



Sveučilište u Zagrebu  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Jakov Krokari

# **ODREĐIVANJE FLEKSIJSKE KRUTOSTI KOMPOZITNIH RASVJETNIH STUPOVA**

Zagreb, 2018.

*Ovaj rad izrađen je u Zavodu za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, pod vodstvom doc.dr.sc. Ane Skender, dipl.ing.građ. i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2017./2018.*

---

## SAŽETAK

U novije vrijeme, razvojem polimernih materijala javljaju se kompozitni rasvjetni stupovi proizvedeni od polimerne smole ojačane vlaknima. Radi se o materijalu s različitim mehaničkim svojstvima u različitim smjerovima. Predmet ovog istraživanja je ponašanje kompozitnih rasvjetnih stupova kružnog i šupljeg poprečnog presjeka pri savijanju. Cilj je odrediti prosječni fleksijski modul elastičnosti kao da se radi o nosaču od izotropnog materijala. Provedeno je opsežno eksperimentalno ispitivanje na savijanje kompozitnih stupova različitih dimenzija. Prema klasičnoj teoriji savijanja određeni su analitički izrazi za izotropnu gredu koji su poslužili za određivanje analitičkog fleksijskog modula elastičnosti. Na temelju eksperimentalnih vrijednosti sile i progiba određene su eksperimentalne vrijednosti fleksijskog modula u karakterističnim presjecima. Drugi dio istraživanja bavi se predviđanjem mehaničkih svojstava kompozita u različitim smjerovima na temelju materijalnih svojstava iz literature. Na temelju teorije laminata određena je zamjenska fleksijska krutost, odnosno zamjenski fleksijski modul koji je uspoređen s eksperimentalnim vrijednostima.

**Ključne riječi:** kompozitni rasvjetni stup, savijanje, eksperimentalno ispitivanje, fleksijski modul elastičnosti, progibna linija, zamjenska krutost

---

---

## ABSTRACT

Recently, the development of polymeric materials has enabled the application of composite lighting columns made of fibre reinforced polymer resin. This material has different mechanical properties in different directions. In the centre of this research is the behaviour of composite lighting columns with a hollow circular cross section under bending. The aim is to determine an average flexural modulus of elasticity for an isotropic beam. An experimental research of composite columns with different dimensions under bending was carried out. According to the classical beam theory analytical expressions for an isotropic beam have been developed which served as basis for the determination of the analytical flexural modulus of elasticity. Based on experimental values of force and deflection, experimental values of the flexural modulus of elasticity have been determined. In the other phase of the research, mechanical properties of the composite in different directions were predicted based on theoretical material properties from the literature. Based on the laminate theory, a replacement flexural stiffness, as well the replacement flexural modulus was determined and is compared to experimental values.

**Key words:** composite lighting column, bending, experimental testing, flexural modulus of elasticity, elastic line, replacement stiffness

---

---

## POPIS KRATICA I SIMBOLA

<b>A</b>	N/mm	istezna matrica krutosti laminata
<b>B</b>	N	spregnuta matrica krutosti laminata
<b>D</b>	Nmm	savojna matrica krutosti laminata
<b><math>\alpha</math></b>	mm/N	istezna matrica fleksibilnosti laminata
<b><math>\beta</math></b>	1/N	spregnuta matrica fleksibilnosti laminata
<b><math>\delta</math></b>	1/Nmm	savojna matrica fleksibilnosti laminata
<b>Q</b>	MPa	matrica krutosti za jednosmjerno usmjeren sloj
<b><math>Q^{\pm\theta}</math></b>	MPa	matrica krutosti namotaja
<b>C</b>		tenzor modula elastičnosti
<b><math>T_{\sigma}, T_{\varepsilon}</math></b>		matrice transformacije
<b>S</b>		tenzor materijalne fleksibilnosti
<b>GF</b>	-	stakleno vlakno (eng. <i>Glass Fiber</i> )
<b>UP</b>	-	nezasićeni poliester
<b>GFRP</b>	-	(engl. <i>Glass Fiber Reinforced Polymer</i> )
<b><math>\theta</math></b>	°	kut namotaja vlakna
<b><math>r</math></b>	mm	radijus kružnog poprečnog presjeka
<b><math>r_u</math></b>	mm	unutarnji radijus poprečnog presjeka
<b><math>R</math></b>	mm	radijus poprečnog presjeka od središta do neutralne osi
<b><math>D_v</math></b>	mm	vanjski promjer poprečnog presjeka cijevi
<b><math>D_u</math></b>	mm	unutarnji promjer poprečnog presjeka cijevi
<b><math>D_v^{max}</math></b>	mm	maksimalni vanjski promjer
<b><math>D_v^{min}</math></b>	mm	minimalni vanjski promjer
<b><math>D_u^{max}</math></b>	mm	maksimalni unutarnji promjer
<b><math>D_u^{min}</math></b>	mm	minimalni unutarnji promjer
<b><math>M(x)</math></b>	Nmm	moment savijanja
<b><math>I(x)</math></b>	mm <sup>4</sup>	moment tromosti
<b><math>w(x)</math></b>	mm	progib
<b><math>w_{eksp}</math></b>	mm	eksperimentalna vrijednost progiba
<b><math>w_{an}</math></b>	mm	analitičke vrijednosti progiba
<b><math>\varphi(x)</math></b>	rad	kut zaokreta
<b><math>E</math></b>	MPa	Youngov modul elastičnosti

---

---

$E_f^{an}$	MPa	analitički fleksijski modul elastičnosti
$E_f^{exp}$	MPa	eksperimentalni fleksijski modul elastičnosti
$E_m$	MPa	modul elastičnosti matrice
$E_f$	MPa	modul elastičnosti vlakna
$E_1$	MPa	uzdužni modul elastičnosti
$E_2$	MPa	poprečni modul elastičnosti
$\hat{E}$	MPa	zamjenski fleksijski modul
$EI_y$	Nmm <sup>2</sup>	fleksijska krutost
$\hat{E}\hat{I}_y$	Nmm <sup>2</sup>	zamjenska fleksijska krutost
$L$	mm	duljina nosača
$t$	mm	debljina stijenke poprečnog presjeka
$t_{max}$	mm	maksimalna debljina stijenke poprečnog presjeka
$t_{min}$	mm	minimalna debljina stijenke poprečnog presjeka
$F$	N	sila
$F_{eksp}$	N	eksperimentalna vrijednost sile
$V_m$	%	volumni udio matrice
$V_f$	%	volumni udio vlakna
$\nu_m$	-	Poissonov koeficijent matrice
$\nu_f$	-	Poissonov koeficijent vlakna
$G_f$	MPa	modul posmika vlakna
$G_m$	MPa	modul posmika matrice
$G_{12}$	MPa	modul posmika kompozita
$\sigma_f$	MPa	fleksijsko naprezanje
$\varepsilon_f$		fleksijska deformacija
$\varepsilon_0$		deformacija u referentnoj ravnini
$\kappa$	1/kN	zakrivljenost referentne ravnine
$x, y, z$	-	koordinatni sustav
$C, D$	-	integracijske konstante
RSD <sub>x_x</sub>	-	rasvjetni stup duljine x, komad x
$z_k$	mm	visine kompozitnih slojeva
LVDT	-	(engl. <i>Linear Variable differential transformer</i> )

---

---

## **SADRŽAJ**

1. UVOD.....	1
2. CILJEVI ISTRAŽIVANJA .....	3
3. MATERIJAL, METODE I PLAN ISTRAŽIVANJA .....	4
3.1. Metode i plan istraživanja.....	7
4. EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE .....	9
4.1. Uzorci.....	9
4.2. Nanošenje opterećenja .....	10
4.3. Mjerna mjesta za mjerenje progiba.....	12
4.4. Rezultati mjerenja progiba.....	13
5. ODREĐIVANJE FLEKSIJSKOG MODULA IZOTROPNE CIJEVI .....	17
5.1. Određivanje geometrijskih karakteristika cijevi .....	17
5.2. Određivanje progibne linije nosača $w(x)$ .....	20
5.2.1. Određivanje progibne linije stupa RSD5_1.....	22
5.3. Izrazi za analitički fleksijski modul .....	24
5.4. Analiza naprezanja i deformacija pri savijanju za karakteristične presjeke .....	27
5.4.1. Proračun naprezanja i deformacija za stup RSD5_1 .....	28
5.4.2. Proračun naprezanja i deformacija za stupove RSD6_1, RSD6_2 i RSD6_3.....	29
5.5. Progibne linije i usporedba s eksperimentalnim vrijednostima .....	32
6. ODREĐIVANJE FLEKSIJSKE KRUTOSTI KOMPOZITNE CIJEVI.....	37
6.1. Kompozitni sloj ojačan jednosmjernim vlaknima .....	37
6.2. Predviđanje mehaničkih svojstava kompozitnog sloja od GFRP-a.....	38
6.2.1. Pravilo mješavine .....	39
6.2.2. Osnove makromehanike kompozitnog sloja .....	40
6.3. Osnove makromehanike laminata.....	42
6.4. Zamjenska fleksijska krutost kompozitne grede.....	44

---

---

6.5. Proračun zamjenske fleksijske krutosti za poprečni presjek kompozitnog rasvjetnog stupa .....	45
6.5.1. Zamjenska fleksijska krutost za stup RSD5_1 .....	46
7. RASPRAVA I ZAKLJUČCI.....	49
POPIS SLIKA .....	51
POPIS TABLICA.....	53
LITERATURA.....	54

---



## 1. UVOD

Urbanizacija okoline uvjetovala je brzi razvoj u području rasvjetne tehnike. Prometnice, ulice, sportski objekti, industrijska postrojenja, stambene i turističke građevine, zapravo svi javni prostori zahtijevaju razvoj i napredak rasvjetnih stupova koji moraju odgovarati tehničkim i ekonomskim zahtjevima, ali naravno i dalje moraju zadovoljavati estetske kriterije.

U novije vrijeme razvojem polimernih materijala javljaju se kompozitni rasvjetni stupovi proizvedeni od polimerne smole ojačane vlaknima, odnosno FRP materijala (engl. *Fiber Reinforced Polymer*). Radi se o FRP cijevima promjenjivog poprečnog presjeka na čijem se vrhu nalazi svjetiljka (*Slika 1.*).



**Slika 1.** Kompozitni rasvjetni stupovi u prirodi [1]

S obzirom na sve veću primjenu, mnoga istraživanja posvećena su proučavanju ponašanja kompozitnih cijevi pri različitim opterećenjima. Kontrola kvalitete kompozitnih rasvjetnih

stupova temelji se na ispitivanju na savijanje pa je i predmet ovog istraživanja upravo ta vrsta opterećenja.

Proračuni se najčešće provode u računalnim programima za numeričku analizu i poželjno je što jednostavnije zadavanje materijalnog modela za FRP materijal. Naime, FRP materijali imaju različita mehanička svojstva u različitim smjerovima. Stoga se često pokušava izbjeći detaljno zadavanje smjerova vlakana u pojedinim slojevima već se definiraju prosječna svojstva [2].

Postoji nekoliko različitih pristupa. Jedan od načina je promatranje kompozitne grede kao da je napravljena od izotropnog materijala pa se koriste analitički izrazi prema klasičnoj teoriji savijanja [3].

Prema teoriji laminata razvijeni su izrazi za zamjensku fleksijsku krutost kompozitnih nosača različitih poprečnih presjeka [4]. Ta metoda korištena je pri dobivanju analitičkog modula elastičnosti za kompozitnu gredu koji je uspoređen s eksperimentalnim vrijednostima dobivenim ispitivanjem na savijanje [5]. Postoje i složeniji izrazi koji koriste teoriju laminata i promatraju promjenu nagiba vlakana po opsegu cijevi, a time i promjenu fleksijske krutosti [6]. Ti izrazi provjereni su opsežnim eksperimentalnim istraživanjima u kojima je korišteno ispitivanje cijevi na savijanje u 4 točke [7]. U jednom od istraživanja, kompozitne cijevi s promjenjivim poprečnim presjekom promatrane su pri djelovanju vlaka i torzije [8].

## 2. CILJEVI ISTRAŽIVANJA

Ciljevi istraživanja su:

- Provesti opsežno eksperimentalno ispitivanje na savijanje kompozitnih stupova različitih dimenzija.
- Izvesti analitičke izraze za izotropnu gredu prema klasičnoj teoriji savijanja s obzirom na promjenjivost poprečnog presjeka cijevi, ali i debljine stijenke.
- Na temelju analitičkih izraza i eksperimentalnih rezultata odrediti fleksijski modul elastičnosti koji bi se mogao koristiti kao reprezentativno materijalno svojstvo za taj materijal.
- Predvidjeti mehanička svojstva kompozita u različitim smjerovima na temelju materijalnih svojstava dostupnih u literaturi i osnova mikromehanike.
- Određivanje zamjenske fleksijske krutosti kompozitne cijevi na temelju teorije laminata.

### 3. MATERIJAL, METODE I PLAN ISTRAŽIVANJA

Kompozit ili kompozitni materijal je materijal građen od međusobno čvrsto spojenih različitih materijala radi dobivanja novog, drukčijeg materijala kod kojeg fizikalna ili kemijska svojstva najčešće nadmašuju svojstva pojedinačnih dijelova, odnosno komponenti.

Kompozitni materijal ojačan vlaknima sastoji se od dva osnovna dijela: matrice i vlakna. Vlakna i matrica čine slojeve (lamine) koji su međusobno povezani i tvore višeslojni kompozit (laminat). Vlakna su osnovni nosivi element kompozita i daju mu čvrstoću, dok matrica drži vlakna zajedno i ima ulogu prijenosa opterećenja na vlakno te daje vanjsku formu kompozita. Vlakna su najčešće ugljična, staklena, aramidna ili metalna. Matrice mogu biti polimerne, metalne i keramičke [9].

Predmet ovog istraživanja su kompozitni rasvjetni stupovi proizvedeni od polimera ojačanog staklenim vlaknima – GFRP materijal (engl. *Glass Fiber Reinforced Polymer*). U kombinaciji sa svjetiljkama različitih oblika koriste se za rasvjetu prometnica i javnih površina. Prednosti korištenja kompozitnih rasvjetnih stupova u odnosu na ostale materijale su [1]:

- mala masa – jednostavna i brza montaža
- otpornost na meteorološke utjecaje (sol, kiša, snijeg) – nehrđajući materijal
- električki nevodljivi materijal
- relativno visoka čvrstoća i krutost.

*Staklena vlakna* (GF, engl. *Glass fibre*) proizvode se od silike, tj. silicijevog dioksida  $\text{SiO}_2$ . Mogu se znatno razlikovati po svojstvima te se stoga označavaju kao A – staklo (prva proizvedena vlakna, danas se rijetko koriste), C – staklo (poboljšana otpornost na kiseline i lužine), E – staklo (najčešće korištena, poboljšana otpornost na vlagu i blaže kemikalije) i S – staklo (povećane čvrstoće i modula elastičnosti, koriste se kod mehanički opterećenih konstrukcija gdje su potrebni specifična krutost i čvrstoća) [9],[10]. U kompozite se ugrađuju najčešće u obliku rovinga, tkanina ili mata (*Slika 2.*). Proizvodnja staklenih vlakana relativno je jednostavna i jeftina. S obzirom da vlakna imaju visoku čvrstoću i gotov proizvod ima visoku čvrstoću [4],[5].

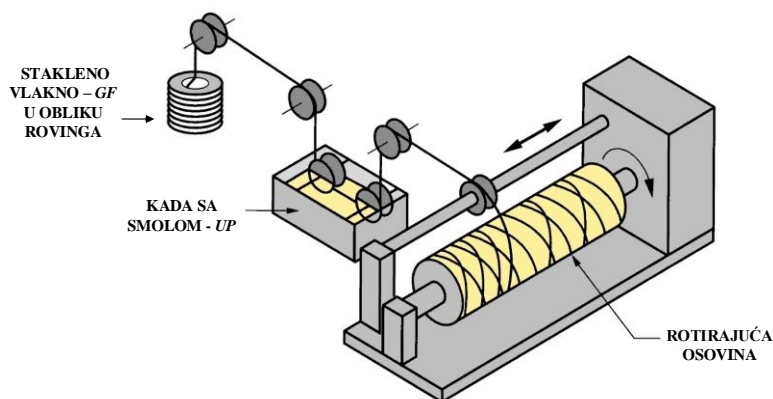
U proizvodnji kompozitnih rasvjetnih stupova korištena su staklena vlakna u obliku rovinga napravljena od E – stakla (Johns Manville StarRov® PR 440 2400 086). Promjer vlakana je 16  $\mu\text{m}$ . Volumni udio staklenih vlakana u kompozitu iznosi  $V_f = 60\%$ .



**Slika 2.** Staklena vlakna u obliku rovinga [11]

Kao polimerna matrica korištena je najčešća duromerna smola u građevinarstvu, *nezasićena poliesterska smola* (UP), oznaka DISTITRON® 5119 ESX20Q. Glavne prednosti nezasićene poliesterske smole su: mala početna viskoznost, mala cijena početnih sirovina, jednostavna proizvodnja, otpornost na atmosferske utjecaje. Volumni udio matrice u kompozitu je  $V_m = 40\%$ .

Kompozitni rasvjetni stupovi proizvedeni su postupkom strojnog namatanja (engl. *Filament Winding*). Postupak je u potpunosti automatiziran [12]. Stakleno vlakno u obliku rovinga natapa se u kadi sa smolom te se unosi vlačno naprezanje u vlakna i na taj način mota oko rotirajuće osovine (*Slika 3.*)

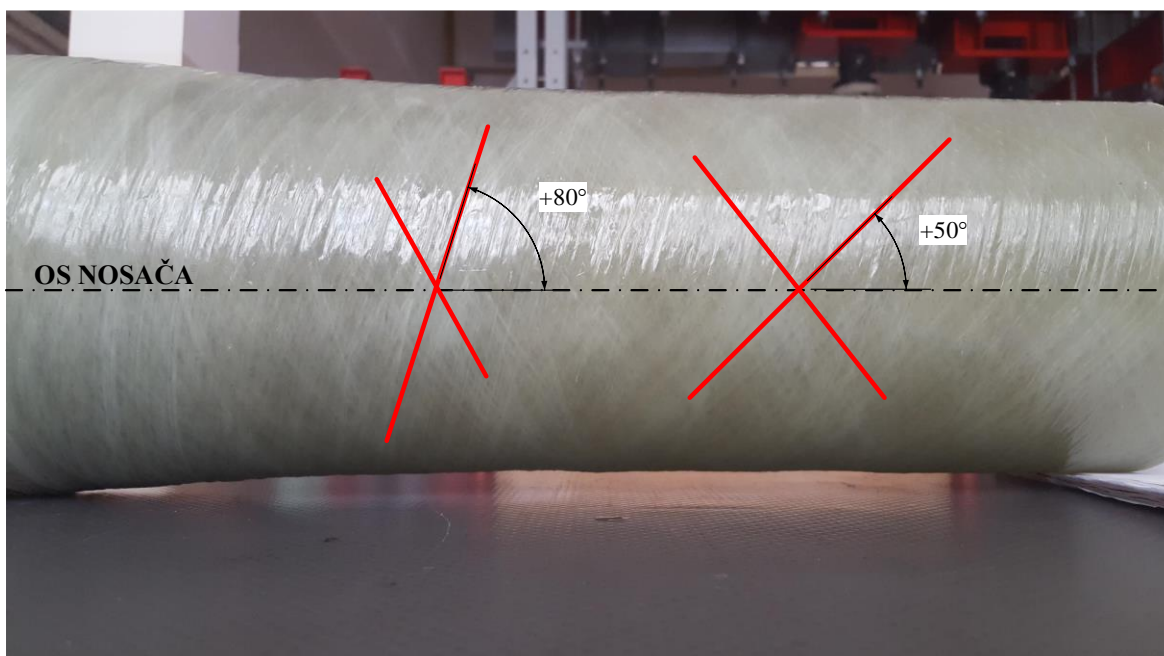


**Slika 3.** Shematski prikaz postupka strojnog namatanja [13]

Ova metoda pogodna je za proizvodnju šupljih cijevi (Slika 4.). Kompozitni stupovi su šuplji, promjenjivog poprečnog presjeka, a zbog namatanja promjenjiva je i debljina stijenke po duljini stupa. Nekoliko slojeva namotano je pod kutom od  $\pm 50^\circ$ , a završni sloj je pod kutom od  $\pm 80^\circ$  (Slika 5.).



**Slika 4.** Strojno namatanje stupa [14]



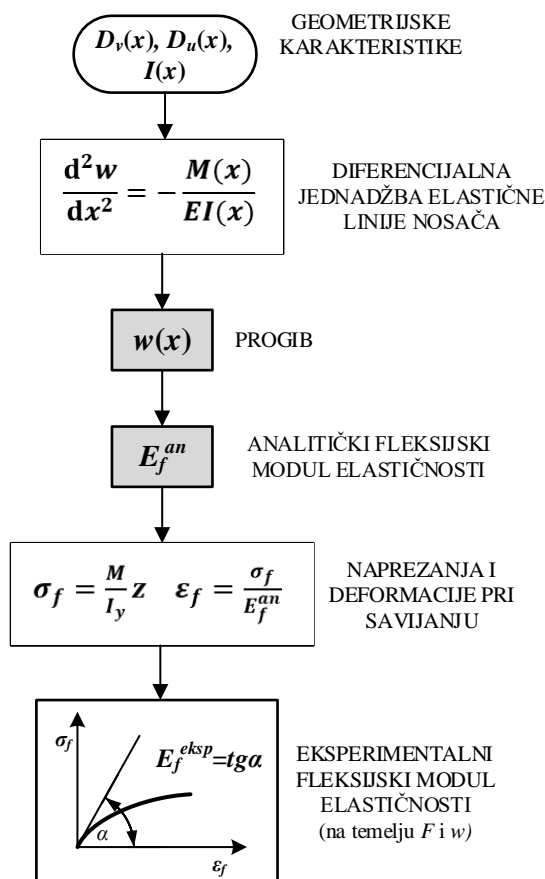
**Slika 5.** Smjerovi namatanja rasvjetnog stupa

### 3.1. Metode i plan istraživanja

U svrhu određivanja ponašanja kompozitnih rasvjetnih stupova pri savijanju provedeno je eksperimentalno istraživanje na uzorcima rasvjetnih stupova. Prema uvjetima ispitivanja izvedeni su analitički izrazi koji opisuju klasičnu teoriju savijanja nosača od izotropnog materijala. Uzimajući u obzir promjenjivost poprečnog presjeka, iz analitičkih izraza za elastičnu liniju nosača određen je analitički fleksijski modul elastičnosti  $E_f^{an}$ .

Na temelju eksperimentalnih vrijednosti sile ( $F_{eksp}$ ) i progiba ( $w_{eksp}$ ) u karakterističnim presjecima, prikazani su dijagrami naprezanja i deformacija pri savijanju. U konačnici je eksperimentalni modul elastičnosti izražen kao sekantni modul elastičnosti  $E_f^{eksp} = \text{tg}\alpha$ .

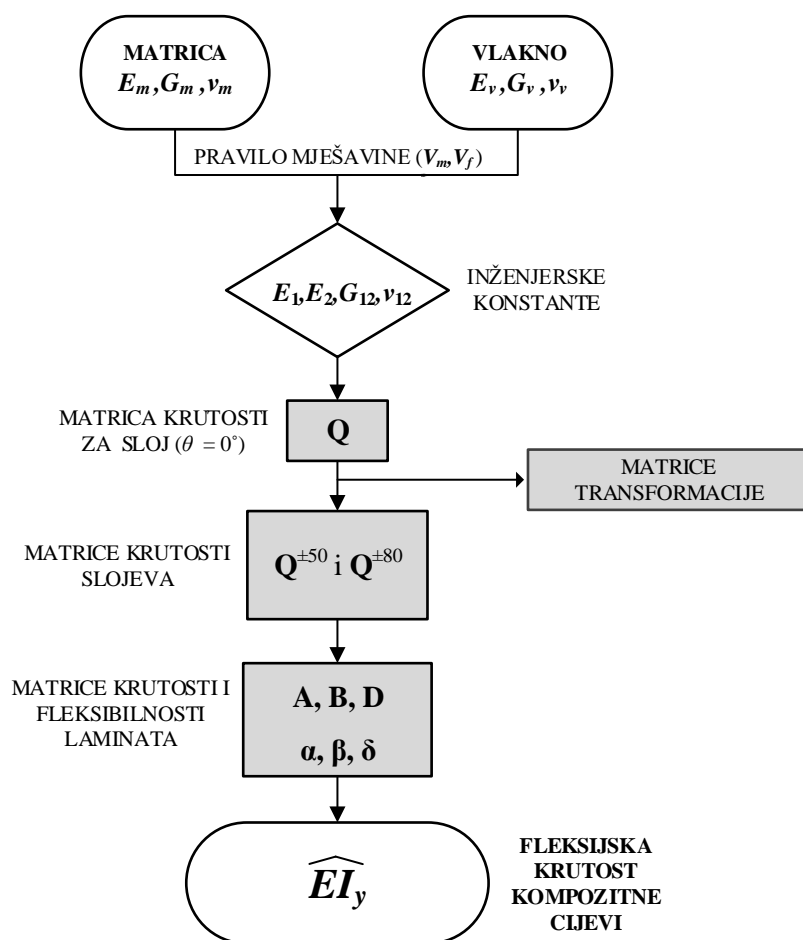
Detaljni koraci pri određivanju eksperimentalnog modula elastičnosti prikazani su na dijagramu slijeda (Slika 6.).



**Slika 6.** Dijagram slijeda za određivanje eksperimentalnog modula elastičnosti

Drugi način promatranja fleksijske krutosti kompozitnog šupljeg stupa temelji se na klasičnoj teoriji laminata. Konačni cilj je određivanje zamjenske fleksijske krutosti  $\widehat{EI}_y$ . S obzirom da podaci o mehaničkim svojstvima matrice i vlakana nisu poznati, preuzeti su podaci iz literature. Vrijednosti inženjerskih konstanti određene su na temelju pravila mješavina. Prvo je promatran kompozitni sloj s kontinuiranim vlaknima uz  $\theta = 0^\circ$  i određene su vrijednosti matrice krutosti  $\mathbf{Q}$ . Na temelju te matrice pomoću matrica transformacije određuju se matrice krutosti namotaja za  $\pm 50^\circ$  i  $\pm 80^\circ$ . U odgovarajućim poprečnim presjecima za zadani raspored i debljinu slojeva određuju se matrice krutosti laminata  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{D}$ .

U literaturi su ponuđeni izrazi za zamjensku fleksijsku krutost  $\widehat{EI}_y$  za poprečni presjek cijevi koji u sebi sadrže koeficijente matrice popustljivosti  $\alpha$  i  $\beta$ . Postupak je opisan na dijagramu slijeda (Slika 7.).



Slika 7. Dijagram slijeda za određivanje fleksijske krutosti kompozitne cijevi



## 4. EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE

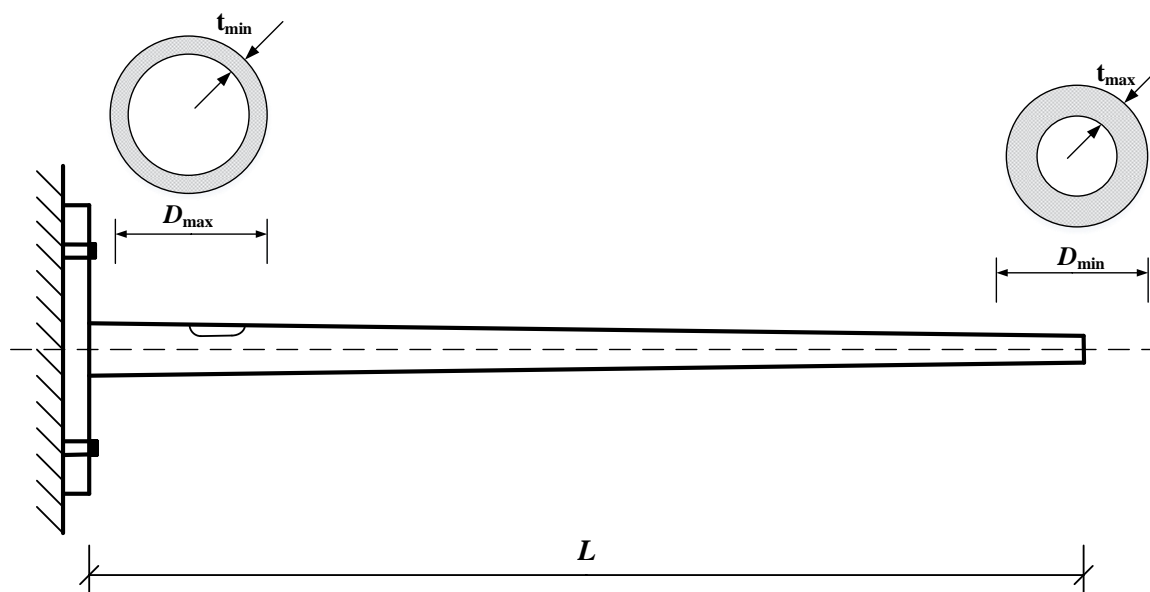
Eksperimentalno istraživanje provedeno je u Laboratoriju za ispitivanje konstrukcija koji je dio Zavoda za tehničku mehaniku na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Pri ispitivanju je kao smjernica odabrana metoda ispitivanja na savijanje koja se koristi u kontroli kvalitete kompozitnih rasvjetnih stupova prema nizu normi HRN EN 40-3:2013 [15]. Pritom su izvršena i dodatna mjerenja kako bi se što točnije utvrdilo ponašanje kompozitnih stupova pri savijanju.

### 4.1. Uzorci

Ispitivanje na savijanje je provedeno na četiri uzorka kompozitnih rasvjetnih stupova, promjenjivih geometrijskih karakteristika (*Slika 8.*). Najveći vanjski promjer  $D_{\max}$  i najmanja debljina stijenke  $t_{\min}$  je na peti stupa, dok je najmanji vanjski promjer  $D_{\min}$  i najveća debljina stijenke  $t_{\max}$  na vrhu stupa (*Slika 9.*).



**Slika 8.** Kompozitni rasvjetni stupovi od 5 i 6 m



**Slika 9.** Skica rasvjetnog stupa s geometrijskim karakteristikama

Broj slojeva odnosi se na broj slojeva pod kutom  $\pm 50^\circ$  (3, 4 i 5) i  $\pm 80^\circ$  (Tablica 1.).

**Tablica 1.** Prikaz geometrijskih karakteristika

	Oznaka stupa			
	RSD5_1	RSD6_1	RSD6_2	RSD6_3
<b><math>L</math> (mm)</b>	5000	6000	6000	6000
<b><math>D_{\max}</math> (mm)</b>	160	165	165	170
<b><math>t_{\min}</math> (mm)</b>	10	8	7,5	10
<b><math>D_{\min}</math> (mm)</b>	100	98	95	104
<b><math>t_{\max}</math> (mm)</b>	18	18	17	22
<b>Broj slojeva</b>	4+1	4+1	3+1	5+1

#### 4.2. Nanošenje opterećenja

Kao statički sustav odabrana je konzola koja je opterećena vertikalnom koncentriranom silom na slobodnom kraju. Sila se nanosi kontrolom pomaka pomoću univerzalne statičke mašine za ispitivanje (Zwick) uz mjernu dozu od  $\pm 50$  kN, razred 1. Brzina ispitivanja iznosi 20 mm/min.

Stup se prvo fiksira u nultom položaju (Slika 10.), a zatim se opterećuje do maksimalnog progiba koji se može ostvariti ispod preše (Slika 11.)



**Slika 10.** Kompozitni stup na početku ispitivanja



**Slika 11.** Kompozitni stup na kraju ispitivanja

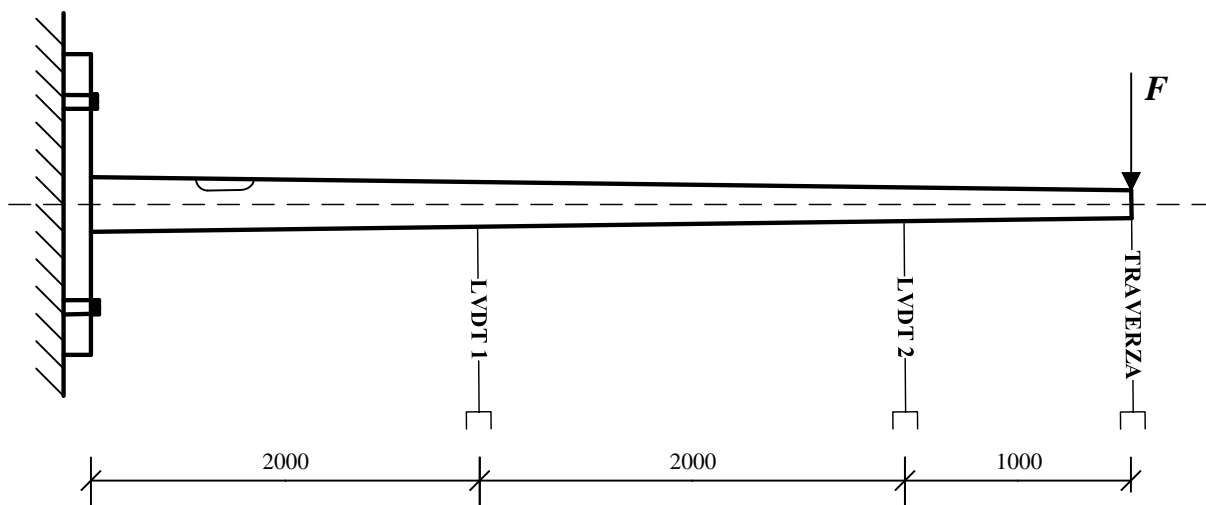
Upetost stupa ostvaruje se pričvršćivanjem stupa vijcima za postolje (*Slika 12.*)



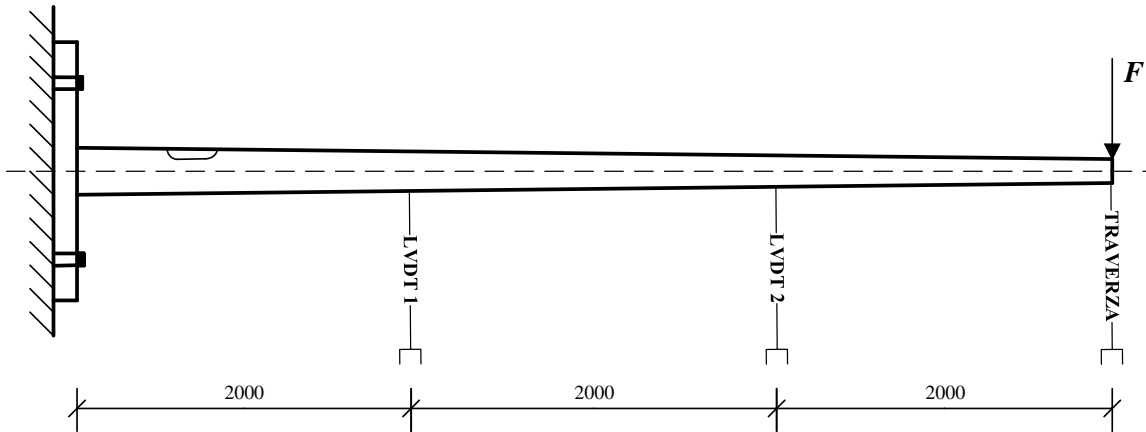
Slika 12. Pričvršćivanje vijcima da bi se ostvarila upetost

#### 4.3. Mjerna mjesta za mjerenje progiba

Mjerna mjesta za mjerenje progiba postavljena su na 2, 4 i 5 m za RSD5\_1 (Slika 13.), a za stupove RSD6\_1, RSD6\_2 i RSD6\_3 na 2, 4 i 6 m (Slika 14.). Progib na slobodnom kraju stupa, odnosno pomak vrha stupa mjeri se pomoću traverze (poprečne grede) na statičkoj preši (Slika 15.). Progib duž osi nosača mjeri se pomoću dva induktivna osjetila (Slika 16.) za mjerenje pomaka s mjernim područjem od 300 mm (LVDT HBM WA300).



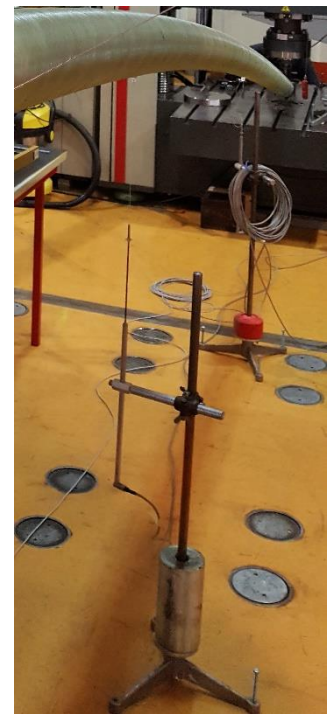
Slika 13. Pozicije mjernih mjesta za RSD5\_1



**Slika 14.** Pozicije mjernih mjesta za RSD6\_1, RSD6\_2 i RSD6\_3



**Slika 15.** Univerzalna statička preša (Zwick)

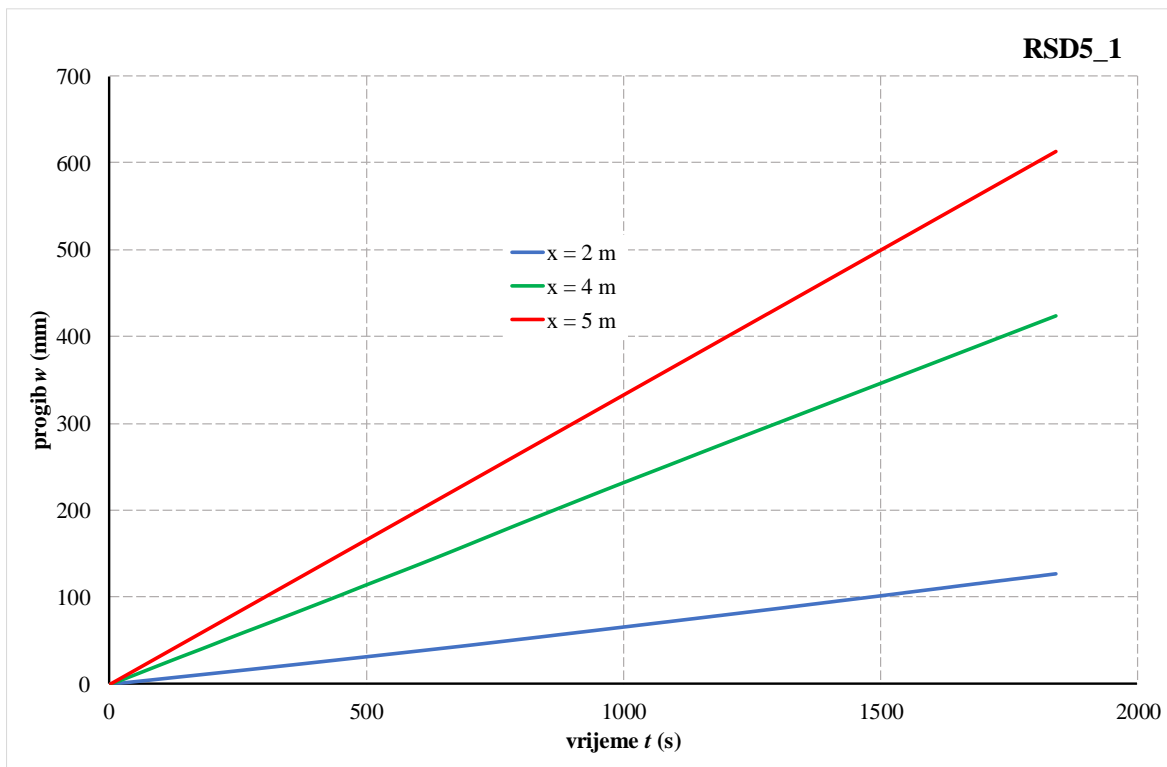


**Slika 16.** LVDT

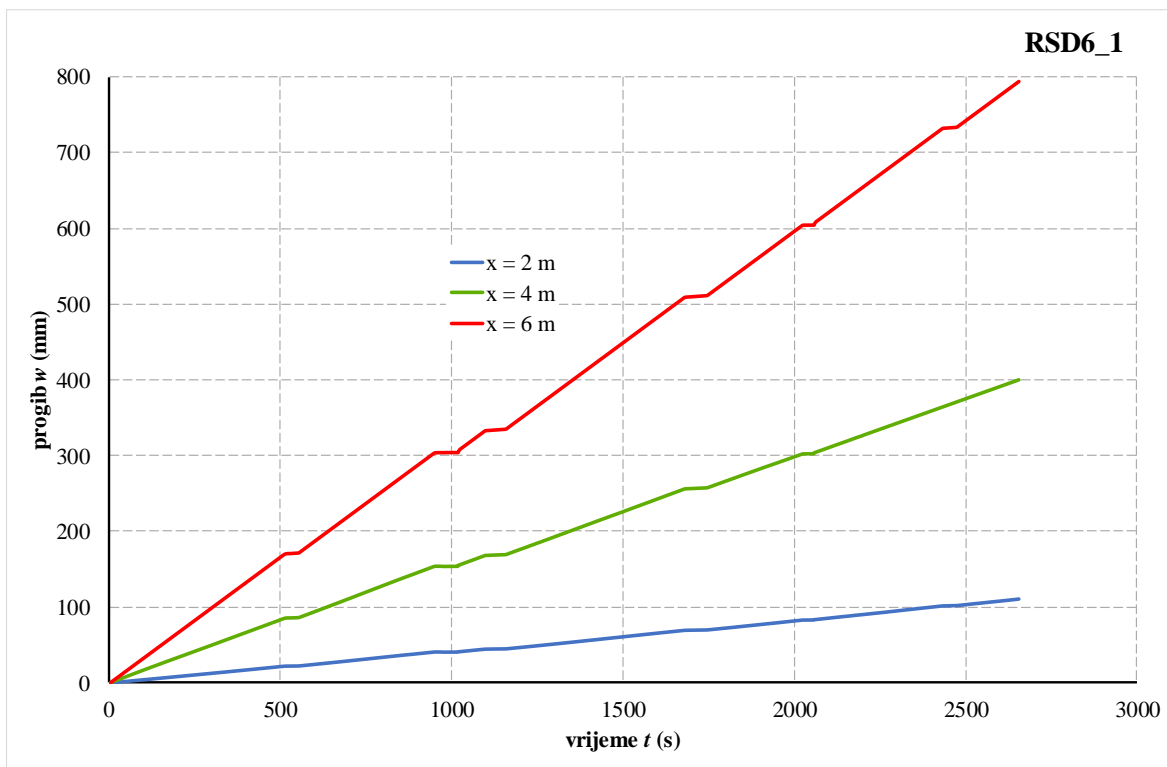
Rezultati mjerenja bilježe se pomoću sustava za prikupljanje podataka HBM MGC+ uz software Catman.

#### 4.4. Rezultati mjerenja progiba

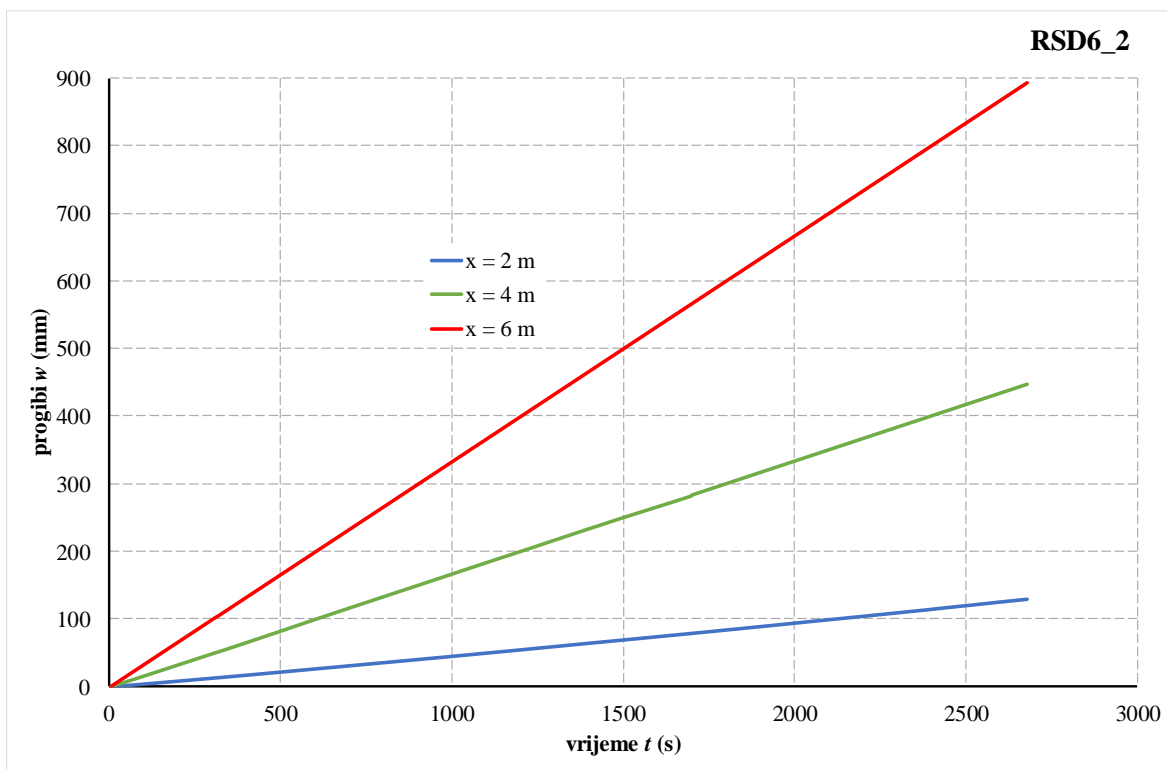
Pomaci na sva tri mjerna mjesta za sve stupove mogu se prikazati grafički u ovisnosti o vremenu (*Slika 17.*, *Slika 18.*, *Slika 19.* i *Slika 20.*).



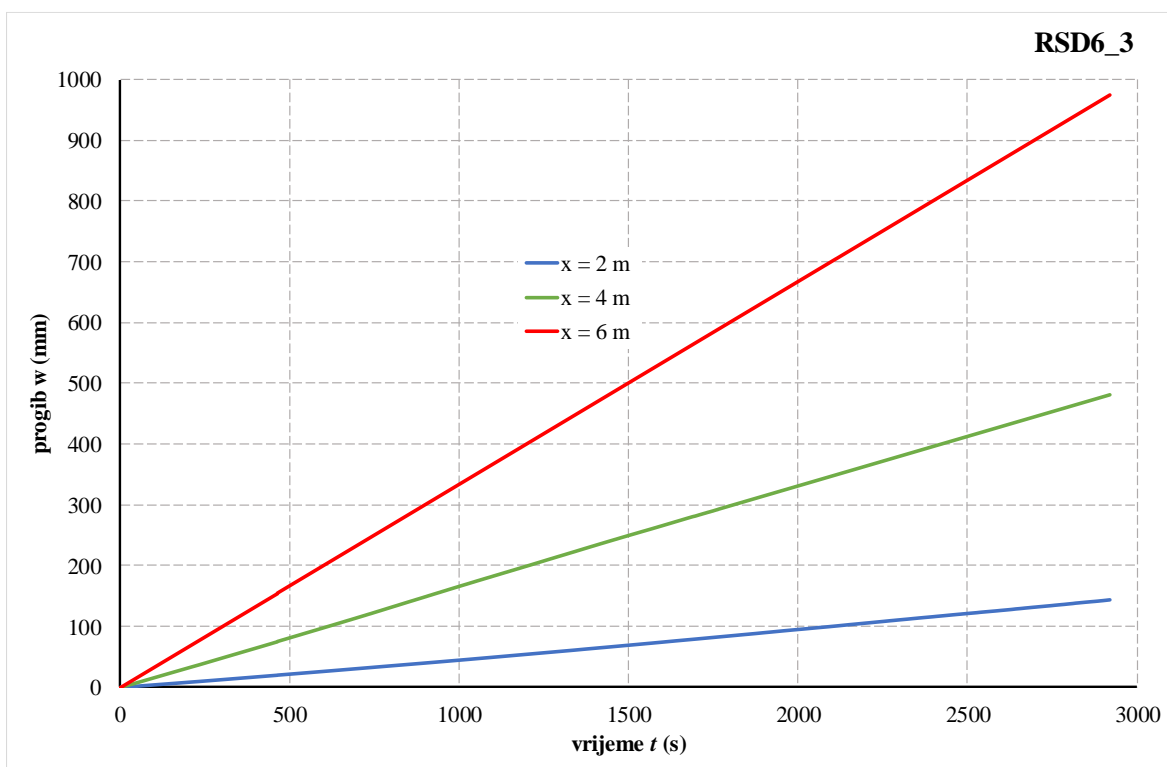
Slika 17. Mjereni progibi za RSD5\_1



Slika 18. Mjereni progibi za RSD6\_1

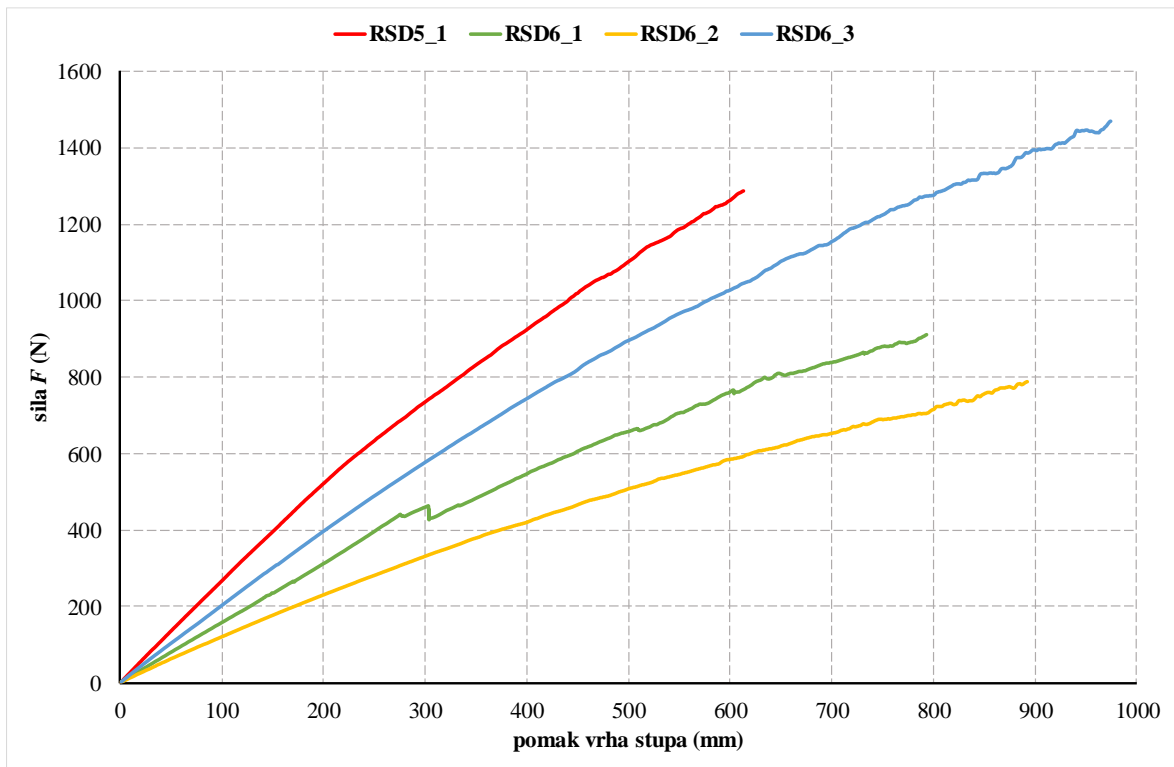


Slika 19. Mjereni progibi za RSD6\_2



Slika 20. Mjereni progibi za RSD6\_3

Na mjestu djelovanja sile je i najveći progib, što se može prikazati grafički iz dobivenih eksperimentalnih istraživanja (Slika 21.).



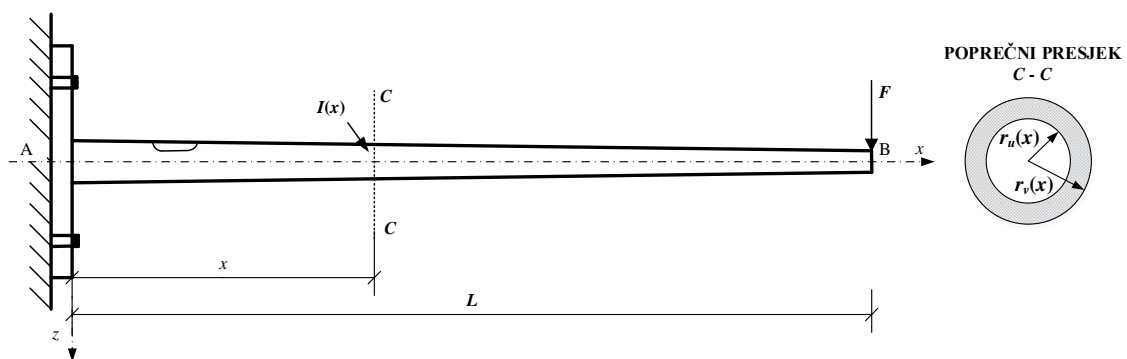
Slika 21. Pomak vrha stupa u ovisnosti o sili za sve stupove



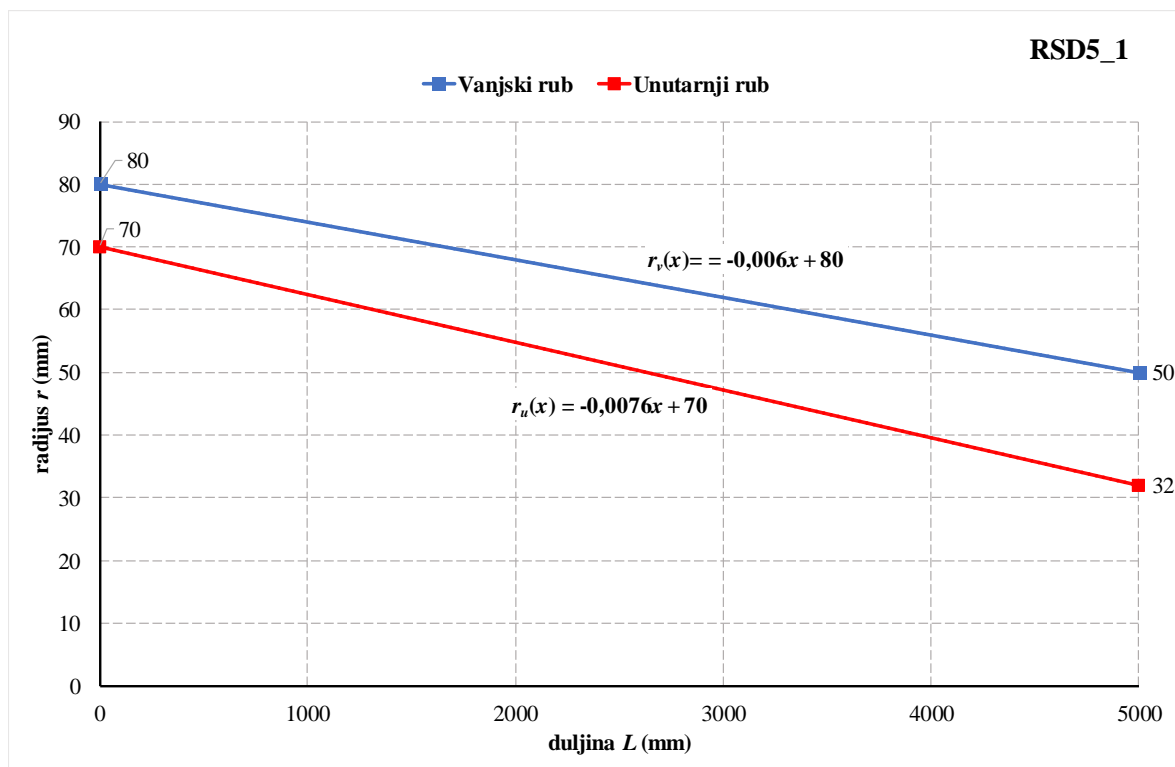
## 5. ODREĐIVANJE FLEKSIJSKOG MODULA IZOTROPNE CIJEVI

### 5.1. Određivanje geometrijskih karakteristika cijevi

Kompozitni rasvjetni stupovi su šupljeg kružnog poprečnog presjeka. Pritom se vanjski  $r_v(x)$  i unutarnji  $r_u(x)$  polumjer linearno mijenjaju duž osi nosača (Slika 22.). Na temelju poznatih vrijednosti vanjskog i unutarnjeg polumjera na krajevima stupa moguće je kroz dvije točke postaviti jednadžbu pravca i dobiti vanjski, odnosno unutarnji radijus poprečnog presjeka kao funkciju varijable  $x$ , odnosno duljine nosača  $L$  (Slika 23.).



Slika 22. Vanjski i unutarnji polumjer cijevi



Slika 23. Promjena radijusa poprečnog presjeka po duljini stupa RSD5\_1

Za potrebe računanja momenta tromosti potreban je promjer  $D(x)$ , a on iznosi  $D(x) = 2r(x)$ . Npr. promjena vanjskog i unutarnjeg ruba poprečnog presjeka za stup RSD5\_1 glasi:

$$D_v(x) = 160 - 0,012x \quad (5.1)$$

$$D_u(x) = 140 - 0,0152x \quad (5.2)$$

Izrazi za promjenu vanjskog i unutarnjeg promjera za ostale stupove dani su tablično (Tablica 2.).

**Tablica 2.** Izrazi za  $D_v(x)$  i  $D_u(x)$  za RSD6\_1, RSD6\_2 i RSD6\_3

	RSD6_1	RSD6_2	RSD6_3
$D_v(x)$ (mm)	$165 - 0,0112x$	$165 - 0,0116x$	$170 - 0,011x$
$D_u(x)$ (mm)	$149 - 0,0146x$	$150 - 0,0148x$	$150 - 0,015x$

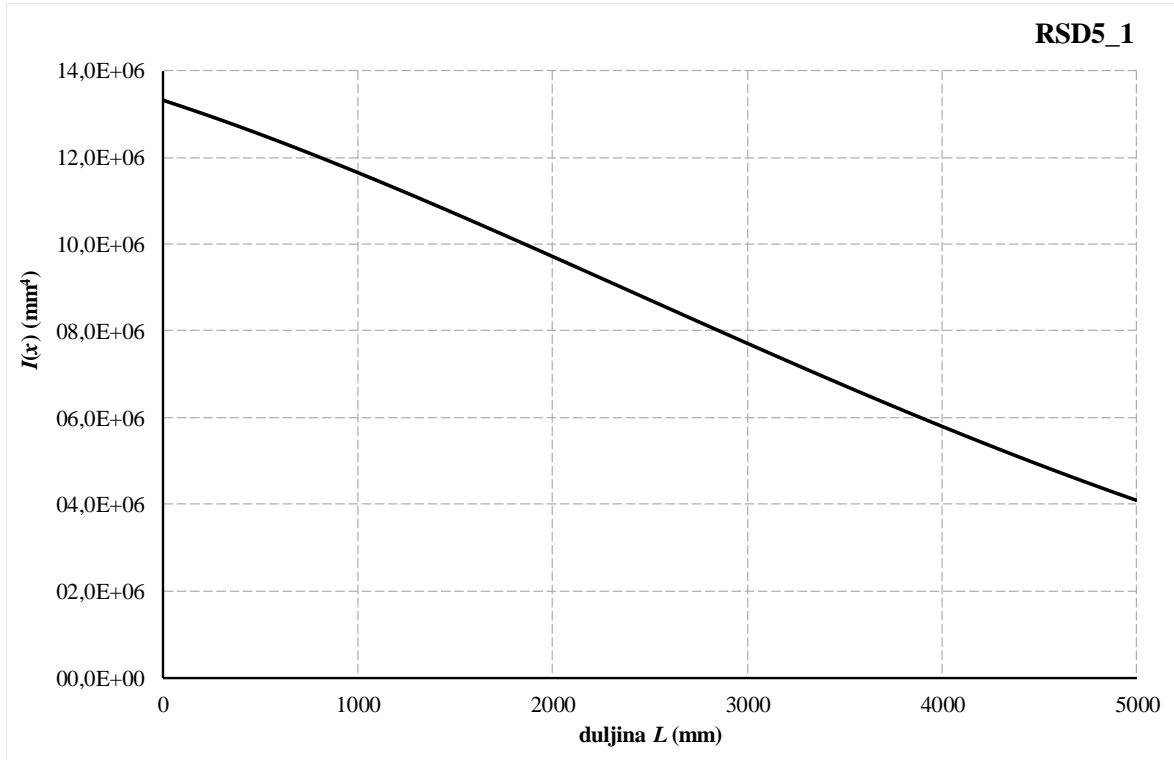
Moment tromosti također je promjenjiv po duljini poprečnog presjeka. Moment tromosti  $I(x)$  dobije se prema izrazu [16]

$$I(x) = \frac{(D_v(x)^4 - D_u(x)^4)\pi}{64} \quad (5.3)$$

Uvrštavanjem izraza (5.1) i (5.2) u izraz (5.3) te raspisivanjem izraza, za stup RSD5\_1 dobije se

$$I(x) = 4237500\pi - 1461,47x - 0,247985x^2 + 0,0000422491x^3 - 1,60238 \cdot 10^{-9}x^4 \quad (5.4)$$

Funkcija momenta tromosti je polinom četvrtog stupnja. Promjena momenta tromosti duž osi stupa može se prikazati grafički, npr. za stup RSD5\_1 (Slika 24.).



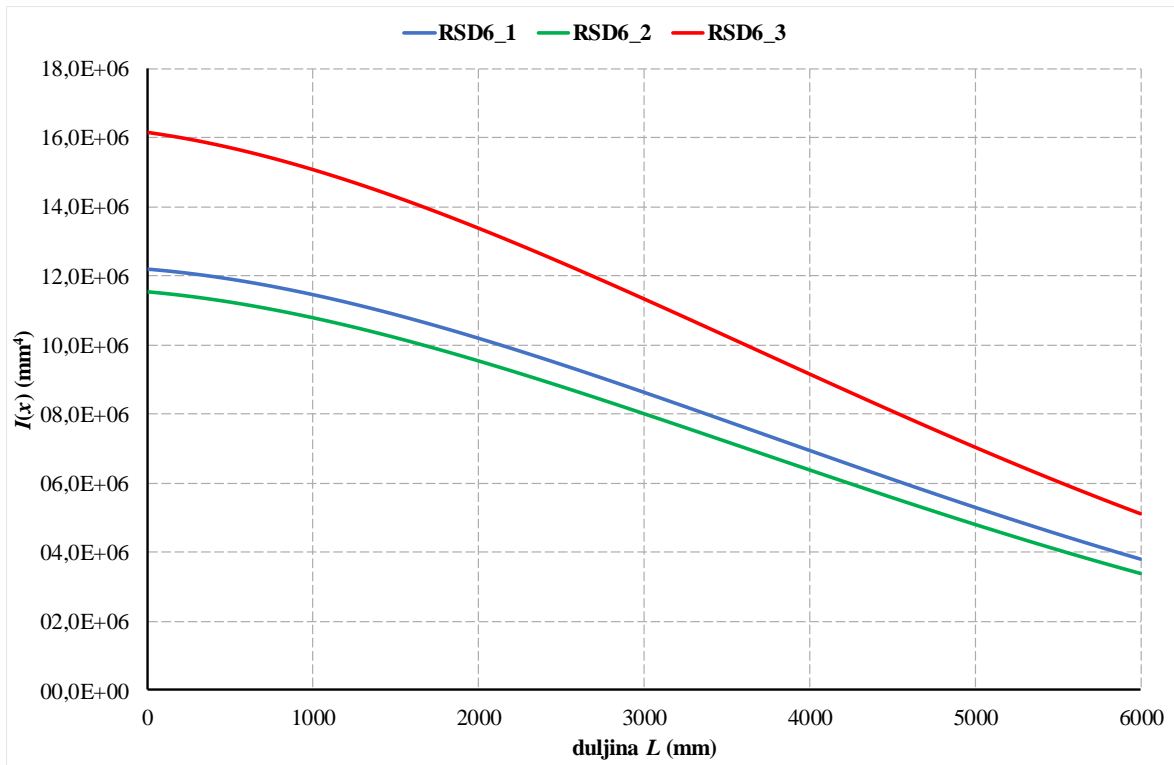
**Slika 24.** Promjena momenta tromosti  $I(x)$  po duljini nosača od 5 m

Postupak je ponovljen za rasvjetne stupove od 6 m te su rezultati prikazani tablično (*Tablica 3.*).

**Tablica 3.** Izrazi za moment tromosti  $I(x)$  za RSD6\_1, RSD6\_2 i RSD6\_3

	$I(x) \text{ (mm}^4\text{)}$
<b>RSD6_1</b>	$3879941\pi - 395,791x - 0,387965x^2 + 0,0000455325x^3 - 1,45799 \times 10^{-9}x^4$
<b>RSD6_2</b>	$\frac{234950625\pi}{64} - 423,85x - 0,372574x^2 + 0,0000449093x^3 - 1,46634 \times 10^{-9}x^4$
<b>RSD6_3</b>	$5140000\pi - 671,123x - 0,461107x^2 + 0,0000549739x^3 - 1,76636 \times 10^{-9}x^4$

Grafički se može prikazati (*Slika 25.*) promjena vrijednosti momenta tromosti duž osi nosača i za preostale stupove (*Tablica 3.*).



Slika 25. Promjena momenta tromosti  $I(x)$  po duljini nosača duljine 6 m

## 5.2. Određivanje progibne linije nosača $w(x)$

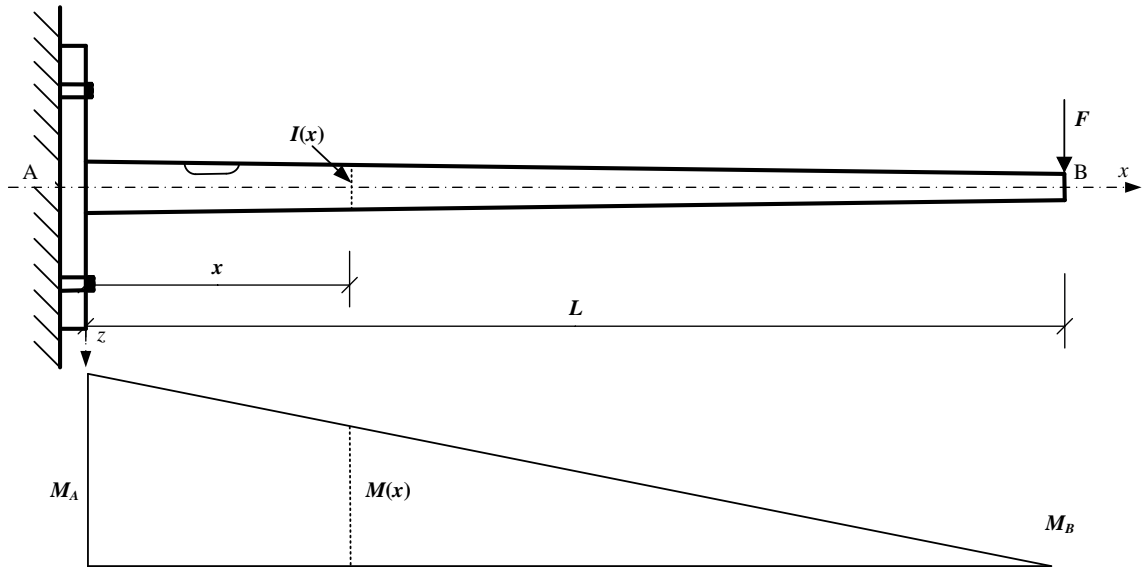
Prema klasičnoj teoriji savijanja nosača od izotropnog materijala, analitička metoda određivanja kuta zaokreta  $\varphi(x)$  i progiba  $w(x)$  sastoji se od uzastopnog integriranja diferencijalne jednadžbe elastične linije nosača koja ima oblik [16]

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)} \quad (5.5)$$

Pritom je potrebno prethodno izraziti moment  $M(x)$  u presjeku  $x$  za zadani statički sustav (Slika 26.)

$$M(x) = F(L - x) \quad (5.6)$$

Moment tromosti presjeka  $I(x)$  za promjenjiv poprečni presjek određen je u točki 5.1.



**Slika 26.** Dijagram momenata savijanja za konzolu opterećenu silom  $F$

Prvim integriranjem diferencijalne jednačbe dobije se izraz za kut zaokreta  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{dw}{dx} = - \int \frac{M(x)}{EI(x)} dx + C \quad (5.7)$$

Integriranjem izraza za kut zaokreta dobije se izraz za progib  $w(x)$

$$w(x) = - \int dx \int \frac{M(x)}{EI(x)} dx + Cx + D \quad (5.8)$$

Konstante  $C$  i  $D$  određuju se iz rubnih uvjeta, tj. iz uvjeta pričvršćivanja nosača. Kod konzole su progib i kut zaokreta u upetom presjeku jednaki nuli.

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ \varphi(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Rješenja diferencijalnih jednačbi ima jako puno, ali nas zanimaju samo ona rješenja koja ispunjavaju rubne uvjete. Za nosač možemo postaviti dva rubna uvjeta koji se izražavaju geometrijskim veličinama progibom  $w$  i kutom zaokreta  $\varphi$  i nazivaju se geometrijski, Dirichletov ili prvi rubni uvjet [17].

### 5.2.1. Određivanje progibne linije stupa RSD5\_1

Kut zaokreta iznosi:

$$\varphi(x) = \int \frac{F(L-x)}{EI(x)} dx + C \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{C}{E} + \frac{6,2407 \times 10^8 F}{E} \{ & 8,7201 \times 10^{-9} \arctan[0,000249363(-21587 + 2x)] \\ & + 8,56043 \times 10^{-8} \log(11029,4 - x) + 2,21073 \times 10^{-9} \log(6250 \\ & + x) - 4,39075 \times 10^{-8} \log(1,2052 \times 10^8 - 21587x + x^2) \} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Integracijom izraza (5.10) dobije se izraz za progibnu liniju

$$w(x) = \int \varphi(x) dx + D \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} w(x) = \frac{D}{E} + \frac{1}{E} [ & -7,10543 \times 10^{-15} Fx + Cx + 58737,8F \arctan(5,38298 \\ & - 0,000498723x) + F(109886 - 5,44195x) \arctan(5,38298 \\ & - 0,000498723x) - 589226F \log(11029,4 - x) \\ & + 53,4231Fx \log(11029,4 - x) + 8622,82F \log(6250 + x) \\ & + 1,37965Fx \log(6250 + x) - 5455,88F \log(1,2052 \times 10^8 \\ & - 21587x + x^2) + 295757F \log(1,2052 \times 10^8 - 21587x + x^2) \\ & - 27,4014Fx \log(1,2052 \times 10^8 - 21587x + x^2) ] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Na temelju izraza (5.9) vrijednosti integracijskih konstanti  $C$  i  $D$  su:

$$C \rightarrow 8,07712F \quad (5.14)$$

$$D \rightarrow -226301F \quad (5.15)$$

Uvrštavanjem integracijskih konstanti u izraz (5.13) konačni izraz za progibnu liniju za stup RSD5\_1 glasi:

$$\begin{aligned}
 w(x) = \frac{F}{E} [ & -226301 + 8,07712x + 58737,8\arctan(5,38298 - 0,000498723x) \\
 & + (109886 - 5,44195x)\arctan(5,38298 - 0,000498723x) \\
 & - 589226\log(11029,4 - x) + 53,4231x\log(11029,4 - x) \\
 & + 8622,82\log(6250 + x) + 1,37965x\log(6250 + x) \\
 & - 5455,88\log(1,2052 \times 10^8 - 21587x + x^2) \\
 & + 295757\log(1,2052 \times 10^8 - 21587x + x^2) \\
 & - 27,4014x\log(1,2052 \times 10^8 - 21587x + x^2)] \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

Određivanje progibne linije za ostale rasvjetne stupove provodi se na isti način kao i za RSD5\_1. Rubni uvjeti su isti za sve stupove, samo su ulazni parametri drugačiji. Analitički izrazi za kut zaokreta, integracijske konstante i izraz za progibnu liniju dani su tablično (Tablica 4., Tablica 5., i Tablica 6.).

**Tablica 4.** Analitički izrazi za kut zaokreta  $\varphi(x)$  za RSD6\_1, RSD6\_2 i RSD6\_3

kut zaokreta $\varphi(x)$	
<b>RSD6_1</b>	$\frac{1}{E} \{ C + 6,85874 \times 10^8 F [ 7,28428 \times 10^{-9} \arctan[0,000228722(-23764,9 + 2x)] + 7,5204 \times 10^{-8} \log(12170,5 - x) + 2,26599 \times 10^{-9} \log(4705,88 + x) - 3,8735 \times 10^{-8} \log(1,45972 \times 10^8 - 23764,9x + x^2)] \}$
<b>RSD6_2</b>	$\frac{1}{E} \{ C + 6,81968 \times 10^8 F [ 8,67284 \times 10^{-9} \arctan[0,000251852(-23382,4 + 2x)] + 8,92464 \times 10^{-8} \log(11931,8 - x) + 2,3625 \times 10^{-9} \log(4687,5 + x) - 4,58044 \times 10^{-8} \log(1,40625 \times 10^8 - 23382,4x + x^2)] \}$
<b>RSD6_3</b>	$\frac{1}{E} \{ C + 5,66136 \times 10^8 F [ 6,02201 \times 10^{-9} \arctan[0,000192222(-23815 + 2x)] + 5,26186 \times 10^{-8} \log(12307,7 - x) + 2,17187 \times 10^{-9} \log(5000 + x) - 2,7395 \times 10^{-8} \log(1,48555 \times 10^8 - 23815x + x^2)] \}$

**Tablica 5.** Integracijske konstante  $C$  i  $D$

	$C$	$D$
<b>RSD6_1</b>	$8,02713F$	$-232288F$
<b>RSD6_2</b>	$9,41621F$	$-259467F$
<b>RSD6_3</b>	$5,4273F$	$-155372F$

Tablica 6. Konačni izrazi za progib  $w(x)$

	progib $w(x)$ (mm)
RSD6_1	$\frac{F}{E} [-232288 + 8,02713x + (175522 - 4,9961x)\arctan(5,43556 - 0,000457444x) + (-627763 + 51,5805x)\log(12170,5 - x) + 7313,82\log(4705,88 + x) + 1,55419x\log(4705,88 + x) + 310224\log(1,45972 \times 10^8 - 23764,9x + x^2) - 26,5673x\log(1,45972 \times 10^8 - 23764,9x + x^2)]$
RSD6_2	$\frac{F}{E} [-259467 + 9,41621x + (193179 - 5,9146x)\arctan(5,88889 - 0,000503704x) + (-726208 + 60,8632x)\log(11931,8 - x) + 7552,25\log(4687,5 + x) + 1,61115x\log(4687,5 + x) + 359328\log(1,40625 \times 10^8 - 23382,4x + x^2) - 31,2372x\log(1,40625 \times 10^8 - 23382,4x + x^2)]$
RSD6_3	$\frac{F}{E} [-155372 + 5,4273x + (121281 - 3,40928x)\arctan(4,57778 - 0,000384444x) + (-366637 + 29,7893x)\log(12307,7 - x) + 6147,88\log(5000 + x) + 1,22958x\log(5000 + x) + 180245\log(1,48555 \times 10^8 - 23815x + x^2) - 15,5094x\log(1,48555 \times 10^8 - 23815x + x^2)]$

### 5.3. Izrazi za analitički fleksijski modul

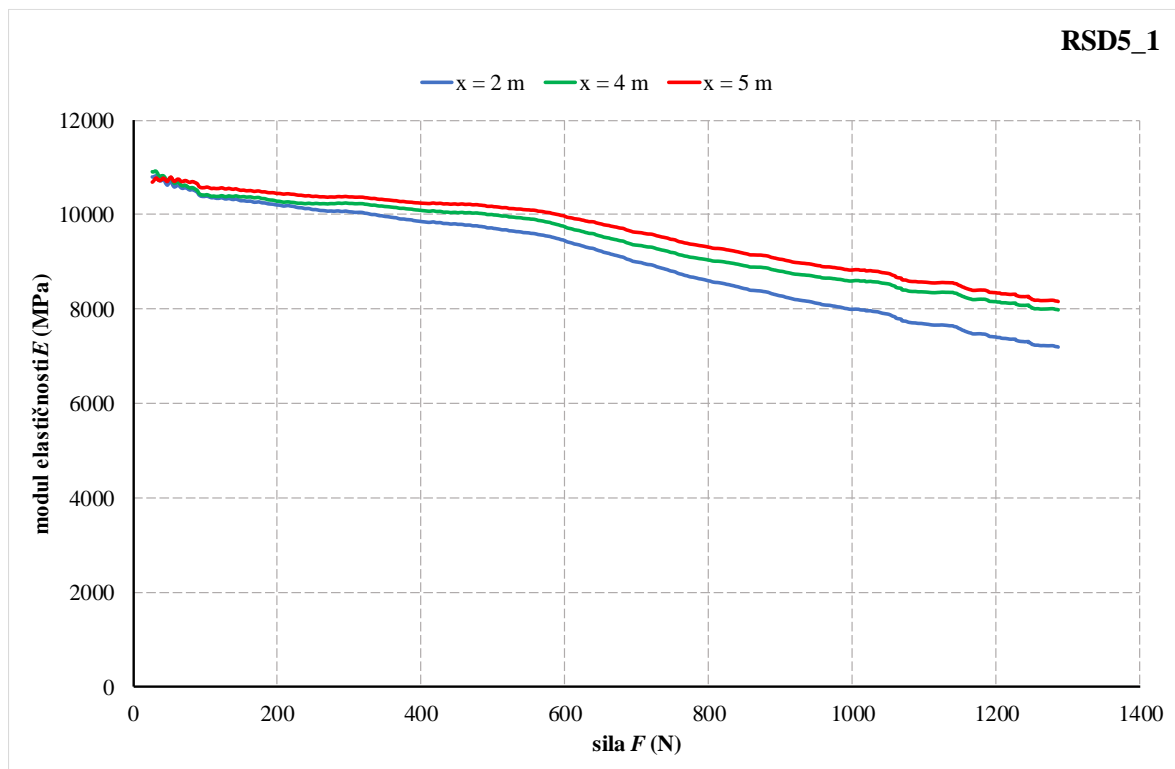
Analitički izrazi za progib iskorišteni su nadalje za određivanje analitičkog fleksijskog modula elastičnosti. S obzirom da su u karakterističnim presjecima izmjerene vrijednosti sile i progiba, iz analitičkog izraza  $w(x)$  za svaki stup (izraz (5.16) i Tablica 6.) izlučen je fleksijski modul elastičnosti  $E_f^{an}$  za vrijednosti  $x \rightarrow \{2 \text{ m}, 4 \text{ m}, L\}$ . Tablica 7. prikazuje analitičke izraze za sva tri mjerna mjesta za sve stupove.

Tablica 7. Analitički izrazi za fleksijski modul elastičnosti za sva 3 mjerna mjesta

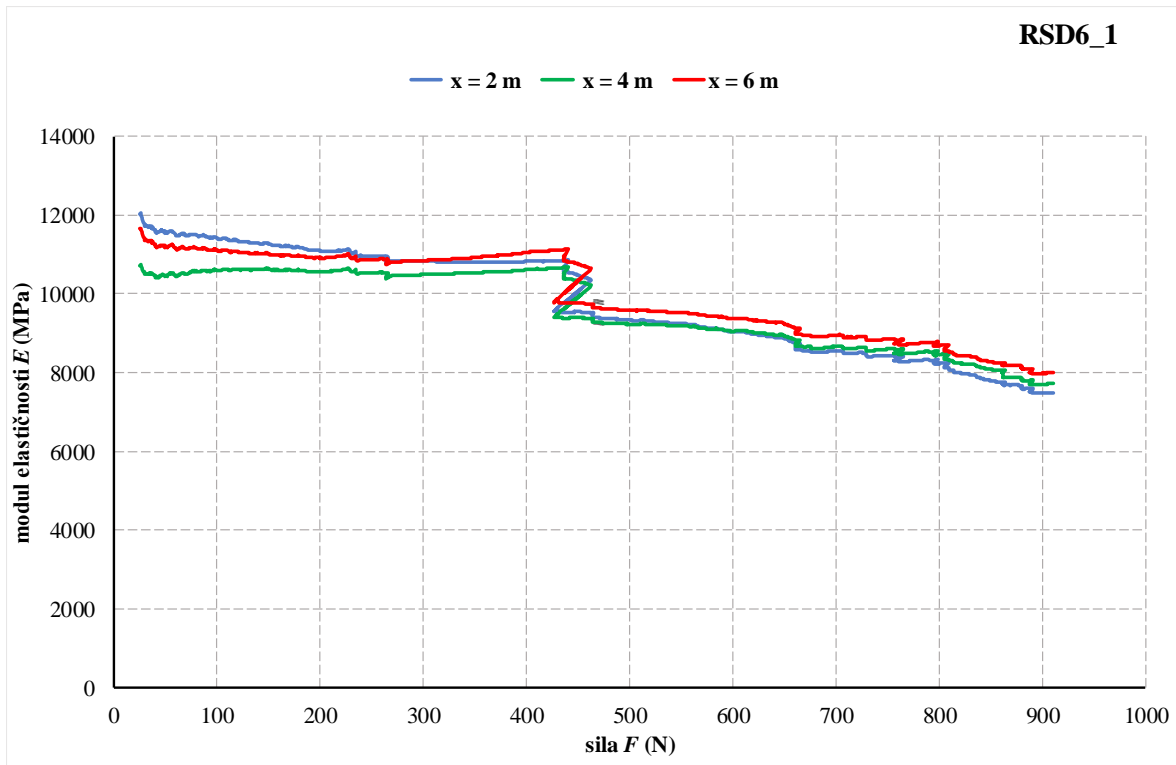
	$x = 2 \text{ m}$	$x = 4 \text{ m}$	$x = L$	
RSD5_1	$\frac{708,03F_{eksp}}{W_{eksp}}$	$\frac{2631,39F_{eksp}}{W_{eksp}}$	$\frac{3887,05F_{eksp}}{W_{eksp}}$	$E_f^{an}(F, w)$
RSD6_1	$\frac{909,801F_{eksp}}{W_{eksp}}$	$\frac{3389,24F_{eksp}}{W_{eksp}}$	$\frac{6967,23F_{eksp}}{W_{eksp}}$	
RSD6_2	$\frac{964,592F_{eksp}}{W_{eksp}}$	$\frac{3606,87F_{eksp}}{W_{eksp}}$	$\frac{7443,22F_{eksp}}{W_{eksp}}$	
RSD6_3	$\frac{689,708F_{eksp}}{W_{eksp}}$	$\frac{2573,71F_{eksp}}{W_{eksp}}$	$\frac{5290,7F_{eksp}}{W_{eksp}}$	



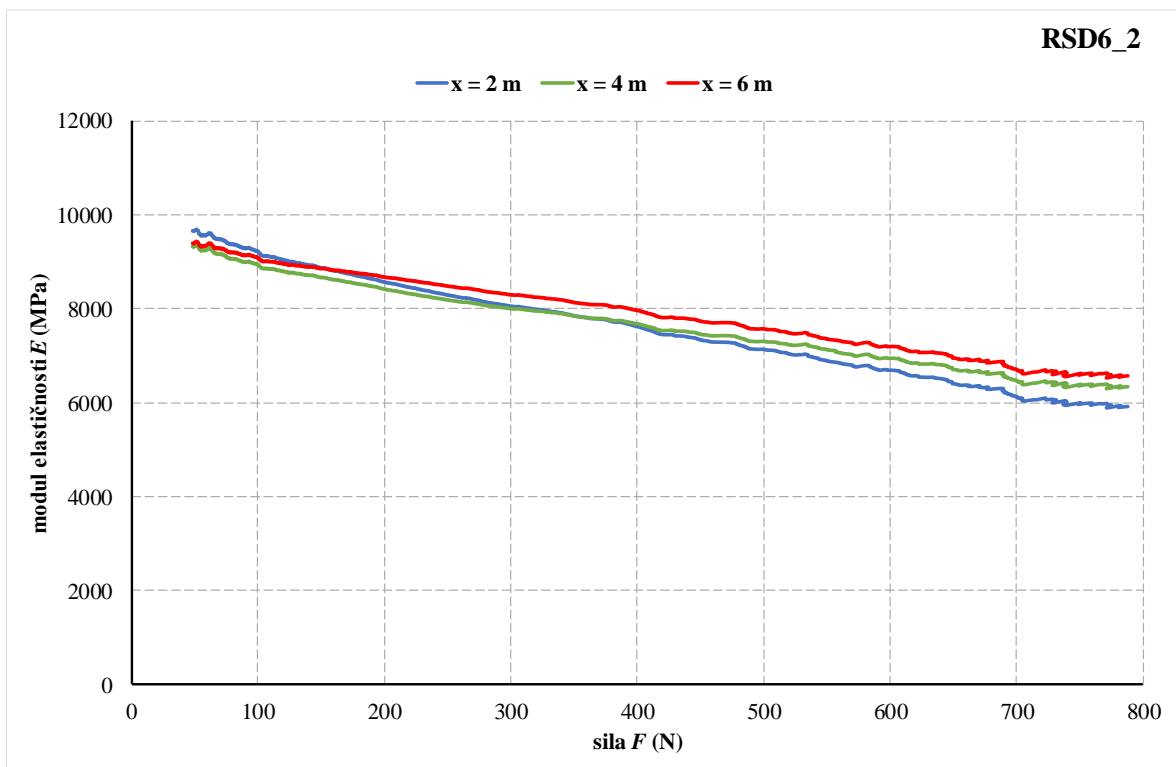
Uvrštavanjem eksperimentalnih vrijednosti sile i progiba iz točke 4.4 u izraze za analitički fleksijski modul grafički se može prikazati ovisnost modula elastičnosti o sili za sva tri mjerna mjesta (*Slika 27.*, *Slika 28.*, *Slika 29.*, *Slika 30.*). Iz grafova je vidljivo da se vrijednost modula elastičnosti kreće oko slične vrijednosti za sve stupova (cca 10 000 MPa). Međutim, teško je procijeniti u kojem području bi trebalo očitati mjerodavnu vrijednost. Iz tog razloga potrebno je napraviti analizu naprezanja i deformacija.



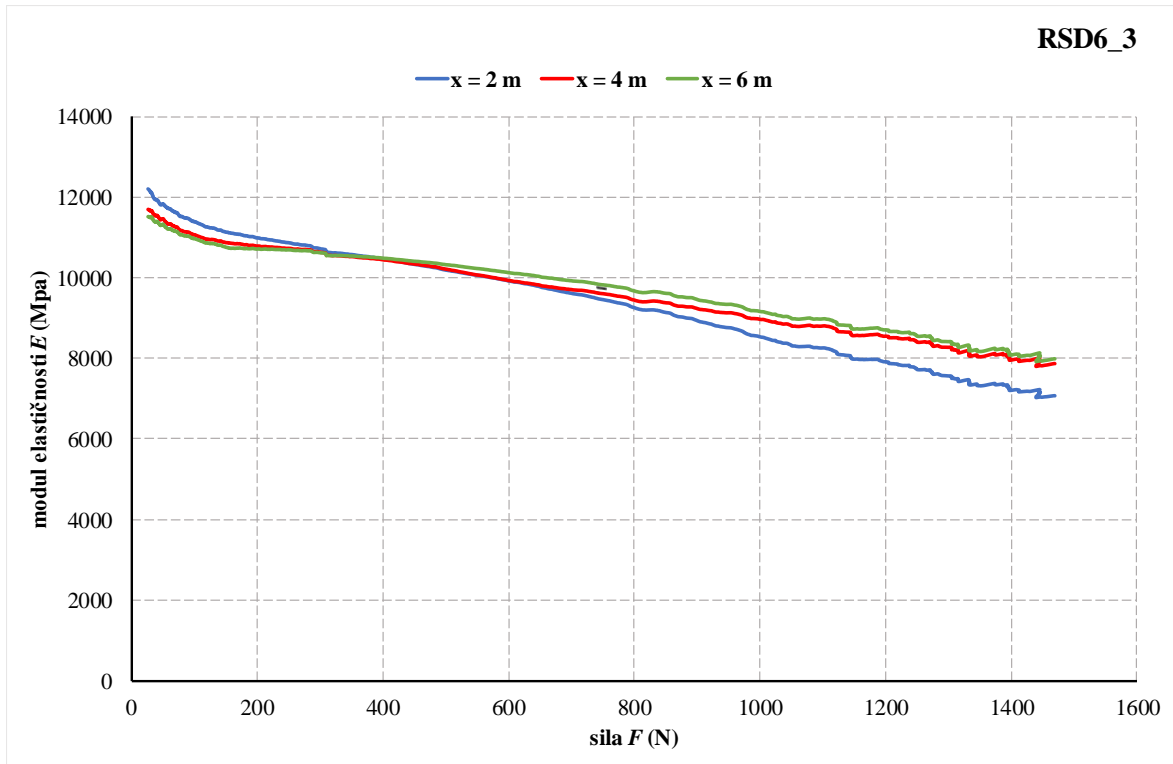
**Slika 27.** Eksperimentalni modul elastičnosti za sva tri mjerna mjesta (RSD5\_1)



Slika 28. Eksperimentalni modul elastičnosti za sva tri mjerna mjesta (RSD6\_1)



Slika 29. Eksperimentalni modul elastičnosti za sva tri mjerna mjesta (RSD6\_2)



Slika 30. Eksperimentalni modul elastičnosti za sva tri mjerna mjesta (RSD6\_3)

#### 5.4. Analiza napreznja i deformacija pri savijanju za karakteristične presjeke

Maksimalno napreznje i deformacija pri savijanju određuju se za karakteristične presjeke prema sljedećim izrazima

$$\sigma_f = \frac{M(x)}{I_y(x)} \cdot \frac{D_v(x)}{2} \quad (5.17)$$

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f^{an}} \quad (5.18)$$

Karakteristični presjeci su odabrani za  $x \rightarrow \{2 \text{ m}, 4 \text{ m}\}$  jer su moment na slobodnom kraju konzole, kao i progib u upetoj točki jednaki nuli.

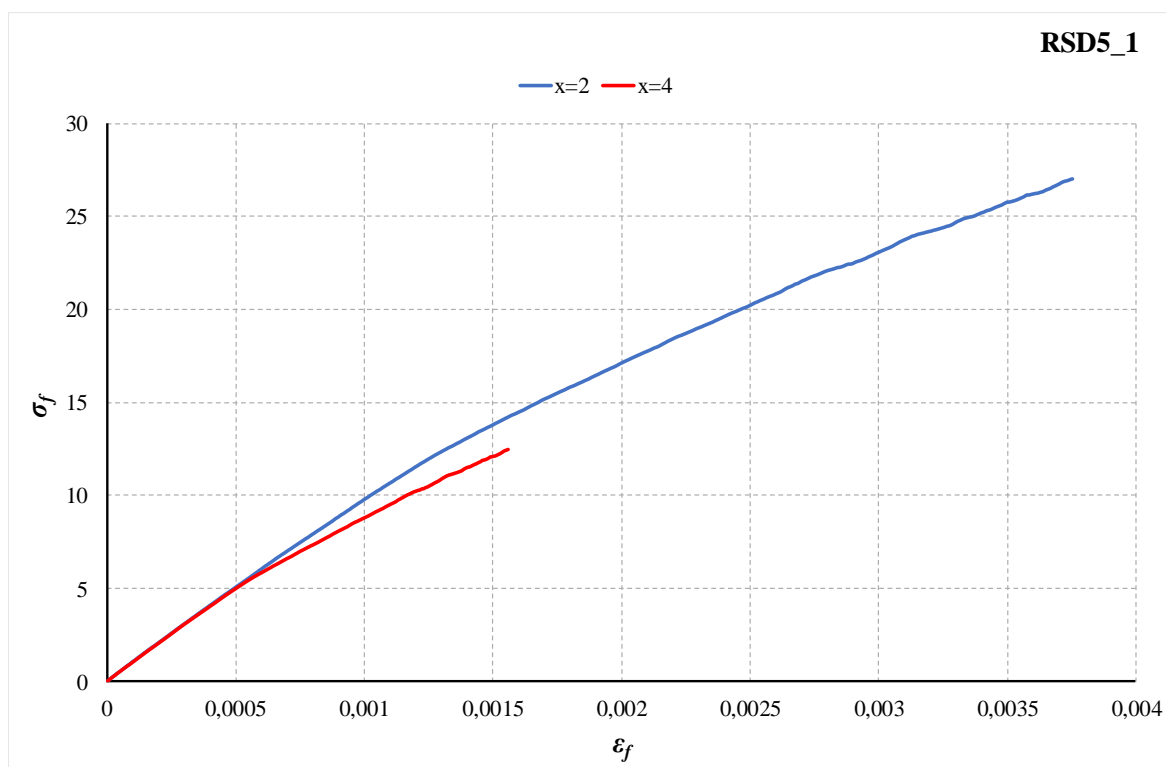
### 5.4.1. Proračun naprezanja i deformacija za stup RSD5\_1

Za stup RSD5\_1 vanjski promjer poprečnog presjeka određuje se prema izrazu (5.1), moment tromosti prema izrazu (5.4), moment savijanja prema izrazu (5.6), a izraz za analitički fleksijski modul nalazi se u *Tablici 7*.

**Tablica 8.** Izrazi za proračun naprezanja i deformacija za RSD5\_1

	$x = 2 \text{ m}$		$x = 4 \text{ m}$	
	$\sigma_f \text{ (MPa)}$	$\varepsilon_f$	$\sigma_f \text{ (MPa)}$	$\varepsilon_f$
<b>RSD5_1</b>	$0,0210093 \cdot F_{eksp}$	$0,0000296729 \cdot w_{eksp}$	$0,0096675 \cdot F_{eksp}$	$3,67391 \cdot 10^{-6} w_{eksp}$

Uvrštavanjem eksperimentalnih vrijednosti sile i progiba iz točke 4.4 moguće je grafički prikazati ovisnost naprezanja i deformacije (*Slika 31.*). U području malih deformacija primjećuje se linearni odnos. Pri većim deformacijama primjećuje se materijalna nelinearnost. Eksperimentalni fleksijski modul određen je za sve stupove kao sekantni modul u području malih deformacija, odnosno za  $\varepsilon_f = 0,0005$ .



**Slika 31.**  $\sigma_f - \varepsilon_f$  dijagram za rasvjetni stup RSD5\_1

**Tablica 9.** Očitane vrijednosti s  $\sigma_f - \varepsilon_f$  dijagrama za RSD5\_1

	$x = 2 \text{ m}$	$x = 4 \text{ m}$
$\varepsilon_f$	0,0005	0,0005
$\sigma_f$ (MPa)	5,07	4,98
$E_f$ (MPa)	10136,92	9965,58
	<b>10051,25</b>	

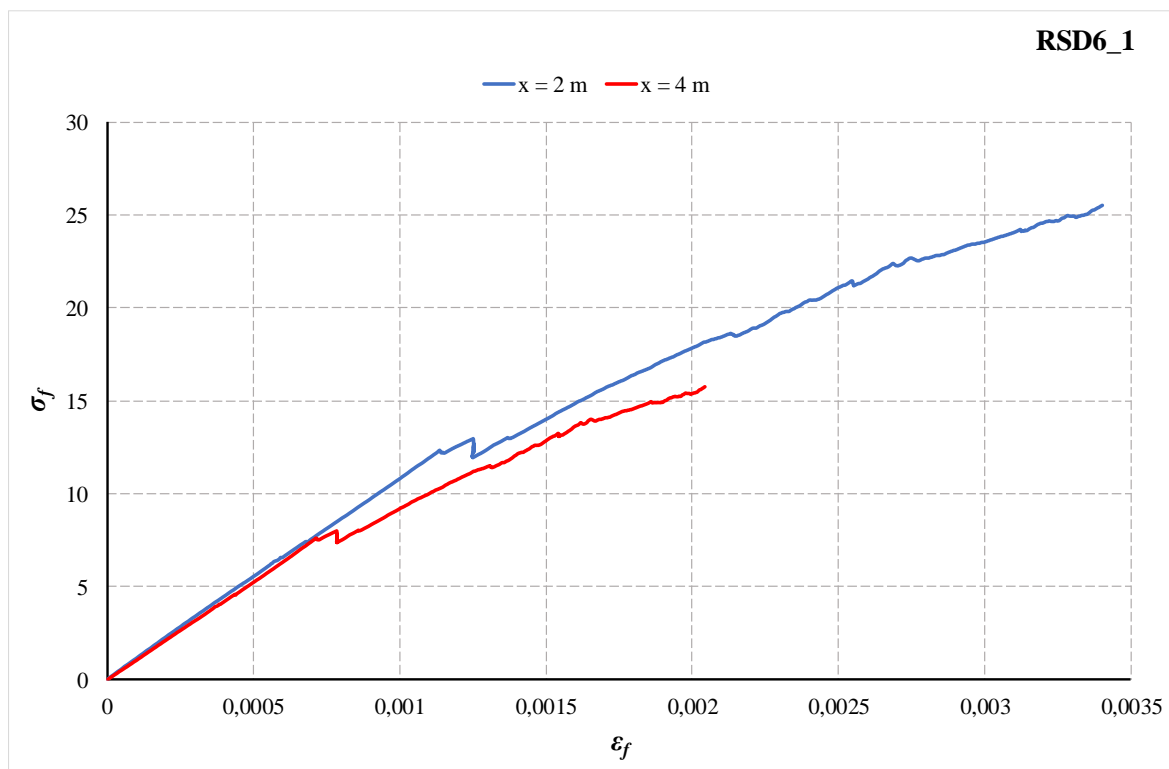
#### 5.4.2. Proračun napreznja i deformacija za stupove RSD6\_1, RSD6\_2 i RSD6\_3

Postupak određivanja fleksijskog modula prikazan je u točki 5.4.1. Na isti način može se odrediti i eksperimentalni fleksijski modul za ostale stupove.

Napreznja i deformacije (Tablica 10.) mogu se grafički prikazati u  $\sigma_f - \varepsilon_f$  dijagramima (Slika 32., Slika 33., Slika 34.). Eksperimentalni fleksijski modul određen je u području malih deformacija kao i za RSD5\_1, a očitane vrijednosti s dijagrama prikazane su tablično (Tablica 11., Tablica 12., Tablica 13.).

**Tablica 10.** Izrazi za proračun napreznja i deformacija za stupove RSD6\_1,2,3

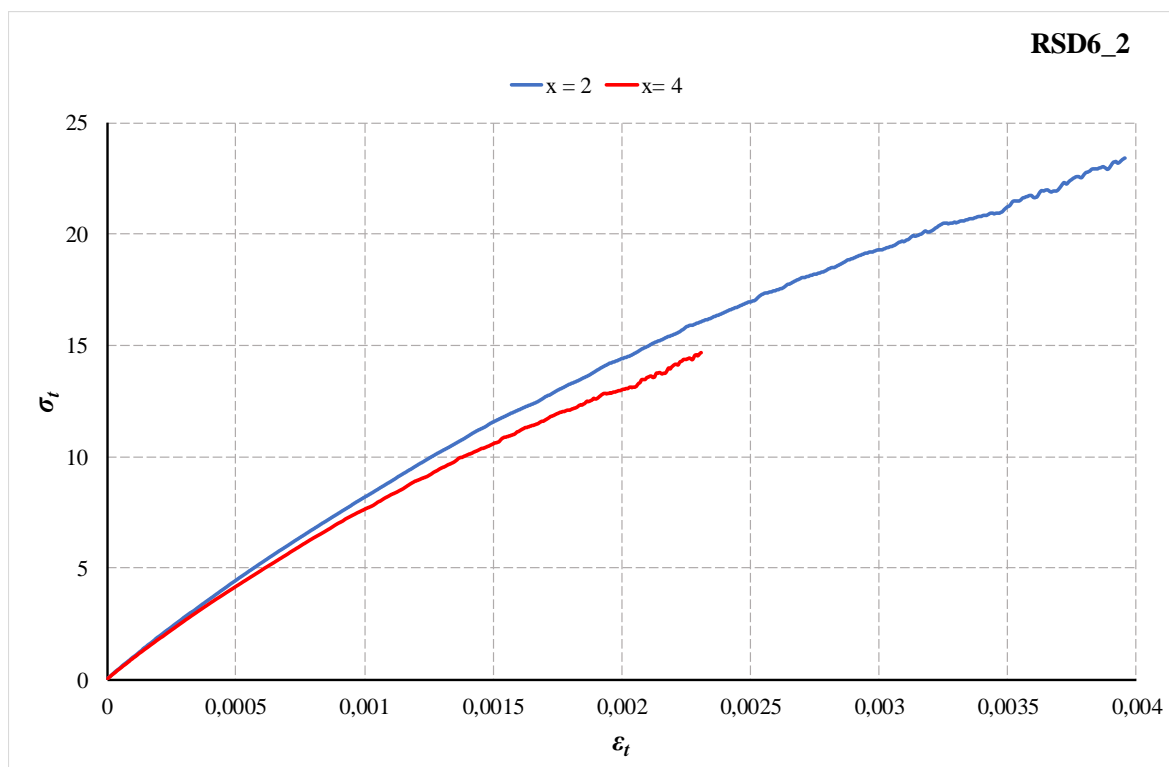
	$x = 2 \text{ m}$		$x = 4 \text{ m}$	
	$\sigma_f$ (MPa)	$\varepsilon_f$	$\sigma_f$ (MPa)	$\varepsilon_f$
<b>RSD6_1</b>	$0,02799735 \cdot F_{eksp}$	$3,0773 \cdot 10^{-5} w_{eksp}$	$0,01732135 \cdot F_{eksp}$	$5,1107 \cdot 10^{-6} w_{eksp}$
<b>RSD6_2</b>	$0,02975575 \cdot F_{eksp}$	$3,0848 \cdot 10^{-5} w_{eksp}$	$0,01860295 \cdot F_{eksp}$	$5,1579 \cdot 10^{-6} w_{eksp}$
<b>RSD6_3</b>	$0,02213475 \cdot F_{eksp}$	$3,2093 \cdot 10^{-5} w_{eksp}$	$0,0137679 \cdot F_{eksp}$	$5,3494 \cdot 10^{-6} w_{eksp}$



Slika 32.  $\sigma_f - \epsilon_f$  dijagram za rasvjetni stup RSD6\_1

Tablica 11. Očitane vrijednosti s  $\sigma_f - \epsilon_f$  dijagrama za RSD6\_1

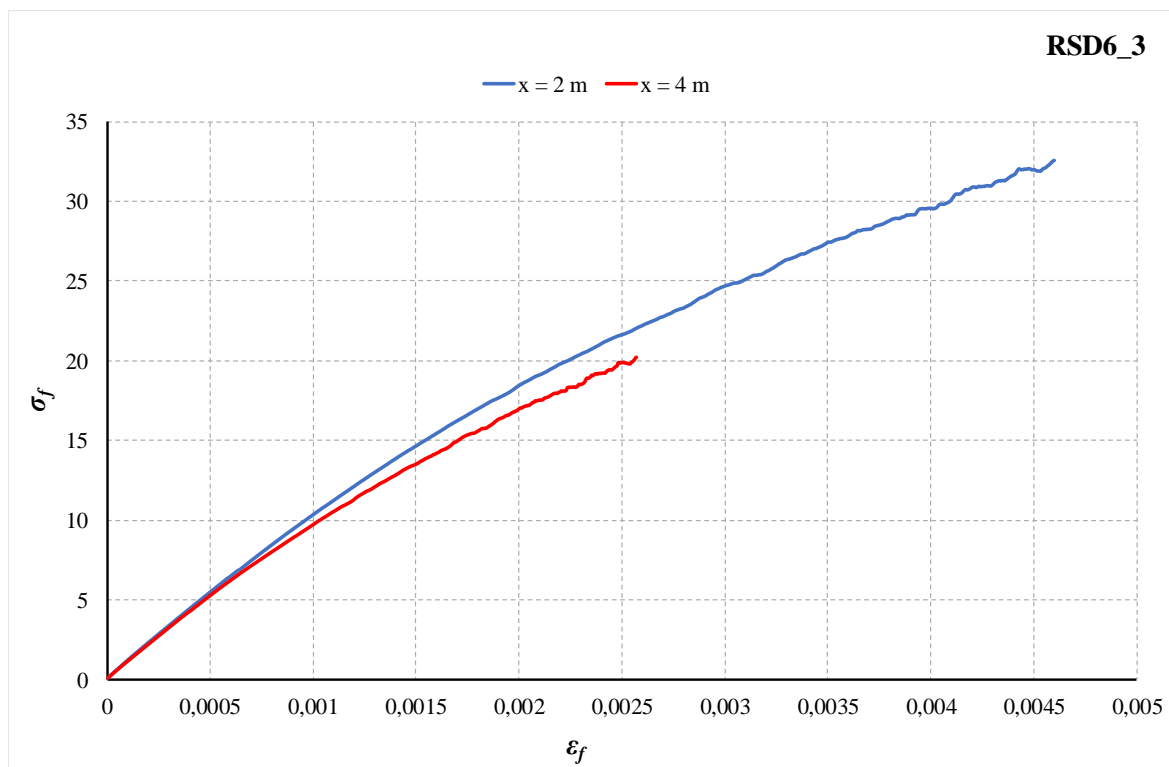
	$x = 2\text{ m}$	$x = 4\text{ m}$
$\epsilon_f$	0,0005	0,0005
$\sigma_f$ (MPa)	5,55	5,25
$E_f$ (MPa)	11096,55	10491,95
	<b>10794,25</b>	



Slika 33.  $\sigma_f - \varepsilon_f$  za rasvjetni stup RSD6\_2

Tablica 12. Očitane vrijednosti s  $\sigma_f - \varepsilon_f$  dijagrama za RSD6\_2

	$x = 2 \text{ m}$	$x = 4 \text{ m}$
$\varepsilon_f$	0,0005	0,0005
$\sigma_f$ (MPa)	4,44	4,15
$E_f$ (MPa)	8877,35	8309,87
	<b>8593,61</b>	



Slika 34.  $\sigma_f - \varepsilon_f$  za rasvjetni stup RSD6\_3

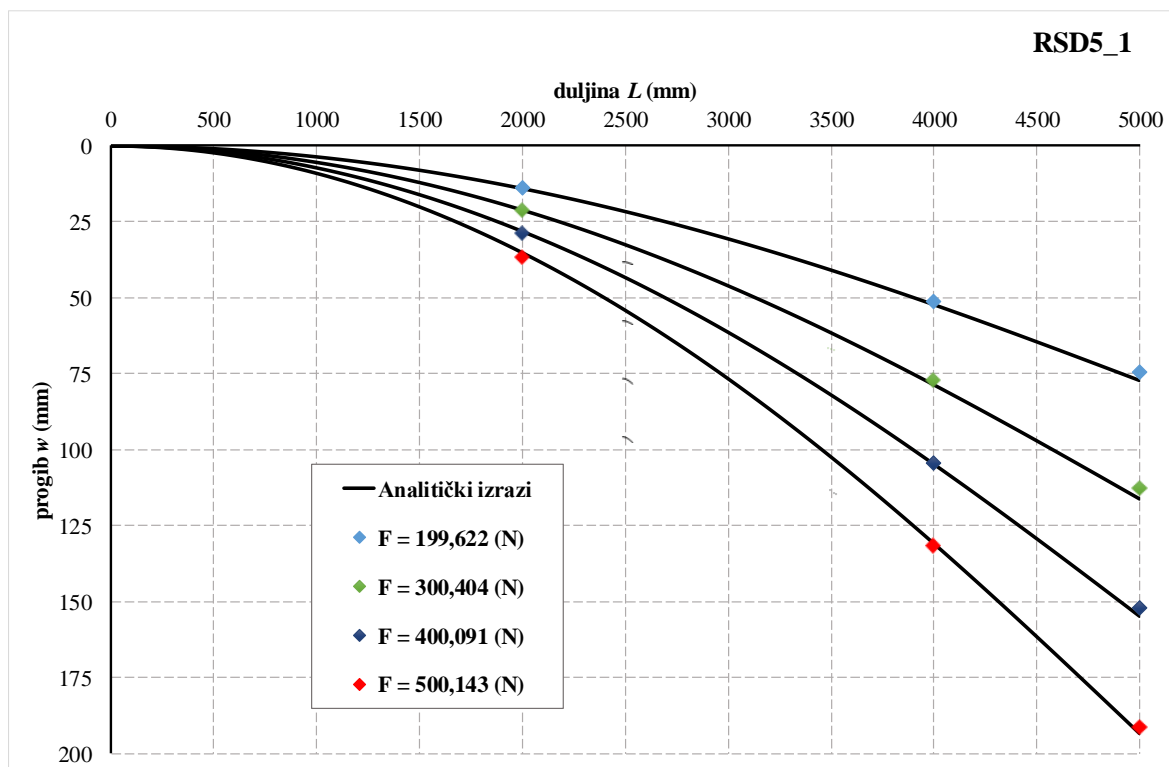
Tablica 13. Očitane vrijednosti s  $\sigma_f - \varepsilon_f$  dijagrama za RSD6\_3

	$x = 2 \text{ m}$	$x = 4 \text{ m}$
$\varepsilon_f$	0,0005	0,0005
$\sigma_f$ (MPa)	5,44	5,24
$E_f$ (MPa)	10871,37	10472,57
	<b>10671,97</b>	

### 5.5. Progibne linije i usporedba s eksperimentalnim vrijednostima

Vrijednosti fleksijskog modula elastičnosti dobivene u analizi naprezanja i deformacija pri savijanju uvrštene su u analitičke izraze za progibnu liniju iz točke 5.2. Progibne linije prikazane su u području malih deformacija u kojem vrijede izračunate vrijednosti modula elastičnosti. Grafički prikaz analitičkih izraza progibne linije i usporedba s eksperimentalnim rezultatima progiba prikazani su na grafovima (Slika 35., Slika 36., Slika 37. i Slika 38.). Analitičke i eksperimentalne vrijednosti progiba za karakteristične sile prikazane su tablično (Tablica 14., Tablica 15., Tablica 16 i Tablica 17.).

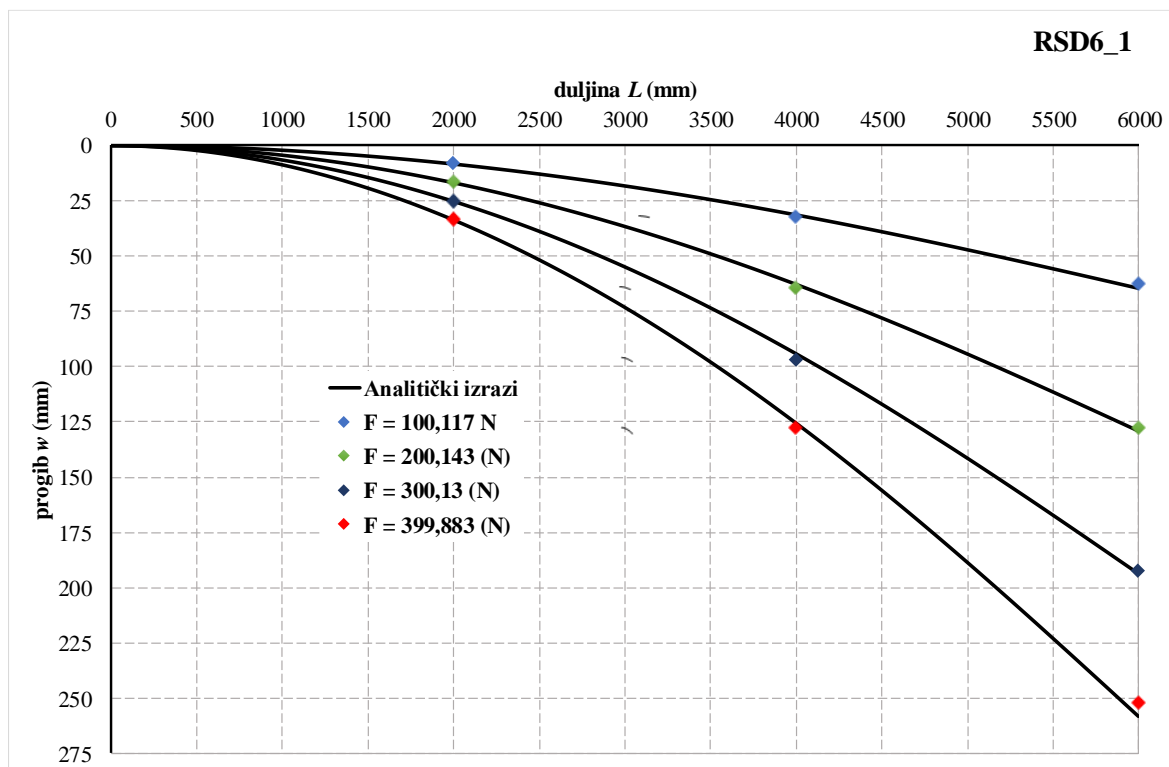




Slika 35. Usporedba progibne linije s eksperimentalnim vrijednostima (RSD5\_1)

Tablica 14. Analitičke i eksperimentalne vrijednosti progiba (RSD5\_1)

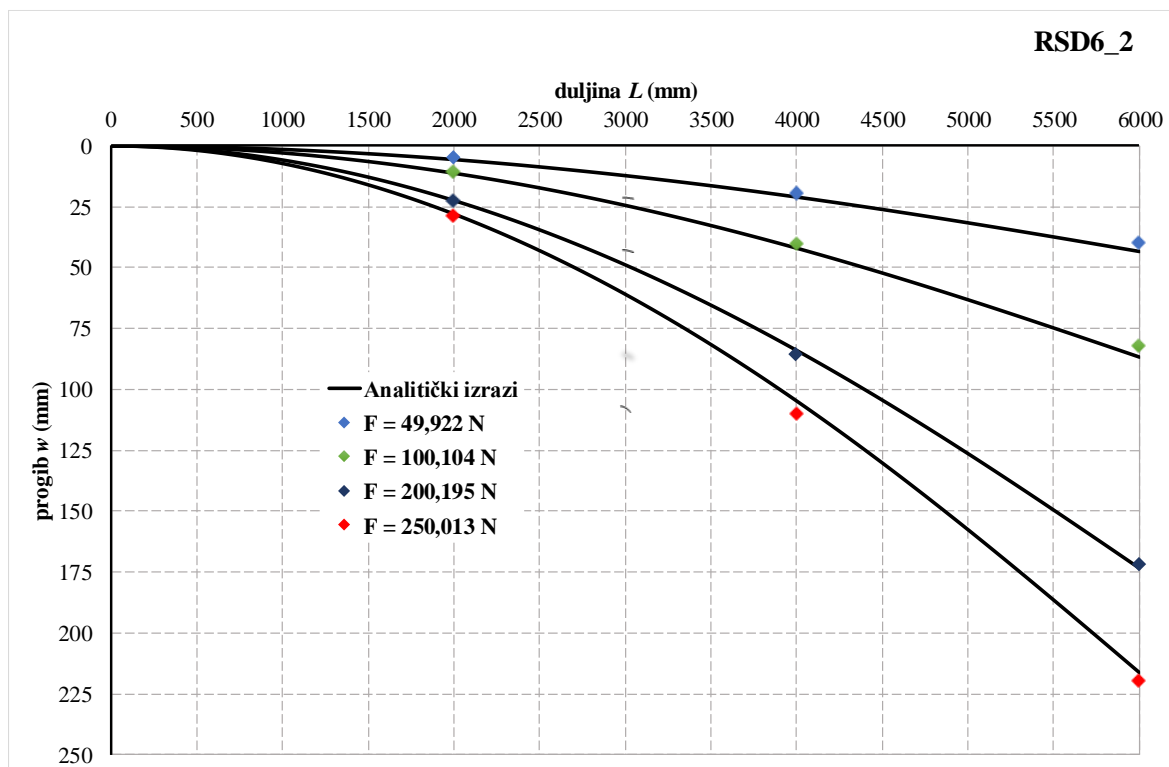
<b>RSD5_1</b>				
<i>Eksperimentalne vrijednosti progiba – <math>w_{eksp}</math> (mm)</i>				
$L$ (mm)	$F = 199,622$ (N)	$F = 300,404$ (N)	$F = 400,091$ (N)	$F = 500,143$ (N)
<b>2000</b>	13,842	21,129	28,728	36,437
<b>4000</b>	51,109	77,262	104,411	131,707
<b>5000</b>	74,34	112,651	151,96	191,284
<i>Analitičke vrijednosti progiba – <math>w_{an}</math> (mm)</i>				
$L$ (mm)	$F = 199,622$ (N)	$F = 300,404$ (N)	$F = 400,091$ (N)	$F = 500,143$ (N)
<b>2000</b>	14,062	21,161	28,183	35,231
<b>4000</b>	52,26	78,645	104,743	130,936
<b>5000</b>	77,1982	116,173	154,724	193,416



Slika 36. Usporedba progibne linije s eksperimentalnim vrijednostima (RSD6\_1)

Tablica 15. Analitičke i eksperimentalne vrijednosti progiba (RSD6\_1)

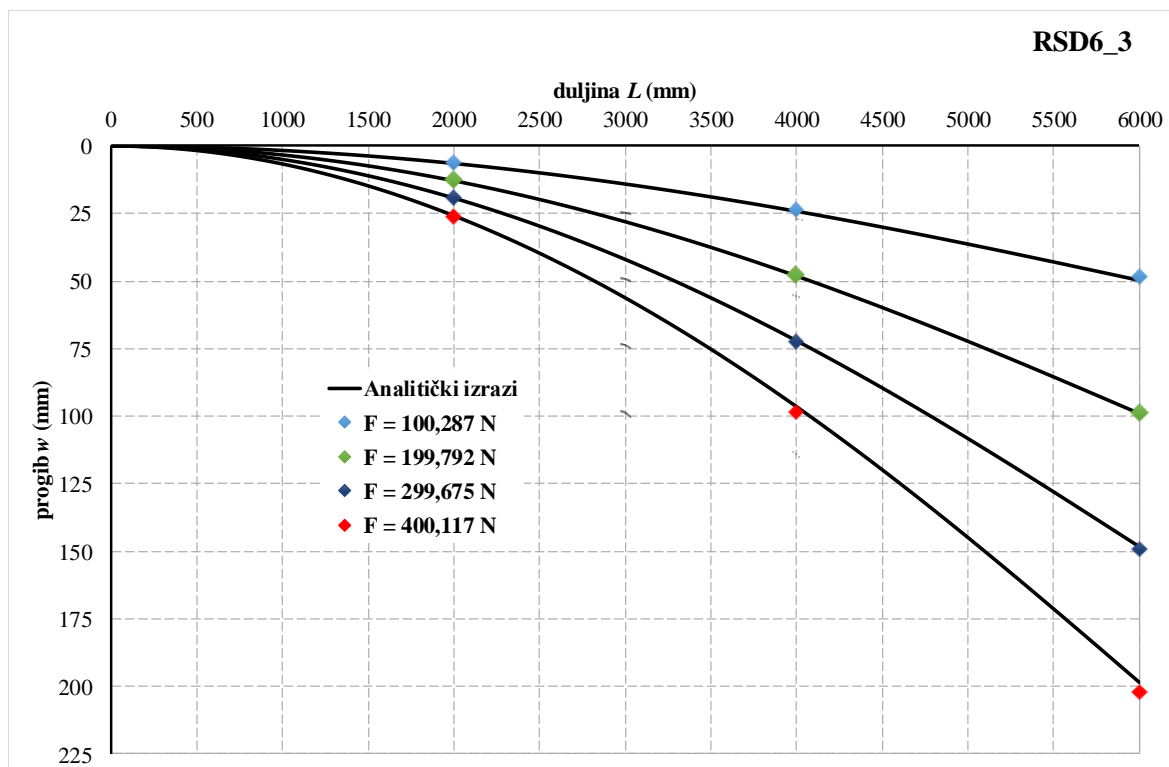
RSD6_1				
Eksperimentalne vrijednosti progiba – $w_{eksp}$ (mm)				
L (mm)	F = 100,117 (N)	F = 200,143 (N)	F = 300,13 (N)	F = 399,883 (N)
2000	7,983	16,418	25,222	33,608
4000	32,019	64,268	96,971	127,692
6000	62,8	127,793	192,818	252,118
Analitičke vrijednosti progiba – $w_{an}$ (mm)				
L (mm)	F = 100,117 (N)	F = 200,143 (N)	F = 300,13 (N)	F = 399,883 (N)
2000	8,438	16,869	25,297	33,704
4000	31,435	62,842	94,237	125,558
6000	64,621	129,184	193,721	258,107



Slika 37. Usporedba progibne linije s eksperimentalnim vrijednostima (RSD6\_2)

Tablica 16. Analitičke i eksperimentalne vrijednosti progiba (RSD6\_2)

RSD6_2				
Eksperimentalne vrijednosti progiba – $w_{eksp}$ (mm)				
$L$ (mm)	$F = 100,104$ (N)	$F = 200,195$ (N)	$F = 300,026$ (N)	$F = 400,104$ (N)
2000	4,988	10,455	22,525	29,072
4000	19,321	40,322	85,743	110,12
6000	39,581	81,886	171,82	219,463
Analitičke vrijednosti progiba – $w_{an}$ (mm)				
$L$ (mm)	$F = 100,104$ (N)	$F = 200,195$ (N)	$F = 300,026$ (N)	$F = 400,104$ (N)
2000	5,604	11,236	22,471	28,063
4000	20,953	42,015	84,025	104,934
6000	43,239	86,703	173,396	216,545



Slika 38. Usporedba progibne linije s eksperimentalnim vrijednostima (RSD6\_3)

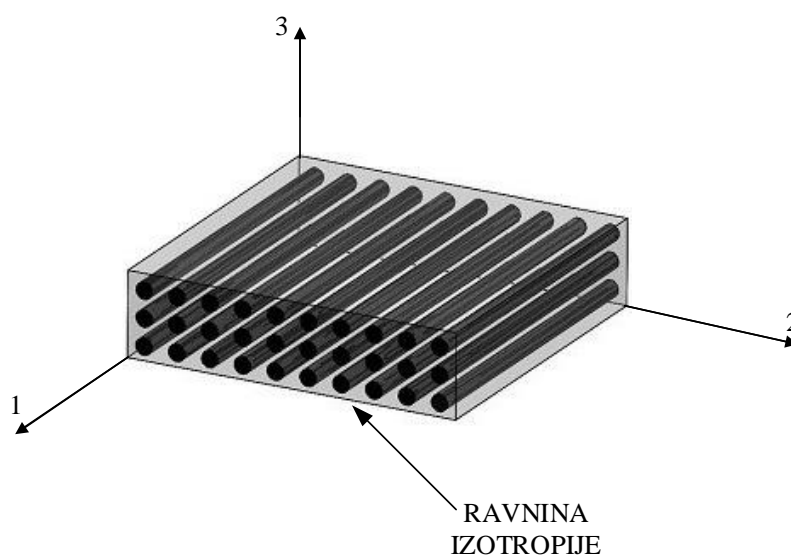
Tablica 17. Analitičke i eksperimentalne vrijednosti progiba (RSD6\_3)

<b>RSD6_3</b>				
<i>Eksperimentalne vrijednosti progiba – <math>w_{eksp}</math> (mm)</i>				
<i>L (mm)</i>	<i>F = 100,287 (N)</i>	<i>F = 199,792 (N)</i>	<i>F = 299,675 (N)</i>	<i>F = 400,117 (N)</i>
<b>2000</b>	6,073	12,541	19,284	26,372
<b>4000</b>	23,341	47,686	72,559	98,637
<b>6000</b>	48,374	98,681	149,328	201,951
<i>Analitičke vrijednosti progiba – <math>w_{an}</math> (mm)</i>				
<i>L (mm)</i>	<i>F = 100,287 (N)</i>	<i>F = 199,792 (N)</i>	<i>F = 299,675 (N)</i>	<i>F = 400,117 (N)</i>
<b>2000</b>	6,481	12,912	19,367	25,859
<b>4000</b>	24,186	48,183	72,271	96,494
<b>6000</b>	49,718	99,048	148,566	198,361

## 6. ODREĐIVANJE FLEKSIJSKE KRUTOSTI KOMPOZITNE CIJEVI

### 6.1. Kompozitni sloj ojačan jednosmjernim vlaknima

Kompozitni materijali ojačani vlaknima imaju različita mehanička svojstva u različitim smjerovima. Kompozitni sloj ojačan kontinuiranim jednosmjernim vlaknima je transverzalno izotropan materijal. Radi se o posebnom slučaju ortotropnog materijala pri čemu je jedna od tri ravnine simetrije ujedno i ravnina izotropije. Ravnina izotropije okomita je na smjer vlakana (*Slika 39.*). Za tanki kompozitni sloj ojačan vlaknima najčešće se prihvaća pretpostavka da se sloj nalazi u ravninskom stanju naprezanja.



**Slika 39.** Kompozitni sloj ojačan kontinuiranim jednosmjernim vlaknima

Matrica fleksibilnosti kompozitnog sloja ojačanog vlaknima u ravninskom stanju naprezanja prikazana pomoću inženjerskih konstanti glasi [18]:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Za definiranje takvog materijala potrebno je poznavati 4 nezavisne konstante: uzdužni modul elastičnosti  $E_1$ , poprečni modul elastičnosti  $E_2$ , modul posmika  $G_{12}$  i Poissonov koeficijent  $\nu_{12}$ .

Također vrijedi izraz

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (6.2)$$

Matrica krutosti kompozitnog sloja ojačanog vlaknima u ravninskom stanju naprezanja određuje se prema sljedećem izrazu

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}^{-1} \quad (6.3)$$

## 6.2. Predviđanje mehaničkih svojstava kompozitnog sloja od GFRP-a

Osnovna zadaća mikromehanike je da se poznavajući mehanička svojstva vlakna i matrice mogu odrediti mehanička svojstva jednog sloja kompozitnog materijala [9]. Poznavajući mehanička svojstva svih pojedinih slojeva, njihovu debljinu te usmjerenost vlakana u globalnom koordinatnom sustavu može se odrediti mehanički odziv čitavog laminata. To je osnovna zadaća makromehanike laminata.

Staklena vlakna korištena u proizvodnji kompozitnih rasvjetnih stupova napravljena su od E-stakla (Johns Manville StarRov<sup>®</sup> PR 440 2400 086). Podaci o mehaničkim svojstvima vlakana nisu bili dostupni. Jedini poznati podatak o poliesterskoj smoli (DISTITRON<sup>®</sup> 5119 ESX20Q) je vrijednost modula elastičnosti  $E_m = 3900$  MPa. Stoga su materijalna svojstva ostalih dijelova kompozitnog materijala (*Tablica 18.*) preuzeta iz literature [4][19].

**Tablica 18.** Ulazni podaci za matricu i vlakna

VLAKNO		MATRICA	
$E_f$ (MPa)	72000	$E_m$ (MPa)	3900
$G_f$ (MPa)	33000	$G_m$ (MPa)	1466,17
$\nu_f$	0,09	$\nu_m$	0,33
$V_f$	0,6	$V_m$	0,4

### 6.2.1. Pravilo mješavine

Pravilo mješavine (engl. *Rule of Mixtures*) je jedna od najjednostavnijih metoda mikromehanike. Pretpostavke na kojima se temelji pravilo mješavine su:

- veza između vlakna i matrice je idealna,
- ne postoje šupljine u kompozitu,
- vlakna su kontinuirana i paralelna te imaju konstantnu čvrstoću,
- vlakna i matrica su linearno-elastični materijali.

Potrebno je naglasiti da mehanička svojstva dobivena pomoću pravila mješavina vrijede samo u području u kojem ne dolazi do plastičnog deformiranja matrice, odnosno u području malih deformacija.

Inženjerske konstante kompozitnog sloja određuju se prema serijskom ili paralelnom modelu prema sljedećim izrazima [10]. Uzdužni modul elastičnosti  $E_1$  može se zapisati kao:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (6.4)$$

gdje je  $E_f$  – modul elastičnosti vlakna,  $E_m$  – modul elastičnosti matrice.

Poprečni modul elastičnosti  $E_2$  po pravilu mješavine se može zapisati kao:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (6.5)$$

Izraz za modul posmika glasi:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \quad (6.6)$$

gdje je  $G_f$  – modul posmika vlakna,  $G_m$  – modul posmika matrice.

Poissonov koeficijent  $\nu_{12}$  se određuje prema sljedećem izrazu

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + V_m \nu_m \quad (6.7)$$

gdje je  $\nu_f$  – Poissonov koeficijent vlakna,  $\nu_m$  – Poissonov koeficijent matrice.

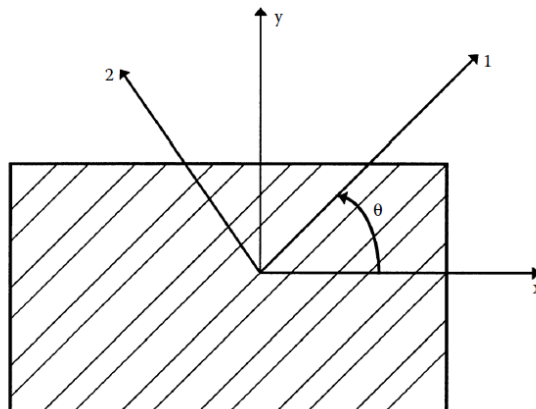
Tablica 19. sadrži izračunate vrijednosti inženjerskih konstanti prema pravilu mješavina za kompozitni materijal koji je predmet ovog istraživanja.

**Tablica 19.** Izračunate vrijednosti inženjerskih konstanti

$E_1$ (MPa)	44760,0
$E_2$ (MPa)	9017,34
$G_{12}$ (MPa)	3436,41
$\nu_{12}$	0,186

### 6.2.2. Osnove makromehanike kompozitnog sloja

Vlakna u kompozitnim slojevima najčešće su orijentirana pod nekim kutom  $\theta$  u odnosu na os  $x$  u globalnom koordinatnom sustavu (Slika 40.). Razlikuju se dva koordinatna sustava: lokalni koordinatni sustav ili sustav glavnih materijalnih osi (1,2) i globalni koordinatni sustav ( $x, y$ ).



**Slika 40.** Lokalni i globalni koordinatni sustav [10]

Matrica krutosti kompozitnog sloja s vlaknima usmjerenim pod kutom  $\theta$  određuje se na temelju matrice krutosti jednosmjerno usmjerenog sloja  $\mathbf{Q}$ , tj. kada je  $\theta = 0^\circ$ . Izraz za transformiranu matricu krutosti glasi:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}_\epsilon \quad (6.8)$$

Matrice transformacije  $\mathbf{T}_\sigma$  i  $\mathbf{T}_\epsilon$  određuju se prema sljedećim izrazima [20]:

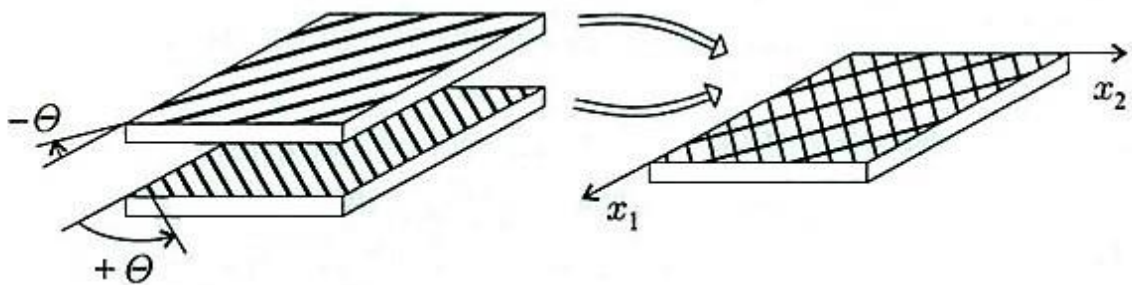


$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

gdje je  $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$ .

Kompozitni sloj koji nastaje namatanjem sastoji se od vlakana u  $+\theta$  i  $-\theta$  smjeru (Slika 41.).



Slika 41. Kompozitni sloj namotaja vlakana u  $\pm\theta$  smjeru [20]

Matrica krutosti namotaja  $\mathbf{Q}_{namotaj}^{\pm\theta}$  računa se kao

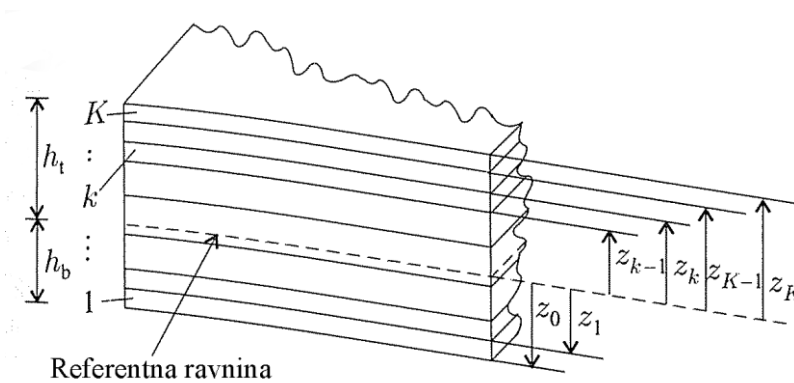
$$\mathbf{Q}_{namotaj}^{\pm\theta} = \frac{1}{2} [(\bar{\mathbf{Q}})_\theta + (\bar{\mathbf{Q}})_{-\theta}] \quad (6.11)$$

gdje su  $\bar{\mathbf{Q}}$  transformirane matrice krutosti (izraz (6.8)) kompozitnih slojeva s vlaknima usmjerenim pod kutovima  $\pm\theta$ .

### 6.3. Osnove makromehanike laminata

Višeslojni kompozit, odnosno laminat (Slika 42.) sastoji se od više kompozitnih slojeva u kojima vlakna mogu biti usmjerena u jednom ili više smjerova te pri različitim kutovima  $\theta$ . Osnovne pretpostavke teorije laminata (teorije ploča) su sljedeće:

- u laminatu se postavlja referentna ravnina (najčešće se nalazi na polovici visine laminata),
- laminat je u stanju ravninskog naprezanja,
- nema klizanja među slojevima,
- normala na referentnu ravninu ostaje okomita i ravna za vrijeme deformiranja
- pomaci u ravnini poprečnog presjeka laminata su linearna funkcija koordinate  $z$  (Kirchhoffova pretpostavka) [9].

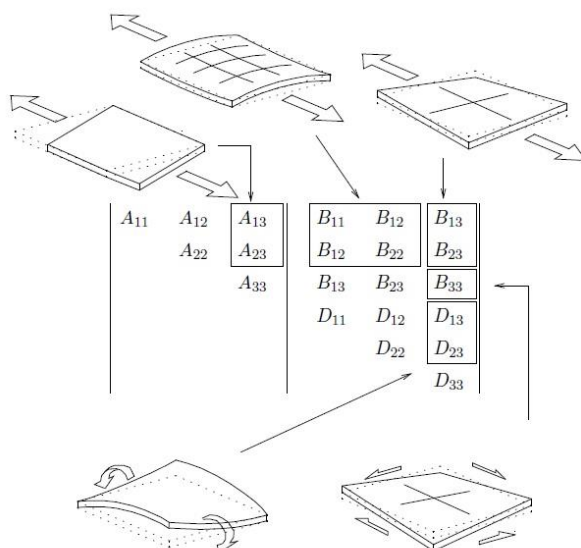


Slika 42. Prikaz slojeva laminata i referentne ravnine [4]

Na temelju teorije laminata razlikujemo tri matrice krutosti laminata **A**, **B** i **D**. Matrice **A**, **B**, **D** nazivaju se redom istezna (eng. *extensional*), spregnuta (eng. *coupling*) i fleksijska (*bending*) matrica krutosti. U sažetom obliku vrijedi

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$N$  i  $M$  su unutarnje sile i momenti po jedinici duljine koji djeluju na laminat.  $\varepsilon_0$  i  $\kappa$  su deformacije i zakrivljenosti referentne ravnine. Pojedini članovi matrica opisuju karakteristično mehaničko ponašanje laminata (Slika 43.). Kod laminata dolazi do kombinacije ponašanja pri različitim opterećenjima. Npr. pri djelovanju vlačnog opterećenja može doći do posmika ili torzije, a kod savijanja može doći do torzije i sl.



Slika 43. Utjecaj koeficijenata **A**, **B** i **D** matrica krutosti laminata [21]

U ovom istraživanju radi se o kompozitnoj cijevi koja je nastala procesom mehaničkog namatanja pod kutom  $\pm\theta$ . U tome slučaju matrice krutosti laminata **A**, **B** i **D** mogu se izračunati prema sljedećim izrazima [22],[23]:

$$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_{namotaj}^{\pm\theta} (z_k - z_{k-1}) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_{namotaj}^{\pm\theta} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (6.14)$$

$$\mathbf{D}_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_{namotaj}^{\pm\theta} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (6.15)$$

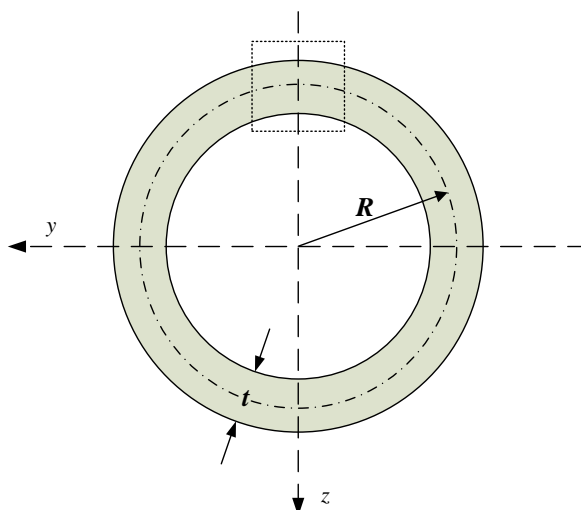
Vrijednosti  $z_k$  su koordinate dodirnih točaka slojeva u smjeru osi  $z$  (Slika 42.).

Matrice  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  se nazivaju matrice fleksibilnosti laminata, a dobiju se na sljedeći način [22],[23].

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \quad (6.16)$$

#### 6.4. Zamjenska fleksijska krutost kompozitne grede

Za kompozitne grede simetričnog poprečnog presjeka oko osi  $z$  i s opterećenjem u ravnini simetrije  $xz$  može se uvesti zamjenska fleksijska krutost  $\widehat{EI}_y$ , koja se može umjesto fleksijske krutosti  $EI_y$  uvrstiti u izraze koji vrijede za izotropnu gredu [20].



Slika 44. Poprečni presjek cijevi

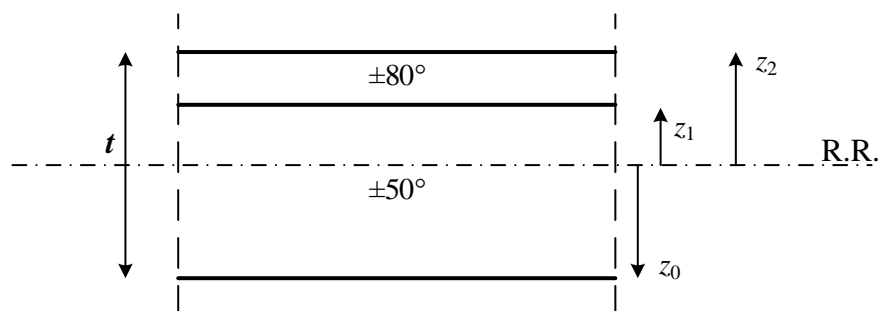
Za laminat kružnog, šupljeg poprečnog presjeka (Slika 44.) izraz za određivanje zamjenske krutosti glasi [20]

$$\widehat{EI}_y = \pi \left( R^3 \frac{1}{\alpha_{11}} + R \frac{1}{\delta_{11}} \right) \quad (6.17)$$

gdje je  $R = r_u + \frac{t}{2}$ ,  $r_u$  – unutarnji radijus poprečnog presjeka, a  $t$  debljina stijenke poprečnog presjeka. Polumjer  $R$  zapravo je polumjer zakrivljenosti referentne ravnine. Vrijednosti  $\alpha_{11}$  i  $\delta_{11}$  su vrijednosti članova matrice fleksibilnosti  $\alpha$  i  $\beta$  na mjestu  $i, j = 1,1$ .

### 6.5. Proračun zamjenske fleksijske krutosti za poprečni presjek kompozitnog rasvjetnog stupa

Kod kompozitne cijevi nekoliko slojeva namotano je pod kutom od  $\pm 50^\circ$ , a završni sloj je pod kutom od  $\pm 80^\circ$ . Slika 45. prikazuje presjek stijenke kompozitne cijevi. Raspored i debljina slojeva su pretpostavke jer se zbog proizvodnje debljine slojeva ne mogu točno izmjeriti. Kod različitih stupova i različitih presjeka mijenja se debljina slojeva.



Slika 45. Presjek stijenke kompozitne cijevi

Vrijednosti inženjerskih konstanti koje se dobiju pravilom mješavine (Tablica 19.) uvrštene su u izraz (6.3) za određivanje matrice krutosti za jednosmjerno usmjeren sloj  $\theta = 0^\circ$ . Svi proračuni rađeni su u matematičkom računalnom programu SAGE. Matrica krutosti glasi

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 45078 & 1698,2 & 0 \\ 1698,2 & 9081,3 & 0 \\ 0 & 0 & 3436,4 \end{bmatrix} \text{ (MPa)} \quad (6.18)$$

Korištenjem matrica transformacije može se odrediti matrica krutosti namotaja za  $\pm 50^\circ$  prema izrazu (6.11)

$$\mathbf{Q}_{\text{namotaj}}^{\pm 50} = \begin{bmatrix} 14973 & 10667 & 0 \\ 10668 & 21224 & 0 \\ 0 & 0 & 12415 \end{bmatrix} \text{ (MPa)} \quad (6.19)$$

te matrica krutosti namotaja za  $\pm 80^\circ$

$$\mathbf{Q}_{\text{namotaj}}^{\pm 80} = \begin{bmatrix} 9082,9 & 2770,8 & 0 \\ 2771,9 & 42906 & 0 \\ 0 & 0 & 4519,4 \end{bmatrix} \text{ (MPa)} \quad (6.20)$$

### 6.5.1. Zamjenska fleksijska krutost za stup RSD5\_1

U poprečnom presjeku  $x = 2000$  mm debljina stijenke cijevi iznosi  $t = 13,2$  mm. Koordinate granica slojeva u smjeru osi  $z$  (Slika 45.) iznose redom  $z_0 = -6,6$  mm,  $z_1 = 5,4$  mm i  $z_2 = 6,6$  mm.

Istezna, spregnuta i fleksijska matrica krutosti **A**, **B** i **D** računaju se prema izrazima (6.13), (6.14) i (6.15), a matrice popustljivosti **α**, **β** i **δ** prema izrazu (6.16). S obzirom da su izračunate vrijednosti matrice namotaja slojeva (6.19 i 6.20) matrica krutosti **A** glasi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 190583,48 & 131337,89 & 0 \\ 131337,89 & 306173,41 & 0 \\ 0 & 0 & 154403,28 \end{bmatrix} (\text{N/mm}) \quad (6.21)$$

Korištenjem izraza (6.16) matrica popustljivosti **α** (mm/N) iznosi:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 7,644787 & -3,41288 & 0 \\ -3,41288 & 4,90918 & 0 \\ 0 & 0 & 6,54376 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} (\text{mm/N}) \quad (6.22)$$

Spregnuta matrica krutosti **B** (N) glasi:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -42412,629 & -56848,875 & 0 \\ -56848,869 & 156110,37 & 0 \\ 0 & 0 & -56848,870 \end{bmatrix} (\text{N}) \quad (6.23)$$

Matrica popustljivosti **β** (N)<sup>-1</sup> glasi

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} -9,75754 \cdot 10^{-8} & 2,26353 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 2,26353 \cdot 10^{-7} & -2,68735 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 1,82598 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix} (\text{N})^{-1} \quad (6.24)$$

I u konačnici savojna matrica krutosti **D** (Nmm) glasi

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2,6145866 & 1,7023702 & 0 \\ 1,7023703 & 5,0076352 & 0 \\ 0 & 0 & 2,0372862 \end{bmatrix} \cdot 10^6 (\text{Nmm}) \quad (6.25)$$

te matrica popustljivosti **δ** (Nmm)<sup>-1</sup>:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} 5,023082 & -1,789263 & 0 \\ -1,789263 & 2,714693 & 0 \\ 0 & 0 & 4,959443 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} (\text{Nmm})^{-1} \quad (6.26)$$

Laminati koji su proizvedeni namatanjem su ortotropni laminati. Kod ortotropnih lamina koeficijenti matrica **A**, **B** i **D** koji se nalaze u trećem stupcu jednaki su nuli. Kod takvih lamina kod savijanja ne dolazi do torzije.

Za određivanje zamjenske fleksijske krutosti lamina potrebno je odrediti polumjer zakrivljenosti referentne ravnine  $R$  i moment tromosti za odabrani poprečni presjek.

$$R = r_u + \frac{t}{2} = 61,4 \text{ mm} \quad (6.27)$$

$$I(x = 2000 \text{ mm}) = 9,70998 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (6.28)$$

Iz izraza (6.17) može se izlučiti zamjenski modul elastičnosti u sljedećem obliku:

$$\hat{E} = \frac{\pi \left( R^3 \frac{1}{\alpha_{11}} + R \frac{1}{\delta_{11}} \right)}{I_y(x)} \quad (6.29)$$

Uvrštavanjem izračunatih vrijednosti (6.27) i (6.28), te vrijednosti  $\alpha_{11}$  i  $\delta_{11}$  koje su izračunate u matricama fleksibilnosti u izraz (6.29) dobije se zamjenski modul elastičnosti za stup RSD5\_1:

$$\hat{E} = 9835,91 \text{ MPa}$$

Također se mogu izračunati vrijednosti zamjenskih modula elastičnosti i za preostale stupove duljine 6 m, prema postupku u točki 6.5.1. Ulazni podaci kao što su matrica krutosti **Q**, matrice krutosti namotaja za  $\pm 50^\circ$  i za  $\pm 80^\circ$  su iste za sve stupove. Debljina stijenke  $t$ , moment tromosti  $I$ , te radijus  $R$  se razlikuju u ovisnosti o kojem je stupu riječ. Izračunate vrijednosti su prikazane tablično (*Tablica 20.*).

**Tablica 20.** Zamjenski fleksijski modul za RSD6\_1, RSD6\_2, RSD6\_3 ( $x = 2000$  mm)

	Oznaka stupa		
	RSD6_1	RSD6_2	RSD6_3
$t(2000)$ (mm)	11,4	10,7	14
$R(2000)$ (mm)	65,6	65,55	67
$\alpha_{11}$ (mm/N)	$8,88431 \cdot 10^{-6}$	$9,4190 \cdot 10^{-6}$	$7,2116 \cdot 10^{-6}$
$\delta_{11}$ (Nmm) <sup>-1</sup>	$7,7982 \cdot 10^{-7}$	$9,4360 \cdot 10^{-7}$	$4,2120 \cdot 10^{-7}$
$I(2000)$ mm <sup>4</sup>	$1,01867 \cdot 10^7$	$9,53093 \cdot 10^6$	$1,33726 \cdot 10^7$
$\hat{E}$ (MPa)	9871,13	9879,52	9835,10

**Tablica 21.** Zamjenski fleksijski modul za RSD6\_1, RSD6\_2, RSD6\_3 ( $x = 4000$  mm)

	Oznaka stupa		
	RSD6_1	RSD6_2	RSD6_3
$t(4000)$ (mm)	14,8	13,9	18
$R(4000)$ (mm)	52,7	52,35	54,0
$\alpha_{11}$ (mm/N)	$6,8254 \cdot 10^{-6}$	$7,2630 \cdot 10^{-6}$	$5,6240 \cdot 10^{-6}$
$\delta_{11}$ (Nmm) <sup>-1</sup>	$3,5673 \cdot 10^{-7}$	$4,3033 \cdot 10^{-7}$	$1,9897 \cdot 10^{-7}$
$I(4000)$ mm <sup>4</sup>	$6,93942 \cdot 10^6$	$6,37533 \cdot 10^6$	$9,15172 \cdot 10^6$
$\hat{E}$ (MPa)	9774,9	9793,72	9704,48



## 7. RASPRAVA I ZAKLJUČCI

U 5. poglavlju određene su geometrijske karakteristike kompozitne cijevi promjenjivog poprečnog presjeka. Jednadžbe pravaca kojima se opisuju vanjski i unutarnji rub cijevi jednostavno se mogu uvrstiti u izraze za moment tromosti cijevi, odnosno diferencijalnu jednadžbu elastične linije nosača. Analitički izrazi za progibnu liniju prema klasičnoj teoriji savijanja za izotropnu gredu poslužili su za određivanje analitičkog fleksijskog modula elastičnosti, odnosno analizu naprezanja i deformacija. Nakon uvrštavanja eksperimentalnih vrijednosti dobivene su eksperimentalne vrijednosti fleksijskog modula za dva presjeka na svim stupovima u području malih deformacija kod  $\varepsilon_f = 0,0005$  (Tablica 22.). Primjećuju se slične vrijednosti u pojedinačnim presjecima. Također i nešto manje vrijednosti u presjeku  $x = 4$  m. Značajnije odstupanje primjećuje se kod stupa RSD6\_2. Razlog je u tome što je taj stup najtanji i materijalna nelinearnost nastupa pri manjim deformacijama nego što je to slučaj kod debljih stupova. Za manje vrijednosti deformacije kod stupa RSD6\_2 dobije se veća vrijednost fleksijskog modula. Na grafovima u točki 5.5 može se primijetiti da se progibna linija nosača  $w^{an}(E, F, x)$  i eksperimentalno izmjerene progibi  $w^{exp}$  dobro poklapaju, te se iz toga može zaključiti da se može usvojiti prosječni eksperimentalni fleksijski modul elastičnosti, te da dobro opisuje materijal.

**Tablica 22.** Eksperimentalni fleksijski modul elastičnosti

$E_f^{exp}$ (MPa)	$x = 2$ m	$x = 4$ m	
<b>RSD5_1</b>	10136,92	9965,58	<b>10051,25</b>
<b>RSD6_1</b>	11096,55	10491,95	<b>10794,25</b>
<b>RSD6_2</b>	8877,35	9309,87	<b>8593,61</b>
<b>RSD6_3</b>	10871,37	10472,57	<b>10671,97</b>

Drugi dio istraživanja proveden je u svrhu predviđanja mehaničkih svojstava kompozita u različitim smjerovima na temelju materijalnih svojstava matrice i vlakana dostupnih u literaturi. Također, debljine i raspored slojeva u karakterističnim presjecima baziraju se na pretpostavkama. Osobito vezano uz završni sloj  $\pm 80^\circ$  čija debljina varira. Na temelju teorije laminata određena je zamjenska fleksijska krutost i zamjenski fleksijski modul elastičnosti (Tablica 23.) kako bi se teorijske vrijednosti mogle usporediti s eksperimentalnim.

Primjećuju se slične vrijednosti u pojedinačnim presjecima kao i nešto manje vrijednosti u presjeku  $x = 4$  m. U odnosu na eksperimentalne rezultate teorijske vrijednosti odstupaju od eksperimentalnih u prosjeku  $\pm 8,7\%$  za presjek  $x = 2$  m i  $\pm 5,5\%$  za presjek  $x = 4$  m. Može se zaključiti da teorijske vrijednosti inženjerskih konstanti određene u točki 6.2 također dobro opisuju GFRP materijal.

**Tablica 23.** Zamjenski fleksijski modul elastičnosti

$\hat{E}$ (MPa)	$x = 2$ m	$x = 4$ m
RSD5_1	9835,91	9704,87
RSD6_1	9871,13	9774,90
RSD6_2	9879,52	9793,72
RSD6_3	9835,10	9704,48

## POPIS SLIKA

<b>Slika 1.</b> Kompozitni rasvjetni stupovi u prirodi [1] .....	1
<b>Slika 2.</b> Staklena vlakna u obliku rovinga [11] .....	5
<b>Slika 3.</b> Shematski prikaz postupka strojnog namatanja [13] .....	5
<b>Slika 4.</b> Strojno namatanje stupa [14] .....	6
<b>Slika 5.</b> Smjerovi namatanja rasvjetnog stupa .....	6
<b>Slika 6.</b> Dijagram slijeda za određivanje eksperimentalnog modula elastičnosti .....	7
<b>Slika 7.</b> Dijagram slijeda za određivanje fleksijske krutosti kompozitne cijevi .....	8
<b>Slika 8.</b> Kompozitni rasvjetni stupovi od 5 i 6 m.....	9
<b>Slika 9.</b> Skica rasvjetnog stupa s geometrijskim karakteristikama .....	10
<b>Slika 10.</b> Kompozitni stup na početku ispitivanja.....	11
<b>Slika 11.</b> Kompozitni stup na kraju ispitivanja .....	11
<b>Slika 12.</b> Pričvršćivanje vijcima da bi se ostvarila upetost .....	12
<b>Slika 13.</b> Pozicije mjernih mjesta za RSD5_1 .....	12
<b>Slika 14.</b> Pozicije mjernih mjesta za RSD6_1, RSD6_2 i RSD6_3.....	13
<b>Slika 15.</b> Univerzalna statička preša (Zwick) .....	13
<b>Slika 16.</b> LVDT .....	13
<b>Slika 17.</b> Mjereni progibi za RSD5_1 .....	14
<b>Slika 18.</b> Mjereni progibi za RSD6_1 .....	14
<b>Slika 19.</b> Mjereni progibi za RSD6_2 .....	15
<b>Slika 20.</b> Mjereni progibi za RSD6_3 .....	15
<b>Slika 21.</b> Pomak vrha stupa u ovisnosti o sili za sve stupove .....	16
<b>Slika 22.</b> Vanjski i unutarnji polumjer cijevi .....	17
<b>Slika 23.</b> Promjena radijusa poprečnog presjeka po duljini stupa RSD5_1.....	17
<b>Slika 24.</b> Promjena momenta tromosti $I(x)$ po duljini nosača od 5 m .....	19
<b>Slika 25.</b> Promjena momenta tromosti $I(x)$ po duljini nosača duljine 6 m.....	20
<b>Slika 26.</b> Dijagram momenata savijanja za konzolu opterećenu silom $F$ .....	21
<b>Slika 27.</b> Eksperimentalni modul elastičnosti za sva tri mjerna mjesta (RSD5_1).....	25
<b>Slika 28.</b> Eksperimentalni modul elastičnosti za sva tri mjerna mjesta (RSD6_1).....	26
<b>Slika 29.</b> Eksperimentalni modul elastičnosti za sva tri mjerna mjesta (RSD6_2).....	26
<b>Slika 30.</b> Eksperimentalni modul elastičnosti za sva tri mjerna mjesta (RSD6_3).....	27
<b>Slika 31.</b> $\sigma_f - \varepsilon_f$ dijagram za rasvjetni stup RSD5_1 .....	28

---

<b>Slika 32.</b> $\sigma_f - \varepsilon_f$ dijagram za rasvjetni stup RSD6_1 .....	30
<b>Slika 33.</b> $\sigma_f - \varepsilon_f$ za rasvjetni stup RSD6_2 .....	31
<b>Slika 34.</b> $\sigma_f - \varepsilon_f$ za rasvjetni stup RSD6_3 .....	32
<b>Slika 35.</b> Usporedba progibne linije s eksperimentalnim vrijednostima (RSD5_1) .....	33
<b>Slika 36.</b> Usporedba progibne linije s eksperimentalnim vrijednostima (RSD6_1) .....	34
<b>Slika 37.</b> Usporedba progibne linije s eksperimentalnim vrijednostima (RSD6_2) .....	35
<b>Slika 38.</b> Usporedba progibne linije s eksperimentalnim vrijednostima (RSD6_3) .....	36
<b>Slika 39.</b> Kompozitni sloj ojačan kontinuiranim jednosmjernim vlaknima.....	37
<b>Slika 40.</b> Lokalni i globalni koordinatni sustav [10].....	40
<b>Slika 41.</b> Kompozitni sloj namotaja vlakana u $\pm\theta$ smjeru [20].....	41
<b>Slika 42.</b> Prikaz slojeva laminata i referentne ravnine [4] .....	42
<b>Slika 43.</b> Utjecaj koeficijenata <b>A</b> , <b>B</b> i <b>D</b> matrica krutosti laminata [21] .....	43
<b>Slika 44.</b> Poprečni presjek cijevi.....	44
<b>Slika 45.</b> Presjek stijenke kompozitne cijevi.....	45

---

## POPIS TABLICA

<b>Tablica 1.</b> Prikaz geometrijskih karakteristika .....	10
<b>Tablica 2.</b> Izrazi za $Dv(x)$ i $Du(x)$ za RSD6_1, RSD6_2 i RSD6_3 .....	18
<b>Tablica 3.</b> Izrazi za moment tromosti $I(x)$ za RSD6_1, RSD6_2 i RSD6_3 .....	19
<b>Tablica 4.</b> Analitički izrazi za kut zaokreta $\varphi x$ za RSD6_1, RSD6_2 i RSD6_3 .....	23
<b>Tablica 5.</b> Integracijske konstante $C$ i $D$ .....	23
<b>Tablica 6.</b> Konačni izrazi za progib $w(x)$ .....	24
<b>Tablica 7.</b> Analitički izrazi za fleksijski modul elastičnosti za sva 3 mjerna mjesta.....	24
<b>Tablica 8.</b> Izrazi za proračun naprezanja i deformacija za RSD5_1.....	28
<b>Tablica 9.</b> Očitane vrijednosti s $\sigma_f - \varepsilon_f$ dijagrama za RSD5_1 .....	29
<b>Tablica 10.</b> Izrazi za proračun naprezanja i deformacija za stupove RSD6_1,2,3 .....	29
<b>Tablica 11.</b> Očitane vrijednosti s $\sigma_f - \varepsilon_f$ dijagrama za RSD6_1 .....	30
<b>Tablica 12.</b> Očitane vrijednosti s $\sigma_f - \varepsilon_f$ dijagrama za RSD6_2 .....	31
<b>Tablica 13.</b> Očitane vrijednosti s $\sigma_f - \varepsilon_f$ dijagrama za RSD6_3.....	32
<b>Tablica 14.</b> Analitičke i eksperimentalne vrijednosti progiba (RSD5_1) .....	33
<b>Tablica 15.</b> Analitičke i eksperimentalne vrijednosti progiba (RSD6_1) .....	34
<b>Tablica 16.</b> Analitičke i eksperimentalne vrijednosti progiba (RSD6_2) .....	35
<b>Tablica 17.</b> Analitičke i eksperimentalne vrijednosti progiba (RSD6_3) .....	36
<b>Tablica 18.</b> Ulazni podaci za matricu i vlakna .....	38
<b>Tablica 19.</b> Izračunate vrijednosti inženjerskih konstanti .....	40
<b>Tablica 20.</b> Zamjenski fleksijski modul za RSD6_1, RSD6_2, RSD6_3 ( $x = 2000$ mm)..	48
<b>Tablica 21.</b> Zamjenski fleksijski modul za RSD6_1, RSD6_2, RSD6_3 ( $x = 4000$ mm)..	48
<b>Tablica 22.</b> Eksperimentalni fleksijski modul elastičnosti .....	49
<b>Tablica 23.</b> Zamjenski fleksijski modul elastičnosti .....	50

---

**LITERATURA**

- [1] “Domitran novitas.” [Online]. Available: [www.domitrannovitas.hr](http://www.domitrannovitas.hr). [Accessed: 28-Apr-2018].
- [2] K. Tavakoldavani, “Composite Materials Equivalent Properties In Lamina, Laminate, And Structure Levels,” 2014.
- [3] F. Shadmehri, B. Derisi, and S. V. Hoa, “On bending stiffness of composite tubes,” *Compos. Struct.*, vol. 93, no. 9, pp. 2173–2179, Aug. 2011.
- [4] L. P. (Laszlo P. Kollar and G. S. Springer, *Mechanics of composite structures*. Cambridge University Press, 2003.
- [5] P. Bagavac and L. Krstulović-Opara, “Određivanje modula elastičnosti CFRP cross-ply kompozita,” in *8. susreti Hrvatskog društva za mehaniku*, 2017.
- [6] W. S. Chan and K. C. Demirhan, “A Simple Closed-Form Solution of Bending Stiffness for Laminated Composite Tubes,” *J. Reinf. Plast. Compos.*, vol. 19, no. 4, pp. 278–291, Mar. 2000.
- [7] P. Saggar, “Experimental Study of Laminated Composite Tubes Under Bending,” *Materials Science & Engineering*, 2007.
- [8] C. Shankara Rao, “Analysis Of Tapered Laminated Composite Tubes Under Tension And Torsion,” 2007.
- [9] I. Smojver, “Mehanika kompozitnih materijala,” p. 65 p, 2006.
- [10] Autar K. Kaw, *Mechanics of Composite Materials*, vol. 29, no. 2006.
- [11] “DirectIndustry - The online industrial exhibition: sensors, automation, motors, pumps, materials handling, packaging, etc.” [Online]. Available: <http://www.directindustry.com/>. [Accessed: 20-Apr-2018].
- [12] A. Maier, “Optimisation of the winding process by minimizing the critical failure potential during fibre roving delivery,” Department Polymer Engineering and Science, Montanuniversitaet Leoben, 2016.
- [13] “PT. Gunung Putri Graha Mas.” [Online]. Available: <http://www.gunungputri.com/>. [Accessed: 28-Apr-2018].
- [14] “Insul-Tek® Filament Winding Process from Insul-Tek Piping Systems Inc. on AECinfo.com.” [Online]. Available: <https://www.aecinfo.com/>. [Accessed: 03-May-2018].
- [15] “HRN EN 43-2:2013,” 2013.

- [16] V. Šimić, *Otpornost materijala I*. Zagreb, 1992.
- [17] T. Došlić, D. Pokaz, T. Slijepčević-Manger, and K. A. Škreb, "Matematika 3."
- [18] F. L. Matthews and R. D. (Rees D.) . Rawlings, *Composite materials : engineering and science*. London; New York, 1994.
- [19] G. Czél and T. Czigány, "Finite element method assisted stiffness design procedure for non-circular profile composite wastewater pipe linings," *Compos. Struct.*, vol. 112, no. 1, pp. 78–84, Jun. 2014.
- [20] M. Katayama, T. Hayakawa, Y. Hakotani, *Composite Structures*, no. 38. 1997.
- [21] P. J. Schreurs, "Laminates," *Homepage Piet Schreurs*. [Online]. Available: <http://www.mate.tue.nl/~piet/>. [Accessed: 04-Apr-2018].
- [22] L. Bagavac, P; Krstulović-Opara, "Određivanje modula elastičnosti CFRP cross-ply kompozita," in 8. *SUSRET HRVATSKOG DRUŠTVA ZA MEHANIKU*, 2017, p. 239.
- [23] P. Sagar, "Experimental Study of Laminated Composite Tubes Under Bending," no. May, 2007.