naprezanja i frekvencija za svaki od promatranih oblika za zglobne rubne uvjete. Nadalje, za iste oblike, kao i za slučaj upetih rubnih uvjeta, izračunat je koeficijent  $\kappa$  te uspoređen s vrijednostima danima u literaturi (poglavlje 3.2.). Iz Tablice 8. možemo primijetiti značajno odstupanje za prvi oblik (20,2 %). Za drugi i treći oblik titranja odstupanje je nešto manje, ali se još uvijek ne nalazi unutar prihvatljivog područja (< 5%).



Tablica 8. Vrijednost koeficijenta  $\kappa$  dobivenog proračunom i usporedba sa vrijednošću danom u literaturi za zglobne rubne uvjete

Naprezanje [MPa]	1.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 1.oblik	2.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 2.oblik	3.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 3.oblik
10,00	72,50	4,49	172,50	7,19	286,50	9,33
12,50	72,50	4,23	173,00	7,06	287,50	9,27
25,00	75,00	3,98	175,00	6,90	294,50	9,25
37,50	76,50	3,80	177,50	6,77	299,50	9,20
50,00	78,00	3,66	179,50	6,65	303,00	9,14
62,50	79,50	3,69	182,00	6,70	306,50	9,19
75,00	80,50	3,71	184,50	6,75	310,00	9,24
	<i><math>\kappa_{ekspserimentalno}</math></i>	<b>3,94</b>	<i><math>\kappa_{ekspserimentalno}</math></i>	<b>6,86</b>	<i><math>\kappa_{ekspserimentalno}</math></i>	<b>9,23</b>
	<i><math>\kappa_{analitički}</math></i>	3,14	<i><math>\kappa_{analitički}</math></i>	6,28	<i><math>\kappa_{analitički}</math></i>	9,43
	<b>ODSTUPANJE</b>	<b>20,2</b>	<b>ODSTUPANJE</b>	<b>8,43</b>	<b>ODSTUPANJE</b>	<b>2,10</b>

#### 4.9. Zaključak provedenih ispitivanja u laboratoriju

Na temelju prikazanih rezultata možemo zaključiti da je kod oba slučaja rubnih uvjeta (upeti, zglobni) utvrđeno značajno odstupanje koeficijenta  $\kappa$  za prvi i drugi modalni oblik. Navedeno odstupanje može nastati kao posljedica ne idealnih rubnih uvjeta simuliranih u laboratoriju. Nadalje, problem pri određivanju koeficijenta  $\kappa$  je i ograničenje duljine laboratorijskog modela na približno 1,5 m.

Iz svega prethodno navedenog može se zaključiti da vrijednost koeficijenta  $\kappa$  nije univerzalna za sve navedene probleme kako u laboratoriju tako i u praksi.

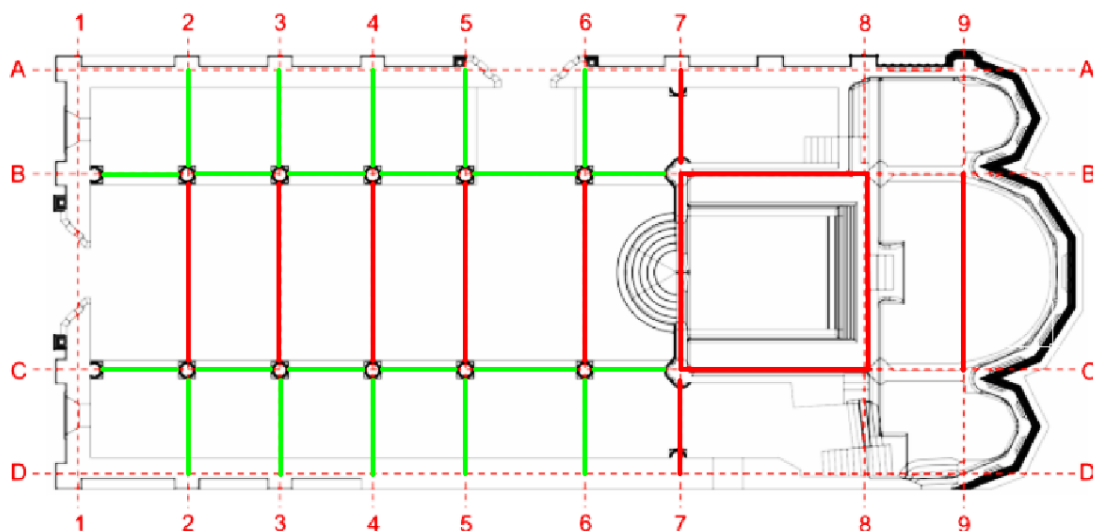
## 5. PRIMJENA METODOLOGIJE NA REALNOJ GRAĐEVINI

Metodologija i principi analize rezultata primijenjeni u *poglavlju 4.* na laboratorijskom modelu primijenjeni su na realnoj građevini. U sklopu istražnih radova i monitoringa katedrale sv. Jakova u Šibeniku određeni su dinamički parametri - frekvencije i oblici titranja. Rezultati dobiveni istraživanjem uzeti su kao podloga za pisanje rada

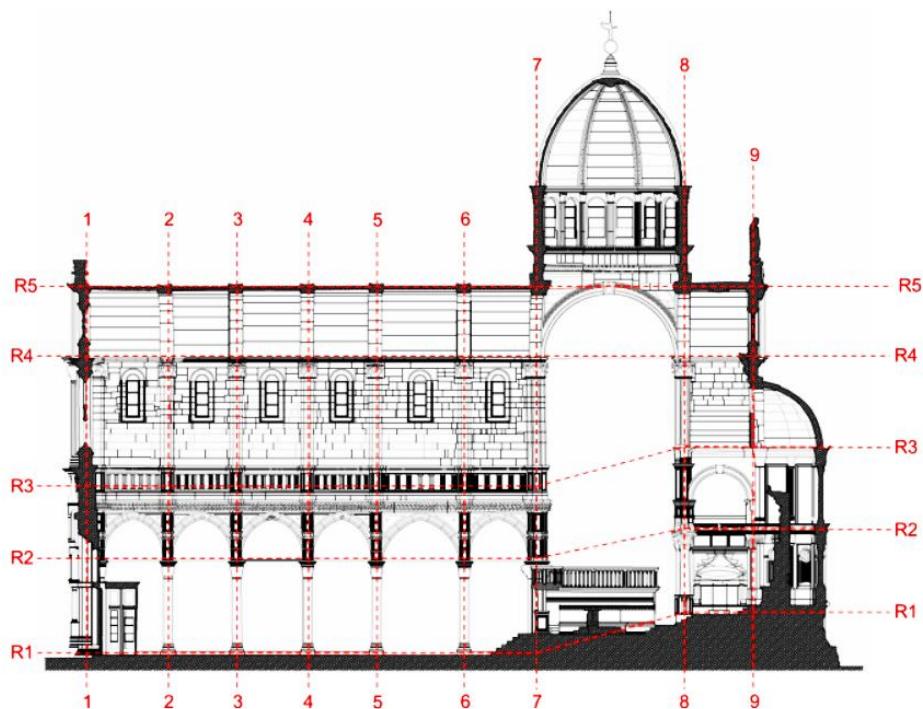
### 5.1. Uvod u ispitivanje

Za kalibriranje numeričkih modela, dinamički parametri konstrukcije određeni su eksperimentalnim istraživanjima u sklopu istražnih radova i monitoringa katedrale sv. Jakova u Šibeniku. Oblici i periodi titranja kako same konstrukcije katedrale tako i njenih zatega određeni su postavljanjem akcelometara na 108 mjernih mjesta.

Klasičnom eksperimentalnom modalnom analizom ispitane su 24 zatege prikazane na *Slici 63.*, gdje su crvenom bojom označene čelične zatege, a zelenom aluminijske zatege koje su ujedno i kraće od čeličnih. Na zategama su određene vlastite frekvencije (odzivi) na impulsnu pobudu. Na zategama 6 B-C, C3-4, C-D 4, C-D 3, 6-7 C određeni su uz vlastite frekvencije, modalni oblici i koeficijenti prigušenja. Vlastite frekvencije i modalni oblici poslužili su kao podaci za procjenu, odnosno određivanje sila u zategama.



Slika 63. Tlocrtni prikaz sustava zatega Šibenske katedrale



Slika 64. Presjek kroz katedralu sa rasporedom osi

Tijekom ispitivanja, u sjevernoj i južnoj galeriji, uočene su nepravilnosti vezane za geometriju zatega, njihovu duljinu sidrenja te njihovu ukupnu duljinu. To je bio ključan problem prilikom definiranja rubnih uvjeta numeričkog modela te određivanja napetosti zatege iz prve vlastite frekvencije.



a)



b)

Slika 65. a) Sidrenje zatega u galeriji b) Nepoznati rubni uvjeti

## 5.2. Opis i metoda ispitivanja

Kako je ranije navedeno na zategama 6 B-C, C 3-4, C 6-7, C-D 4, C-D 3, provedena je detaljnija analiza te su određeni uz frekvenciju i oblici titranja. Na svaku zategu postavljeno je pet akcelerometara od koji je jedan proglašen referentnim. Pobuda je emitirana udarom čekića između postavljenih akcelerometara. Mjerenjem odgovora zatege na danu pobudu korištenjem modalne analize određeni su oblici titranja. Na svakoj zatezi provedena su dva mjerenja sa premještanjem četiriju akcelerometara tako da je dobiveno devet mjernih točaka te još dvije krajnje točke za koje je pretpostavljeno da su nepomične.

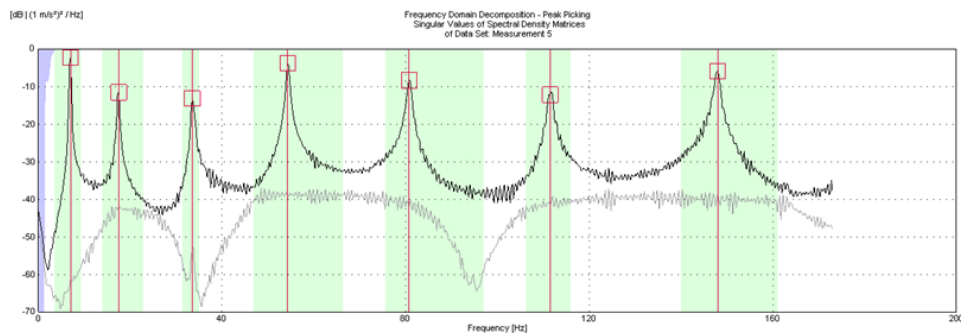


*Slika 66. Pobuda zatege udarnim čekićem*

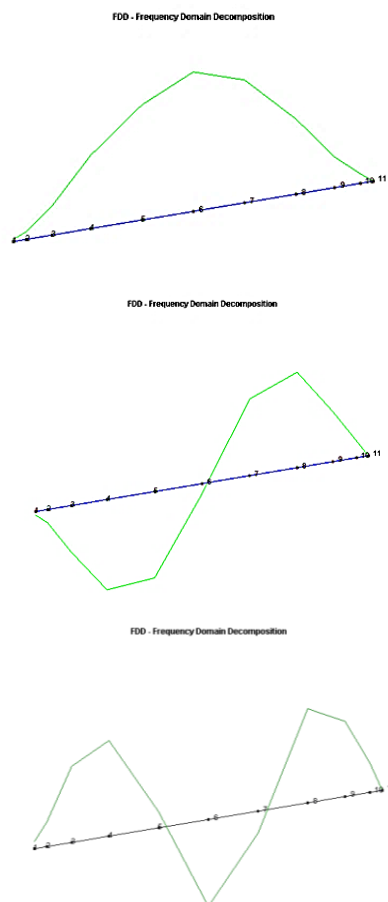
U nastavku su prikazani rezultati ispitivanja gdje su čelična zatega 6 BC i aluminijska zatega C34 uzete kao referentne te je na njima provedena detaljnija analiza koja se može primijeniti na preostalim zategama.

### 5.3. Rezultati ispitivanja

Na karakterističnom zapisu vlastitih frekvencija referentne čelične zatege 6BC (*Slika 67.*) jasno su istaknute vrijednosti vlastitih frekvencija titranja. Prve tri frekvencije titranja dane su u *Tablici 9.*, dok su na *Slici 68.* prikazani pripadajući oblici titranja. Karakteristični zapis vlastitih frekvencija referentne aluminijske zatege C34 prikazan je na *Slici 69.* Na *Slici 70.* prikazana su prva tri oblika titranja zatege C34 dok su pripadajuće vrijednosti vlastitih frekvencija dane u *Tablici 10.*



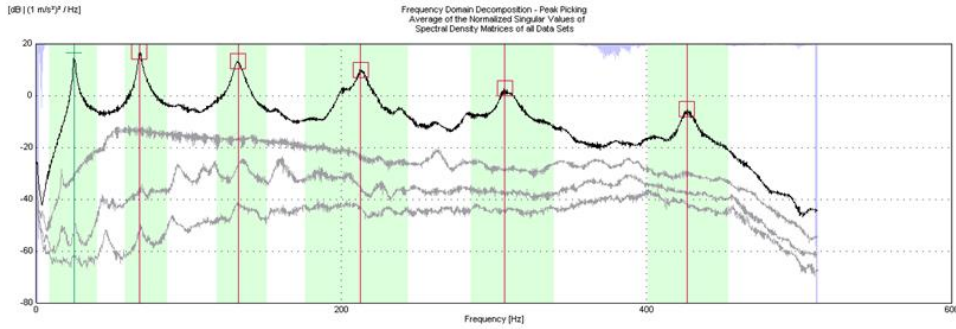
Slika 67. Karakteristični zapis vlastitih frekvencija referentne čelične zatege 6BC



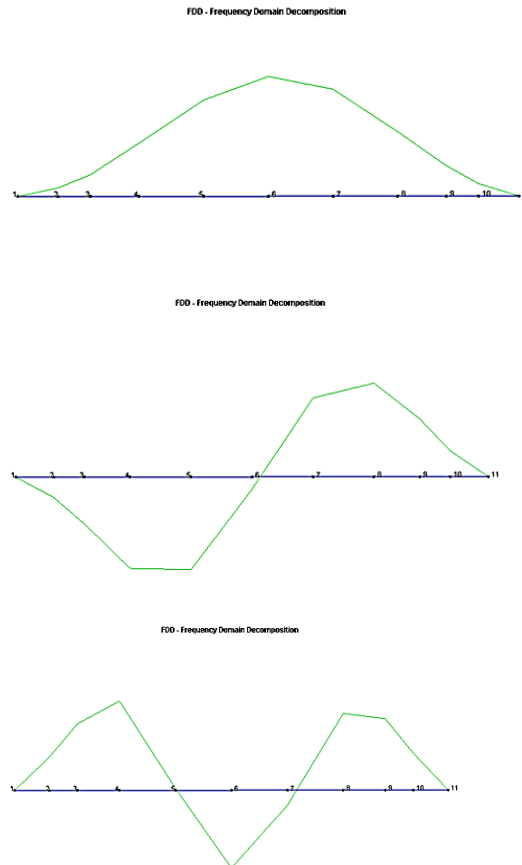
Slika 68. Prva tri oblika titranja referentne čelične zatege 6BC

Tablica 9. Vrijednosti frekvencija za prva tri oblika titranja referentne čelične zatege 6BC

OBLIK	Frekvencija [Hz]
1	7,00
2	17,50
3	33,50



Slika 69. Karakteristični zapis vlastitih frekvencija referentne aluminijske zatege C34



Slika 70. Prva tri oblika titranja referentne aluminijske zatege C34

Tablica 10. Vrijednosti frekvencija za prva tri oblika titranja referentne aluminijske zatege C34

OBLIK	Frekvencija [Hz]
1	24,75
2	67,50
3	132,30



Iz samih prikaza oblika titranja (*Slika 68.,70.*) potvrđena je pretpostavka nepomičnih točaka na krajevima zatega. Također, vidljiv je i problem rubnih uvjeta koje iz oblika nije moguće točno definirati. Zbog toga će se u nastavku rada obraditi numerički modeli sa različito definiranim rubnim uvjetima kako bi numerički model što točnije aproksimirao realnu zategu te kako bi se na temelju toga mogle odrediti vrijednost sila u pripadajućim zategama.

### 5.4. Inicijalni numerički model zatege na terenu

#### 5.4.1. Uvod

Ispitivanjem na terenu određeni su dinamički parametri- frekvencija i modalni oblici koji su korišteni za baždarenje numeričkog modela. Numerički model izrađen je u programskom paketu Abaqus 6.17-4. Zatega je modelirana kao štapni element na kojemu su mijenjani rubni uvjeti kako bi oblik titranja i frekvencija numeričkog modela približno odgovarali onima koji su dobiveni ispitivanjem na terenu. Model je podijeljen na konačne elemente čiji broj odgovara rasporedu mjernih mjesta na terenu. Materijal korišten prilikom izrade numeričkog modela je čelik, modula elastičnosti  $E = 190 \text{ GPa}$ , gustoće  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ .

U numeričkom modelu provedena je modalna analiza kojom su dobiveni oblici titranja i vlastite frekvencije modela koji su zatim uspoređeni s rezultatima ispitivanja na terenu. Na samom numeričkom modelu proveden je niz iteracija kako bi dobiveni rezultati približno odgovarali rezultatima ispitivanja na terenu. U nastavku su prikazani numerički modeli za svaki od rubnih uvjeta te pripadajući rezultati numeričkog proračuna.

#### 5.4.2. Model zatege sa upetim rubnim uvjetima

Na *Slici 71.* prikazan je numerički model referentne čelične zatege 6 BC sa upetim rubnim uvjetima sa pripadajućim dimenzijama i karakteristikama modela. Na njoj su određene prve tri vlastite frekvencije u ovisnosti o poprečnom presjeku, materijalu i duljini zatege. Na taj način određene su frekvencije zatega i uspoređene s izmjerenima. Treba imati na umu da zatege u stvarnoj konstrukciji mogu djelomično odstupati od idealizirane geometrije i rubnih uvjeta iz numeričkog modela. Na temelju toga došli smo do spoznaje da je zatege potrebno opteretiti vlačnom silom, kako bi se vrijednost frekvencije približila eksperimentalno određenoj

vrijednosti izmjerenoj na terenu. Kako bi izbjegli nelinearan proračun, vlačna sila u numeričkom modelu inicirana je promjenom temperature. Vrijednost promjene temperature određena je iterativnim postupkom. Iteracija je vršena sve dok frekvencija numeričkog modela nije odgovarala frekvenciji određenoj eksperimentalnim ispitivanjem.



Karakteristike modela	
b[mm]	61
h[mm]	61
m[kg/m']	30,88
l[m]	6,9
E[N/mm <sup>2</sup> ]	200000

Slika 71. Numerički model zatege referentne čelične zatege 6BC sa upetim rubnim uvjetima

U Tablici 11. dane su vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege 6BC sa obostrano upetim rubnim uvjetima.

Tablica 11. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege 6BC sa obostrano upetim rubnim uvjetima

OBLIK	Frekvencija [Hz]
1	7,88
2	20,08
3	37,91

Na isti način kao i za slučaje referentne čelične zatege 6 BC izrađen je numerički model referentne aluminijske zatege C 34. Na Slici 72. prikazan je pripadajući numerički model zatege sa upetim rubnim uvjetima i pripadnim dimenzijama i karakteristikama modela. U Tablici 12. dane su vrijednosti frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne aluminijske zatege C 34 sa obostrano upetim rubnim uvjetima.



Karakteristike modela	
b[mm]	30
h[mm]	40
m[kg/m']	4,05
l[m]	3,2
E[N/mm <sup>2</sup> ]	69000

Slika 72. Numerički model zatege referentne aluminijske zatege C34 sa upetim rubnim uvjetima

Tablica 12. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege 6BC sa obostrano upetim rubnim uvjetima

OBLIK	Frekvencija [Hz]
1	25,59
2	70,39
3	137,82

### 5.4.3. Model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima

Budući da se na temelju oblika titranja (Slika 68., 70.,) rubni uvjeti ne mogu točno definirati, za obje referentne zatege (6BC i C34) izrađeni su numerički modeli sa zglobnim rubnim uvjetima. Na Slici 73. prikazan je numerički model referentne čelične zatege 6 BC sa zglobnim rubnim uvjetima s pripadnim dimenzijama i karakteristikama modela. Naprezanje u modelu inicirano je na isti način kao i kod modela sa upetim rubnim uvjetima. Pripadne vrijednosti prve tri frekvencija titranja numeričkog modela referentne čelične zatege dane su u Tablici 13.



Karakteristike modela	
b[mm]	61
h[mm]	61
m[kg/m']	30,88
l[m]	6,9
E[N/mm <sup>2</sup> ]	200000

Slika 73. Numerički model zatege referentne čelične zatege 6BC sa zglobnim rubnim uvjetima

Tablica 13. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege 6BC sa obostrano zglobnim rubnim uvjetima

OBLIK	Frekvencija [Hz]
1	7,86
2	16,68
3	34,17

Na Slici 74. prikazan je numerički model referentne aluminijske zatege C34 sa zglobnim rubnim uvjetima s pripadnim dimenzijama i karakteristikama modela. Postavke definirane za numerički model zatege 6 BC vrijede i za zategu C34. Vrijednosti prve tri frekvencije titranja numeričkog modela referentne aluminijske zatege dane su u Tablici 14.



Karakteristike model	
b[m]	0,03
h[m]	0,05
m[kg/m']	4,05
l[m]	3,2
E[N/mm <sup>2</sup> ]	69000

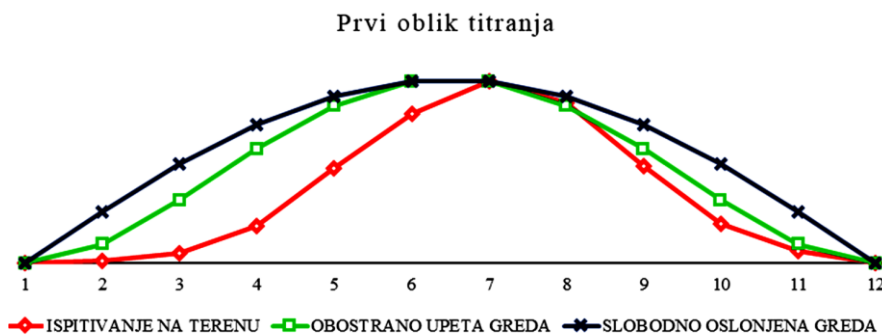
Slika 74. Numerički model zatege referentne čelične zatege C34 sa zglobnim rubnim uvjetima

Tablica 14. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege C34 sa obostrano zglobnim rubnim uvjetima

OBLIK	Frekvencija [Hz]
1	24,69
2	62,89
3	120,45

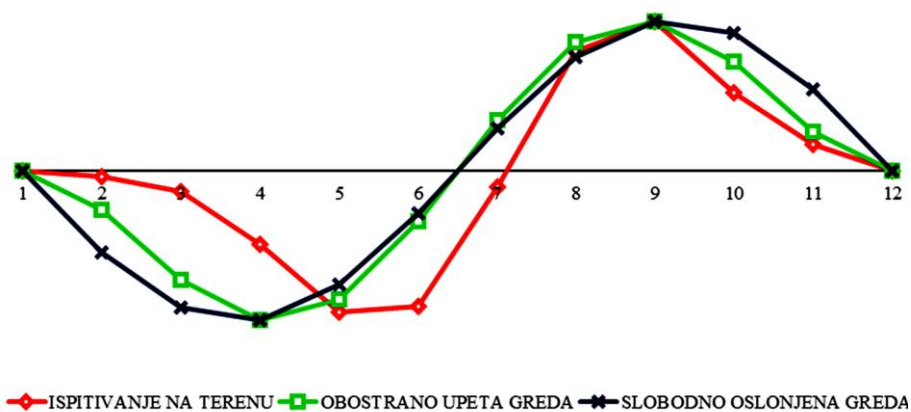
#### 5.4.4. Usporedba rezultata mjerenja i numeričkog modela

Kako bi definirali točne rubne uvjete i ponašanje zatege na terenu oblici titranja numeričkih modela obostrano upetih i zglobno oslonjenih referentnih zatega 6BC i C34 uspoređeni su sa njihovim oblicima titranja dobivenim ispitivanjem na terenu. Za svaki oblik titranja rezultati su prikazani u nastavku. Na Slici 75.- 77. prikazane su usporedbe redom za prvi, drugi i treći oblik titranja referentne čelične zatege 6BC. Na Slici 78.-80. prikazane su usporedbe oblika titranja referentne aluminijske zatege C34.



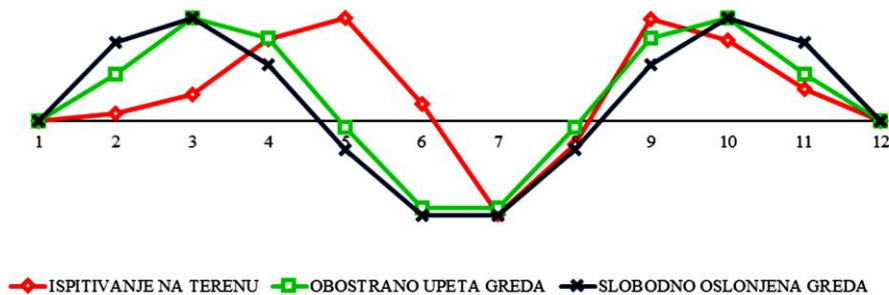
Slika 75. Usporedba prvog oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućih numeričkih modela

Drugi oblik titranja



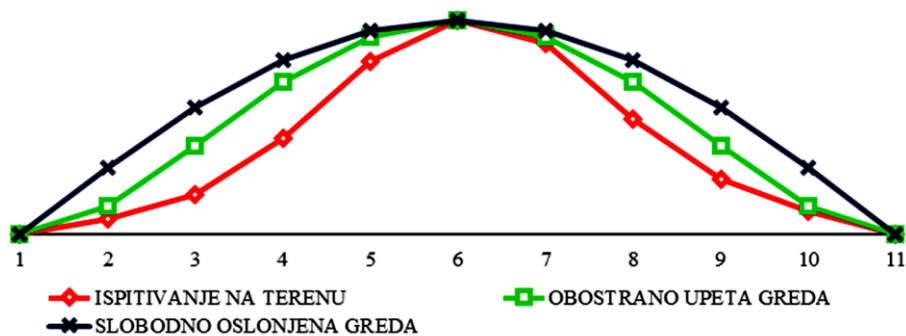
Slika 76. Usporedba drugog oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućih numeričkih modela

Treći oblik titranja

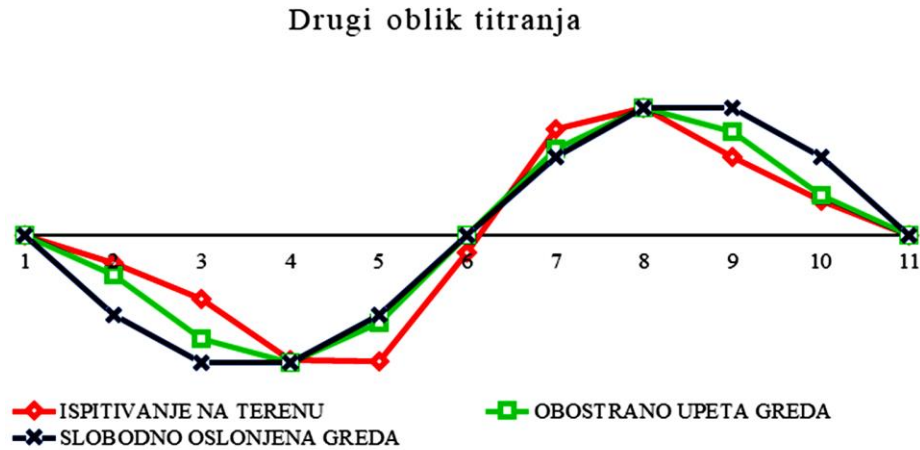


Slika 77. Usporedba trećeg oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućih numeričkih modela

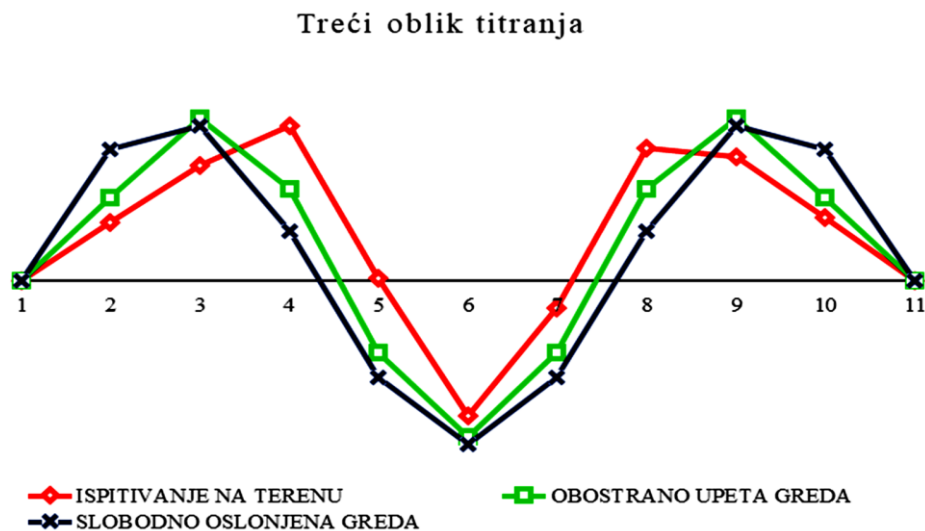
Prvi oblik titranja



Slika 78. Usporedba prvog oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućih numeričkih modela



Slika 79. Usporedba drugog oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućih numeričkih modela

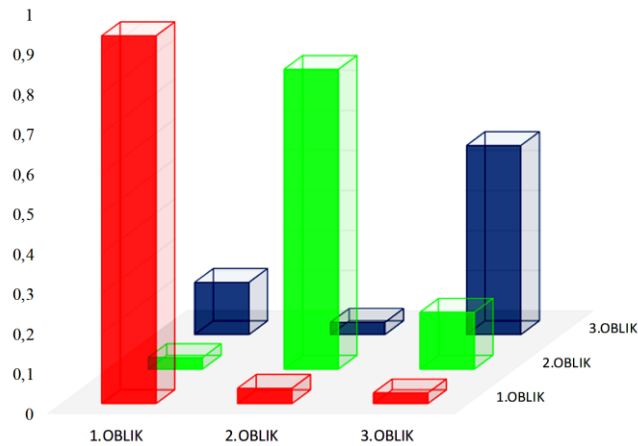


Slika 80. Usporedba trećeg oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućih numeričkih modela

Na temelju prethodno prikazanih usporedbi modalnih oblika nije moguće definirati koji rubni uvjeti više koreliraju sa realnim ponašanjem zatega. Zbog toga je potrebno odrediti MAC faktor kako bi definirali kolika je podudarnost realnog ponašanja zatega i numeričkog modela. U nastavku je dan matrični zapis MAC faktora (37),(38).

$$MAC_{NT}^U = \begin{bmatrix} 0,919 & 0,029 & 0,131 \\ 0,038 & 0,749 & 0,031 \\ 0,027 & 0,142 & 0,472 \end{bmatrix} \quad (37)$$

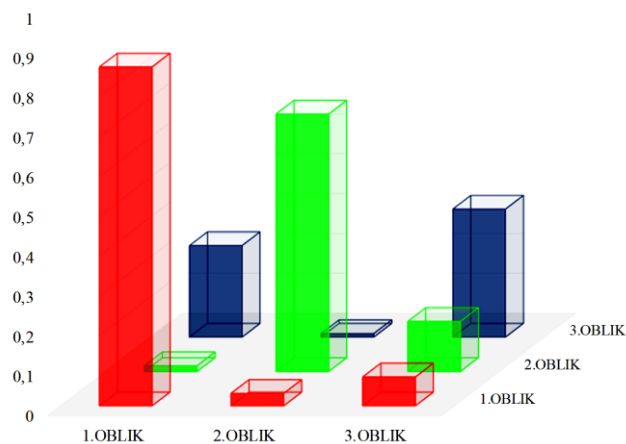
Prethodno prikazani MAC faktor ( $MAC_{NT}^U$ ) dan je za usporedbu oblika titranja numeričkog modela sa upetim rubnim uvjetima i oblika titranja referentne čelične zatege 6BC. Njegov grafički prikaz dan je u nastavku (Slika 81.).



Slika 81. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa obostrano upetim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu 6BC

$$MAC_{NT}^Z = \begin{bmatrix} 0,851 & 0,015 & 0,229 \\ 0,031 & 0,646 & 0,009 \\ 0,073 & 0,126 & 0,324 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Prethodno prikazani MAC faktor ( $MAC_{NT}^Z$ ) dan je za usporedbu oblika titranja numeričkog modela sa zglobnim rubnim uvjetima i oblika titranja referentne čelične zatege 6BC. Njegov grafički prikaz dan je u nastavku (Slika 82.).



Slika 82. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa zglobnim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu 6BC

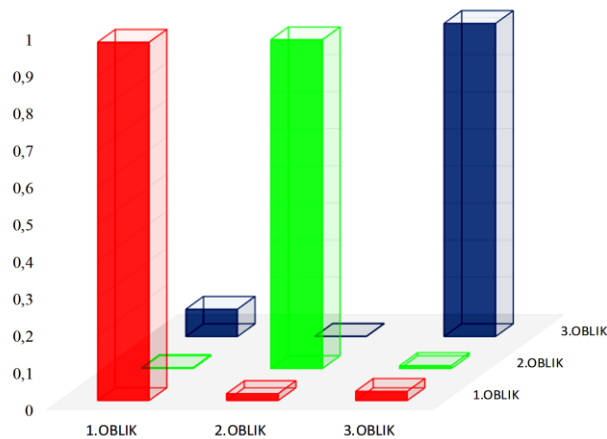
Na temelju prethodno prikazanih MAC faktora (Slika 81., Slika 82.) za različite slučajeve rubnih uvjeta vidljivo je da realno stanje referente čelične zatege 6BC više korelira sa numeričkim modelom zatege sa obostrano upetim rubnim uvjetima gdje MAC faktor za prvi oblik iznosi približno 0,92. Zbog toga će se u nastavku rada vršiti modifikacija numeričkog



modela sa upetim rubnim uvjetima kako bi model što bolje korelirao sa stvarnim stanjem te kako bi se na temelju toga mogla odrediti pripadajuća sila u zatezi.

$$MAC_{NT}^U = \begin{bmatrix} 0,966 & 0,003 & 0,073 \\ 0,018 & 0,887 & 0,001 \\ 0,025 & 0,008 & 0,844 \end{bmatrix} \quad (39)$$

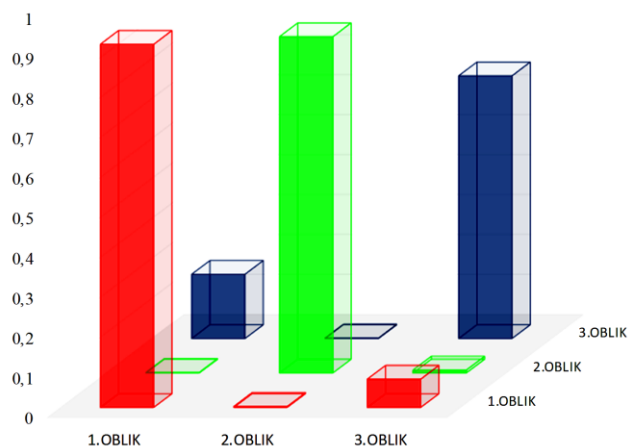
Prethodno prikazani MAC faktor ( $MAC_{NT}^U$ ) dan je za usporedbu oblika titranja numeričkog modela sa upetim rubnim uvjetima i oblika titranja referentne aluminijske zatege C34. Njegov grafički prikaz dan je u nastavku (*Slika 83.*).



*Slika 83. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa obostrano upetim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu C34*

$$MAC_{NT}^Z = \begin{bmatrix} 0,909 & 0,002 & 0,161 \\ 0,002 & 0,842 & 0,002 \\ 0,071 & 0,007 & 0,657 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Prethodno prikazani MAC faktor ( $MAC_{NT}^Z$ ) dan je za usporedbu oblika titranja numeričkog modela sa zglobnim rubnim uvjetima i oblika titranja referentne aluminijske zatege C34. Njegov grafički prikaz dan je u nastavku (*Slika 84.*).



*Slika 84. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa zglobnim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu C34*

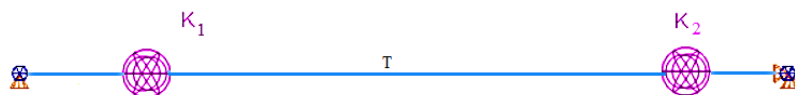
Budući da je referentna zatega C34 kraća od zatege 6BC vidljivo je iz prikaza MAC faktora (Slika 83., Slika 84.) da numerički model sa zglobnim rubnim uvjetima dosta dobro aproksimira stvarno ponašanje zatege. Ipak, bolju korelaciju pokazuje numerički model sa obostrano upetim rubnim uvjetima. Zbog toga će se u nastavku rada vršiti modifikacija numeričkog modela sa upetim rubnim uvjetima kako bi što bolje korelirao sa stvarnim stanjem te kako bi se na temelju toga mogla odrediti pripadajuća sila u zatezi.

## 5.5. Poboljšani numerički model

Kako je već navedeno u prethodnom poglavlju, potrebno je modificirati numeričke modele zatega sa obostrano upetim rubnim uvjetima za slučaj zatega 6BC i C34. Modifikacija je izvršena na način da su modelima dodane opruge različite krutosti na mjestima gdje zatega izlazi iz zida. Numerički modeli zatega modificirani su i na način da su produženi za duljinu sidrenja u zid, odnosno stup. Napetost u zategama inicirana je temperaturnim opterećenjem.

### 5.5.1. Simulacija rubnih uvjeta zatega 6BC

Na *Slici 85.* prikazan je poboljšani numerički model referentne čelične zatega 6BC sa pripadnim dimenzijama i karakteristikama modela. Rubni uvjeti na modelu simulirani su oprugama krutosti  $k_1$  s lijeve, odnosno  $k_2$  s desne strane. Vrijednost temperature kojom je inicirano naprezanje u zatezi određena je iterativni postupkom. Pripadne vrijednosti frekvencija prva tri oblika titranja dane su u *Tablici 15.*



Karakteristike modela	
b[mm]	60
h[mm]	55
m[kg/m']	23,24
l[m]	8,0
E[N/mm <sup>2</sup> ]	185000
$k_1$ [kN/m]	750
$k_2$ [kN/m]	200
$\alpha_T$ [°C <sup>-1</sup> ]	$1,170 \cdot 10^{-5}$
T[°C]	-8

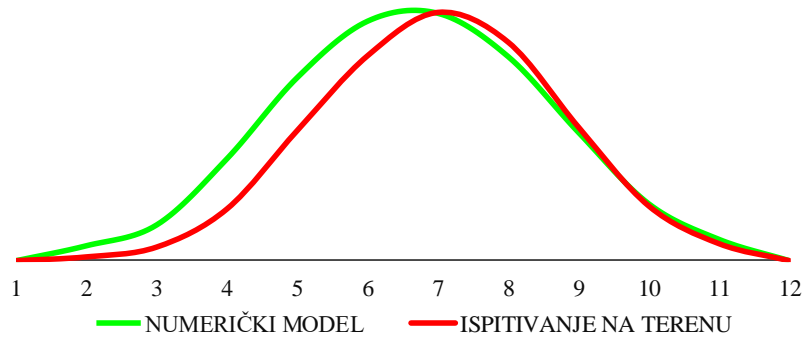
*Slika 85. Numerički model referentne čelične zatega 6BC – simulacija rubnih uvjeta oprugama krutosti  $k_i$  ( $i=1,2$ )*

*Tablica 15. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatega 6BC sa simulacijom rubnih uvjete oprugama*

OBLIK	Frekvencija [Hz]
1	7,01
2	16,69
3	26,88

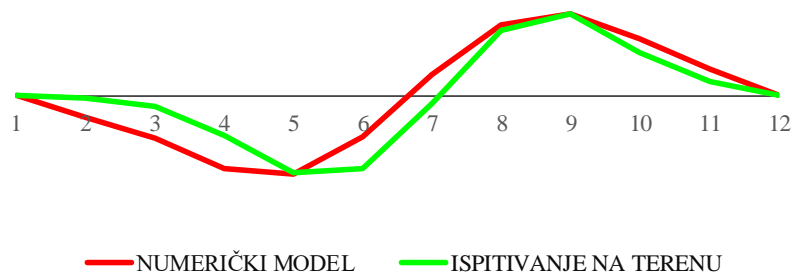
Na *Slici 86.*, *87.*, *88.* dane su usporedbe, redom, prvog, drugog i trećeg oblika titranja poboljšanog numeričkog modela i oblika dobivenih ispitivanjem referentne čelične zatege 6BC.

Prvi oblik titranja



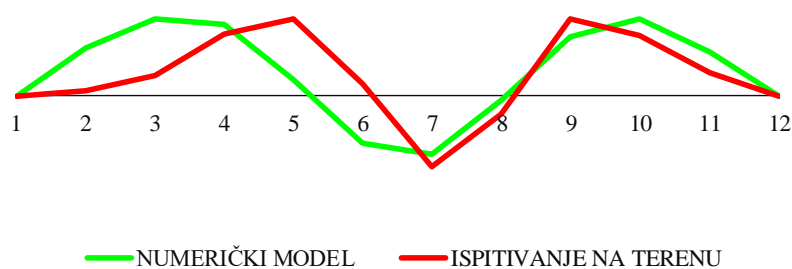
*Slika 86. Usporedba prvog oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama*

Drugi oblik titranja



*Slika 87. Usporedba drugog oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama*

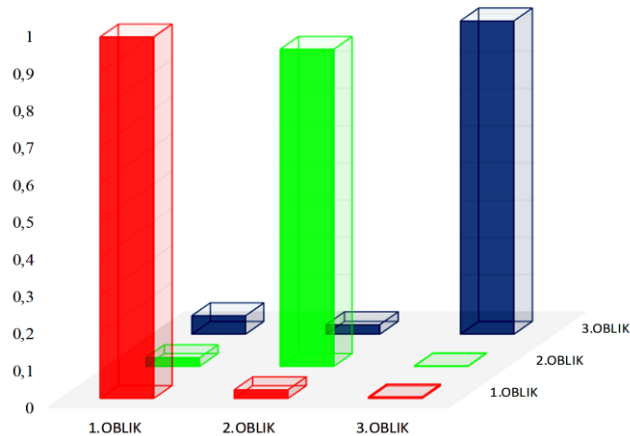
Treći oblik titranja



*Slika 88. Usporedba trećeg oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama*

Kako bi odredili podudarnost poboljšanog modela i ispitivane referentne čelične zatege 6BC određen je MAC faktor ( $MAC_{NT_P}$ ). Njegov matrični zapis dan je u nastavku (41), a njegov grafički prikaz dan je na Slici 89.

$$MAC_{NT_P} = \begin{bmatrix} 0,971 & 0,023 & 0,049 \\ 0,023 & 0,852 & 0,02 \\ 0,004 & 0,002 & 0,842 \end{bmatrix} \quad (41)$$



Slika 89. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika modificiranog numeričkog modela i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu 6BC

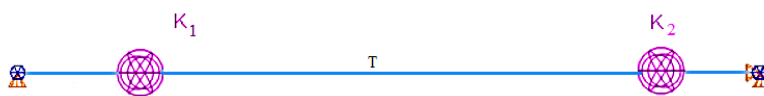
Budući da numerički model prikazan prethodno (Slika 85.) pokazuje vrlo dobru korelaciju sa stvarnom zategom što nam pokazuje i MAC faktor, on je uzet kao mjerodavan i ispravan u smislu aproksimacije realnog ponašanja. Na temelju njega u nastavku je određen koeficijent  $\kappa$  čije su vrijednosti i odstupanja u odnosu na vrijednosti dane u literaturi prikazane u Tablici 16.

Tablica 16. Vrijednost koeficijenta  $\kappa$  dobivenog proračunom i usporedba sa vrijednošću danom u literaturi za simulaciju rubnih uvjeta oprugama

Naprezanje [MPa]	1.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 1.oblik	2.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 2.oblik	3.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 3.oblik
17,37	7,01	4,52	16,69	8,31	26,88	11,03
	$\kappa_{ekspserimentalno}$	<b>4,52</b>	$\kappa_{ekspserimentalno}$	<b>8,31</b>	$\kappa_{ekspserimentalno}$	<b>11,03</b>
	$\kappa_{analitički}$	4,73	$\kappa_{analitički}$	7,85	$\kappa_{analitički}$	11,00
	<b>ODSTUPANJE</b>	<b>4,38%</b>	<b>ODSTUPANJE</b>	<b>5,83%</b>	<b>ODSTUPANJE</b>	0,09%

### 5.5.2. Simulacija rubnih uvjeta zatege C34

Na *Slici 90.* prikazan je poboljšani numerički model referentne aluminijske zatege C34 sa pripadnim dimenzijama i karakteristikama modela. Rubni uvjeti na modelu simulirani su oprugama krutosti  $k_1$  s lijeve, odnosno  $k_2$  s desne strane. Vrijednost temperature kojom je inicirano naprezanje u zatezi određena je iterativni postupkom. Pripadne vrijednosti frekvencije za prva tri oblika titranja dane su u *Tablici 17.*



Karakteristike modela	
b[m]	0,03
h[m]	0,05
m[kg/m']	4,071
l[m]	3,9
E[N/mm <sup>2</sup> ]	70 000
$k_1$ [kN/m]	100
$k_2$ [kN/m]	500
$\alpha_T$ [°C <sup>-1</sup> ]	$2,358 \cdot 10^{-5}$
T[°C]	-1

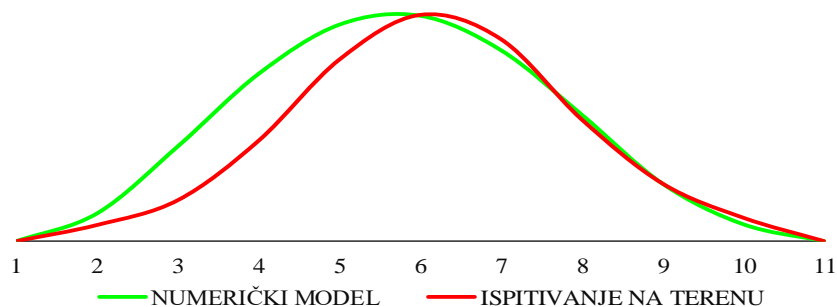
*Slika 90. Numerički model referentne čelične zatege C34 – simulacija rubnih uvjeta oprugama krutosti  $k_i$  ( $i=1,2$ )*

*Tablica 17. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege C34 sa simulacijom rubnih uvjete oprugama*

OBLIK	Frekvencija [Hz]
1	25,2
2	60,73
3	110,6

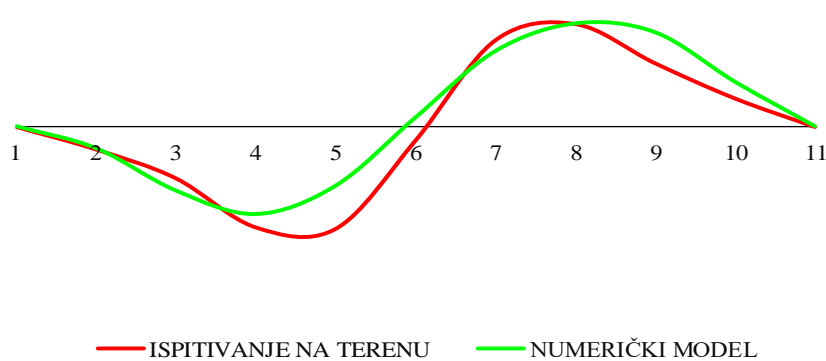
Na *Slika 91., 92., 93.* dane su usporedbe, redom, prvog, drugog i trećeg oblika titranja poboljšanog numeričkog modela i oblika dobivenih ispitivanjem referentne aluminijske zatege C34.

Prvi oblik titranja



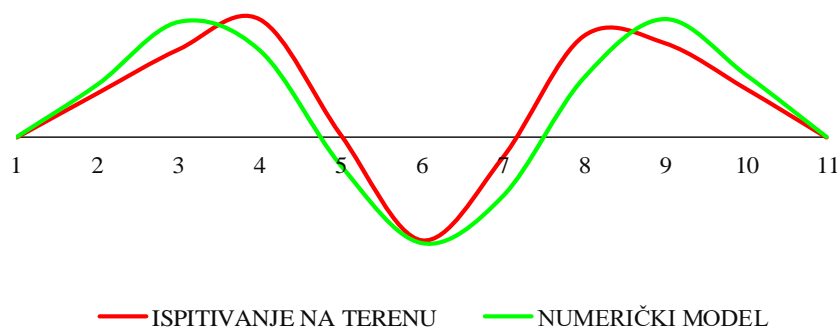
Slika 91. Usporedba prvog oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama

Drugi oblik titranja



Slika 92. Usporedba drugog oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama

Treći oblik titranja

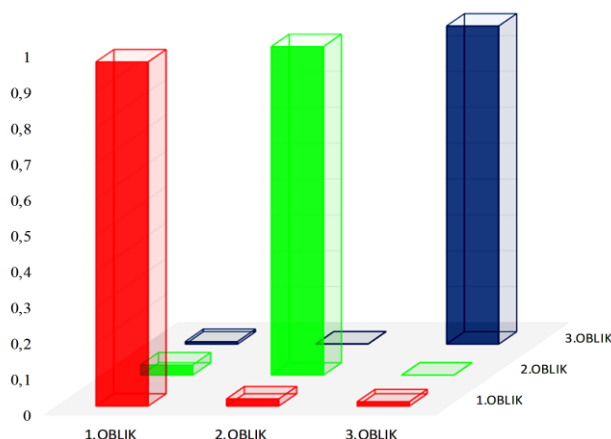


Slika 93. Usporedba trećeg oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama



Kako bi odredili podudarnost poboljšanog modela i ispitivane referentne aluminijske zatege C34 određen je MAC faktor ( $MAC_{NT\_P}$ ). Njegov matrični zapis dan je u nastavku (42), a njegov grafički prikaz dan je na *Slici 94*.

$$MAC_{NT\_P} = \begin{bmatrix} 0,959 & 0,029 & 0,007 \\ 0,020 & 0,916 & 0,002 \\ 0,012 & 0,008 & 0,887 \end{bmatrix} \quad (42)$$



*Slika 94. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika modificiranog numeričkog modela i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu C34*

Iz rezultata prikazanih na *Slici 84.* i određenog MAC faktora vidljivo je da model zatege C34 sa obostrano upetim rubnim uvjetima, bez postavljanja opruga, dosta dobro aproksimirao realno stanje zatega. Ipak, postavljanjem zatega postignuta je bolja korelacija - veći MAC faktor za drugi i treći oblik titranja (42). Stoga se numerički model sa zategama uzima kao mjerodavan te ja na temelju njega u nastavku određen koeficijent  $\kappa$ . U *Tablici 18.* prikazana je njegova vrijednost određena na temelju analitičkih izraza te njegovo odstupanje od vrijednosti dane u literaturi.

*Tablica 18. Vrijednost koeficijenta  $\kappa$  dobivenog proračunom i usporedba sa vrijednošću danom u literaturi za simulaciju rubnih uvjeta oprugama*

Naprezanje [MPa]	1.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 1.oblik	2.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 2.oblik	3.Frekvencija [Hz]	$\kappa$ 3.oblik
17,37	25,2	4,6	61,85	8,26	110,6	11,5
	$\kappa_{\text{ekspserimentalno}}$	<b>4,6</b>	$\kappa_{\text{ekspserimentalno}}$	<b>8,26</b>	$\kappa_{\text{ekspserimentalno}}$	<b>11,5</b>
	$\kappa_{\text{analitički}}$	4,73	$\kappa_{\text{analitički}}$	7,85	$\kappa_{\text{analitički}}$	11,00
	<b>ODSTUPANJE</b>	<b>2,72%</b>	<b>ODSTUPANJE</b>	<b>4,96%</b>	<b>ODSTUPANJE</b>	<b>4,54%</b>

## 5.6. Proračun sile u zategama

Na temelju prethodno određenih vrijednosti koeficijenta  $\kappa$  prikazanih u *Tablici 17.* i *Tablici 18.*, vrijednosti prvih frekvencija titranja i analitičkih izraza (19) u nastavku će se odrediti vrijednost sile u pripadnim zategama za prvi oblik titranja. Određene vrijednosti sile za svaku od zatega prikazane su u *Tablici 19.*

*Tablica 19. Vrijednosti sile u zategama*

Zatega	Sila , F [kN]
6 BC	45,74
C 34	11,59

## 5.7. Zaključak provedenih ispitivanja na realnoj građevini

Iz *Tablice 16.* i *Tablice 18.* vidljivo je kako unatoč relativno dobroj korelaciji modalnih oblika i modifikaciji numeričkog modela i dalje postoji odstupanje koeficijenta  $\kappa$  u odnosu na njegovu vrijednost danu u literaturi. Iz toga možemo zaključiti da se vrijednost dana u literaturi ne može uzeti kao mjerodavna za sve slučajeve. Stoga je potrebno u analizama slučajeva koji su bliski ovom provesti detaljniju analizu i korigirati vrijednosti dane u literaturi.

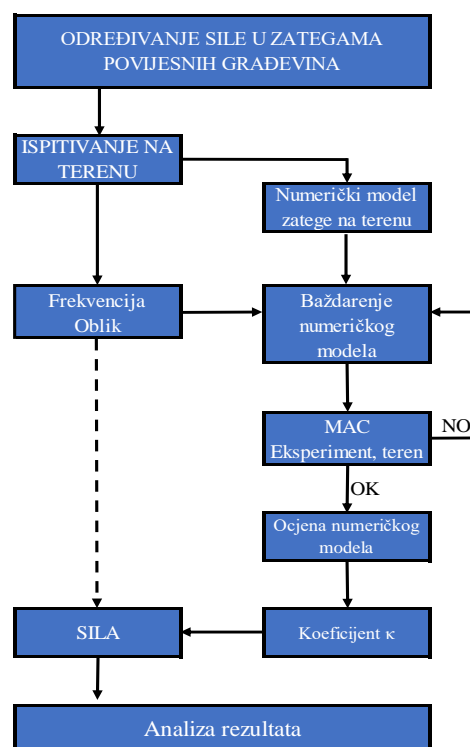
Iz *Tablice 19.* vidljivo je da su sile u zategama vlačne, te da je vrijednost sile u zatezi C 34, manja u odnosu na silu u zatezi 6 BC što je i očekivano. Dobivene vrijednosti sile su očekivane i kreću se unutar prihvatljivih okvira.

## 6. ZAKLJUČAK

Kako bi se u tradicionalnim građevinama spriječio horizontalni pomak i omogućilo preuzimanje horizontalnih sila, posebice kod lukova, svodova i kupola, na tim mjestima postavljaju se zatege. Za određivanje uzdužne sile u zategama potrebno je poznavati krutost zatege, masu, dimenzije i rubne uvjete. Upravo rubni uvjeti značajno mijenjaju vrijednost sile u zategama. Stoga je definiran koeficijent  $\kappa$  koji uzima u obzir problematiku rubnih uvjeta. Navedeni problem (izazov) istražen je u ovom radu.

Kao rezultat problema s definiranjem rubnih uvjeta, posljedično nastaje rasipanje rezultata što može dovesti do pogrešne procijene vrijednosti veličine sile u zatezi. Kao najbolja kontrola i ujedno i pomoć prilikom definiranja rubnih uvjeta potrebno je provesti ispitivanja na terenu i analizirati rezultate. Na temelju tih rezultata moguće je dobiti dobre smjernice koje nas mogu dovesti do ispravnih zaključaka.

U nastavku je prikazan prijedlog pristupa određivanja sila u zategama povijesnih građevina. Prema njemu se predlaže provesti eksperimentalno ispitivanje kako bi se odredili dinamički parametri- vlastite frekvencije i oblici titranja. Na temelju dobivenih dinamičkih parametara izrađuje se vjeran numerički model. Ideja je da se odredi koeficijent  $\kappa$  koji se modificira na način da se izradi numerički model čiji se rezultati modalne analize uspoređuju sa rezultatima dobivenim eksperimentalnim ispitivanjem na temelju MAC faktora. Cilj je dobiti da se ti rezultati što bolje podudaraju, odnosno da vrijednosti MAC faktora na dijagonali teže vrijednosti 1. Kada se postigne prihvatljiva podudarnost rezultata dobivenih numeričkim proračunom i eksperimentalnim ispitivanjem određuje se koeficijent  $\kappa$  za realne rubne uvjete na terenu. Dobiveni koeficijent  $\kappa$  nadalje se koristi za određivanje sila u zategama.



Potrebno je naglasiti da dobiveni koeficijent  $\kappa$  u ovom radu vrijedi samo za predmetnu građevinu te da navedena vrijednost koeficijenta nije univerzalna već bi se za svaki slučaj treba individualno odrediti.

## **Zahvala**

Mentoru doc. dr. sc. Ivanu Duvnjaku na vodstvu, vrijednim savjetima, izuzetnom zalaganju, uloženom trudu i strpljenju prilikom izrade rada.

Svim djelatnicima zavoda za tehničku mehaniku na vrijednim savjetima, pristupačnosti i ugodnoj radnoj atmosferi .

## Literatura

- [1] H. Smoljanović, N. Živaljić, and Ž. Nikolić, “Overview of the methods for the modelling of historical masonry structures,” *Građevinar*, vol. 65, no. December, pp. 603–618, 2014.
- [2] G. M. López, “Poleni’s Manuscripts about the Dome of Saint Peter’s,” *Ichs*, vol. 2, pp. 1957–1980, 2004.
- [3] U. Peil, “Velika kupola Firenze -,” vol. 59, pp. 183–195, 2007.
- [4] O. Filozofski, “Đurđica Pavlović Antički Split,” 2011.
- [5] R. Radovima, N. A. P. Dioklecijanove, E. O. F. Conservation-, R. Works, A. T. The, and P. I. N. Split, “peristil peristyle.”
- [6] N. Utvrda, I. N. Č. Niji, and D. Hrvatskog, “Dvorci i perivoji,” vol. 52, pp. 45–48, 2000.
- [7] “OBNOVA KNEŽEVA DVORA U DUBROVNIKU NAKON POTRESA,” pp. 79–92, 1989.
- [8] A. Bogdan, “Spomenička baština Dubrovnika u novome ruhu,” vol. 69, pp. 147–152, 2017.
- [9] J. Čuzela, “Prilog obnovi kupole katedrale sv. Jakova u Šibeniku,” *Rad. Inst. povij. umjet.*, no. 18, pp. 205–210, 1994.
- [10] “Notre Dame fire: inside the charred shell of cathedral as the altar glints golden in the sunlight and full scale of damage emerges | London Evening Standard.” [Online]. Available: <https://www.standard.co.uk/news/world/notre-dame-fire-shocking-picture-of-inside-charred-shell-of-iconic-cathedral-shows-altar-still-a4118736.html>. [Accessed: 30-Apr-2019].
- [11] “Ponte Morandi bridge collapses in Genoa during storm.” [Online]. Available: <https://www.dezeen.com/2018/08/15/ponte-morandi-bridge-collapse-genoa-riccardo-morandi/>. [Accessed: 30-Apr-2019].
- [12] P. Roca, M. Cervera, G. Gariup, and L. Pela’, *Structural analysis of masonry historical constructions. Classical and advanced approaches*, vol. 17, no. 3. 2010.
- [13] “Chapter 1 D ’ Alembert ’ s principle and applications.”
- [14] A. Andersson, H. Sundquist, and R. Karoumi, “Evaluating Cable Forces in Cable Supported Bridges Using the Ambient Vibration Method,” *Int. Conf. Bridg. Eng.*, pp. 1–10, 2006.
- [15] W. Stokey, “Vibration of systems having distributed mass and elasticity,” *Shock Vib. Handb.*, pp. 1–50, 1988.
- [16] N. Tullini and F. Laudiero, “Dynamic identification of beam axial loads using one flexural mode shape,” *J. Sound Vib.*, vol. 318, no. 1–2, pp. 131–147, 2008.

- [17] B. R. John William Strutt, "The Theory of Sound voll1\_PDF\_1\_340.pdf." .
- [18] D. Damjanović, Skripta, Eksperimentalne metode 1, Zagreb, 2016.
- [19] Brüel & Kjær, "Measuring of vibration," p. 42, 1982.
- [20] D. Damjanović, Doktorska disertacija Utjecaj temperature na dinamičke parametre građevinskih konstrukcija, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2010.
- [21] "Modal Analysis - an overview | ScienceDirect Topics." [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/modal-analysis>. [Accessed: 20-Apr-2019].
- [22] B. J. Schwarz and M. H. Richardson, "Experiment Modal Analysis," *Altern. Lab. Anim.*, vol. 40, no. 1, p. 13, 2012.
- [23] M. Ghalishooyan and A. Shooshtari, "Operational modal analysis techniques and their theoretical and practical aspects: A comprehensive review and introduction.," *Int. Oper. Modal Anal. Conf.*, no. 6th, p. 17, 2015.
- [24] "ANALIZA SIGNALA." [Online]. Available: [http://lab425.fesb.hr/TINF/teorijainf\\_7.htm](http://lab425.fesb.hr/TINF/teorijainf_7.htm). [Accessed: 20-Apr-2019].
- [25] S. Antonio and D. Version, "Aalborg Universitet Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition Publication date :," 2000.
- [26] M. Pastor, M. Binda, and T. Harčarik, "Modal assurance criterion," *Procedia Eng.*, vol. 48, pp. 543–548, 2012.
- [27] "Modal Assurance Criterion (MAC) - Siemens PLM Community." [Online]. Available: <https://community.plm.automation.siemens.com/t5/Testing-Knowledge-Base/Modal-Assurance-Criterion-MAC/ta-p/368008>. [Accessed: 21-Apr-2019].

## Popis slika

Slika 1. Kamene građevine kao simboli određenih kultura[1].....	1
Slika 2. Teorije lukova, svodova i kupola, La Hire (1712.), Stirling (1717.), Couplet (1729.), Frézier (1737.-39.) - od gornjeg lijevog do donjeg desnog kuta [2] .....	2
Slika 3. Prikaz pukotina i statička analiza kupole sv.Petra, Rim .....	4
Slika 4. Analiza statičkog sustava prema Le Seur, Jacquier i Boškoviću iz Prerea [2] .....	5
Slika 5. Pogled na kupolu crkve St.Maria del Fiore, Firenca [3] .....	5
Slika 6. Presjek donjeg dijela kupole (lijevo) i prikaz drvenog sidrenog prstena (desno) [3] ...	6
Slika 7. Sustavi zatega : Peristil (Split), Knežev dvor (Dubrovnik), Veliki Tabor(Hum Košnički), katedrala sv. Jakova (Šibenik)- s lijeva na desno .....	7
Slika 8. Tlocrt Dioklecijanove palače sa numeriranim glavnim dijelovima [4] .....	8
Slika 9. Zatege na zabatu Protirona [5] .....	9
Slika 10. Zabat Protirona prije i nakon zahvata [5].....	9
Slika 11. Dvorac Veliki Tabor .....	10
Slika 12. Unutrašnjost dvorca - pogled na lukove, stupove i zatege.....	10
Slika 13. Knežev dvor Dubrovnik.....	11
Slika 14. Knežev dvor, atrij.....	12
Slika 15. Kneže dvor danas [8] .....	13
Slika 16. Katedrala sv. Jakova u Šibeniku .....	14
Slika 17. Katedrala sv. Jakova u Šibenik .....	15
Slika 18. Obnova kupole .....	15
Slika 19. Tlocrt Šibenske katedrale.....	16
Slika 20. a) Notre Dame, Pariz [10], b) Most Morandi, Genova [11].....	17
Slika 21. Šibenska katedrala – sidrenje zatega.....	18
Slika 22. Žica napeta između točaka A i B .....	19
Slika 23. Element žice duljine dx u stanju titranja .....	19
Slika 24. Duljina vala titranja žice .....	21
Slika 25. Grafički prikaz izraza (13) .....	21
Slika 26. Greda sa krajnjim fleksijskim ograničenjima i položajem presjeka [17].....	25
Slika 27. Prva frekvencija titranja: prikaz odnosa $q_1$ u odnosu na $1/n$ za različite vrijednosti savojne krutosti $\beta$ krajnjih ograničenja .....	26
Slika 28. Nanošenje pobude gumenim čekićem.....	29
Slika 29. Akcelerometri na modelu zatega s obostrano upetim rubnim uvjetima.....	30



Slika 30. Analogno Digitalni pretvarač.....	31
Slika 31. Elektrootporni tenzometri u polumosnoj konfiguraciji .....	32
Slika 32. Funkcija odgovora konstrukcije u frekvencijskoj domeni .....	33
Slika 33. Gibanje višestupanjskog sustava [18] .....	34
Slika 34. Modalna transformacija višestupanjskog sustava u modalni prostor [18] .....	35
Slika 35. Razlaganje signala na ortogonalne komponente (amplituda frekvencija, faza) [24]	35
Slika 36. MAC matrica za usporedbu 9 oblika titranja [27] .....	36
Slika 37. Nacrt modela zatege sa dimenzijama za upete rubne uvjete.....	37
Slika 38. a) Ispitivani model zatege sa obostrano upetim rubnim uvjetima .....	38
Slika 39. Karakteristični zapis vlastitih frekvencija za upete rubne uvjete.....	38
Slika 40. Prva tri oblika titranja za upete rubne uvjete- rasterećeno stanje.....	39
Slika 41. Odnos promjene naprezanja i prve frekvencije titranja za upete rubne uvjete .....	39
Slika 42. Promjena relativne deformacije u vremenu za upete rubne uvjete .....	40
Slika 43. Promjena naprezanja u vremenu za upete rubne uvjete .....	40
Slika 44. Nacrt modela zatege sa dimenzijama za zglobne rubne uvjete.....	41
Slika 45. a) Ispitivani model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima .....	42
Slika 46. Karakteristični zapis vlastitih frekvencija za zglobne rubne uvjete.....	42
Slika 47. Prva tri oblika titranja za zglobne rubne uvjete – rasterećeno stanje.....	43
Slika 48. Odnos promjene naprezanja i prve frekvencije titranja za zglobne rubne uvjete .....	43
Slika 49. Promjena relativne deformacije u vremenu za zglobne rubne uvjete .....	44
Slika 50. Promjena naprezanja u vremenu za zglobne rubne uvjete .....	44
Slika 51. Numerički model zatege sa upetim rubnim uvjetima .....	46
Slika 52. Prva tri oblika titranja numeričkog modela zatege za upete rubne uvjete-rasterećeno stanje.....	47
Slika 53. Numerički model zatege sa zglobnim rubnim uvjetima .....	47
Slika 54. Prva tri oblika titranja numeričkog modela zatege za zglobne rubne uvjete-rasterećeno stanje.....	48
Slika 55. Usporedba prvog oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za upete rubne uvjete.....	49
Slika 56. Usporedba drugog oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za upete rubne uvjete .....	49
Slika 57. Usporedba trećeg oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za upete rubne uvjete.....	50

Slika 58. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa obostrano upetim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih laboratorijskim ispitivanjem .....	50
Slika 59. Usporedba prvog oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za zglobne rubne uvjete .....	51
Slika 60. Usporedba drugog oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za zglobne rubne uvjete .....	51
Slika 61. Usporedba trećeg oblika titranja numeričkog modela i modela ispitanog u laboratoriju za zglobne rubne uvjete .....	51
Slika 62. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa zglobnim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih laboratorijskim ispitivanjem.....	52
Slika 63. Tlocrtni prikaz sustava zatega Šibenske katedrale.....	55
Slika 64. Presjek kroz katedralu sa rasporedom osi .....	56
Slika 65. a) Sidrenje zatege u galeriji b) Nepoznati rubni uvjeti .....	56
Slika 66. Pobuda zatege udarnim čekićem.....	57
Slika 67. Karakteristični zapis vlastitih frekvencija referentne čelične zatege 6BC.....	58
Slika 68. Prva tri oblika titranja referentne čelične zatege 6BC .....	58
Slika 69. Karakteristični zapis vlastitih frekvencija referentne aluminijske zatege C34 .....	59
Slika 70. Prva tri oblika titranja referentne aluminijske zatege C34.....	59
Slika 71. Numerički model zatege referentne čelične zatege 6BC sa upetim rubnim uvjetima .....	61
Slika 72. Numerički model zatege referentne aluminijske zatege C34 sa upetim rubnim uvjetima.....	61
Slika 73. Numerički model zatege referentne čelične zatege 6BC sa zglobnim rubnim uvjetima .....	62
Slika 74. Numerički model zatege referentne čelične zatege C34 sa zglobnim rubnim uvjetima .....	63
Slika 75. Usporedba prvog oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućih numeričkih modela .....	63
Slika 76. Usporedba drugog oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućih numeričkih modela .....	64
Slika 77. Usporedba trećeg oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućih numeričkih modela .....	64

Slika 78. Usporedba prvog oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućih numeričkih modela .....	64
Slika 79. Usporedba drugog oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućih numeričkih modela .....	65
Slika 80. Usporedba trećeg oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućih numeričkih modela .....	65
Slika 81. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa obostrano upetim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu 6BC .....	66
Slika 82. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa zglobnim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu 6BC .....	66
Slika 83. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa obostrano upetim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu C34 .....	67
Slika 84. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika numeričkog modela zatege sa zglobnim rubnim uvjetima i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu C34 .....	68
Slika 85. Numerički model referentne čelične zatege 6BC – simulacija rubnih uvjeta oprugama krutosti $k_i(i=1,2)$ .....	69
Slika 86. Usporedba prvog oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama.....	70
Slika 87. Usporedba drugog oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama.....	70
Slika 88. Usporedba trećeg oblika titranja referentne čelične zatege 6BC i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama.....	70
Slika 89. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika modificiranog numeričkog modela i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu 6BC .....	71
Slika 90. Numerički model referentne čelične zatege C34 – simulacija rubnih uvjeta oprugama krutosti $k_i(i=1,2)$ .....	72
Slika 91. Usporedba prvog oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama.....	73
Slika 92. Usporedba drugog oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama.....	73
Slika 93. Usporedba trećeg oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 i pripadajućeg numeričkog modela sa simulacijom rubnih uvjeta oprugama.....	73

Slika 94. Grafički prikaz MAC faktora- usporedba modalnih oblika modificiranog numeričkog modela i stvarnih oblika dobivenih ispitivanjem za zategu C34..... 74

## Popis tablica

Tablica 1. Vrijednost koeficijenta $\kappa$ za prve četiri vlastite frekvencije u ovisnosti o rubnim uvjetima [13] .....	23
Tablica 2. Karakteristike materijala korištenog prilikom izrade modela .....	28
Tablica 3. Eksperimentalno izmjerena promjena frekvencije za različite vrijednosti sila (naprezanja) za upete rubne uvjete .....	39
Tablica 4. Promjena frekvencije za različite vrijednosti sila (naprezanja) za zglobne rubne uvjete .....	43
Tablica 5. Promjena frekvencije titranja numeričkog modela zatege za različite vrijednosti sila (naprezanja) za upete rubne uvjete .....	46
Tablica 6. Promjena frekvencije titranja numeričkog modela zatege za različite vrijednosti sila (naprezanja) za zglobne rubne uvjete .....	48
Tablica 7. Vrijednost koeficijenta $\kappa$ dobivenog proračunom i usporedba sa vrijednošću danom u literaturi za upete rubne uvjete .....	53
Tablica 8. Vrijednost koeficijenta $\kappa$ dobivenog proračunom i usporedba sa vrijednošću danom u literaturi za zglobne rubne uvjete .....	54
Tablica 9. Vrijednosti frekvencija za prva tri oblika titranja referentne čelične zatege 6BC ...	59
Tablica 10. Vrijednosti frekvencija za prva tri oblika titranja referentne aluminijske zatege C34 .....	59
Tablica 11. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege 6BC sa obostrano upetim rubnim uvjetima .....	61
Tablica 12. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege 6BC sa obostrano upetim rubnim uvjetima .....	62
Tablica 13. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege 6BC sa obostrano zglobnim rubnim uvjetima .....	62
Tablica 14. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege C34 sa obostrano zglobnim rubnim uvjetima .....	63
Tablica 15. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege 6BC sa simulacijom rubnih uvjete oprugama .....	69
Tablica 16. Vrijednost koeficijenta $\kappa$ dobivenog proračunom i usporedba sa vrijednošću danom u literaturi za simulaciju rubnih uvjeta oprugama .....	71
Tablica 17. Vrijednost frekvencija za prva tri oblika titranja numeričkog modela referentne čelične zatege C34 sa simulacijom rubnih uvjete oprugama .....	72

Tablica 18. Vrijednost koeficijenta $\kappa$ dobivenog proračunom i usporedba sa vrijednošću danom u literaturi za simulaciju rubnih uvjeta oprugama.....	74
Tablica 19. Vrijednosti sila u zategama .....	75