

Sveučilište u Zagrebu
Geodetski fakultet

Marko Liović

**Trodimenzionalna vizualizacija elemenata geometrijske geodezije i geodetske
astronomije u alatu otvorenog koda GeoGebra®**

Zagreb, 2025.

Ovaj rad izrađen je na Sveučilištu u Zagrebu – Geodetskom fakultetu u Zavoda za geomatiku na Katedri za državnu izmjeru pod vodstvom mentora, izv. prof. dr. sc. Marka Pavasovića i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2024./2025.

Popis i objašnjenje kratica upotrjebljenih u radu

K.S.	hrv. Koordinatni sustav eng. Coordinate system
GRS 80	hrv. Geodetski referentni sustav 1980 eng. Geodetic Reference System 1980
WGS 84	hrv. Svjetski geodetski sustav 1984 eng. World Geodetic System 1984
CFR	hrv. Rotacija osi koordinatnog sustava eng. Coordinate Frame Rotation
PVT	hrv. Rotacija vektora položaja eng. Position Vector Transformation
IERS	hrv. Međunarodni servis za Zemljinu rotaciju i referentne sustave eng. International Earth Rotation and Reference Systems Service
IUGG	hrv. Međunarodna unija za geodeziju i geofiziku eng. International Union of Geodesy and Geophysics
MSL	hrv. Srednja razina mora eng. Mean Sea Level
STEM	hrv. Znanost, tehnologija, inženjerstvo i matematika eng. Science, Technology, Engineering and Mathematics

SADRŽAJ

1. Uvod i cilj rada	1
2. Osnovni pojmovi u geodeziji i geoinformatici	4
3. Teorijske osnove geometrijske geodezije	7
3.1. Rotacijski elipsoid	7
3.2. Matematičke operacije nad koordinatama	16
3.2.1 PVT konvencija transformacije	19
3.2.2 CFR konvencija transformacije	21
4. Koordinatni sustavi nebeske sfere	24
4.1. Osnovni elementi nebeske sfere	24
4.2. Horizontski koordinatni sustav	28
4.3. Nebeski ekvatorski koordinatni sustav	29
4.4. Mjesni ekvatorski koordinatni sustav	30
5. Vizualizacija elipsoidne geodezije i geodetske astronomije u alatu otvorenog koda GeoGebra®	32
5.1. GeoGebra® kao alat za vizualizaciju	32
5.2. Rotacijski elipsoid	35
5.3. Matematičke operacije nad koordinatama	65
5.3.1 PVT konvencija transformacije	65
5.3.2 CFR konvencija transformacije	79
5.4. Vizualizacija koordinatnih sustavi nebeskih sfera	102
5.4.1 Horizontski koordinatni sustav	102
5.4.2 Nebeski ekvatorski koordinatni sustav	115
5.4.3 Mjesni ekvatorski koordinatni sustav	127
6. Diskusija i zaključak	131
Zahvala	134
Literatura	135

Popis slika	138
Popis tablica	144
Sažetak	145
Summary	146
Životopis.....	147

1. UVOD I CILJ RADA

Znanost o izmjeri i kartiranju Zemljine površine, klasična je definicija geodezije s kraja 19. stoljeća (1880. godine) koju je dao njemački geodet, Friedrich Robert Helmert (1843. – 1917.). U današnje vrijeme, navedena definicija geodezije i dalje obuhvaća njenu osnovnu zadaću, no, sveopći tehnološki razvoj koji je geodeziji omogućio da postane dio geoznanosti i inženjerskih (tehničkih) znanosti uključujući geomatiku i navigaciju, zahtijevao je proširenje klasične definicije. Krajem 20. stoljeća (1991. godine), njemački geodet Wolfgang Reinhold Julius Torge (1931. –) proširio je definiciju geodezije na *znanost koja se bavi određivanjem oblika i vanjskog polja ubrzanja sile teže Zemlje i drugih nebeskih tijela* (mjeseca–lunarna geodezija i planeta–planetarna geodezija) *kao vremenski promjenjivih veličina te određivanjem srednjeg Zemljinog elipsoida na temelju parametara opažanih na i izvan površine Zemlje* (Torge, 2001). Dakle, današnje moderno poimanje geodezije kao znanosti koja određuje geometriju, polje ubrzanje sile teže i rotaciju Zemlje dovodi do definicije tzv. *tri stupa geodezije* (eng. *Three Pillars of Geodesy*): geokinetika, Zemljino polje ubrzanja sile teže i Zemljina rotacija (Plag i dr., 2009). Tri stupa geodezije istoj omogućuju precizno opažanje i praćenje gibanja i pridružene dinamike masa unutar Zemljinog sustava.

Prema W. Torgeu, geodezija se dijeli na (Torge, 2001):

- *globalnu geodeziju* (eng. *global geodesy*) – uključuje određivanje oblika i veličine Zemlje, njenu orijentaciju u prostoru i vanjsko polje ubrzanja sile teže,
- *geodetsku (državnu) izmjeru* (eng. *geodetic survey*) – obuhvaća određivanje Zemljine površine i njenog polja ubrzanja sile teže na području neke države, regije ili više država i
- *izmjeru u ravnini* (topografsku, katastarsku i inženjersku) (eng. *plane surveying*) – obuhvaća određivanje detalja Zemljine površine na lokalnom nivou pri čemu se njena zakrivljenost i utjecaj ubrzanja sile teže u pravilu zanemaruju.

Elementi navedene podjele geodezije međusobno su čvrsto povezani. Rezultati globalne geodezije su *referentni koordinatni sustavi* i njihove realizacije, *referentni koordinatni okviri*. Rezultati geodetske (državne) izmjere pridonose globalnoj geodeziji u vidu realizacije referentnih (koordinatnih) okvira na nacionalnom nivoima. Izmjera u ravnini koristi rezultate geodetske (državne) izmjere u vidu oslanjanja na kontrolne točke uspostavljene geodetskom (državnom) izmjerom koje služe za izradu službenih nacionalnih kartografskih prikaza, katastarskih informacijskih sustava i projekata u graditeljstvu.

Dakle, sprega globalne geodezije i državne izmjere je neizbježna jer jedna doprinosi drugoj, odnosno dijele zajednička područja (Torge i Müller, 2012):

- *geometrijsku geodeziju* koja se bavi određivanjem i elementima matematičkog modela za Zemljino tijelo,
- *fizikalnu geodeziju* koja povezuje utjecaj distribucije masa čvrste Zemlje na polje ubrzanja sile teže, odnosno povezuje geodeziju s geofizikom,
- (svemirsko –) satelitsku geodeziju koja se bavi opažanjem prirodnih i umjetnih satelita te definiranjem njihovih orbita i
- *geodetsku astronomiju* (astrometriju) koja se bavi opažanjem promjena položaja nebeskih objekata.

Prema modernoj definiciji geodezije, ona je znanost koja se bavi određivanjem oblika i vanjskog polja ubrzanja sile teže. Fizikalni oblik Zemlje jest *geoid* za čije je određivanje (modeliranje) nužno imati saznanja o (izmjerenom) iznosu ubrzanja sile teže Zemlje, a što je zadaća gravimetrijske metode fizikalne geodezije. Gravimetrija je znanstvena disciplina geofizike, odnosno grane geofizike koja proučava čvrstu Zemlju – fizike čvrste Zemlje ili geofizike u užem smislu (Orlić, 2001). Također, fizici čvrste Zemlje pripada i seizmologija (čija je zadaća istraživanje potresa i njihova uzroka te strukture Zemljine unutrašnjosti) koja zajedno sa svojim poddisciplinama, geodinamikom (bavi se istraživanjem gibanja masa u Zemljinoj unutrašnjosti) i geokinetikom – stupom geodezije koji se bavi kvalifikacijom i kvantifikacijom pomaka na fizičkoj površini Zemlje uzrokovanih endogenim i egzogenim procesima, pribraja geodeziju geofizici, konkretno, fizici čvrste Zemlje, a time i pripadnost porodici geoznanosti. U prilog ovoj činjenici ide postojanosti krovna organizacije za geodeziju i geofiziku na svjetskoj razini – Međunarodne unije za geodeziju u geofiziku (eng. *International Union of Geodesy and Geophysics* – IUGG) s glavnom zadaćom promocije i koordinacije znanstvenih studija i projekata o Zemlji u njenoj okolini, odnosno projekata geodezije i geofizike (URL 1).

Cilj ovog rada je omogućiti prvenstveno studentima, ali i zainteresiranoj geoosposobljenoj javnosti stjecanje bolje razumijevanje nastavne materije geometrijske geodezije, matematičkih operacija nad koordinatama i geodetske astronomije, pokrivene kroz predmete „Geodetski referentni okviri“ i „Državna izmjera“ na sveučilišnom Prijediplomskom studiju Geodezija i geoinformatika Sveučilišta u Zagrebu – Geodetskog fakulteta u vidu izrade trodimenzionalnih modela u programskom rješenju otvorenog koda (eng *open-source*) *GeoGebra*® (Hohenwarter i dr., 2009).

Rad sadrži teorijske osnove, proces izrade te način upotrebe modela geometrijske geodezije, matematičkih operacija nad koordinatama i geodetske astronomije koja je usko povezana s geodetskom astronomijom. Navedenim modelima omogućeno je manipuliranje u vidu promjene parametara koji su od značaja jer se promjenom istih omogućuje automatska promjena geometrijskih odnosa koji definiraju model. Na ovaj način korisniku (studentu, nastavniku i inom geoosposobljenom članu društva) je omogućeno bolje razumijevanje samog modela, odnosno nastavnog gradiva te stjecanje novih znanja na jedinstven i interaktivan način.

2. OSNOVNI POJMOVI U GEODEZIJI I GEOINFORMATICI

Osnovni pojmovi u geodeziji i geoinformatici, vezani u prostorno referenciranje i korišteni u ovom radu, definirani su dvjema službenim normama Međunarodne organizacije za standardizaciju (eng. *International Organization for Standardization* – ISO): ISO 19111: *Geographic information – Spatial referencing by coordinates* (ISO, 2019) i ISO 19115: *Geographic information – Metadata* (ISO, 2014), a to su:

- *Prostorna osnova* (eng. *spatial reference*) opisivanje je položaja u stvarnim svijetu,
- *Rotacijski elipsoid* (eng. *rotation ellipsoid*) ploha je oblikovana rotacijom elipse oko njene male osi (predstavlja rubnu plohu nivo-elipsoida), a osnovni parametri su: velika poluos a (eng. *semi-major axis*) – najdulji polumjer elipsoida (za elipsoid koji predstavlja Zemlju je to polumjer ekvatora) i mala poluos b (eng. *semi-minor axis*) – najkraći polumjer elipsoida (za elipsoid koji predstavlja Zemlju to je udaljenost od središta elipsoida do jednog od polova),
- *Meridijan* (eng. *meridian*) presjek je elipsoida i ravnine položene malom poluosi elipsoida,
- *Početni meridijan* (eng. *Prime/Zero meridian*) meridijan je od kojeg se odbrojava geodetska dužina (najčešće se radi o Greenwichu),
- *Nivo-elipsoid* (eng. *level-ellipsoid*) osnovno je matematičko-fizikalno tijelo u geodeziji, jednoznačno definirano s četiri parametra: dva geometrijska (velika i mala poluos a i b) i dva fizikalna (geocentrična gravitacijska konstanta GM i kutna brzina rotacije ω),
- *Točka* (eng. *point*) nulta je geometrijska primitiva koja predstavlja položaj, a u matematičko-geodetskom smislu predstavlja bezdimenzionalni objekt zadan svojim položajem – koordinatama (najčešće u 3D Euklidskom prostoru), ocjenom točnosti položaja, vremenskom epohom određivanja položaja u određenom referentnom koordinatnom sustavu (RKS)/referentnom koordinatnom okviru (RKO) i eventualno, godišnjom brzinom gibanja (uzrokovanom kinematikom litosfernih ploča),
- *Koordinata* (eng. *coordinate*) uređeni je niz n brojeva koji definira položaj točke u n -dimenzionalnom prostoru,
- *Koordinata* (eng. *coordinate*) uređeni je niz n brojeva koji definira položaj točke u n -dimenzionalnom prostoru,
- *Koordinatni sustav* (eng. *coordinate system*) skup je matematičkih pravila, nužnih za specificiranje kako se koordinate pridružuju točkama. U geodeziji se najčešće koriste:

Datum (eng. *datum*) skup je ili set parametara koji mogu poslužiti kao referenca ili osnova za izračunavanje drugih parametara (datum definira položaj ishodišta, mjerilo i orijentaciju osi koordinatnog sustava),

- *Geodetski datum* (eng. *geodetic datum*) datum je koji opisuje vezu koordinatnog sustava u odnosu na Zemljino tijelo (u većini slučajeva definiciju elipsoida), a s obzirom na položaj ishodišta koordinatnog sustava, može biti: geocentrični (globalni) – ishodište koordinatnog sustava je smješteno u centru masa Zemlje uključujući atmosferu i oceane (geocentar) i ne–geocentrični (lokalni) – ishodište koordinatnog sustava je smješteno na način da elipsoid što bolje aproksimira geoid na području od interesa,
- *Referentni koordinatni sustav* (eng. *Coordinate Reference System – CRS*) koordinatni je sustav koji se prema stvarnom svijetu odnosi uz pomoć datuma,
- *Referentni koordinatni okvir* (eng. *Coordinate Reference Frame – CRF*) realizacija je referentnog koordinatnog sustava na fizičkoj površini Zemlje točkama stalne geodetske osnove,
- *Transformacija koordinata* (eng. *coordinate transformation*) matematička je operacija nad koordinatama kod koje dolazi do promjene koordinata iz jednog referentnog koordinatnog sustava (okvira) u drugi referentni koordinatni sustav (okvir), zasnovana na vezi jedan–prema–jedan temeljem različitog datuma.
- *Konverzija koordinata* (eng. *coordinate conversion*) također je matematička operacija nad koordinatama, a predstavlja poseban slučaj transformacije koordinata i odnosi se na promjenu (vrste) koordinata iz jednog koordinatnog sustava u drugi koordinatni sustav zasnovane na vezi jedan–prema–jedan temeljem istog datuma.
- *Složeni referentni koordinatni sustav* (eng. *Compound Coordinate Reference System – CCRS*) opis položaja na temelju dva neovisna referentna koordinatna sustava (koordinatni sustavi su međusobno neovisni ako se koordinate jednog sustava ne mogu transformirati ili konvertirati u koordinate drugog sustava),
- *Srednja razina mora* (eng. *Mean Sea Level – MSL*) prosječna je razina površine mora kroz sva stanja plime i sezonskih varijacija (lokalno obično definirana mareografskim mjerenjima),
- *Geoid* (eng. *geoid*) je nivo-ploha koja najbolje odgovara srednjoj razini mora lokalno, regionalno ili globalno (nivo-ploha je ekvipotencijalna ploha tj. ploha konstantnog potencijala Zemljinog polja ubrzanja sile teže koja je u svakoj svojoj točki okomita na smjer odnosno vektor ubrzanja sile teže),

- *Geoidna undulacija N* (eng. *geoid undulation*) visina je geoida iznad plohe elipsoida,
- *Geoid* (eng. *geoid*) je nivo-ploha koja najbolje odgovara srednjoj razini mora lokalno, regionalno ili globalno (nivo-ploha je ekvipotencijalna ploha tj. ploha konstantnog potencijala Zemljinog polja ubrzanja sile teže koja je u svakoj svojoj točki okomita na smjer odnosno vektor ubrzanja sile teže),

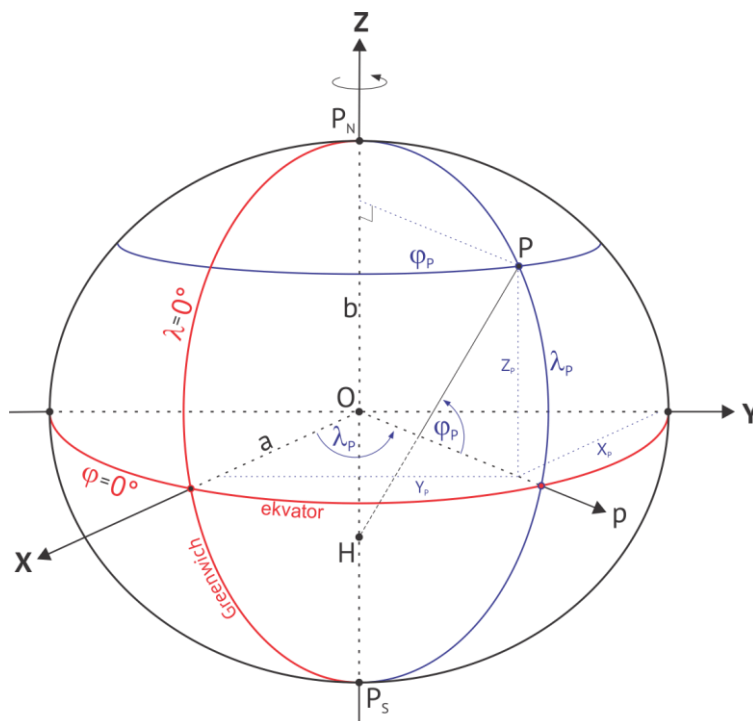
3. TEORIJSKE OSNOVE GEOMETRIJSKE GEODEZIJE

Ovim poglavljem rada iskazane su teorijske osnove geometrijske geodezije i transformacije koordinata koje će u narednom poglavlju biti predložene izradom 3D modela unutar alata *GeoGebra®*.

3.1. Rotacijski elipsoid

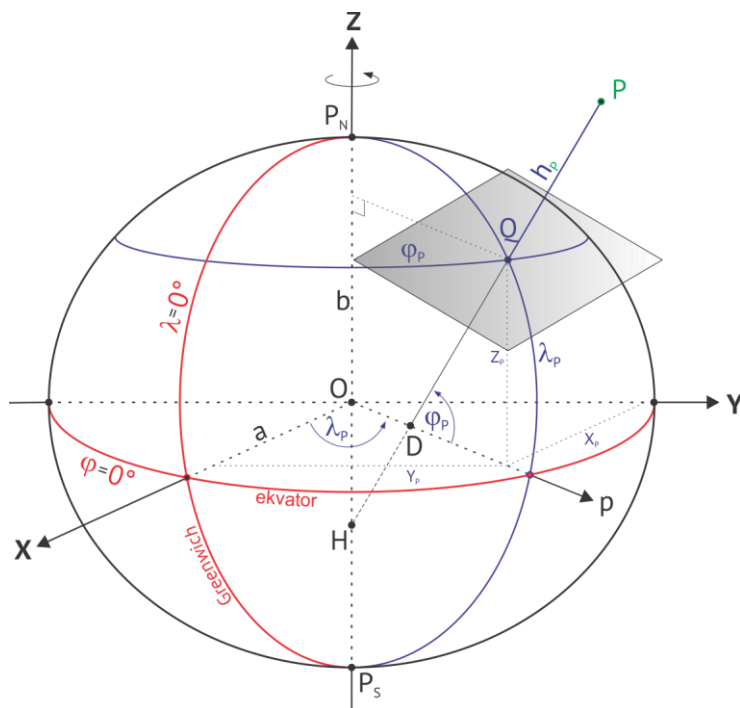
Rotacijski elipsoid matematička je aproksimacija Zemlje odnosno zatvorena ploha koja nastaje rotacijom elipse oko male osi $2b$ uz matematički uvjet $a > b$ (velika poluos a strogo je veća od male poluosi b tj. elipsoid je spljošten na polovima), a na kojoj se obavljaju računanja s geodetskim mjeranjima, prikupljenim na fizičkoj površini Zemlje (Deakin i Hunter, 2013; Hooijberg, 2008). Rotacijskom elipsoidu pridružena su dva koordinatna sustava: geodetski (elipsoidni) i Kartezijev pravokutni 3D koordinatni sustav.

Geodetski (elipsoidni) koordinatni sustav zakrivljeni je koordinatni sustav, predstavljen setom parametarskih ortogonalnih krivulja na površini elipsoida: paralelama (s pripadnom geodetskom širinom φ) i meridijanima (s pripadnom geodetskom dužinom λ) zajedno sa svojom početnim (referentnim) ravninama – ravninom ekvatora ($\varphi = 0^\circ$) i ravninom Greenwich meridijana ($\lambda = 0^\circ$) (slika 3.1) (Deakin i Hunter, 2013).



Slika 3.1: Geodetski (elipsoidni) i Kartezijev pravokutni 3D koordinatni sustavi elipsoida (Pavasović, 2025)

Svaka točka na plohi elipsoida jednoznačno je definirana pravcem koji je okomit na plohu elipsoida i prolazi točkom na elipsoidu. Takva okomica naziva se normala i moguće ju je definirati samo ako je u točki promatranja (koja se nalazi na elipsoidu – točka Q) definirana tangencijalna ravnina na plohu elipsoida (slika 3.2).



Slika 3.2: Tangencijalna ravnina u točki Q elipsoida (Pavasović, 2025)

Geodetska (elipsoidna) širina (φ) kut je u ravnini meridijana koji se nalazi između ravnine ekvatora i normale na elipsoid u promatranoj točki Q elipsoida te se odbrojava od ravnine ekvatora u rasponu od 0° do $\pm 90^\circ$ (pozitivno sjeverno, a negativno južno od ravnine ekvatora). Geodetska (elipsoidna) širina (λ) kut je u ravnini ekvatora između ravnine početnog (Greenwich) meridijana i meridijanske ravnine promatrane točke koji se odbrojava od ravnine početnog meridijana u rasponu od 0° do $\pm 180^\circ$ (pozitivna istočno, a negativna zapadno od ravnine početnog meridijana). Elipsoidna visina h je geometrijska udaljenost od plohe elipsoida (točke Q na slici 3.2) do promatrane točke P na fizičkoj površini Zemlje duž normale (okomice) na elipsoid (slika 3.2) (Deakin i Hunter, 2013; Jekeli, 2016). Na slici 3.2, točka P fizičke površine Zemlje povezana je s elipsoidom preko pravca normale PH koji projicira točku P u točku Q , odnosno probada plohu elipsoida u točki Q . Točka P nalazi se na elipsoidnoj visini $h_p = \overline{QP}$ iznad elipsoida.

Kartezijski pravokutni koordinatni definira položaj točke u odnosu na N međusobno okomitih koordinatnih osi (u geodeziji najčešće $N = 1, 2, 3$). X -os Kartezijevog pravokutnog

koordinatnog sustava 3D prolazi točkom ishodišta koordinatnog sustava (centra elipsoida O) i leži u presječnici Greenwich početnog meridijana i ravnine ekvatora. Os Z koincidira se s rotacijskom osi Zemlje i okomita je na ravninu ekvatora, a Y -os okomita je na XOZ ravninu te time kompletira tzv. desno orijentirani koordinatni sustav (slika 3.2) (Jekeli, 2016).

Na slici 3.2, pravac normale PH probada ekvatorsku ravninu XOY u točki D i formira kut geodetske širine φ te naravno, leži u meridijanskoj ravnini OP_NQ (ili pOZ) koja s ravninom početnog meridijana XOZ zatvara kut geodetske dužine λ . Točke P i Q imaju iste elipsoidne koordinate, ali imaju različitu elipsoidnu visinu ($h_Q = 0$), odnosno točka P s fizičke površine Zemlje projicira se u korespondentnu točku Q na elipsoidu duž normale.

Rotacijski elipsoid matematički se može iskazati Kartezijevom odnosno kanonskom jednadžbom koja je dana izrazom (Deakin i Hunter, 2010):

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (3.1)$$

gdje su a i b velika i mala poluos elipsoida, a x, y, z Kartezijeve pravokutne 3D koordinate točke na elipsoidu.

Rotacijski elipsoid u potpunosti je definiran ukoliko mu se minimalno poznaju dva definirajuća parametra (Deakin i Hunter, 2013):

- velika i mala poluos (a, b) ili
- velika poluos i prvi numerički ekscentricitet (a, e) ili
- velika poluos i spljoštenost ili recipročna vrijednost spljoštenosti (a i f ili $1/f$).

Veličina e se naziva prvi numerički ekscentricitet elipsoida koji je dan izrazom (Čubranić, 1974):

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (3.2)$$

gdje su a i b velika i mala poluos elipsoida.

U geodeziji se ponekad prvi numerički ekscentricitet iskazuje i svojim korijenom:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (3.3)$$

Općenito, ekscentricitet e elipsoida ukazuje koliko je elipsoid izdužen ili koliko je sličniji sferi, drugim riječima ako je e bliži vrijednosti jedan, elipsoid je izduljeniji, ako je pak e bliži vrijednosti nula, rotacijski elipsoid teži sferoidnom obliku.

Spljoštenost elipsoida f definirana je omjerom razlike velike i male poluosi elipsoida:

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (3.4)$$

Polarni polumjer dan izrazom (3.5) također je jedan od brojnih parametara (konstantni) elipse koji nalazi primjenu u raznim geodetskim matematičkim relacijama

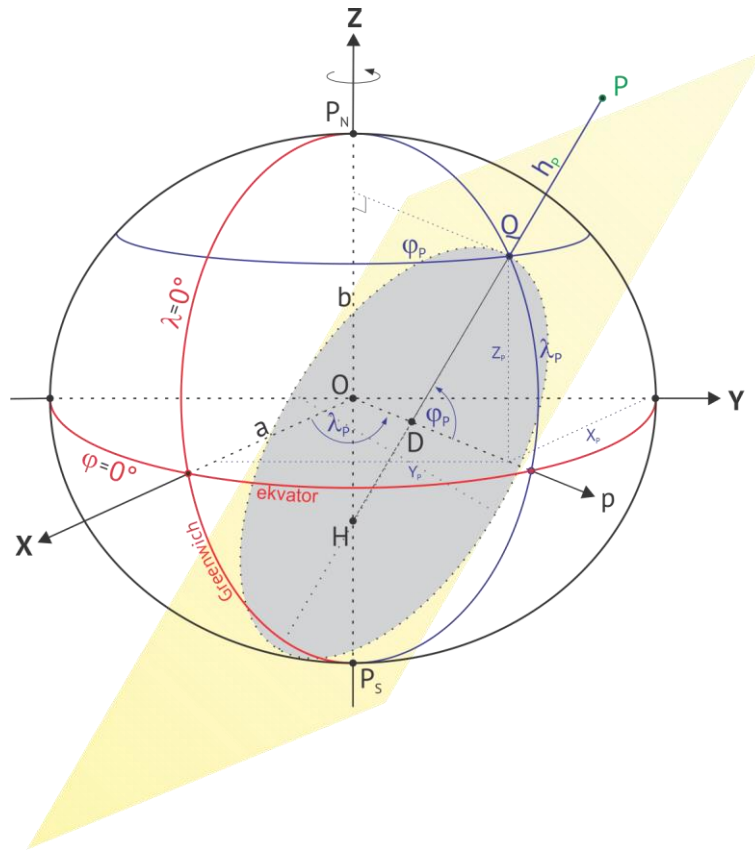
$$c = \frac{a^2}{b} \quad (3.5)$$

Pravac normale točke na elipsoidu uvijek presijeca rotacijsku os elipsoida (Z -os pridruženog Kartezijevog pravokutnog 3D koordinatnog sustava) u točki H koja predstavlja centar zakrivljenosti ravnine prvog vertikala (slika 3.2). Duljina dužine $\overline{HQ}$ koja se nalazi na pravcu normale, veličina je koja se naziva polumjer zakrivljenosti prvog vertikala (Čubranić, 1974):

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.6)$$

gdje je a velika poluos elipsoida, e prvi numerički ekscentricitet elipsoida dan izrazom (3.2), a φ geodetska širina promatrane točke.

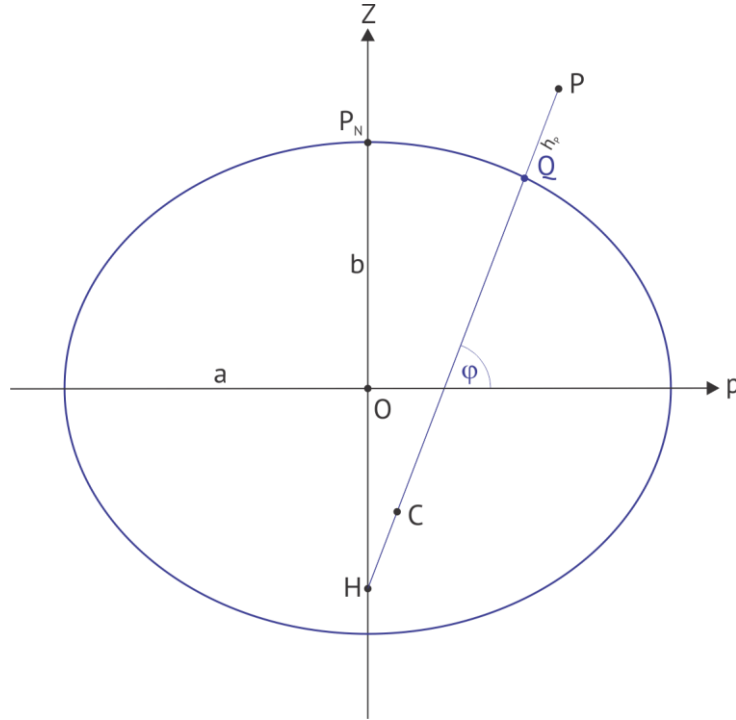
Normalna (ili vertikalna) ravnina svaka je ravnina koja sadrži normalu promatrane točke na elipsoidu te ukoliko se promatra krivulja koja je nastala presjekom normalne ravnine s plohom elipsoida ista se naziva *normalni presjek*. Svaka ravnina koja prolazi elipsoidom, a ne sadrži normalu, naziva se kosa ravnina i s plohom elipsoida, pri presijecanju, tvori krivulju koja se naziva *kosi presjek*. U točki promatranja na rotacijskom elipsoidu može se postaviti beskonačno mnogo vertikalnih ravnina (pod nekim kutom), ali samo je jedna normalna ravnina koja je okomita na ravninu meridijana promatrane točke i naziva se *ravnina prvog vertikala* (slika 3.3 žuto).



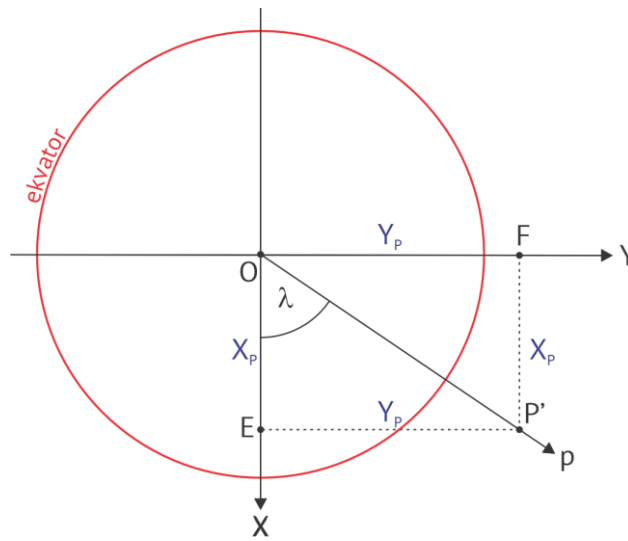
Slika 3.3: Ravnina prvog vertikala (žuto) i prvi vertikal (sivo) (Pavasović, 2025)

Presjek ravnine prvog vertikala s plohom rotacijskog elipsoida tvori krivulju (sve takve krivulje su elipse) koja se naziva *prvi vertikal* (slika 3.3 sivo). Iz navedenoga je za zaključiti kako su i meridijani normalni presjeci koji nastaju presijecanjem normalne ravnine (koja ujedno i sadrži rotacijsku os elipsoida) s plohom elipsoida.

Meridijani i paralele su krivulje na plohi rotacijskog elipsoida, od kojih su meridijani elipse (slika 3.4), dok su paralele kružnice (slika 3.5). Paralele nastaju presijecanjem rotacijskog elipsoida s ravninama okomitim na rotacijsku os elipsoida (os Z pridruženog Kartezijevog pravokutnog 3D koordinatnog sustava), odnosno s ravninama paralelnim s ravninom ekvatora tj. spadaju u kose presjeke.



Slika 3.4: Meridijanska elipsa točke P na fizičkoj površini Zemlje, odnosno točke Q na elipsoidu (Pavasović, 2025; Deakin i Hunter, 2013)



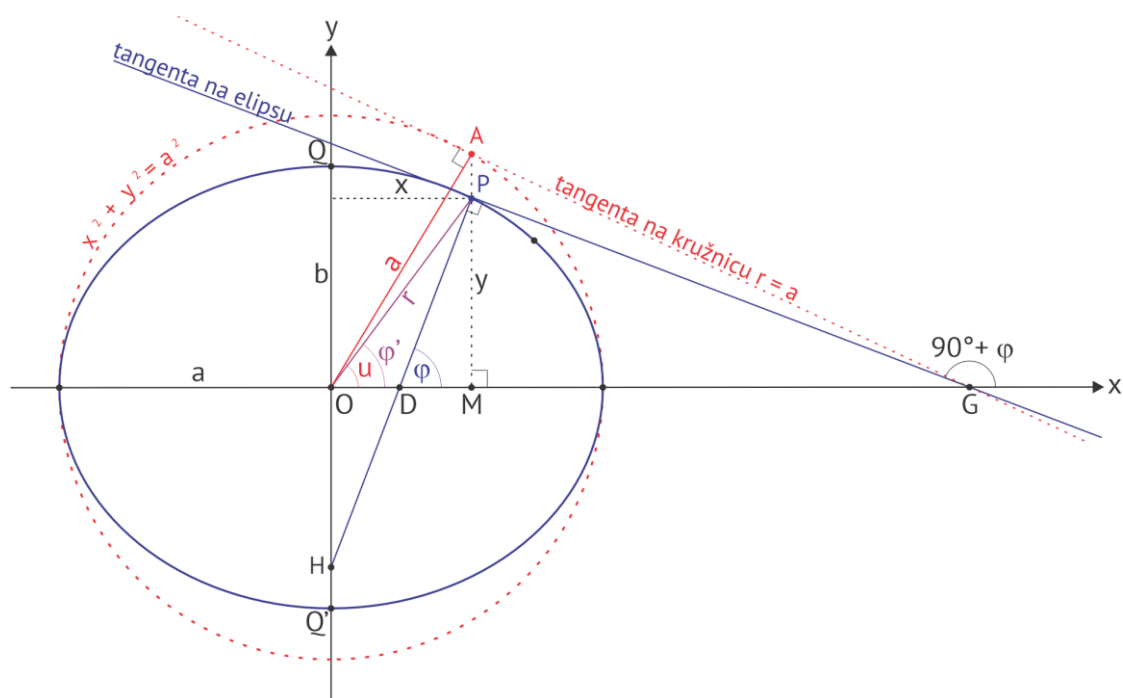
Slika 3.5: Tlocrtni prikaz ekvatorske kružnice (Pavasović, 2025; Deakin i Hunter, 2013)

Na slici 3.4, polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse u točki Q elipsoida predstavlja dužinu $\overline{CQ}$ gdje je točka C centar zakrivljenosti meridijanske elipse. Polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse dan je matematičkom relacijom (Muminagić, 1987):

$$M(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.7)$$

gdje je a velika poluos elipsoida, e prvi numerički ekscentricitet elipsoida dan izrazom (3.2), a φ geodetska širina promatrane točke.

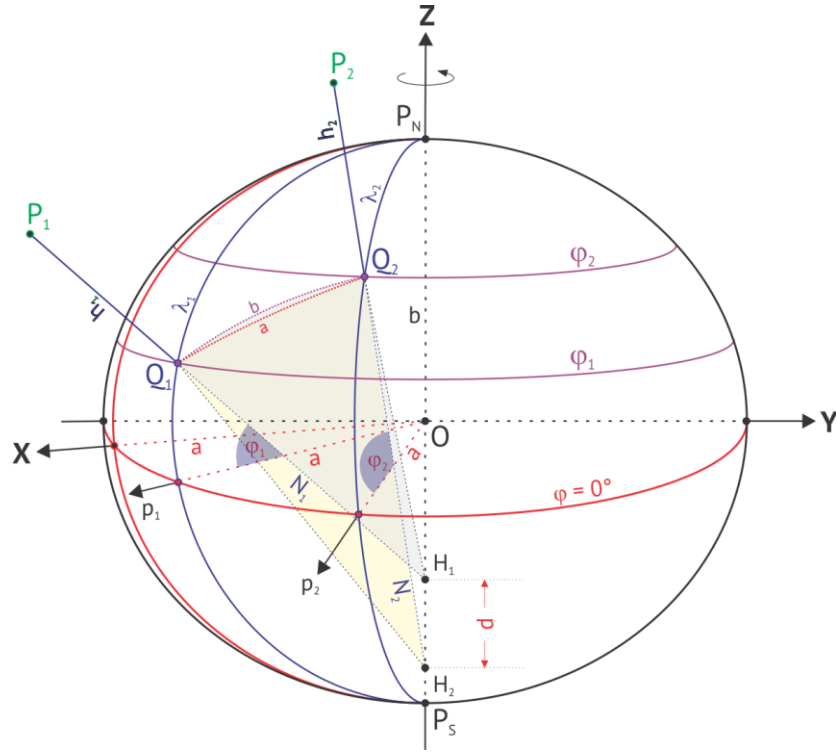
Uz geodetsku širinu φ , na elipsoidu postoje *reducirana širina* u te *geocentrična širina* φ' (slika 3.6). Na slici 3.6 prikazana je meridijanska elipsa točke P na elipsoidu u xy 2D Kartezijevom koordinatnom sustavu. Opiše li se kružnica polumjera velike poluosi elipsoida $r = a$ (ekvatorski radijus) iz središta elipsoida O i produži li se pravac y koordinate točke P do opisane kružnice, u presjecištu se dobiva točka A . Radij vektor $\overline{OA}$ i x -os Kartezijevog pravokutnog xy 2D koordinatnog sustava (koja leži u ravnini ekvatora elipsoida) zatvaraju kut koji se naziva *reducirana širina* (u). *Geocentrična širina* (φ') kut je kojeg radij vektor $\overline{OP}$ zatvara s x -osi Kartezijevog pravokutnog xy 2D koordinatnog sustava (koja leži u ravnini ekvatora elipsoida).



Slika 3.6: Geodetska, reducirana i geocentrična širina na elipsoidu (Pavasović, 2025; Deakin i Hunter, 2013)

Kada normalna ravnina presiječe plohu elipsoida nastaje krivulja koja se naziva normalni ili vertikalni presjek i predstavlja jednu od karakterističnih krivulja na plohi rotacijskog elipsoida. Na slici 3.7, točke P_1 i P_2 fizičke površine Zemlje preslikavaju se duž svojih normala u korespondente točke na plohi elipsoida Q_1 i Q_2 koje imaju geodetske širine φ_1 i φ_2 ($\varphi_2 > \varphi_1$). Točke H_1 i H_2 su presjecišta normala točaka Q_1 i Q_2 s rotacijskom osi elipsoida ($\overline{P_N P_S} = 2b$). Položi li se normalna ravnina normalom točke Q_1 prema točki Q_2 (sivi $\triangle Q_1 H_1 Q_2$ na slici 3.7), ona presijeca plohu elipsoida u krivulji a koja se zove pravi ili direktni normalni presjek točke Q_1 koji je istovremeno obrnuti normalni presjek za točku Q_2 . Analogno vrijedi i za točku

Q_2 . tj. položi li se normalna ravnina normalom točke Q_2 . prema točki Q_1 (žuti $\triangle Q_1 H_2 Q_2$ na slici 3.7) ona presijeca plohu elipsoida u krivulji b koja se zove pravi ili direktni normalni presjek točke Q_2 koji je istovremeno obrnuti normalni presjek za točku Q_1 . Krivulje a i b su međusobno obrnuti normalni presjeci, odnosno predstavljaju pojavu na plohi elipsoida koja se naziva dvojnost normalnih presjeka (Deakin i Hunter, 2013; Rapp, 1991), a matematički se dokazuje postojanošću dužine $d = \overline{H_1 H_2}$.

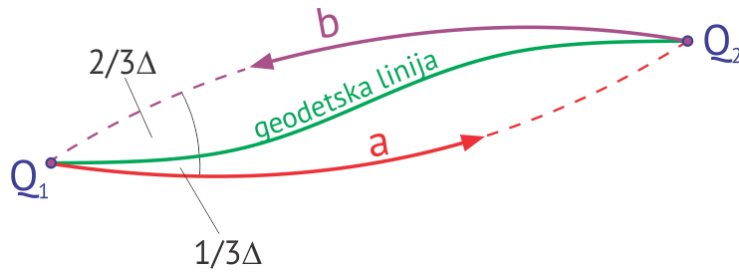


Slika 3.7: Dvojnost normalnih presjeka na plohi rotacijskog elipsoida (Pavasović, 2025)

Specifični slučajevi kada ne postoji dvojnost normalnih presjeka na plohi rotacijskog elipsoida su: kada se obje točke nalaze istom meridijanu ($\lambda_1 = \lambda_2$), kada se obje točke nalaze na istoj paraleli ($\varphi_1 = \varphi_2$) i kada se obje točke nalaze na ekvatoru ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0^\circ$).

Najvažnija krivulja na plohi rotacijskog elipsoida je *geodetska linija* (slika 3.8) koja predstavlja najkraću udaljenost između dvije točke na elipsoidu (u ovom slučaju Q_1 i Q_2), odnosno za diferencijalnu duljinu luka ds između dviju točaka na rotacijskom elipsoidu vrijedi:

$$\int_{Q_1}^{Q_2} ds = \min \quad (3.8)$$



Slika 3.8: Geodetska linija između točaka Q_1 i Q_2 na elipsoidu (zeleno) (Pavasović, 2025)

Osnovna svojstva geodetske linije su (Rapp, 1991; Čubranić, 1974):

- geodetska linija između dviju točaka na rotacijskom elipsoidu Q_1 i Q_2 uvijek je položena bliže pravom (direktnom) normalnom presjeku a točke Q_1 i dijeli kut između uzajamnih normalnih presjeka a i b u omjeru 1:2, odnosno geodetska linija s direktnim normalnim presjekom točke Q_1 zatvara $1/3$ kuta Δ između uzajamnih normalnih presjeka a i b ,
- *meridijani su geodetske linije* jer je meridijanska elipsa normalni presjek koji ujedno sadrži normalu na plohu elipsoida u promatranoj točki, a koja ima geodetski azimut $\alpha = 0^\circ$ ili $\alpha = 180^\circ$,
- *ekvator je također geodetska linija* (dok paralele to nisu) u kojoj je geodetski azimut $\alpha = 90^\circ$ ili $\alpha = 270^\circ$ i
- geodetska linija ima geodetsku zakrivljenost jednaku nuli (0).

Geodetska linija udovoljava uvjetu da u svakoj točki iste umnožak radijusa paralele r i sinusa geodetskog azimuta α (kuta između ravnine meridijana točke Q_1 i geodetske linije između točaka Q_1 i Q_2) konstanta i takav uvjet naziva se *Clairautov teorem* za geodetsku liniju koji matematički zapisano glasi (Deakin i Hunter, 2013):

$$r_1 \sin \alpha_1 = r_2 \sin \alpha_2 = \dots = r \sin \alpha = C \quad (3.9)$$

Dakle, ako se točke Q_1 i Q_2 nalaze na istom meridijanu tj. imaju istu vrijednost geodetske dužine λ , vrijednost geodetskog azimuta iznosi $\alpha = 0^\circ$ ili $\alpha = 180^\circ$ pa primjenom izraza (4.10) vrijedi da je $\sin \alpha = 0$ tj. ispunjen Clairautov teorem je dokazan i meridijani su geodetske linije. Također, ako se točke Q_1 i Q_2 nalaze na ekvatoru gdje je geodetski azimut $\alpha = 90^\circ$ ili $\alpha = 270^\circ$, primjenom izraza (4.10) vrijedi da je $\sin \alpha = 1$ i $r = a = C$ (polumjer ekvatora jednak je velikoj poluosi elipsoida a) pa je opet Clairautov teorem dokazan i ekvator je također geodetska linija.

3.2. Matematičke operacije nad koordinatama

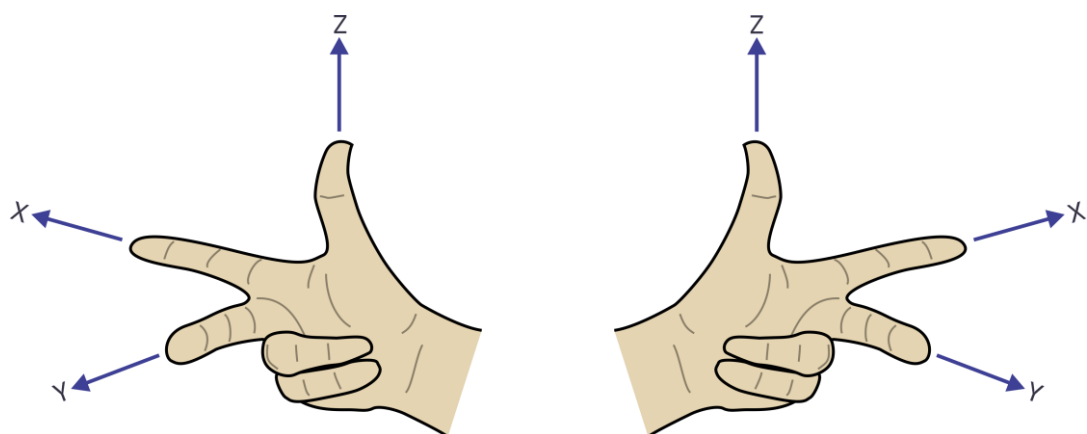
Sukladno ISO 19111 (ISO, 2019), razlikuju se dvije osnovne matematičke operacije nad koordinatama: *konverzija* i *transformacija*. Dok kod konverzije koordinata dolazi do promjene koordinata iz jednog referentnog koordinatnog sustava u drugi koji imaju isti geodetski datum, kod transformacije koordinata dolazi do promjene koordinata između dva referentna koordinatna sustava koji imaju različiti geodetski datum.

U geodeziji, transformacije koordinata općenito se dijele u dvije glavne skupine: *slične* (konformne) transformacije i *afine* transformacije (Deakin, 2006). Odlika sličnih (konformnih) transformacija očituje se u očuvanju kutnih odnosa pralika (predmeta transformacije) nakon transformacije zbog postojanosti jedinstvene promjene mjerila po svim koordinatnim osima između dvaju koordinatnih sustava. Odlika afinih transformacija je da postoje različita mjerila za svaku pojedinu koordinatnu os. U ovom radu predmet rasprave će biti slična (konformna) transformacija koja se najčešće upotrebljava u geodeziji za transformaciju koordinata između dva desno orijentirana (najčešće) 3D Kartezijeva koordinatna sustava, a radi se o *Helmertovoj 7-parametarskoj 3D transformaciji* ili *Burša-Wolf transformaciji*, danoj relacijom (Banković i dr., 2024; Deakin, 2006):

$$X_o = T + DRX_i \quad (3.10)$$

gdje su X_i i X_o vektori položaja (3D Kartezijevih pravokutnih koordinata) u polazišnom (eng. *input* – i) i odredišnom (eng. *output* – o) koordinatnom sustavu, T vektor translacije odnosno koordinatna razlika ishodišta polazišnog i odredišnog koordinatnog sustava, R rotacijska matrica sastavljena od Eulerovih kutova rotacije (α_x , α_y i α_z) oko pojedine koordinatne osi, zadanih u lučnim sekundama (") ili *mas* (eng. *miliarcsecond* = 10^{-3} ") i D jedinstveno mjerilo duž koordinatnih osi koje se često iskazuje kao $D = 1 + ds$ gdje ds predstavlja faktor promjene mjerila iskazan u *ppm* (eng. *part per million* = 10^{-6}) ili *ppb* (eng. *part per billion* = 10^{-9}).

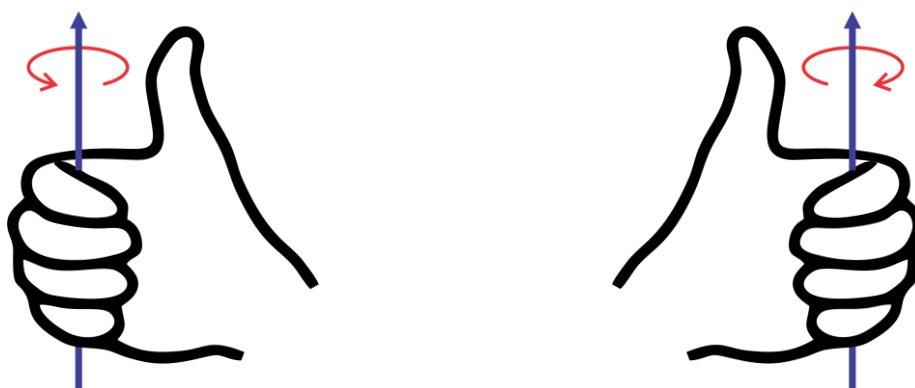
U postupku transformacije, izrazito je važno poznavanje orijentacije koordinatnog sustava. Razlikuju se *desno* i *lijevo orijentirani koordinatni sustavi*. Desno orijentirani koordinatni sustavi najučestaliji su u geodeziji dok se lijevo orijentirani javljaju kod instrument-fiksni koordinatnih sustava i kod koordinatnih sustava u ravnini kartografske projekcije (Rummel i Peters, 2001). Orijentacija desno orijentiranih koordinatnih sustava definirana je *pravilom desne*, a lijevih *pravilom lijeve ruke* (slika 3.9).



Slika 3.9: Pravilo desne (lijevo) i pravilo lijeve ruke (desno) za Kartezijev pravokutni 3D koordinatni sustav (Pavasović, 2025)

Pravilo desne ruke kaže da palac predstavlja smjer Z -osi, kažiprst X -osi, a srednji prst Y -osi koordinatnog sustava. Pravilo lijeve ruke analogno je pravilu desne ruke. Razlika lijevo orijentiranih i desno orijentiranih koordinatnih sustava jest u suprotnoj orijentaciji Y -osi koordinatnog sustava, odnosno Y -osi imaju suprotno orijentiran pozitivan smjer, a time i prirast koordinata. Dakle, Kartezijev pravokutni 3D desno orijentirani i Kartezijev pravokutni 3D lijevo orijentirani koordinatni sustavi *nisu ekvivalentni* jer prostornom translacijom i rotacijom jednog sustava naspram drugog nije moguće obaviti poklapanje koordinatnih osi obaju sustava.

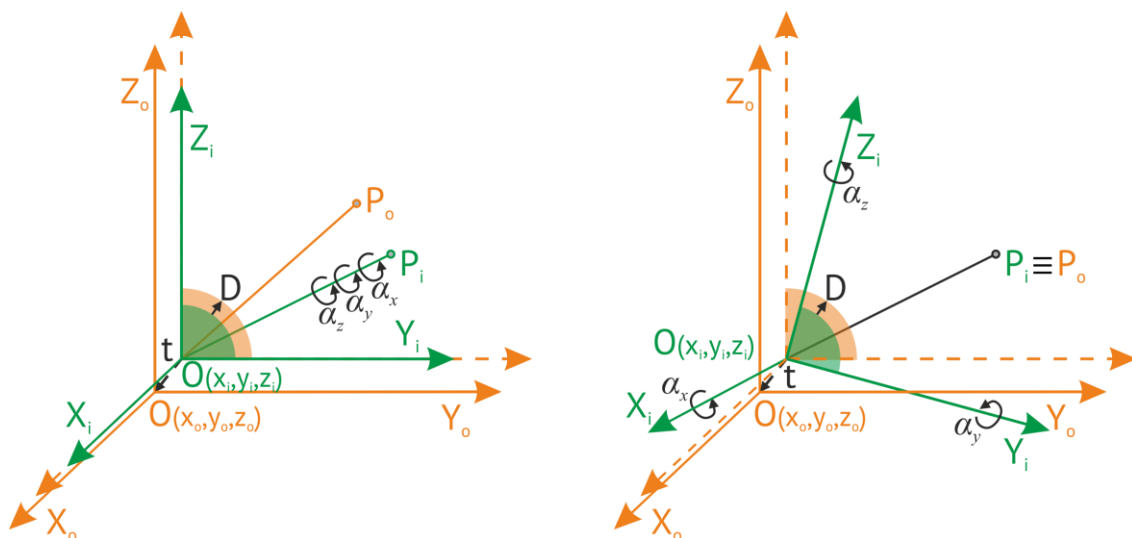
Ukoliko se promatraju rotacije oko pojedinih koordinatnih osi desno i lijevo orijentiranih Kartezijevih pravokutnih 3D koordinatnih sustava također se primjenjuju pravila desne i lijeve ruke (slika 3.10). Pravilo desne ruke za desno orijentirane koordinatne sustave kaže da se prstima desne ruke obuhvati os rotacije, a palac usmjeri u pozitivnom smjeru te osi te tada prsti pokazuju smjer rotacije koji je suprotan od smjera kazaljke na satu, dok pravilo lijeve ruke za lijevo orijentirane koordinatne sustave kaže da se prstima lijeve ruke obuhvati os rotacije, a palac usmjeri u pozitivnom smjeru te osi te tada prsti pokazuju smjer rotacije koji je identičan smjeru kazaljke na satu.



Slika 3.10: Pravilo desne (lijevo) i pravilo lijeve ruke (desno) za rotacije (Pavasović, 2025)

Prilikom transformacije koordinata nužan metapodatak je korištena konvencija o načinu rotacije tj. je li vektor položaja identične točke u oba koordinatna sustava rotira ili je fiksni. Iz navedenog razloga, prilikom određivanja matrice rotacije R razlikuju se sljedeće konvencije transformacije (Pavasović, 2025; Banković i dr., 2024):

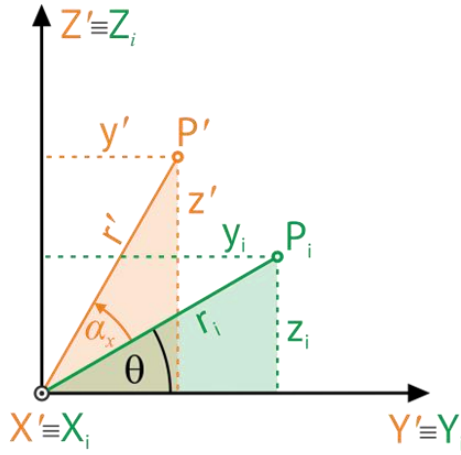
- PVT (eng. *Position Vector Transformation*) konvencija je prema kojoj je koordinatni sustav fiksni, dok vektor položaja rotira pri čemu se dobivaju koordinate u drugom koordinatnom sustavu. U kontekstu rotacije koordinatnih sustava, ova konvencija odgovara rotaciji polazišnog koordinatnog sustava (i) oko odredišnog (o) te se primjenjuje u slučaju transformacije između dva referentna koordinatna sustava s globalno definiranim geodetskim datumom i predstavlja tzv. konvenciju transformacije Međunarodnog servisa za Zemljinu rotaciju i referentne sustave (eng. *International Earth Rotation and Reference Systems Service – IERS*) i
- CFR (eng. *Coordinate Frame Rotation*) konvencija prema kojoj je vektor položaja fiksni, dok koordinatni sustav rotira pri čemu se dobivaju koordinate u drugom koordinatnom sustavu. U kontekstu rotacije koordinatnih sustava, ova konvencija odgovara rotaciji odredišnog (o) koordinatnog sustava oko polazišnog (i) te se primjenjuje u slučaju transformacije između dva referentna koordinatna sustava s globalno i lokalno definiranim geodetskim datumom.



Slika 3.11: PVT konvencija rotacije (lijevo) i CFR konvencija rotacije (desno) (Pavasović, 2025)

3.2.1 PVT konvencija transformacije

U postupku transformacije, prvo je potrebno zarotirati polazišni sustav, zatim promijeniti mjerilo kako bi se postigla uniformnost osi te naposljetku translirati ishodište polazišnog u ishodište odredišnog koordinatnog sustava. Na slici 3.11 (lijevo) prikazana su tri Eulerova kuta rotacije kojima se iz orijentacije polazišnog koordinatnog sustava ($X_i Y_i Z_i$) prelazi u orijentaciju odredišnog koordinatnog sustava ($X_o Y_o Z_o$). Kako bi se polazišni koordinatni sustav zarotirao u odredišni koordinatni sustav, potrebna je rotacija polazišnog sustava po X (slika 3.12), zatim po Y te naposljetku po Z -osi. Rotacijom oko X -osi dolazi se do privremenog koordinatnog sustava $X'Y'Z'$, zatim rotacijom oko Y -osi do sustava $X''Y''Z''$ te u konačnici, rotacijom oko Z -osi do odredišnog sustava $X_o Y_o Z_o$.



Slika 3.12: Rotacija oko X-osi prema PVT konvenciji (Pavasović, 2025)

Na slici 3.12, iz narančastog trokuta, vrijede sljedeće relacije:

$$\sin(\theta + \alpha_X) = \frac{z'}{r} \rightarrow z' = r \cdot \sin(\theta + \alpha_X) \quad (3.11)$$

$$\cos(\theta + \alpha_X) = \frac{y'}{r} \rightarrow y' = r \cdot \cos(\theta + \alpha_X) \quad (3.12)$$

$$z' = r \cdot \sin \theta \cos \alpha_X + r \cdot \cos \theta \sin \alpha_X \quad (3.13)$$

$$y' = r \cdot \cos \theta \cos \alpha_X - r \cdot \sin \theta \sin \alpha_X \quad (3.14)$$

Također, iz zelenog trokuta sa slike 3.12, vrijedi:

$$y_i = r \cdot \cos \theta \quad (3.15)$$

$$z_i = r \cdot \sin \theta \quad (3.16)$$

Uvrštavanjem izraza (3.16) i (3.15) u izraze (3.13) i (3.14), dobiva se:

$$z' = z_i \cos \alpha_X + y_i \sin \alpha_X \quad (3.17)$$

$$y' = y_i \cos \alpha_X - z_i \sin \alpha_X \quad (3.18)$$

što uz $x' = x_i$ u matričnom zapisu glasi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_X & -\sin \alpha_X \\ 0 & \sin \alpha_X & \cos \alpha_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

pri čemu matrica

$$\mathbf{R}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_X & -\sin \alpha_X \\ 0 & \sin \alpha_X & \cos \alpha_X \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

predstavlja elementarnu rotacijsku matricu oko osi X prema PVT konvenciji.

Analogno izvodu rotacijske matrice oko X -osi, izvede se rotacijske matrice oko Y i Z -osi:

$$\mathbf{R}_Y = \begin{bmatrix} \cos \alpha_Y & 0 & \sin \alpha_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_Y & 0 & \cos \alpha_Y \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{R}_Z = \begin{bmatrix} \cos \alpha_Z & -\sin \alpha_Z & 0 \\ \sin \alpha_Z & \cos \alpha_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Umnoškom tri elementarne rotacijske matrice iz izraza (3.20), (3.21) i (3.22) dobiva se *ukupna* (složena ili kompletna) *matrica rotacije* za prijelaz iz polazišnog u odredišni koordinatni sustav:

$$\mathbf{R}_{PVT} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_Y \cos \alpha_Z & \sin \alpha_X \sin \alpha_Y \cos \alpha_Z - \cos \alpha_X \sin \alpha_Z & \cos \alpha_X \sin \alpha_Y \cos \alpha_Z + \sin \alpha_X \sin \alpha_Z \\ \cos \alpha_Y \sin \alpha_Z & \sin \alpha_X \sin \alpha_Y \sin \alpha_Z + \cos \alpha_X \cos \alpha_Z & \cos \alpha_X \sin \alpha_Y \sin \alpha_Z - \sin \alpha_X \cos \alpha_Z \\ -\sin \alpha_Y & \sin \alpha_X \cos \alpha_Y & \cos \alpha_X \cos \alpha_Y \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

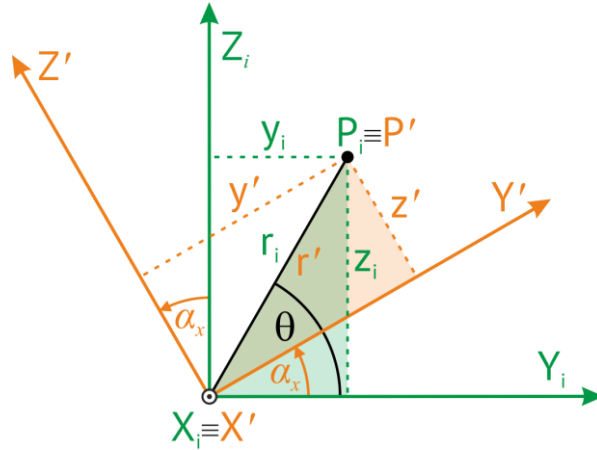
Kako su kutovi rotacije ($\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z$) najčešće mali kutovi za koje vrijedi $\sin \alpha_i \cong \alpha_i$, $\cos \alpha_i \cong 1$, uz zanemarivanje članova viših redova ($\sin \alpha_i \sin \alpha_j = 0$), matrica rotacije se može pojednostavniti tj. prijeći u *jednostavnu rotacijsku matricu*:

$$\mathbf{R}_{PVT} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_Z & \alpha_Y \\ \alpha_Z & 1 & -\alpha_X \\ -\alpha_Y & \alpha_X & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

3.2.2 CFR konvencija transformacije

U postupku transformacije, prvo je potrebno zarotirati polazišni sustav, zatim promijeniti mjerilo kako bi se postigla uniformnost osi te naposljetku translirati ishodište polazišnog u ishodište odredišnog koordinatnog sustava. Na slici 3.11 (desno) prikazana su tri Eulerova kuta

rotacije kojima se iz orijentacije polazišnog koordinatnog sustava ($X_i Y_i Z_i$) prelazi u orijentaciju odredišnog koordinatnog sustava ($X_o Y_o Z_o$). Kako bi se polazišni koordinatni sustav zarotirao u odredišni koordinatni sustav, potrebna je rotacija polazišnog sustava po X (slika 3.13), zatim po Y te naposljetku po Z -osi. Rotacijom oko X -osi dolazi se do privremenog koordinatnog sustava $X' Y' Z'$, zatim rotacijom oko Y -osi do sustava $X'' Y'' Z''$ te u konačnici, rotacijom oko Z -osi do odredišnog sustava $X_o Y_o Z_o$.



Slika 3.13: Rotacija oko X -osi prema CFR konvenciji (Pavasović, 2025)

Iz narančastog pravokutnog trokuta, sa slike 3.13, vrijedi:

$$\sin(\theta - \alpha_x) = \frac{z'}{r} \rightarrow z' = r \cdot \sin(\theta - \alpha_x) \quad (3.25)$$

$$\cos(\theta - \alpha_x) = \frac{y'}{r} \rightarrow y' = r \cdot \cos(\theta - \alpha_x) \quad (3.26)$$

$$z' = r \cdot \sin \theta \cos \alpha_x - r \cdot \cos \theta \sin \alpha_x \quad (3.27)$$

$$y' = r \cdot \cos \theta \cos \alpha_x + r \cdot \sin \theta \sin \alpha_x \quad (3.28)$$

Također, iz zelenog pravokutnog trokuta vrijedi:

$$y_i = r \cdot \cos \theta \quad (3.29)$$

$$z_i = r \cdot \sin \theta \quad (3.30)$$

Ukoliko se izrazi (3.30) i (3.31) uvrste u izraze (3.27) i (3.28), dobiva se:

$$x' = x_i \quad (3.31)$$

$$y' = y_i \cos \alpha_X + z_i \sin \alpha_X \quad (3.32)$$

$$z' = z_i \cos \alpha_X - y_i \sin \alpha_X \quad (3.33)$$

odnosno u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_X & \sin \alpha_X \\ 0 & -\sin \alpha_X & \cos \alpha_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Pri čemu matrica

$$\mathbf{R}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_X & \sin \alpha_X \\ 0 & -\sin \alpha_X & \cos \alpha_X \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Predstavlja rotacijsku matricu oko osi X prema CFR konvenciji.

Analogno izvodu rotacijske matrice oko X -osi, izvede se rotacijske matrice oko Y i Z -osi:

$$\mathbf{R}_Y = \begin{bmatrix} \cos \alpha_Y & 0 & -\sin \alpha_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_Y & 0 & \cos \alpha_Y \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{R}_Z = \begin{bmatrix} \cos \alpha_Z & 0 & -\sin \alpha_Z \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_Z & 0 & \cos \alpha_Z \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Umnoškom tri elementarne rotacijske matrice iz izraza (3.35), (3.36) i (3.37) dobiva se *ukupna* (složena ili kompletna) *matrica rotacije* za prijelaz iz polazišnog u odredišni koordinatni sustav:

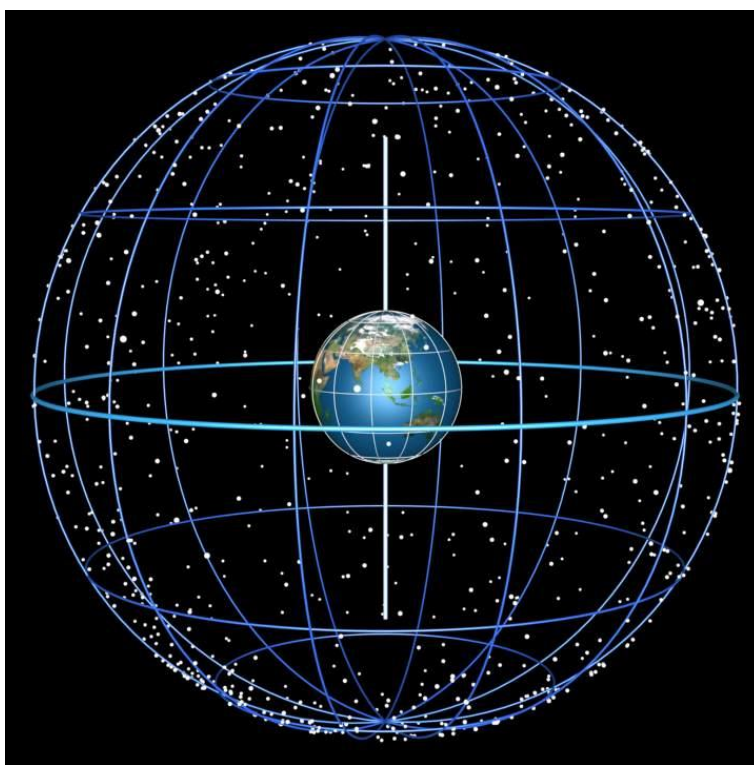
$$\mathbf{R}_{CFR} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_Y \cos \alpha_Z & \sin \alpha_X \sin \alpha_Y \cos \alpha_Z + \cos \alpha_X \sin \alpha_Z & \sin \alpha_X \sin \alpha_Z - \cos \alpha_X \sin \alpha_Y \cos \alpha_Z \\ -\cos \alpha_Y \sin \alpha_Z & \cos \alpha_X \cos \alpha_Z - \sin \alpha_X \sin \alpha_Y \sin \alpha_Z & \sin \alpha_X \cos \alpha_Z + \cos \alpha_X \sin \alpha_Y \sin \alpha_Z \\ \sin \alpha_Y & -\sin \alpha_X \cos \alpha_Y & \cos \alpha_X \cos \alpha_Y \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Kako su kutovi rotacije $(\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z)$ najčešće mali kutovi za koje vrijedi $\sin \alpha_i \cong \alpha_i$, $\cos \alpha_i \cong 1$, uz zanemarivanje članova viših redova ($\sin \alpha_i \sin \alpha_j = 0$), matrica rotacije se može pojednostavniti tj. prijeći u *jednostavnu rotacijsku matricu*:

$$\mathbf{R}_{CFR} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_Z & -\alpha_Y \\ -\alpha_Z & 1 & \alpha_X \\ \alpha_Y & -\alpha_X & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

4. KOORDINATNI SUSTAVI NEBESKE SFERE

U ovom poglavlju predstavljene su teorijske osnove koordinatnih sustava nebeskih sfera. Općenito jedan od zadataka geodetske astronomije definiranje je položaja nebeskih tijela na nebeskoj sferi odnosno nebeskom svodu. U geodeziji, poznavanje točnog položaja nebeskih tijela važan je faktor prilikom definiranja vremenskih skala. Također, u geodeziji se primjenjuju astro–geodetska mjerenja, odnosno koriste se položaji nebeskih tijela u rješavanju geodetskih zadataka (određivanje astro–geodetskih otklona vertikale, nezavisna kontrola proboja tunela itd.). *Nebeska sfera* ili *svod* (slika 4.1) zamišljena je sfera proizvoljnog polumjera po kojoj se prividno gibaju nebeska tijela (zvijezde i planeti), a sastoji se od mreže nebeskih meridijana i paralela (Špoljarić, 2021).

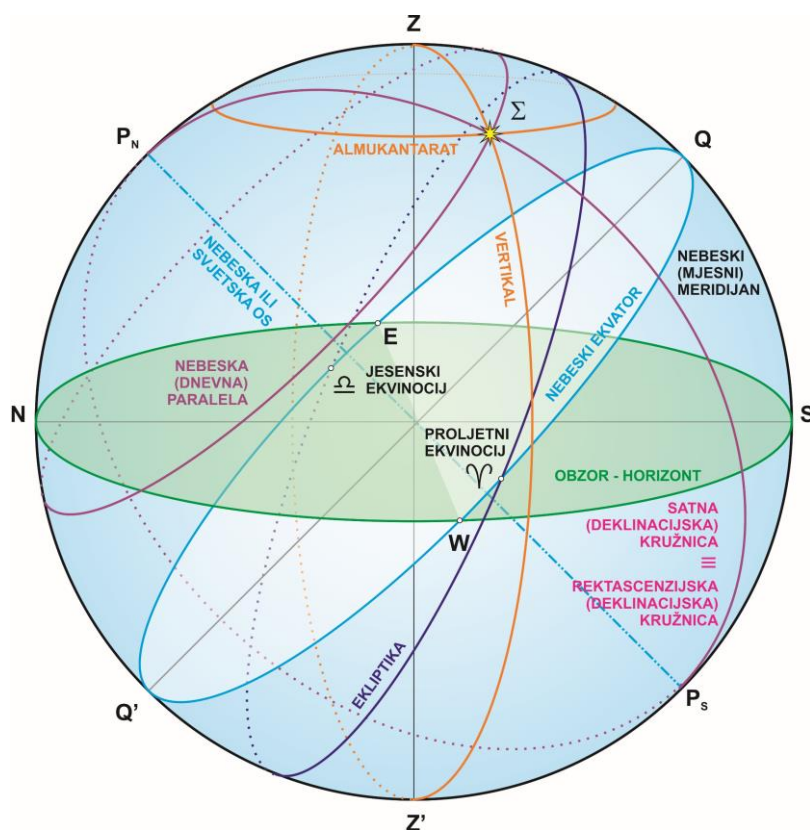


Slika 4.1:Nebeska sfera (URL 2)

4.1. Osnovni elementi nebeske sfere

Nužno je prvo predstaviti osnovne elementne nebeske sfere (slika 4.2) iz razloga što pojedini osnovni elemenata nebeske sfere definiraju koordinatne sustave nebeske sfere. Promatrač, gledajući nebeski svod, uvijek vidi samo njegovu polovicu odnosno vidljivi dio nebeskog svoda dok je nevidljivi dio zaklonjen Zemljom. Vidljivi i nevidljivi dio svoda dijeli *ravnina (nebeskog) horizonta* promatrača koja presijeca nebesku sferu te tako čini kružnicu nebeskog horizonta, a koja je definirana sjevernom (*N*), južnom (*S*), istočnom (*E*) te zapadnom točkom

obzora (W), odnosno nebeski horizont kružnica je opisana točkama S , W , N i E . Uzme li se smjer viska odnosno smjer ubrzanja sile teže u položaju promatrača te produži li se pravcem, isti probada nebesku sferu u točkama *zenita* (Z) i *nadira* (Z'). Kružnica nebeskog obzora (horizonta) kao i točke zenita i nadira promjenjive su veličine na nebeskoj sferi koje ovise o položaju promatrača. Položi li se pravac Zemljinom rotacijskom osi, definira se *nebeska* ili *svjetska os*, ista probada nebesku sferu u *sjevernom* (P_N) i *južnom* (P_S) *nebeskom polu*. Produži li se ravnina Zemljinog ekvatora u nedogled, ista presijeca nebesku sferu te tvori kružnicu *nebeskog ekvatora* koja se presijeca ravninu (kružnicu) nebeskog horizontom u istočnoj (E) i zapadnoj (W) točki. Kružnica nebeskog ekvatora također je sačinjena od najviše (Q) i najniže (Q') točke nebeskog ekvatora (Špoljarić, 2021; Jekeli, 2016). Ravnina nebeskog ekvatora dijeli nebesku sferu na južnu i sjevernu nebesku hemisferu. Promatra li se sa Zemlje prividno godišnje gibanje Sunca, na nebeskoj sferi definira se kružnica ekliptike koja presijeca nebeski ekvator u *proljetnom* (Υ) i *jesenskom* (Ω) *ekvinociju*. Spoje li se točke N i S ravnine horizonta, tvori se *podnevna linija*. Ukoliko se uspješno žele opisati koordinate nebeskih, nužno je uspostaviti pomoćne kružnice koje omogućuju definiranje koordinata nebeskog tijela koje se promatra. Položaj nebeskog objekta na nebeskoj sferi koja predstavljen je točkom Σ . Definira li se (polu) kružnica točkama Z , Σ i Z' , ista definira ravninu (kružnicu) *vertikala* koja je okomita na nebeski horizont odnosno nebeski obzor promatrača. Ravnina okomita na ravninu vertikala, paralelna s ravninom horizonta promatrača, koja prolazi točkom nebeskog tijela, presijeca nebesku sferu u pomoćnoj kružnici *almukantarata*. Točke P_N , Σ i P_S tvore (polu)kružnicu nebeske sfere – *satnu* ili *deklinacijsku kružnicu*, okomitu na ravninu nebeskog ekvatora (Soffel i Langhas, 2013). Ravnina paralelna s ravninom nebeskog ekvatora, koja prolazi kroz nebesko tijelo na nebeskoj sferi (Σ) pri presijecanju s nebeskom sferom tvori kružnicu *nebeske (dnevne) paralele*. U narednom potpoglavlju definirani su glavne i pomoćne koordinate sfernih koordinatnih sustava kao i koordinate kojima jedinstveno definiraju položaj nebeskog tijela.



Slika 4.2: Osnovni elementi nebeske sfere (Špoljarić, 2021)

Opažatelj na fizičkoj površini Zemlje ne može procijeniti koje mu je nebesko tijelo bliže, a koje dalje pa mu sva promatrana nebeska tijela izgledaju kao točke sfere koje su jednako udaljene od stajališta. Zbog toga, pri određivanju položaja nebeskih tijela koja se nalaze na velikim udaljenostima od fizičke površine Zemlje (radi se o svjetlosnim godinama), opažatelja ne zanimaju udaljenosti do nebeskih tijela odnosno udaljenost se u smislu koordinate zanemaruje, već isključivo kutne veličine između karakterističnih (referentnih) kružnica (ravlina) povučenih preko nebeskih tijela. Stoga su za jednoznačno definiranje položaja nebeskog tijela u sfernom koordinatnom sustavu dovoljne dvije koordinate (Jekeli, 2016; Soffel i Langhas, 2013).

Prema smještaju ishodišta, nebeska sfera može biti (Špoljarić, 2021):

- *Topocentrična* (mjesna ili stajališna) s ishodištem u stajalištu (topocentru),
- *Geocentrična* s ishodištem u centru masa Zemlje,
- *Heliocentrična* s ishodištem u centru masa Sunca,
- *Baricentrična* s ishodištem u centru masa sustava Sunce–Zemlja i
- *Selenocentrična* s ishodištem u centru masa Mjeseca.

Sferni nebeski koordinatni sustavi (tablica 4.1), u ovisnosti o odabiru referentne ravnine, su (Špoljarić, 2021; Jekeli, 2016; Soffel i Langhas, 2013):

- *horizontski,*
- *mjesni ekvatorski,*
- *nebeski ekvatorski,*
- *ekliptički i*
- *galaktički.*

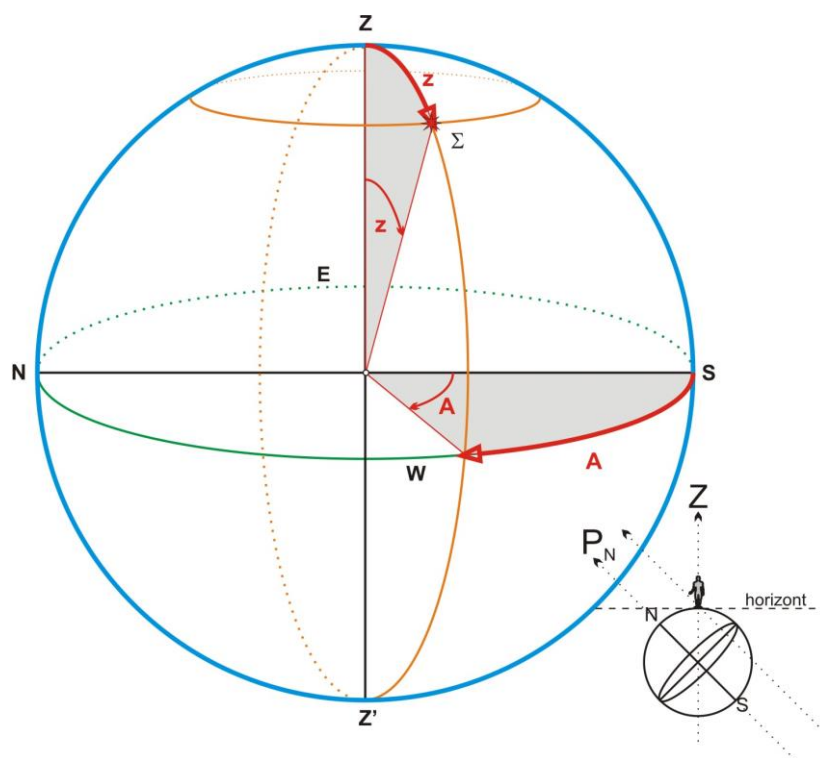
Tablica 4.1: Koordinatni sustavi nebeske sfere (Špoljarić, 2021; Jekeli, 2016; Soffel i Langhas, 2013)

SUSTAV	REFERENTNA RAVNINA		KOORDINATE PO REFERENTNIM RAVNINAMA	
	Primarna	Sekundarna	Primarna	Sekundarna
HORIZONTSKI	Nebeski (pravi) horizont	Vertikal (kroz nebeski pol), mjesni nebeski meridijan (kroz mjesni zenit)	Azimut A	Zenitna daljina z
MESNI EKVATORSKI	Nebeski ekvator	Mjesni nebeski meridijan (kroz mjesni zenit)	Satni kut t	Deklinacija δ
NEBESKI EKVATORSKI	Nebeski ekvator	Ekvinoncijski meridijan (kroz proljetnu točku)	Rektascenzija α	Deklinacija δ
EKLIPTIČKI	Ekliptika	Ekliptički meridijan (kroz proljetnu točku)	Ekliptička duljina λ_{ekl}	Ekliptička širina β_{ekl}
GALAKTIČKI	Galaktički ekvator	Galaktički meridijan (kroz galaktičke polove i nul-točku galak. ekvatora)	Galaktička duljina λ_{gal}	Galaktička širina β_{gal}

Svaki od navedenih koordinatnih sustava ima svoju jedinstvenu primjenu. U narednim potpoglavljima bit će teorijski dodatno potkrijepljeni horizontski koordinatni sustav, mjesni ekvatorski koordinatni sustav te nebeski ekvatorski koordinatni sustav. Navedeni će u narednim poglavljima također biti izrađeni u obliku modela u alatu *GeoGebra*®. Ovaj rad pridodaje važnost geodetskoj astronomiji te stoga, ekliptični i galaktički koordinati sustav zbog manje primjene u geodetskoj astronomiji, neće dodatno teorijski biti potkrijepljeni niti definirani u obliku modela u alatu *GeoGebra*®.

4.2. Horizontski koordinatni sustav

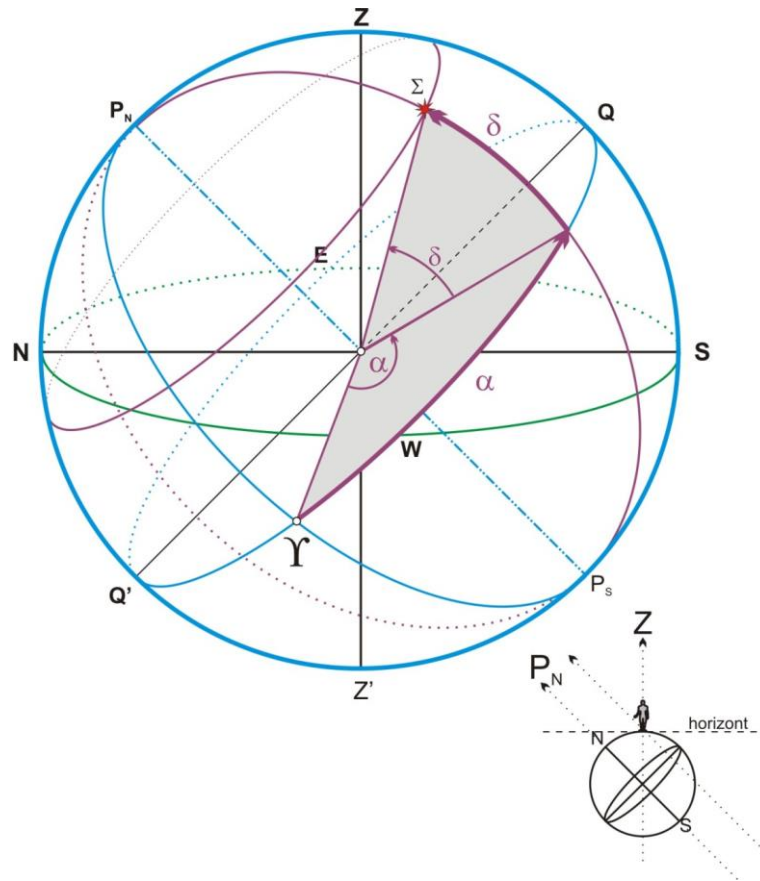
Horizontski koordinatni sustav (slika 4.3) koordinatni je sustav definiran smjerom mjesnog ubrzanja sile teže i smjerom osi rotacije Zemlje. Glavne kružnice su nebeski horizont i vertikal, dok su pomoćne kružnice almukantarat i vertikal. Koordinate koje jedinstveno definiraju položaj nebeskog tijela u ovom koordinatnom sustavu su astronomski azimut (A) te zenitna daljina (z). Astronomski azimut kut je u ravnini nebeskog obzora (horizonta) promatrača koji se kreće u intervalu od 0° do 360° koji se mjeri od južne točke nebeskog horizonta u smjeru dnevnog kretanja nebeskih tijela (prema zapadu). Zenitna daljina kut je u ravnini kružnice vertikala, mjeri se u intervalu od 0° do 180° koji se kreće od smjera točke zenita do smjera točke nadira.



Slika 4.3: Horizontski koordinatni sustav (Špoljarić, 2021)

4.3. Nebeski ekvatorski koordinatni sustav

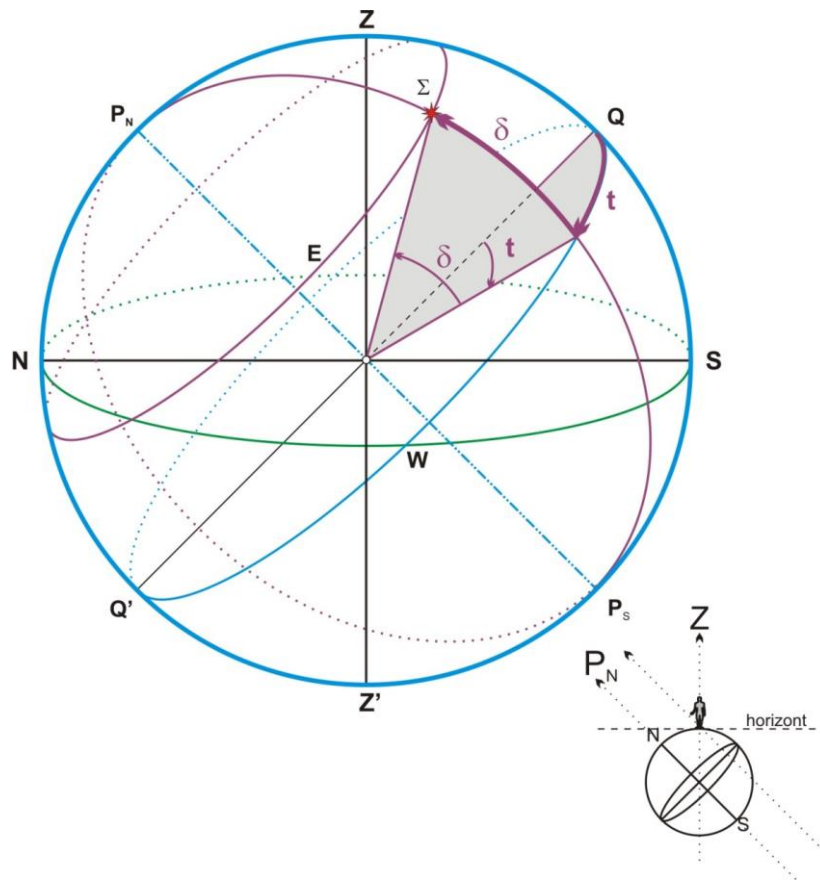
Nebeski ekvatorski koordinatni sustav (slika 4.4) definiran je smjerom rotacijske osi Zemlje i smjerom sjevernog ekliptičkog pola, odnosno smjerom proljetnog ekvinoncija (Υ). Glavne kružnice su kružnica nebeskog ekvatora ($QWQ'E$) i ekvinoncijski meridijan (P_N , Υ , P_S). Pomoćne kružnice ovog koordinatnog sustava su nebeske dnevne paralele i rektascenzijski meridijani (P_N , Σ , P_S). Rektascenzijski meridijani predstavljaju satnu ili deklinacijsku kružnicu. Koordinate koje definiraju jedinstven položaj nebeskog objekta u ovom koordinatnom sustavu su rektascenzija (α) deklinacija (δ). Rektascenzija (α) je kut u ravnini nebeskog ekvatora koji se kreće suprotnim smjerom od dnevnog gibanja planeta od proljetne točke ekvinoncija do rektascenzijskog meridijana (satne ili deklinacijske kružnice) nebeskog tijela u intervalu od 0 do 24 sata. Deklinacija (δ) je kut u ravnini deklinacijske kružnice, između kružnice nebeskog ekvatora i smjera nebeskog tijela te poprima vrijednost u intervalu od -90° do 90° .



Slika 4.4: Nebeski ekvatorski koordinatni sustav (*Špoljarić, 2021*)

4.4. Mjesni ekvatorski koordinatni sustav

Mjesni ekvatorski koordinatni sustav (slika 4.5), poznat i kao sustav satnog kuta, veza je između horizontskog sustava u kojem se obavljaju astro–geodetska mjerenja i nebeskog ekvatorskog sustava (sustava rektascenzije u kojem su zadane koordinate nebeskih tijela). Mjesni ekvatorski sustav fiksiran je uz Zemlju, a jedna koordinata (satni kut) se mijenja zajedno s rotacijom Zemlje. Primarne kružnice ovog sustava su: kružnica nebeskog ekvatora ($QWQ'E$) i mjesni astronomski meridijan (P_NZQSP_S). Sekundarne kružnice su nebeske (dnevne) paralele i meridijan satnog kuta ($P_N\Sigma P_S$) odnosno satna ili deklinacijska kružnica. Koordinate kojima se definira jedinstveni položaj u ovome koordinatnome sustavu su satni kut (t) i deklinacija (δ). Satni kut (t) mjeri se duž kružnice nebeskog ekvatora od najviše točke nebeskog ekvatora (Q) u smjeru dnevnog gibanja nebeskih tijela u intervalu od 0 do 24 sata. Deklinacija (δ) kut je koji se mjeri duž meridijana satnog kuta od kružnice nebeskog ekvatora prema smjeru nebeskog tijela Σ u intervalu od -90° do 90° .



Slika 4.5: Mjesni ekvatorski koordinatni sustav (Špoljarić, 2021)

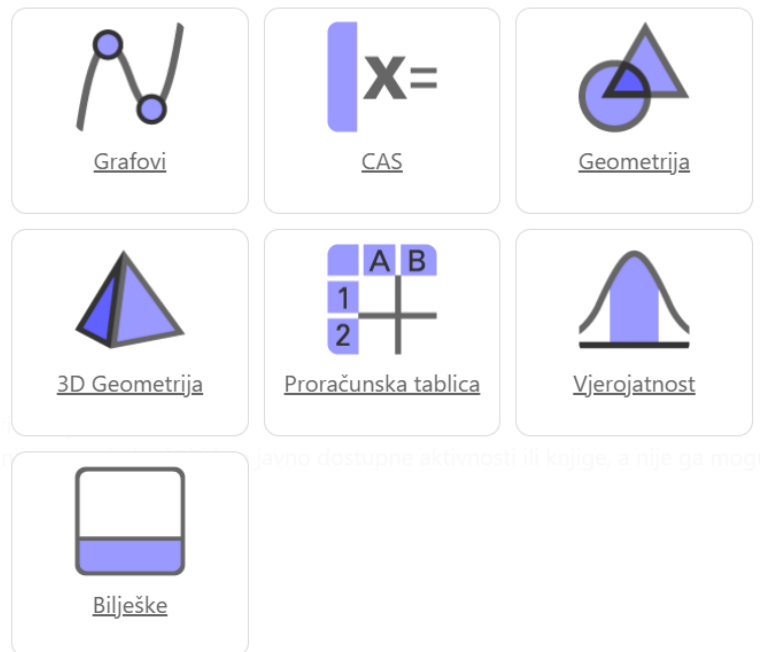
5. VIZUALIZACIJA ELIPSOIDNE GEODEZIJE I GEODETSKE ASTRONOMIJE U ALATU OTVORENOG KODA GEOGEBRA®

5.1. GeoGebra® kao alat za vizualizaciju

U svrhu izrade 3D modela geometrijske geodezije, matematičkih operacija nad koordinatama i geodetske astronomije, korišteno je programsko rješenje otvorenog koda *GeoGebra®*. *GeoGebra®* je izrađena kao diplomski rad matematičara Markusa Hohenwartera 2001. godine na Sveučilištu Johannes Kepler u Linzu (*Johannes Kepler University Linz*) u Austriji s ciljem dinamičkog povezivanja geometrije i algebre (Hohenwarter i dr., 2009). U 2003. godini, pozitivnom reakcijom korisnika i matematičara, *GeoGebra®* je pokrenula politiku otvorenog koda te je danas predstavljena kao besplatni dinamički matematički alat koji je dostupan za *Windows*, *macOS*, *Linux*, *Android* i *iOS* operacijske sustave kao i na Internet preglednicima s ciljem obrazovanja u poljima geometrije, algebre i mnogih drugih te je time vodeći pružatelj dinamičkog matematičkog alata, podržavajući obrazovanje u STEM (eng. *Science, Technology, Engineering and Mathematics*) znanostima. *GeoGebra®* je ujedno i zajednica milijuna korisnika koji objavljuju svoje radove, odnosno koriste politiku otvorenih podataka ovog alata u svrhu obrazovanja. Prilikom izrade nove aktivnosti moguće je odabrati više opcija aplikacije koje se nude (ovisno o vrsti zadatka) (slika 5.1):

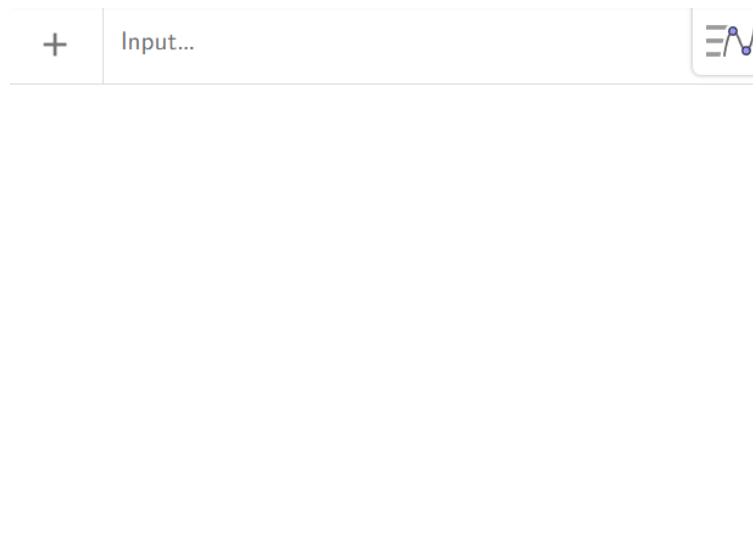
- *grafovi*,
- *kalkulator*,
- *geometrija*,
- *3D geometrija*,
- *proračunska tablica*,
- *vjerojatnost* i
- *bilješke*.

Izaberite odgovarajući aplikaciju



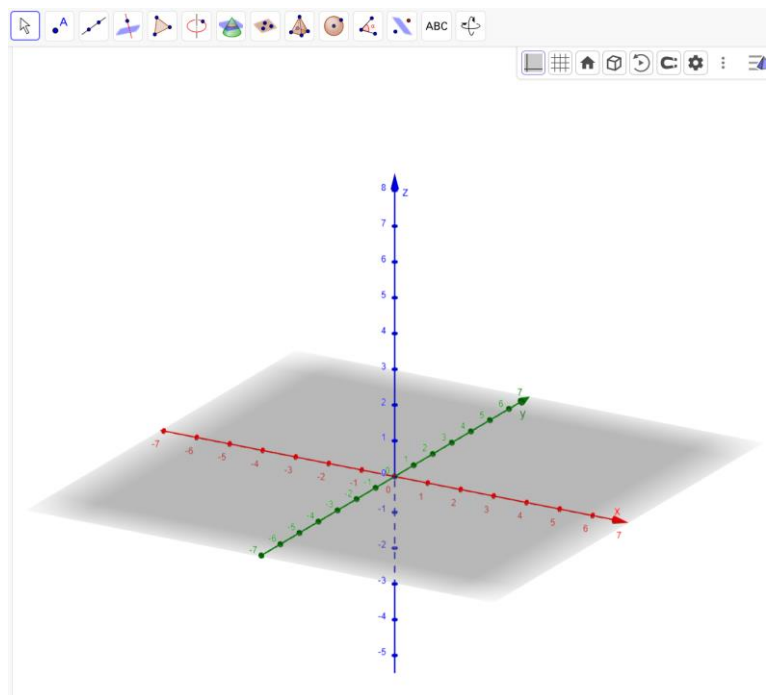
Slika 5.1: Opcije alata GeoGebra®

Unutar novootvorene aktivnosti alata *GeoGebra®* nalaze se tri sučelja zajedno s alatnom trakom na vrhu. *Algebarsko sučelje* (slika 5.2) koje se koristi za unos naredbi, iskazivanje nacrtanih elemenata i omogućuje skrivanje i prikazivanje određenih elemenata modela, nalazi se na lijevoj strani programa.



Slika 5.2: Algebarsko sučelje

U sredini nalazi se *3D sučelje*, zajedno sa alatnom trakom na vrhu (slika 5.3) unutar kojeg je trodimenzionalni prikaz modela koji je definiran naredbama unutar algebarskog sučelja.



Slika 5.3: 3D sučelje

Na desnoj strani programa, nalazi se *sučelje s postavkama* (slika 5.4) koje omogućuje posebno označavanje, imenovanje i manipuliranje prikazanih elemenata. U svrhu izrade modela ovog rada korištena je opcija aplikacije *3D geometrija*.

Basic

Colour

Style

Advanced

Algebra

Scripting

Name

A

Definition

(0.20362, 7.84732, 0)

Caption

☐ Use text as caption

☒ Show Object

☐ Show trace

☒ Show Label:

Name

▼

☐ Fix Object

☐ Auxiliary Object

Slika 5.4: Sučelje s postavkama

5.2. Rotacijski elipsoid

Elipsoid kao matematički definirana ploha koristi se u geodeziji kao matematička aproksimacija Zemlje na kojoj se obavljaju sva računanja obavljenih mjerenja na plohi fizičke površine Zemlje. Stoga reprezentacija modela elipsoida zajedno s njegovim elementarnim osobnima bit će detaljno izrađena u ovom dijelu rada.

Slika 5.5 prikazuje algebarsko sučelje alata *GeoGebra®* koje prikazuje sve elemente kojima je definirana ploha elipsoida, početni (Greenwich) meridijan i ekvator.

☐	$a_{\text{Elipsoid}} = 5.3$	0	10	▶	⋮
☐	$b_{\text{Elipsoid}} = 5$	0	10	▶	⋮
	$b_{\text{true}} = \text{Min}(b_{\text{Elipsoid}}, a_{\text{Elipsoid}})$				⋮
	$= 5$				
☒	Elipsoid : $\frac{x^2}{a_{\text{Elipsoid}}^2} + \frac{y^2}{a_{\text{Elipsoid}}^2} + \frac{z^2}{b_{\text{true}}^2} = 1$				⋮
☐	XZ _{Ravnina} : $y = 0$				⋮
☒	Greenwich : $\text{IntersectPath}(\text{XZ}_{\text{Ravnina}}, \text{Elipsoid})$ $= X = (0, 0, 0) + (-5.3 \cos(t), 0, -5 \sin(t))$				⋮
☐	XY _{Ravnina} : $z = 0$				⋮
☒	Ekvator : $\text{IntersectPath}(\text{XY}_{\text{Ravnina}}, \text{Elipsoid})$ $= X = (0, 0, 0) + (5.3 \cos(t), 5.3 \sin(t), 0)$				⋮

Slika 5.5. Definirajući elementi plohe rotacijskog elipsoida, početnog meridijana i ekvatora

Rotacijski elipsoid ploha je definirana rotacijom elipse oko njezine male osi ($2b$). Za izradu modela elipsoida definirane su dvije fundamentalne veličine: a_{Elipsoid} i b_{Elipsoid} . Veličina a_{Elipsoid} predstavlja veliku dok veličina b_{Elipsoid} predstavlja malu poluos rotacijskog elipsoida. Obje veličine promjenjive su upotrebom klizača u intervalu od 0 do 10. Ovime je omogućeno korisniku promjena fundamentalnih veličina koje definiraju rotacijski elipsoid u modelu te time promjena oblika, dimenzija i svih ostalih elemenata elipsoidne geodezije (vezanih uz rotacijski elipsoid). Činjenicom da je korisniku omogućena promjena veličina a_{Elipsoid} i b_{Elipsoid} , te da velika poluos rotacijskog elipsoida uvijek mora biti većeg iznosa od male poluosi elipsoida, nužno je uvesti funkciju *Min* unutar koje su uneseni elementi b_{Elipsoid} i a_{Elipsoid} . Ovom funkcijom definiran je element b_{true} koji predstavlja istinitu vrijednost male poluosi rotacijskog elipsoida koja će uvijek biti manja (ili jednaka) od velike poluosi rotacijskog

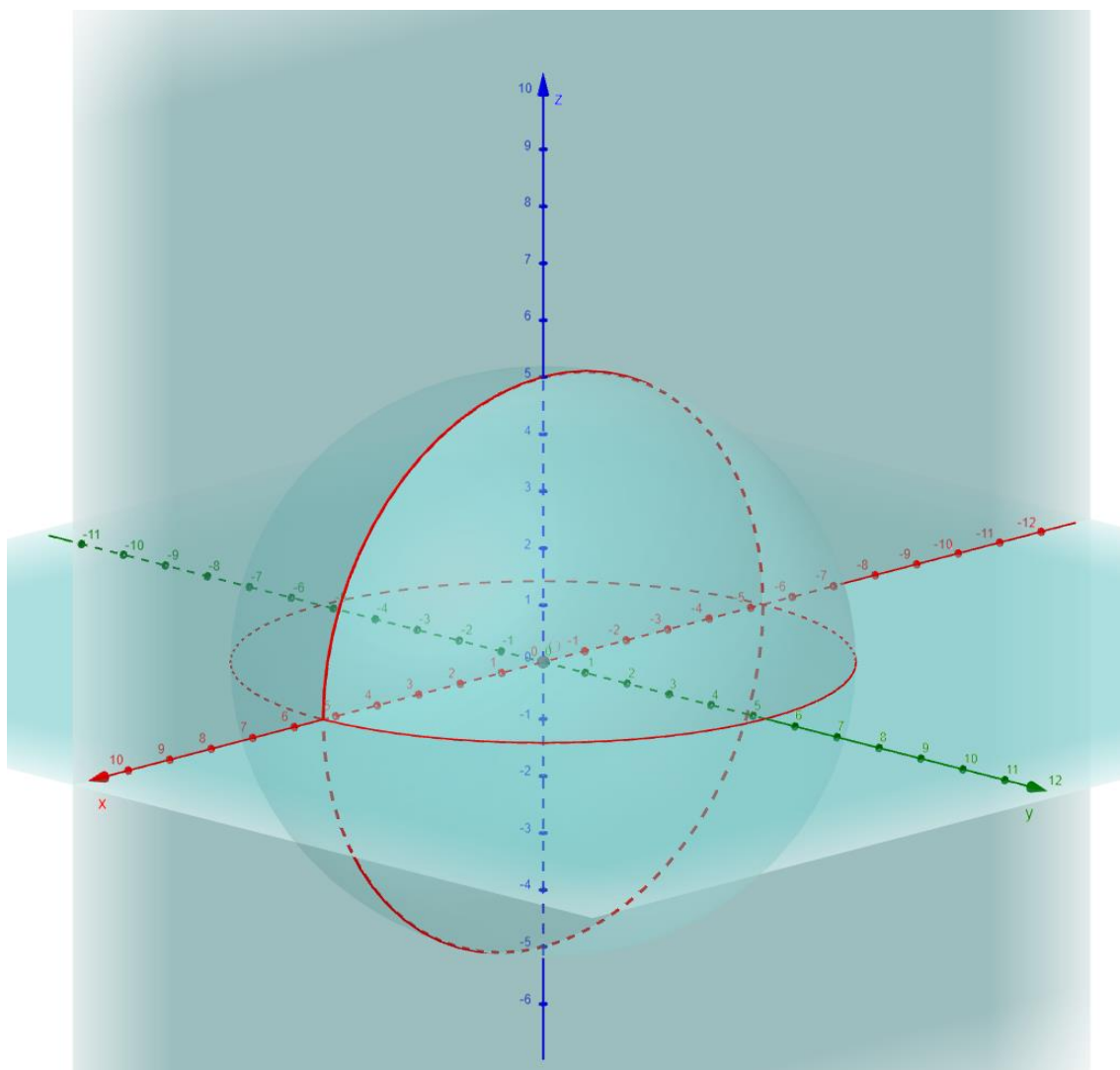
elipsoida. Zatim je slijedio sam prikaz elipsoida u modelu koji je obavljen Kartezijevom (kanonskom) jednažbom predstavljenom u poglavlju 3.1 (izraz 3.1).

Navedenim izrazom definiran je element, u algebarskome sučelju nazvan *Elipsoid* (označen svijetlo plavom bojom). Izrazima (5.1) i (5.2) definirane su ravnine x -osi i y -osi u algebarskome sučelju nazvana $XY_{Ravnina}$ i ravnina x -osi i z -osi u algebarskome sučelju nazvana $XZ_{Ravnina}$:

$$y = 0 \quad (5.1)$$

$$z = 0 \quad (5.2)$$

Naredbom *IntersectPath* elementima $XY_{Ravnina}$ i *Elipsoid* definiran je ekvator (element u algebarskome sučelju nazvan Ekvator) na plohi elipsoida koji je predstavljenom kružnicom crvene boje. Također, naredbom *IntersectPath* elementima $XZ_{Ravnina}$ i *Elipsoid* definiran je Greenwich početni meridijan koji je predstavljen elipsom crvene boje. Dakle ekvator predstavlja kružnicu na plohi elipsoida, odnosno paralelu sa najvećim radijusom iznosa velike poluosi ($a_{Elipsoid}$) rotacijskog elipsoida, drugim riječima sve paralele na plohi rotacijskog elipsoida kružnice su koje nastaju presijecanjem ravnine kosog presjeka s rotacijskim elipsoidom. U ovom slučaju ravnina kosog presjeka element je $XY_{Ravnina}$, dok je sam ekvator (element *Ekvator*) kosi presjek. Meridijani (poput početnog Greenwich meridijana) su pak elipse odnosno normalni presjeci (sadrže normalu u promatranoj točki), nastali presijecanjem ravnine normalnog presjeka (u ovom slučaju element $XZ_{Ravnina}$) s plohom rotacijskog elipsoida, gdje će kasnije u ovom poglavlju biti predloženo kako svaki normalni presjek sadrži normalu. Rezultat definiranja dosadašnje navedenih elemenata predložen na slici 5.6.



Slika 5.6: Prikaz rotacijskog elipsoida zajedno sa referentnim meridijanom i ekvatorom

Nakon definiranja sam plohe rotacijskog elipsoida, uslijedila je uspostava dviju točaka na istoj, kojima je omogućena manipulacija u vidu promjene geodetskih (elipsoidnih) koordinata. Na slikama 5.7 i 5.8 prikazani su elementi unutar algebarskog sučelja alata *GeoGebra®* kojima su točke na plohi rotacijskog elipsoida uspostavljene.

☐	$\varphi_{Q1} = -20^{\circ}21'25''$	-1.5708	1.5708	↔
☐	$\lambda_{Q1} = 69^{\circ}3'33.21''$	-3.1416	π	↔
☐	$\varphi_{Q2} = -31^{\circ}51'37.7469''$	-1.5708	1.5708	↔
☐	$\lambda_{Q2} = 103^{\circ}39'2.8225''$	-3.1416	π	↔
☐	$Q1_{Greenwich} = (a_{Elipsoid} \cos(\varphi_{Q1}), 0, b_{Elipsoid} \sin(\varphi_{Q1}))$			
	$= (4.969, 0, -1.7393)$			
☐	$Q2_{Greenwich} = (a_{Elipsoid} \cos(\varphi_{Q2}), 0, b_{Elipsoid} \sin(\varphi_{Q2}))$			
	$= (4.5015, 0, -2.6393)$			
☐	$Q1_{Ekvator} = (a_{Elipsoid} \cos(\lambda_{Q1}), a_{Elipsoid} \sin(\lambda_{Q1}), 0)$			
	$= (1.8942, 4.9499, 0)$			
☐	$Q2_{Ekvator} = (a_{Elipsoid} \cos(\lambda_{Q2}), a_{Elipsoid} \sin(\lambda_{Q2}), 0)$			
	$= (-1.2508, 5.1503, 0)$			
☐	$ZQ1_{Ravnina} : \text{Plane}(Q1_{Ekvator}, z\text{Axis})$			
	$= -4.9499x + 1.8942y = 0$			

Slika 5.7: Uspostava klizača geodetskih (elipsoidnih) koordinata

☐	$\text{MeridijanQ1} : \text{IntersectPath}(ZQ1_{Ravnina}, \text{Elipsoid})$	
	$= X = (0, 0, 0) + (-1.8942 \cos(t), -4.9499 \cos(t), 5 \sin(t))$	
☐	$ZQ2_{Ravnina} : \text{Plane}(Q2_{Ekvator}, z\text{Axis})$	
	$= -5.1503x - 1.2508y = 0$	
☐	$\text{MeridijanQ2} : \text{IntersectPath}(ZQ2_{Ravnina}, \text{Elipsoid})$	
	$= X = (0, 0, 0) + (1.2508 \cos(t), -5.1503 \cos(t), 5 \sin(t))$	
☐	$\text{Ravnina}_1 : \text{Plane}(Q1_{Greenwich}, XY_{Ravnina})$	
	$= z = -1.7393$	
☐	$\text{ParalelaQ1} : \text{IntersectPath}(\text{Ravnina}_1, \text{Elipsoid})$	
	$= X = (0, 0, -1.7393) + (4.969 \sin(t), 4.969 \cos(t), 0)$	
☐	$\text{Ravnina}_2 : \text{Plane}(Q2_{Greenwich}, XY_{Ravnina})$	
	$= z = -2.6393$	
☐	$\text{ParalelaQ2} : \text{IntersectPath}(\text{Ravnina}_2, \text{Elipsoid})$	
	$= X = (0, 0, -2.6393) + (4.5015 \sin(t), 4.5015 \cos(t), 0)$	
☐	$Q1 = \text{Intersect}(\text{MeridijanQ1}, \text{ParalelaQ1}, 2)$	
	$= (1.7759, 4.6408, -1.7393)$	
☐	$Q2 = \text{Intersect}(\text{MeridijanQ2}, \text{ParalelaQ2}, 2)$	
	$= (-1.0624, 4.3743, -2.6393)$	

Slika 5.8: Elementi za uspostavu točaka na rotacijskom elipsoidu

Definirani elementni u algebarskome sučelju nazvani φ_{Q1} , λ_{Q1} , φ_{Q2} i λ_{Q2} (slika 5.7) predstavljaju geodetske koordinate od kojih je, geodetskim širinama točaka $Q1$ i $Q2$ (φ_{Q1} i φ_{Q2}) omogućena manipulacija pomoću klizača u intervalu od -90° do 90° . Geodetskoj dužini točaka $Q1$ i $Q2$ (λ_{Q1} i λ_{Q2}) također je omogućena manipulacija s klizačima koji se mogu proizvoljno podešavati u intervalu od negativne vrijednosti -180° do 180° . U narednim koracima, parametarskim jednadžbama definirane su točke na plohi elipsoida uz zadane vrijednosti koordinata od strane korisnika. Parametarskim jednadžbama, danim izrazima (5.3) i (5.4), uspostavljene su točke u algebarskome sučelju nazvane $Q1_{Greenwich}$ i $Q2_{Greenwich}$ koje se nalaze na Greenwichevom meridijanu te se promjenom koordinata geodetske širine točaka $Q1$ i $Q2$ (φ_{Q1} i φ_{Q2}) njihov položaj mijenja duž početnog meridijana:

$$(a_{Elipsoid} \cos \varphi_{Q1}, 0, b_{Elipsoid} \sin \varphi_{Q1}) \quad (5.3)$$

$$(a_{Elipsoid} \cos \varphi_{Q2}, 0, b_{Elipsoid} \sin \varphi_{Q2}) \quad (5.4)$$

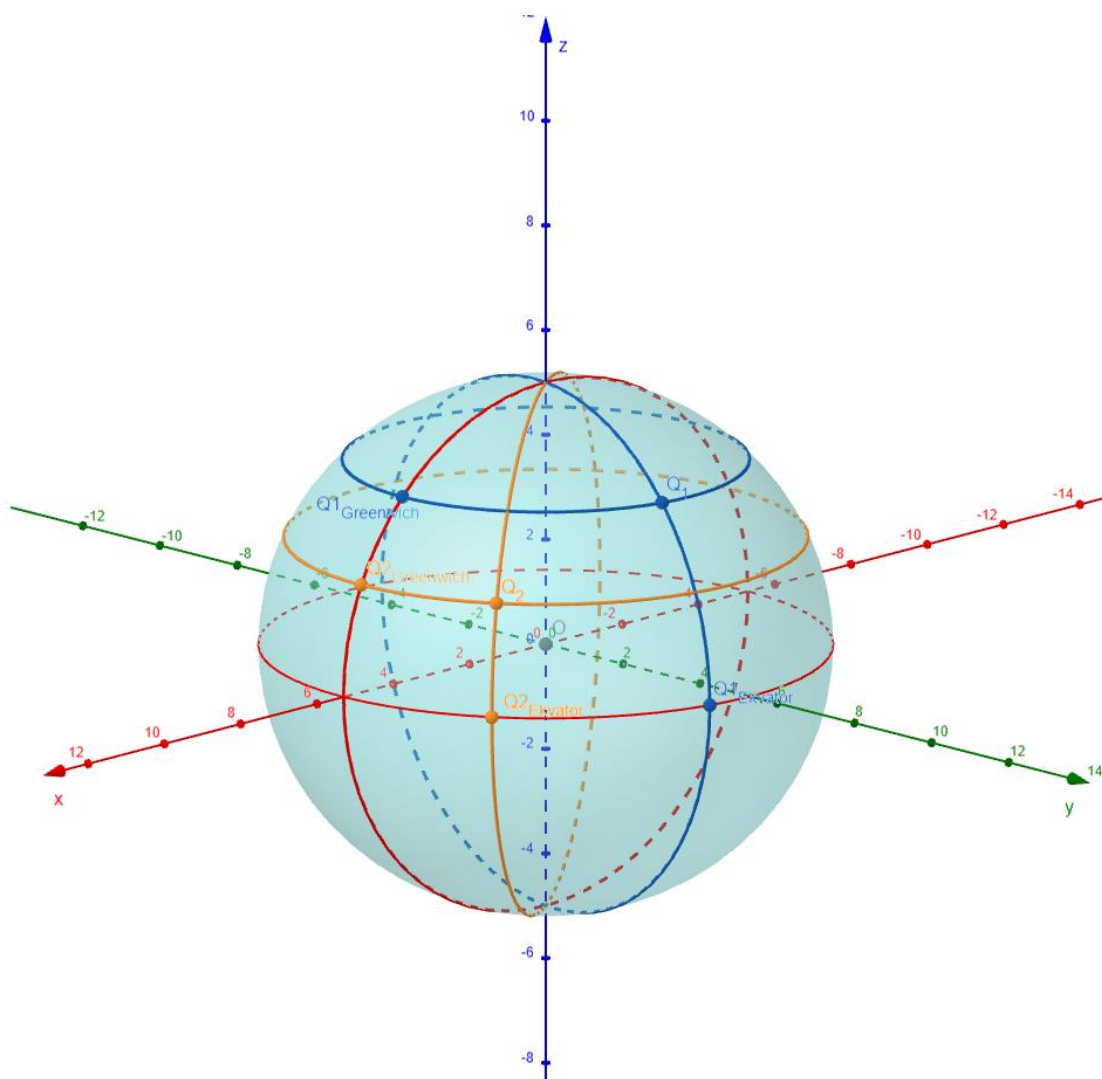
Parametarskim jednadžbama, prikazanim izrazima (5.5) i (5.6), definirani su elementi u algebarskome sučelju nazvani $Q1_{Ekvator}$ i $Q2_{Ekvator}$. Navedeni elementi predstavljaju točke koje se gibaju duž ekvatora (elementa *Ekvator*) te predstavljaju koordinate geodetske dužine točaka $Q1$ i $Q2$ (λ_{Q1} i λ_{Q2}) zadane klizačima od strane korisnika:

$$(a_{Elipsoid} \cos \lambda_{Q1}, 0, b_{Elipsoid} \sin \lambda_{Q1}) \quad (5.5)$$

$$(a_{Elipsoid} \cos \lambda_{Q2}, 0, b_{Elipsoid} \sin \lambda_{Q2}) \quad (5.6)$$

Zatim su definirane ravnine u algebarskome sučelju, nazvane: $ZQ_1E_{Ravnina}$, $ZQ_2E_{Ravnina}$, $Ravnina_1$ i $Ravnina_2$. Spomenute ravnine definirane su s ciljem izrade točaka Q_1 i Q_2 na plohi elipsoida.

Ravnine $ZQ_1E_{Ravnina}$ i $ZQ_2E_{Ravnina}$ (slika 5.8) definirane su naredbom *Plane* točkama $Q_{1Ekvator}$ (za ravninu $ZQ_1E_{Ravnina}$) i $Q_{2Ekvator}$ (za ravninu $ZQ_2E_{Ravnina}$) te z-osi koordinatnog sustava alata *GeoGebra®* (element *zAxis*) u svrhu uspostave meridijana točaka Q_1 i Q_2 . Naredbom *IntersectPath* definiran je meridijan točke Q_1 u algebarskome sučelju nazvan *Meridijan Q_1* označen plavom bojom odabiranjem ravnine $ZQ_1E_{Ravnina}$ i *Elipsoid*. Istom naredbom odabiranjem elemenata $ZQ_2E_{Ravnina}$ i *Elipsoid* definiran je meridijan točke Q_2 u algebarskome sučelju, nazvan *Meridijan Q_2* , označen narančastom bojom. Ravnine u algebarskome sučelju nazvane $Ravnina_1$ i $Ravnina_2$ definirane su naredbom *Plane* točkama $Q_{1Greenwich}$ (za ravninu $Ravnina_1$), odonsono točkom $Q_{2Greenwich}$ (za ravninu $Ravnina_2$) i $XY_{Ravnina}$. Dakle, elementi $Ravnina_1$ i $Ravnina_2$ ravnine su paralelne s ravinom $XY_{Ravnina}$. Zatim su definirane paralele u algebarskome sučelju nazvane *Paralela Q_1* i *Paralela Q_2* , naredbom *IntersectPath* elemenata $Ravnina_1$ i *Elipsoid* (za definiranje paralele točke Q_1 u algebarskome sučelju nazvana *Paralela Q_1*), odnosno elemenata $Ravnina_2$ i *Elipsoid* (za definiranje paralele točke Q_2 u algebarskome sučelju nazvana *Paralela Q_2*). Navedene paralele predstavljaju ravnine koje ne sadrže normalu na rotacijski elipsoid, odnosno presjek takvih ravnina s rotacijskim elipsoidom kao rezultat daju krivulje koje se nazivaju kosi presijeci. Zatim, naredbom *Intersect* definiran je položaj točke Q_1 na rotacijskom elipsoidu odabiranjem elemenata *Meridijan Q_1* i *Paralela Q_2* . Kako postoje dva sjecišta navedenog meridijana i paralele, unutar naredbe *Intersect* kao zadnji element, postavljen je broj dva (2) koji simbolizira drugo sjecište. Istom metodologijom definirana je točka Q_2 na plohi elipsoida. Položaj točaka Q_1 i Q_2 zajedno sa svim elementima koji definiraju iste, predloženi su slikom 5.9. Svi elementi koji definiraju točku Q_1 zajedno sa točkom Q_1 označeni su plavom bojom, dok su svi elementni koji definiraju točku Q_2 zajedno sa točkom Q_2 definirani s narančastom bojom.



Slika 5.9: Prikaz točaka Q_1 i Q_2 na rotacijskom elipsoidu

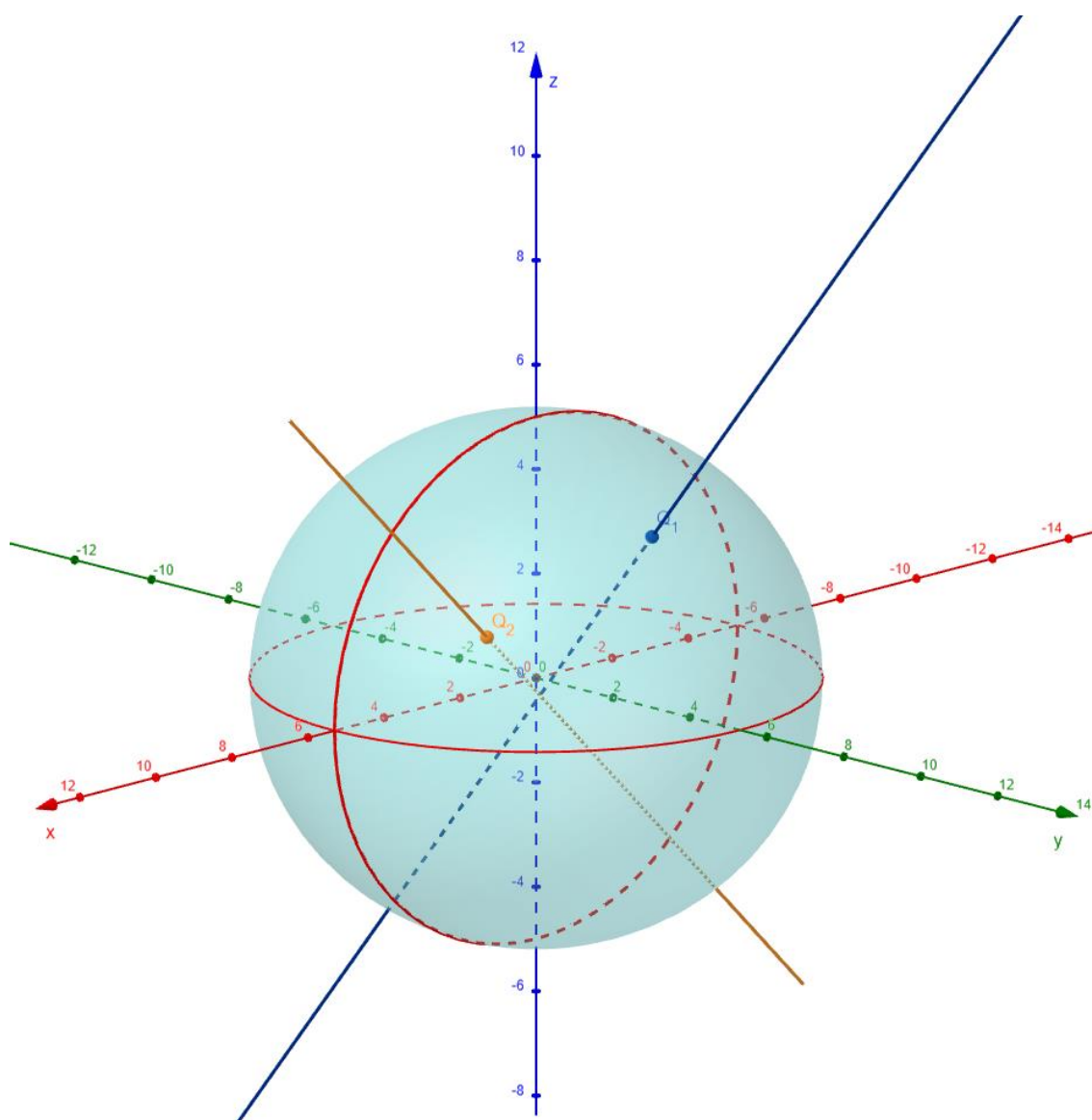
Definiranjem točaka Q_1 i Q_2 sa meridijanima i paralelama istih omogućena je uspostavama tangencijalnih ravnina, definiranjem tangenata na meridijane i paralele svake točke te zatim definiranjem ravnina od istih. Slika 5.10 prikazuje algebarsko sučelje gdje su definirane tangente i tangencijalne ravnine točaka Q_1 i Q_2 .

○	Tangent(Q_1 , Meridijan Q_1) = Tangenta M_1 : $X = (1.3709, 7.3514, 0) + \lambda (0.8277, 4.4385, -4.2792)$	⋮
○	Tangent(Q_1 , Paralela Q_1) = Tangenta P_1 : $X = (0, 3.8211, 3.5274) + \lambda (4.2066, -0.7845, 0)$	⋮
○	Tangent(Q_2 , Meridijan Q_2) = Tangenta M_2 : $X = (4.8275, 3.2362, 0) + \lambda (2.1814, 1.4623, -5.506)$	⋮
○	Tangent(Q_2 , Paralela Q_2) = Tangenta P_2 : $X = (0, 8.68, 2.0517) + \lambda (3.0659, -4.5734, 0)$	⋮
○	TangencijalnaRavnina Q_1 : Plane(Tangenta M_1 , Tangenta P_1) = $-3.3569x - 18.0009y - 19.3205z = -136.9333$	⋮
○	TangencijalnaRavnina Q_2 : Plane(Tangenta M_2 , Tangenta P_2) = $-25.1814x - 16.8809y - 14.4597z = -176.1923$	⋮
○	Normala Q_1 : PerpendicularLine(Q_1 , TangencijalnaRavnina Q_1) = $X = (0.6886, 3.6926, 3.5274) + \lambda (-3.3569, -18.0009, -19.3205)$	⋮
○	Normala Q_2 : PerpendicularLine(Q_2 , TangencijalnaRavnina Q_2) = $X = (4.0146, 2.6913, 2.0517) + \lambda (-25.1814, -16.8809, -14.4597)$	⋮

Slika 5.10: Definirajući elementi tangencijalnih ravnina i normala točaka Q_1 i Q_2

Naredbom *Tangent* elementima Q_1 i *Meridijan* Q_1 definirana je tangenta na meridijan točke Q_1 u točki Q_1 u algebarskome sučelju nazvana *Tangenta* M_1 . Istim postupkom definirana je tangenta na meridijan točke Q_2 (element *Meridijan* Q_2) koja prolazi točkom Q_2 koja je u algebarskome sučelju nazvana *Tangenta* M_2 . Također, naredbom *Tangent* definirane su tangente na paralele točaka Q_1 i Q_2 koje prolaze kroz iste. U algebarskome sučelju tangenta na paralelu koja prolazi točkom Q_1 nazvana je *Tangenta* P_1 , dok *Tangenta* P_2 nosi naziv tangenta koja prolazi točkom Q_2 na paraleli točke Q_2 (element *Paralela* Q_1). Poznatim elementima *Tangenta* M_1 , *Tangenta* M_2 , *Paralela* Q_1 i *Paralela* Q_2 omogućeno je definiranje tangencijalnih ravnina točke Q_1 i Q_2 . Dakle, naredbom *Plane* elementima *Tangenta* M_1 , i *Tangenta* P_1 , definirana je tangencijalna ravnina točke Q_1 u algebarskome sučelju nazvana *TangencijalnaRavnina* Q_1 . Istom naredbom definirana je, odabiranjem elemenata *Tangenta* M_2 i *Tangenta* P_2 , tangencijalna ravnina točke Q_2 u algebarskome sučelju nazvana *TangencijalnaRavnina* Q_2 . Zatim je naredbom *PerpendicularLine* odabiranjem elemenata *TangencijalnaRavnina* Q_1 i točke Q_1 definiran pravac okomit na tangencijalnu ravninu točke Q_1 koji prolazi istom točkom. Po definiciji takav pravac naziva se pravac normale te je time u

algebarskome sučelju navedenom pravcu pridodano ime $Normala_{Q_1}$. Istom naredbom odabiranjem elemenata $TangencijalnaRavnina_{Q_2}$ i Q_2 , definirana je normala točke Q_2 u algebarskome sučelju nazvana $Normala_{Q_2}$. Elementi $Normala_{Q_1}$ i $Normala_{Q_2}$ (kao i svi ostali definirani elementi), promjenjive su veličine koje su ovisne o položaju odnosno koordinatama točaka kojima je omogućena manipulacija. Dakle, pomakom klizača koji predstavljaju geodetske koordinate točaka Q_1 i Q_2 uočava se promjena tangencijalnih ravnina te normala na rotacijski elipsoid koje prolaze kroz dotične točke. Slika 5.11 prikazuje normalu točke Q_1 (označenu plavom bojom), normalu točke Q_2 (označenu narančastom bojom), te položaj točaka Q_1 i Q_2 na plohi elipsoida.



Slika 5.11: Prikaz tangente točke Q_1 i tangente točke Q_2

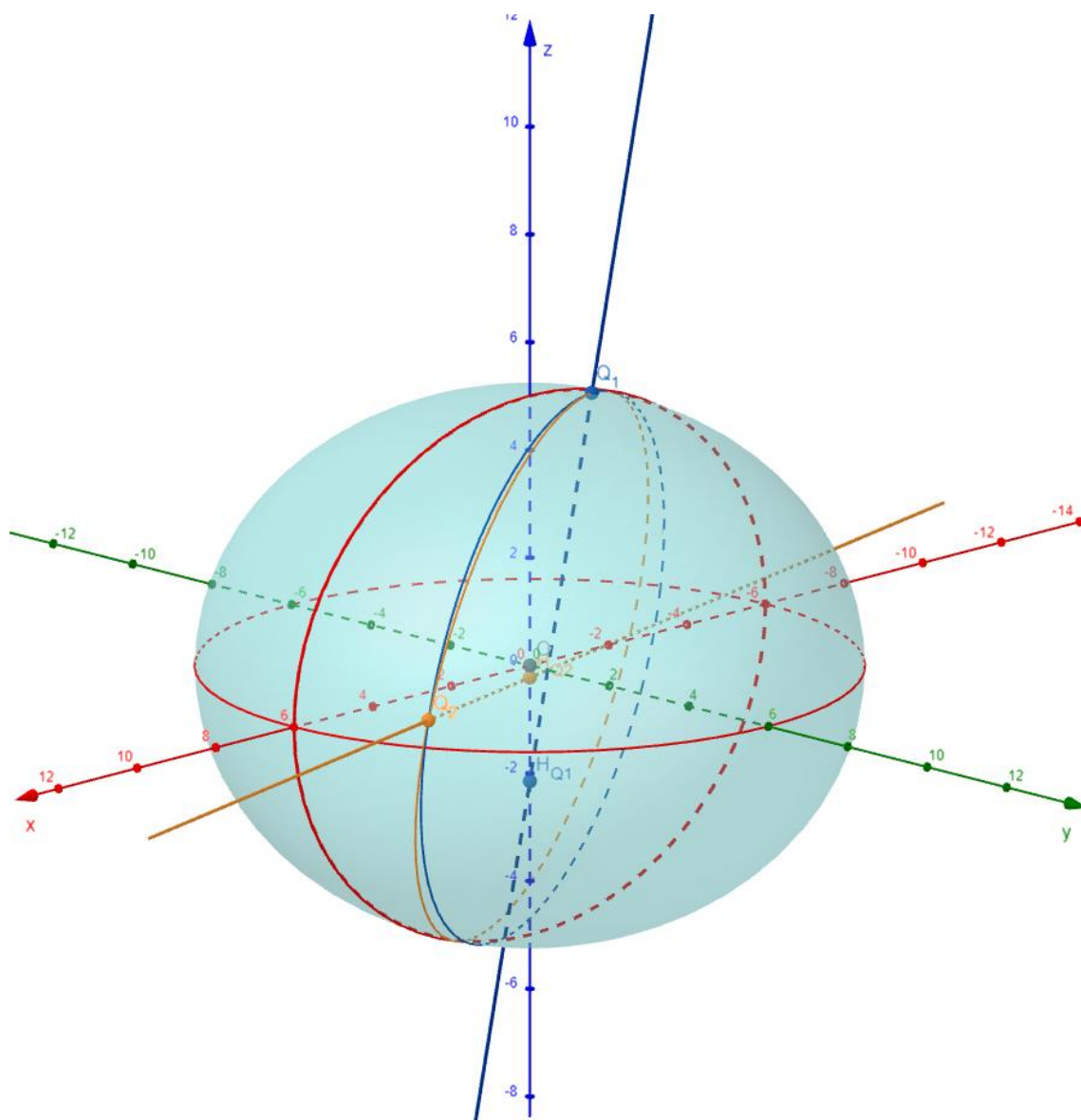
Slika 5.12 prikazuje algebarsko sučelje gdje su definirani elementi potrebni za predstavljanje polumjera zakrivljenosti prvih vertikalna točaka Q_1 i Q_2 , odnosno elemenata kojima je prikazan slučaj dvojnosti normalnih presjeka točaka Q_1 i Q_2 .

○	$H_{Q1} = \text{Intersect}(z\text{Axis}, \text{Normala}_{Q1})$ $= (0, 0, -0.436)$	⋮
○	$H_{Q2} = \text{Intersect}(\text{Normala}_{Q2}, z\text{Axis})$ $= (0, 0, -0.2536)$	⋮
○	$O = \text{Intersect}(z\text{Axis}, x\text{Axis})$ $= (0, 0, 0)$	⋮
○	$\text{NormalnaRavnina}_{Q1} : \text{Plane}(Q_2, \text{Normala}_{Q1})$ $= 7.2166x - 69.2141y + 63.2328z = -27.5684$	⋮
○	$\text{NormalnaRavnina}_{Q2} : \text{Plane}(Q_1, \text{Normala}_{Q2})$ $= -10.4312x + 85.2528y - 81.3618z = 20.6325$	⋮
○	$a : \text{IntersectPath}(\text{NormalnaRavnina}_{Q1}, \text{Elipsoid})$ $= X = (-0.0237, 0.2271, -0.1847) + (-5.2629 \cos(t) + 0.3571 \sin(t), -0.5487 \cos(t) - 3.4253 \sin(t), -3.79 \sin(t))$	⋮
○	$b : \text{IntersectPath}(\text{NormalnaRavnina}_{Q2}, \text{Elipsoid})$ $= X = (-0.0162, 0.1326, -0.1126) + (5.2578 \cos(t) + 0.4287 \sin(t), 0.6433 \cos(t) - 3.5035 \sin(t), -3.726 \sin(t))$	⋮
○	$p_{Q1} : \text{Ray}(O, Q1_{\text{Elevator}})$ $= X = (0, 0, 0) + \lambda (0.9716, 5.2102, 0)$	⋮
○	$p_{Q2} : \text{Ray}(O, Q2_{\text{Elevator}})$ $= X = (0, 0, 0) + \lambda (4.4023, 2.9512, 0)$	⋮

Slika 5.12: Definirajući elementi za polumjer zakrivljenosti prvog vertikalna točaka Q_1 i Q_2 i pojave dvojnosti normalnih presjeka na rotacijskom elipsoidu

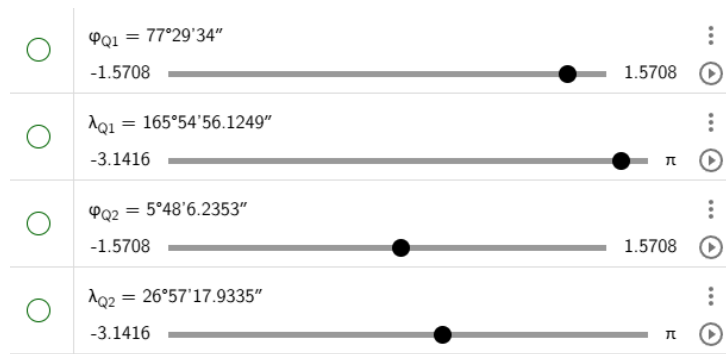
Uspostavom elemenata Normala_{Q_1} i Normala_{Q_2} omogućeno je definiranje uzajamnih normalnih presjeka točaka Q_1 i Q_2 , odnosno definiranje pojave dvojnosti normalnih presjeka na rotacijskom elipsoidu, te promatranje njihovog odnosa promjenom koordinata točaka Q_1 i Q_2 , zajedno sa promjenom elemenata velike (a_{Elipsoid}) i male poluosi (b_{Elipsoid}) rotacijskog elipsoida. Naredbom *Plane*, elementima Q_2 i Normala_{Q_1} definirana je normalna ravnina točke Q_1 (u algebarskome sučelju nazvana $\text{NormalnaRavnina}_{Q_1}$) koja prolazi točkom Q_2 . Istom naredbom definirana je normalna ravnina točke Q_2 (u algebarskome sučelju nazvana $\text{NormalnaRavnina}_{Q_2}$) koja prolazi točkom Q_1 . Zatim, sukladno definiciji normalnih presjeka, naredbom *IntersectPath* definiran je presjek plohe elipsoida sa normalnim presjecima točaka Q_1 i Q_2 . Dakle spomenutom naredbom presjekom rotacijskog elipsoida sa elementom $\text{NormalnaRavnina}_{Q_1}$ definiran je direktni (pravi) normalni presjek točke Q_1 (odnosno obrnuti normalni presjek točke Q_2), kojem je u algebarskome sučelju dodijeljen naziv a . Analogno, označavanjem elementa *Elipsoid* i $\text{NormalnaRavnina}_{Q_2}$, definiran je pravi (direktni) normalni presjek točke Q_2 (odnosno obrnuti normalni presjek točke Q_1), kojem je u

algebarskome sučelju dodijeljen naziv b . Sukladno definiciji, polumjer zakrivljenosti prvog vertikala udaljenost je od točke H do točke Q na elipsoidu duž normale točke Q . Dakle, kako bi se iskazali polumjeri zakrivljenosti normalnih presjeka točaka Q_1 i Q_2 nužna je uspostava točke H (za pojedinu). Točka H , po definiciji, točka je koja nastaje presijecanjem normale točke Q sa z -osi koordinatnog sustava. Time su, naredbom *Intersect* definirane točke u algebarskome sučelju nazvane H_{Q_1} i H_{Q_2} , od kojih je elementima $Normala_{Q_1}$ i z -os ($zAxis$) definirana točka H_{Q_1} , odnosno elementima $Normala_{Q_2}$ i z -os ($zAxis$) definirana točka H_{Q_2} . Za potrebe uspostave dodatnih geometrijskih elemenata naredbom *Ray* definirani su tzv. zrake, koje polaze točkom ishodišta (O) te prolaze elementima $Q1_{Ekvator}$ i $Q2_{Ekvator}$ u algebarskome sučelju nazvane p_{Q_1} i p_{Q_2} . Elementi p_{Q_1} i p_{Q_2} u geometrijskome smislu predstavljaju os x meridijana točaka Q_1 i Q_2 . Slika 5.13 prikazuje elemente H_{Q_1} i H_{Q_2} te uzajamne normalne presjeke (elemente a i b), zajedno s normalama točaka Q_1 i Q_2 te polumjerima zakrivljenosti prvih vertikala istih. Napominje se kako su sve veličine ovisne o položaju točaka Q_1 i Q_2 , odnosno promjenom koordinata točaka (kao i elemenata velike $a_{Elipsoid}$ i male $b_{Elipsoid}$ poluosi rotacijskog elipsoida) moguće je promatrati promjenu odnosa direktnog normalnog presjeka točke Q_1 i direktnog normalnog presjeka točke Q_2 . Prethodno definirani elementi, prikazani su slikom 5.13.



Slika 5.13: Prikaz pojave dvojnosti normalnih presjeka i polumjera zakrivljenosti točaka Q_1 i Q_2 .

Slika 5.14 prikazuje koordinate točaka Q_1 i Q_2 koje su prikazane slikom 5.13. Na istoj je slici također prikazana pojava dvojnosti normalnih presjeka i polumjerom zakrivljenosti prvog vertikalna istih točaka.



Slika 5.14: Prikaz koordinata točaka Q_1 i Q_2 unutar algebarskog sučelja

Sa slike 5.14 razvidno je kako točka Q_1 ima veću vrijednost koordinate geodetske širine od točke Q_2 ($\varphi_{Q1} > \varphi_{Q2}$), te se time točka H_{Q2} nalazi dalje od ishodišta koordinatnog sustava (na z -osi), u odnosu na točku H_{Q2} , koja je se nalazi bliže ishodištu koordinatnog sustava. Dakle položaj točke H na z -osi koordinata sustava ovisan je samo o koordinati geodetske širine promatrane točke, odnosno što je apsolutna vrijednost geodetske širine manja točka H nalazi se bliže polu, te dijametralno suprotno, što je apsolutna vrijednost geodetske širine veća time se točka H na z -osi koordinatnog sustava nalazi bliže ishodištu istog. Ukoliko se pak postavi vrijednost koordinate geodetske širine jednaku nuli ($\varphi = 0^{\circ}$), tada se točka H poistovjećuje s ishodištem koordinatnog sustava. Time je dokazana činjenica da je ekvator normalni presjek.

Dosadašnje definiranje elemenata obavljalo se u geometrijskome smislu, odnosno oslanjalo se na teorijske osnove elipsoidne geodezije, no, u sljedećem dijelu poglavlja, iskoristila se i matematička osnova elipsoidne geodezije u alatu *GeoGebra*® koja je predstavljena izrazima u poglavlju 3.1. Slika 5.15 prikazuje algebarsko sučelje gdje su matematički (odnosno numerički) definirani polumjeri zakrivljenosti prvog vertikalna točaka Q_1 i Q_2 , osnovni parametri elipsoida te geometrijski definirani elementi D_{Q1} i D_{Q2} .

○	$D_{Q1} = \text{Intersect}(\text{Normala}_{Q1}, p_{Q1})$ $= (-0.3851, 0.0966, 0)$	⋮
○	$D_{Q2} = \text{Intersect}(\text{Normala}_{Q2}, p_{Q2})$ $= (1.6258, 0.8268, 0)$	⋮
○	$N_1 = \text{Segment}(H_{Q1}, Q_1)$ $= 7.1482$	⋮
○	$N_2 = \text{Segment}(H_{Q2}, Q_2)$ $= 6.0135$	⋮
	$e = \sqrt{\frac{a_{\text{Elipsoid}}^2 - b_{\text{Elipsoid}}^2}{a_{\text{Elipsoid}}^2}}$ $= 0.5528$	⋮
	$N'_1 = \frac{a_{\text{Elipsoid}}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi_{Q1})}}$ $= 7.1268$	⋮
	$N'_2 = \frac{a_{\text{Elipsoid}}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi_{Q2})}}$ $= 6.0094$	⋮
	$c = \frac{a_{\text{Elipsoid}}^2}{b_{\text{Elipsoid}}}$ $= 7.2$	⋮

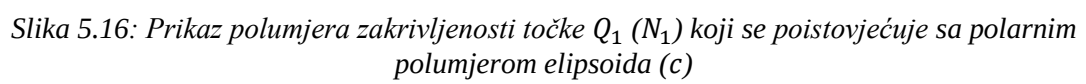
Slika 5.15: Definirajući elementi numeričkih vrijednosti polumjera zakrivljenosti točaka Q_1 i Q_2 , osnovnih parametara elipsoida i točaka D_{Q1} i D_{Q2}

Općenito, točka D sjecište je osi p (koja leži u ravnini ekvatora) i normale točke Q . Dakle, naredbom *Intersect* odabirom elemenata Normala_{Q1} i p_{Q1} definirana je točka u algebarskome sučelju nazvana D_{Q1} koja definiran probodište normale točke Q_1 s xy ravninom koordinatnog sustava. Također, istom naredbom elementima Normala_{Q2} i p_{Q2} definirana je točka D_{Q2} u algebarskome sučelju nazvana D_{Q2} . Prvobitno se polumjer zakrivljenosti prvog vertikala definirao geometrijski, naredbom *Segment* elementima H_{Q1} i Q_1 (za polumjer zakrivljenosti prvog vertikala točke Q_1 , koji je u algebarskome sučelju nazvan N_1), odnosno elementima H_{Q2} i Q_2 (za polumjer zakrivljenosti prvog vertikala točke Q_2 , u algebarskome sučelju nazvan N_2). Elementu N_1 dodijeljena je plava boja dok je elementu N_2 dodijeljena narančasta boja kako bi se naznačila povezanost s određenim točkama na plohi elipsoida te su navedeni elementi podebljane dužine čija je duljina također naznačena u algebarskome sučelju (pod elementima N_1 i N_2), na slici 5.16. Zatim je izrazom (3.3) definiran prvi numerički ekscentricitet elipsoida (e), koji je nužan za numeričko definiranje polumjera zakrivljenosti prvog vertikala kao i polumjera zakrivljenosti meridijanske elipse. Vrijednost prvog numeričkog ekscentriciteta

elipsoida vidljiva je na slici 5.15 pod elementom u algebarskome sučelju nazvanom e . Nakon definiranja prvog numeričkog ekscentriciteta elipsoida, uspostavljeni su polumjeri zakrivljenosti prvih vertikalna točaka Q_1 (element u algebarskome sučelju nazvan N'_1) i Q_2 (element u algebarskome sučelju nazvan N'_2), izrazom (3.6), (slika 5.15).

Izrazom (3.5) definiran je polarni polumjer elipsoida c u algebarskome sučelju nazvan c (slika 5.15).

Definiranim elementima uočljiva su određena odstupanja. Naime, mogućnošću poznavanja vrijednosti geometrijsko definiranih polumjera zakrivljenosti prvih vertikalna (N_1 i N_2) i numerički definiranih vrijednosti polumjera zakrivljenosti prvih vertikalna (N'_1 i N'_2) razvidno je da se vrijednosti istih razlikuju. Uzrok tome je velika spljoštenost elipsoida definiranog unutar alata *GeoGebra*®, odnosno velika razlika vrijednosti velike ($a_{Elipsoid}$) i male ($b_{Elipsoid}$) poluosi rotacijskog elipsoida. Drugim riječima, Zemljini elipsoidi (poput GRS80 i WGS84 elipsoida) imaju malu spljoštenost dok je ista kod elipsoida definiranog u alatu *GeoGebra*® znatno veća. Navedena problematika prikazat će se definiranjem elemenata unutar samog modela. Polarni polumjer elipsoida u geometrijskome smislu predstavlja polumjer zakrivljenosti na polu odnosno polumjer zakrivljenosti prvog vertikalna točke koja se nalazi na geodetskoj širini 90° odnosno -90° . Polumjer zakrivljenosti prvog vertikalna točke Q_1 koja se nalazi na geodetskoj širini 90° ($\varphi_{Q_1} = 90^\circ$) prikazan je slikom 5.16, zajedno s polumjerom zakrivljenosti prvog vertikalna točke Q_2 koja je definirana koordinatom geodetske širine vrijednosti 45° ($\varphi_{Q_2} = 45^\circ$), dok je algebarsko sučelje polarnog polumjera rotacijskog elipsoida (c), sa polumjerom zakrivljenosti prvog vertikalna točke Q_1 (N_1) prikazano slikom 5.17.



	$N_1 = \text{Segment}(H_{Q_1}, Q_1)$ $= 7.2$	⋮
	$N_2 = \text{Segment}(H_{Q_2}, Q_2)$ $= 6.638$	⋮
	$e = \sqrt{\frac{a_{\text{Elipsoid}}^2 - b_{\text{Elipsoid}}^2}{a_{\text{Elipsoid}}^2}}$ $= 0.5528$	⋮
	$N'_1 = \frac{a_{\text{Elipsoid}}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi_{Q_1})}}$ $= 7.2$	⋮
	$N'_2 = \frac{a_{\text{Elipsoid}}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi_{Q_2})}}$ $= 6.5292$	⋮
	$c = \frac{a_{\text{Elipsoid}}^2}{b_{\text{Elipsoid}}}$ $= 7.2$	⋮ 

Slika 5.17: Algebarsko sučelje gdje se prikazuje poistovjećenost polumjera zakrivljenosti točke Q_1 (N_1) sa polarnim polumjerom elipsoida (c)

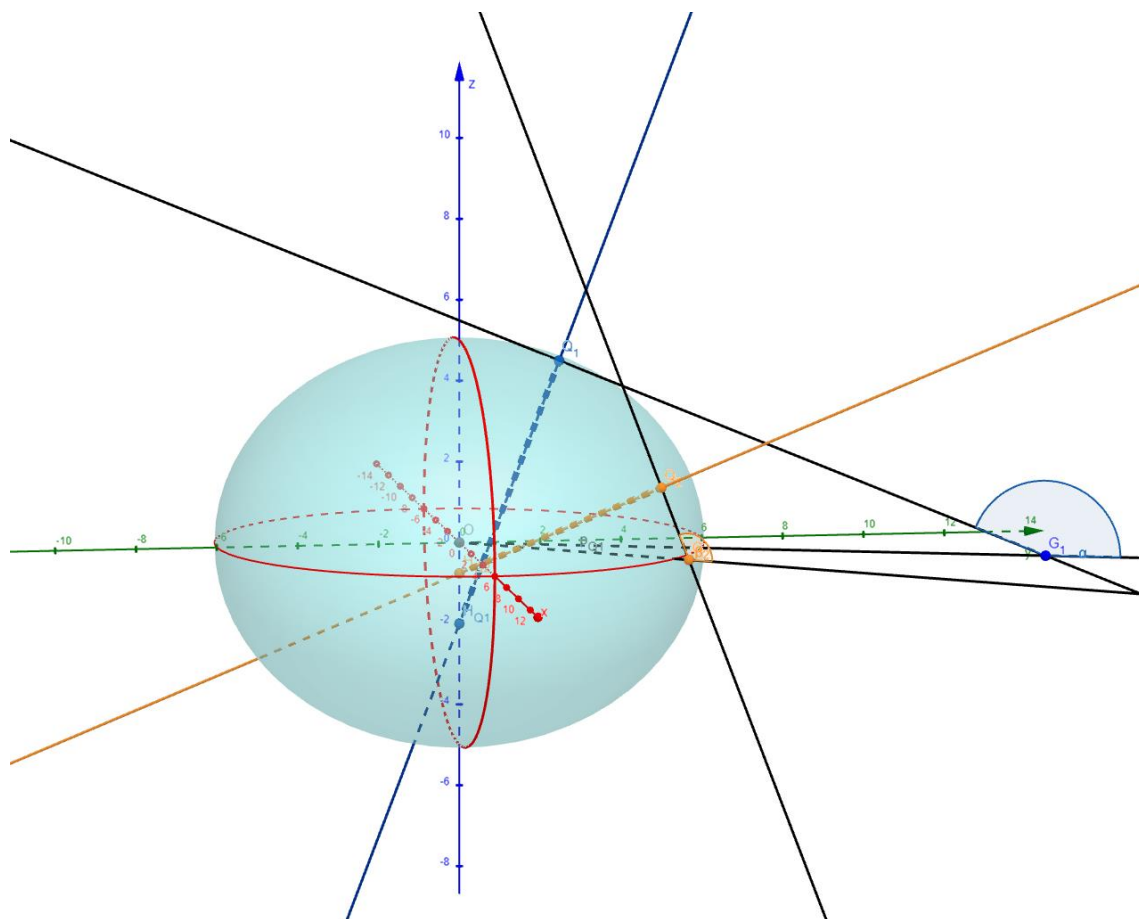
Dakle, razvidno je kako se vrijednost polumjera zakrivljenosti prvog vertikala točke Q_1 (gdje vrijedi $\varphi_{Q_1} = 90^\circ$) u algebarskom sučelju alata *GeoGebra*® nazvan N_1 , poistovjećuje s vrijednošću polarnog polumjera elipsoida u algebarskome sučelju nazvanom c . Definiranjem elemenata p_{Q_1} i p_{Q_2} omogućen je prikaz promjene koeficijenta smjera pravca tangente (na meridijan) u točkama Q_1 i Q_2 . Elementi koji omogućuju definiranje takvih prikazana predočeni su algebarskim sučeljem (slika 5.18).

○	$G_1 = \text{Intersect}(p_{Q_1}, \text{Tangent}_{M_1})$ $= (-2587.0383, 649.0708, 0)$	⋮
○	$G_2 = \text{Intersect}(p_{Q_2}, \text{Tangent}_{M_2})$ $= (7.6326, 3.8815, 0)$	⋮
○	$PT_1 = \text{Point}(p_{Q_1})$ $= (-83.5204, 20.9547, 0)$	⋮ ▶
○	$PT_2 = \text{Point}(p_{Q_2})$ $= (66.0736, 33.6008, 0)$	⋮ ▶
○	$\alpha = \text{Angle}(Q_1, G_1, PT_1)$ $= 0^\circ 6' 26.6669''$	⋮
○	$\beta = \text{Angle}(Q_2, G_2, PT_2)$ $= 140^\circ 42' 7.1083''$	⋮

Slika 5.18: Definirajući elementi koeficijenta smjera pravca tangente točaka Q_1 i Q_2

Naredbom *Intersect* odabrane su odgovarajuće tangente meridijana i pravci p (točaka Q_1 i Q_2) koji su definirali točke G_1 i G_2 . Naime, kut koji definira koeficijent smjera pravca tangente nalazi se u vrhu točke G_1 (za tangentu točke Q_1), odnosno u vrhu točke G_2 (za tangentu točke Q_2). Dakle, spomenutom naredbom odabiranjem elemenata p_{Q_1} i Tangent_{M_1} definirana je točka G_1 , odnosno odabiranjem elemenata p_{Q_2} i Tangent_{M_2} definirana je točka u algebarskome sučelju nazvana G_2 . Za uspostavljanje navedenih kutova definiraju se pomoćne točke na osi p_{Q_2} nazvana PT_1 , te na osi p_{Q_2} nazvana PT_2 . Definiranjem navedenih točaka omogućilo se istima kretanje duž pravca na kojem se nalaze što nije poželjno u ovome slučaju. Iz toga razloga pomoćnim točkama PT_1 i PT_2 definirana je brzina kretanja 0, čime se iste pretvaraju u nepomične točke. Zatim su naredbom *Angle* definirani kutovi u algebarskome sučelju nazvani α i β koji predstavljaju koeficijente smjera pravaca tangenata točaka Q_1 i Q_2 . Kut α definiran je spomenutom naredbom uz odabiranje elementa koji definira vrh kuta G_1 te elemenata koji definiraju krake kutova Q_1 i PT_1 . Navedenim postupkom definiran je kut u algebarskome sučelju nazvan α koji predstavlja koeficijent smjera pravca tangente točke Q_1 . Istom naredbom, odabiranjem elementa za vrh kuta G_2 te elementa koji definiraju krakove kuta Q_2 i PT_2 , definiran je kut u algebarskome sučelju nazvan β , koji definira koeficijent smjera pravca tangente točke Q_2 . Koeficijenti pravca tangenata u geometrijskome smislu predstavljaju totalni diferencijal Kartezijeve jednadžbe elipse (promatranje meridijana gdje x -os predstavlja pravac p točke, dok y -os predstavlja z -os koordinatnog alata *GeoGebra*®) odnosno tangens kuta (vanjski kut u točki G koji iznosi $\angle = 90^\circ + \varphi$) koji je izražen vrijednostima α i β ,

a koje su prikazane u algebarskome sučelju slikom 5.18 (također, navedeni se element može vidjeti u poglavlju 3.1 rada na slici 3.6). Slikom 5.19 prikazani su kutovi α (označen plavom bojom koja upućuje na povezanost s točkom Q_1) i β (označen narančastom bojom koja upućuje na povezanost sa točkom Q_2), također napominje se da je elipsoidna širina točke Q_2 manja od elipsoidne širine točke Q_1 .



Slika 5.19: Koeficijent smjera pravca tangente točaka Q_1 (α) i Q_2 (β)

Nužno je navesti kako je koeficijent smjera pravca tangente kuta koji tangenta na meridijan zatvara x -os (pravac p u ovom slučaju) točke Q , odnosno ista predstavlja tangens kuta $\angle = 90^\circ + \varphi$, što je predloženo slikom 3.6 i teorijski potkrijepljeno u poglavlju 3.1 ovog rada. Navedenim se zaključuje kako je koeficijent smjera pravca tangente ovisan samo o geodetskoj širini promatrane točke na elipsoidu (što je omogućeno korisniku da uoči manipulacijom geodetskih širina točaka Q_1 i Q_2), a što dodatno upućuje na činjenicu da su meridijani elipse i u konačnici uzrokuje promjenu koeficijenta smjera pravca tangente.

Numerički definirani polumjeri zakrivljenosti prvog vertikala točaka Q_1 i Q_2 bit će prikazani u narednom poglavlju te će se definirati polumjeri zakrivljenosti meridijanske elipse točaka Q_1 i Q_2 koji je nužan za računanje duljine luka meridijana te koji je direktno povezan sa

zakrivljenošću meridijanske elipse. Slika 5.20 prikazuje algebarsko sučelje gdje su definirani polumjeri zakrivljenosti meridijanske elipse točaka Q_1 i Q_2 te su označene točke C_1 i C_2 koje definiraju polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse istih točaka. Također, prikazani su i numerički definirani polumjeri zakrivljenosti prvih vertikalna točaka Q_1 i Q_2 (N'_1 i N'_2) definiranjem točaka H'_1 i H'_2 .

	$M_1 = \frac{a_{\text{Elipsoid}} (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2(\varphi_{Q_1}))^{\frac{3}{2}}}$ $= 6.4606$	$\vdots$
	$M_2 = \frac{a_{\text{Elipsoid}} (1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2(\varphi_{Q_2})}$ $= 4.325$	$\vdots$
$\bigcirc$	$m_1 = \text{UnitVector}(\text{Vector}(Q_1, H_{Q_1})) M_1$ $= \begin{pmatrix} -0.6854 \\ -2.1763 \\ -6.0443 \end{pmatrix}$	$\vdots$
$\bigcirc$	$m_2 = \text{UnitVector}(\text{Vector}(Q_2, H_{Q_2})) M_2$ $= \begin{pmatrix} -2.3688 \\ -3.1669 \\ -1.7507 \end{pmatrix}$	$\vdots$
$\bigcirc$	$C_1 = Q_1 + m_1$ $= (0.0583, 0.1851, -1.4898)$	$\vdots$
$\bigcirc$	$C_2 = Q_2 + m_2$ $= (1.0029, 1.3408, -0.0202)$	$\vdots$
$\bigcirc$	$n_1 = \text{UnitVector}(\text{Vector}(Q_1, H_{Q_1})) N'_1$ $= \begin{pmatrix} -0.7367 \\ -2.3393 \\ -6.4971 \end{pmatrix}$	$\vdots$
$\bigcirc$	$n_2 = \text{UnitVector}(\text{Vector}(Q_2, H_{Q_2})) N'_2$ $= \begin{pmatrix} -3.3481 \\ -4.476 \\ -2.4745 \end{pmatrix}$	$\vdots$
$\bigcirc$	$H'_1 = Q_1 + n_1$ $= (0.007, 0.0221, -1.9426)$	$\vdots$
$\bigcirc$	$H'_2 = Q_2 + n_2$ $= (0.0236, 0.0316, -0.744)$	$\vdots$

Slika 5.20: Definirajući elementi polumjera zakrivljenosti meridijanskih elipsi točaka Q_1 i Q_2

Sukladno izrazu (3.7), definiranom u poglavlju 3.1 ovog rada, u algebarskome sučelju definirane su vrijednosti M_1 i M_2 , od kojih M_1 predstavlja polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse točke Q_1 , dok veličina M_2 predstavlja polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse u točki Q_2 .

Naglašava se kako su polumjeri zakrivljenosti meridijanskih elipsi definirani numerički gdje se pojavljuje slično odstupanje uočeno prilikom usporedbe numeričkog i geometrijskog

definiranja polumjera zakrivljenosti prvog vertikala točaka Q_1 i Q_2 . U ovom postupku nije direktno uspoređena razlika između polumjera zakrivljenosti meridijanske elipse jer isti nisu definirani geometrijski, već isključivo numerički. Nadalje, slijedio je prikaz numerički definiranih polumjera zakrivljenosti meridijanskih elipsi točaka Q_1 i Q_2 . Naime, poznato je kako je polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse u određenoj točki koja se nalazi na istoj elipsi, definiran kao udaljenost duž normale omeđena točkama Q (točkom na meridijanskoj elipsi) i točkom C . Dakle, uz poznatu udaljenost, cilj je uspostava točke C na pravcu normale. Navedeno je omogućeno uspostavom jediničnog vektora koji je usmjeren od točke Q prema točki H . Zatim množenjem dotičnog jediničnog vektora s vrijednošću numerički definirane vrijednosti polumjera zakrivljenosti meridijanske elipse. Kao rezultat dobiven je vektor čiji vrh predstavlja točku C . Dakle, naredbom *UnitVector* unutar koje je naredbom *Vector* točkama Q_1 i H_1 definiran jedinični vektor čiji je početak definiran točkom Q_1 dok je završna točka u smjeru točke H_{Q_1} (radi se o jediničnom vektoru). Navedeni jedinični vektor pomnožen je vrijednošću M_1 te je time definiran vektor u algebarskome sučelju nazvan m_1 . Također, naredbom *UnitVector* unutar koje je naredbom *Vector* točkama Q_2 i H_2 definiran jedinični vektor čiji je početak definiran točkom Q_2 dok je završna točka u smjeru točke H_{Q_2} (radi se o jediničnom vektoru). Navedeni jedinični vektor pomnožen je vrijednošću M_2 te je time definiran vektor u algebarskome sučelju nazvan m_2 . Definiranjem vektora m_1 i m_2 omogućena je uspostava točaka C_1 i C_2 . Stoga, izrazom (5.7), definirana je točka C_1 dok je točka C_2 definirana izrazom (5.8):

$$C_1 = Q_1 + m_1 \quad (5.7)$$

$$C_2 = Q_2 + m_2 \quad (5.8)$$

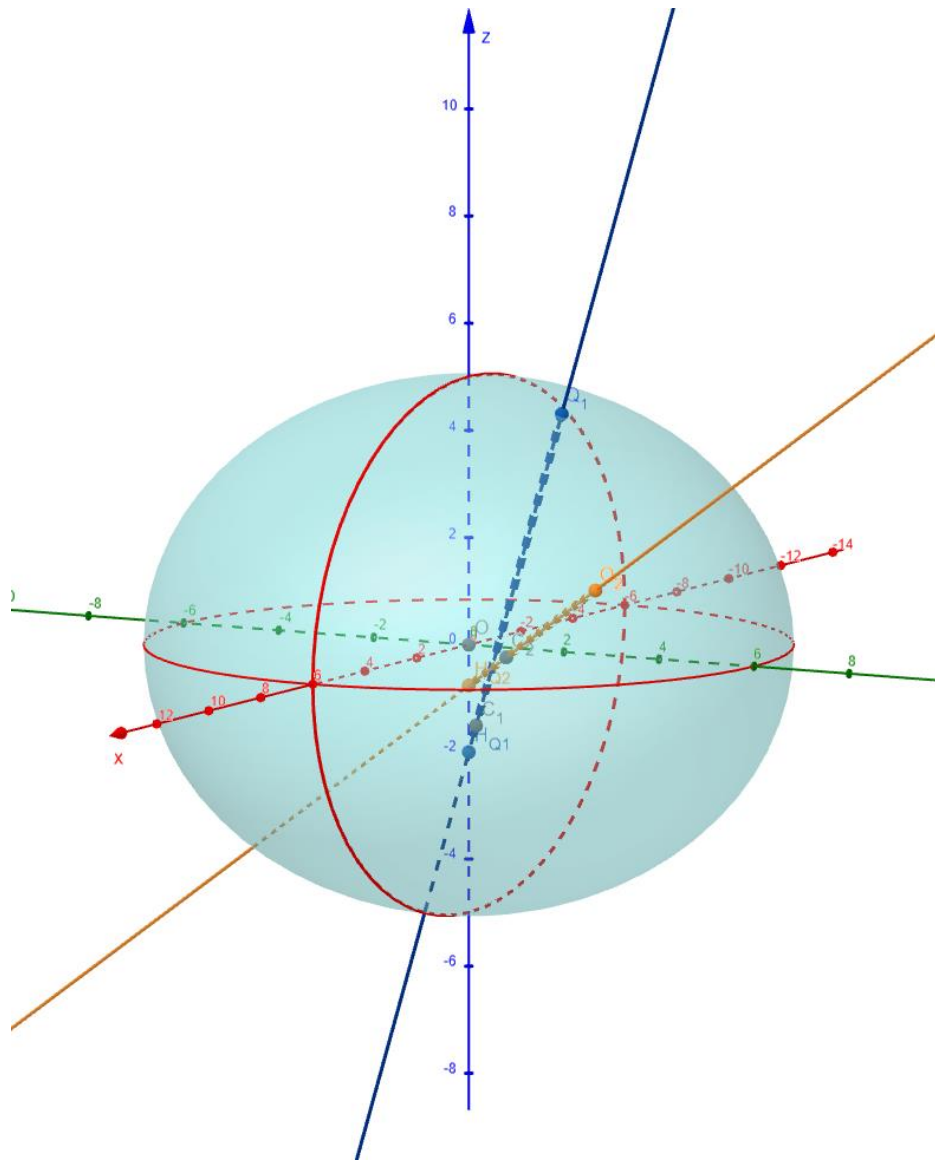
Dakle, točke C_1 i C_2 ovisne su o geodetskoj širini točaka Q_1 i Q_2 te se, promjenom istih, gibaju duž normale između točaka Q_1 i H_1 odnosno točaka Q_2 i H_2 . Istom metodologijom definirane su točke u algebarskome sučelju nazvane H'_1 i H'_2 koje predstavljaj s točkama Q_1 i Q_2 predstavljaju polumjere zakrivljenosti prvih vertikala (numerički definiranih). Dakle, naredbom *UnitVector* unutar koje je naredbom *Vector* točkama Q_1 i H_1 definiran jedinični vektor čiji je početak definiran točkom Q_1 dok je završna točka u smjeru točke H_1 (radi se o jediničnom vektoru). Navedeni jedinični vektor pomnožen je vrijednošću N'_1 te je time definiran vektor u algebarskome sučelju nazvan n_1 . Također, naredbom *UnitVector* unutar koje je naredbom *Vector* točkama Q_2 i H_2 definiran jedinični vektor čiji je početak definiran točkom Q_2 dok je

završna točka u smjeru točke H_2 (radi se o jediničnom vektoru). Navedeni jedinični vektor pomnožen je vrijednošću N'_2 te je time definiran vektor u algebarskome sučelju nazvan n_2 . Definiranjem vektora n_1 i n_2 omogućena je uspostava točaka H'_1 i H'_2 . Stoga, izrazom (5.9), definirana je točka H'_1 dok je točka H'_2 definirana izrazom (5.10):

$$H'_1 = Q_1 + n_1 \quad (5.9)$$

$$H'_2 = Q_2 + n_2 \quad (5.10)$$

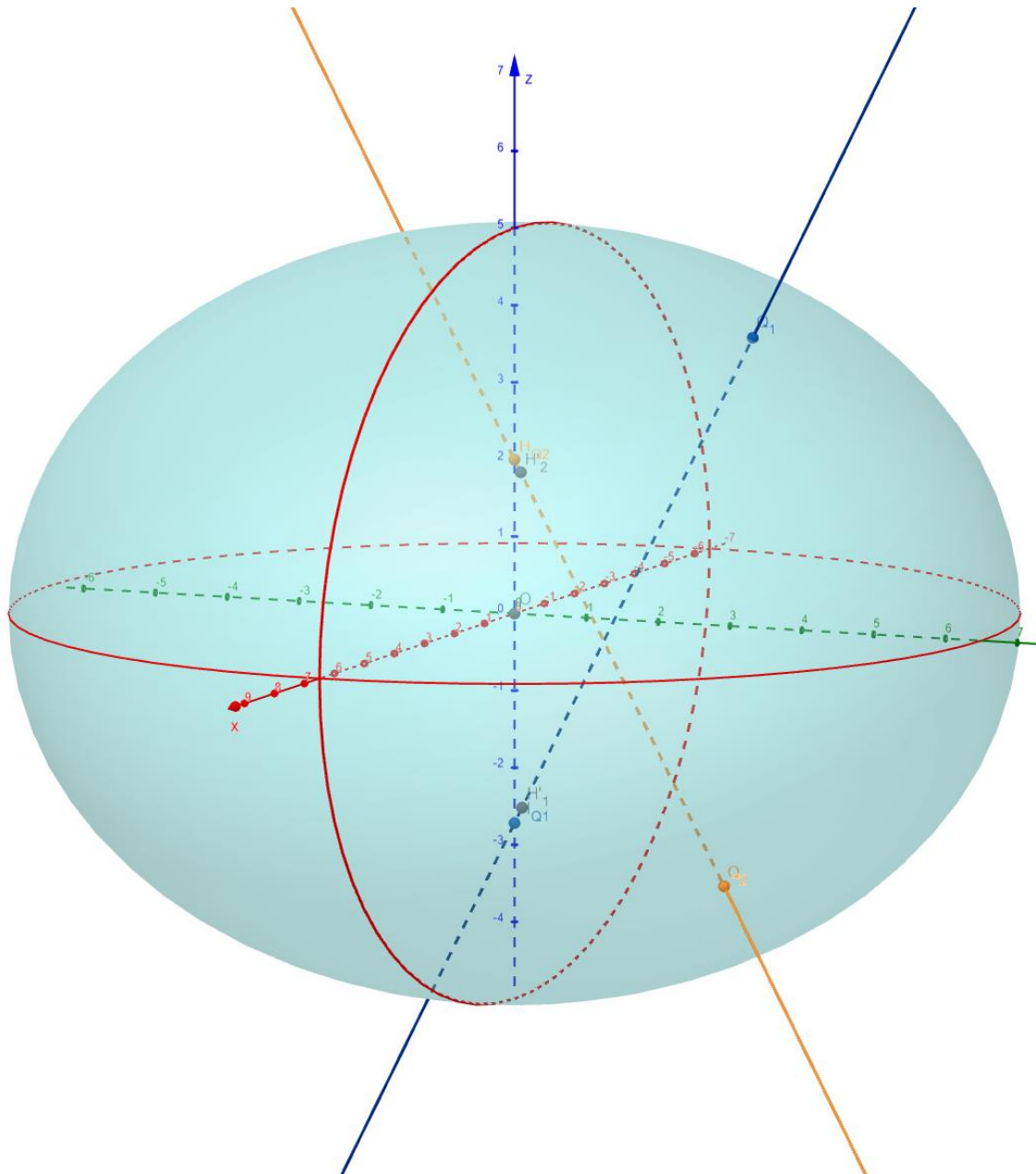
Prikaz točaka C_1 i C_2 , odnosno polumjera zakrivljenosti meridijanske elipse točke Q_1 i Q_2 predložen je slikom 5.21. Promjenom geodetskih koordinata točaka Q_1 i Q_2 automatski se mijenja i položaj točaka C_1 i C_2 .



Slika 5.21: Polumjeri zakrivljenosti meridijanskih elipsi točkaka Q_1 i Q_2

Na slici 5.21, točka Q_1 ima veću vrijednost geodetske širine od točke Q_2 ($\varphi_1 > \varphi_2$). Time je razvidno kako vrijednost polumjera zakrivljenosti meridijanske elipse točke Q_1 ima veću vrijednost od polumjera zakrivljenosti meridijanske elipse točke Q_2 .

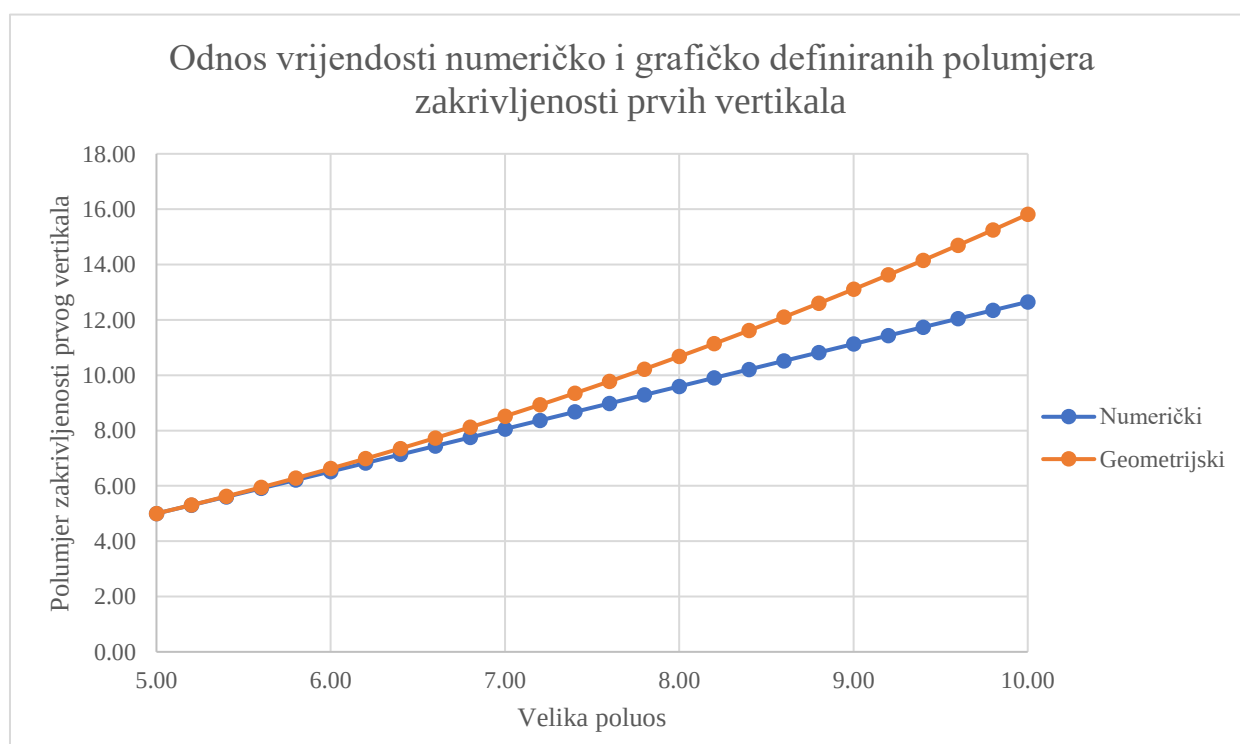
Slika 5.22 prikazuje položaj točaka H'_1 i H'_2 u odnosu na točke H_1 i H_2 . Navedenom slikom prikazuje se linearna razlika geometrijski definiranih polumjera zakrivljenosti točaka Q_1 i Q_2 te istih, definirani numeričkim pristupom u trodimenzionalnom prostoru.



Slika 5.22: Odnos geometrijski i numeričko definiranih polumjera zakrivljenosti prvih vertikala točaka Q_1 i Q_2

U svim (dosadašnjim) slikovnim prikazima modela elipsoida, velikoj poluosi rotacijskog elipsoida ($a_{Elipsoid}$) dodijeljena je vrijednost 5,3 ($a_{Elipsoid} = 5.3$), dok je maloj poluosi elipsoida ($b_{Elipsoid}$), dodijeljena vrijednost 5,0 ($b_{Elipsoid} = 5.0$) pomoću klizača. Na slici 5.22, rotacijski elipsoid je prikazan zadanom vrijednošću velike poluosi ($a_{Elipsoid}$) od 5,4 ($a_{Elipsoid} = 5.4$), dok je maloj poluosi ($b_{Elipsoid}$) definirana vrijednost iznosa 4,0 ($b_{Elipsoid} = 4.0$). Navedeno omogućuje da se razlika geometrijskih i numerički definiranih polumjera zakrivljenosti prvih vertikala uoči.

Problematika razlikovanja vrijednosti polumjera zakrivljenosti prvog vertikala koji je definiran geometrijskim i numeričkim pristupom prikazana je slikom 5.23. Slika 5.23 prikazuje odnos numeričko i geometrijsko definiranog polumjera zakrivljenosti točke Q_1 na geodetskoj širini vrijednosti 45° ($\varphi_{Q_1} = 45^\circ$) koja se nalazi na rotacijskom elipsoidu. Rotacijski elipsoid definiran je malom poluosi ($b_{Elipsoid}$) koja je fiksna te joj je pridružena vrijednost iznosa 5.0 ($b_{Elipsoid} = 5.0$). Vrijednost velike poluosi rotacijskog elipsoida ($a_{Elipsoid}$) odgovara promjenjiva vrijednost od 5 do 10 za inkrement 0,2. Dakle, za pojedinu vrijednost promjene velike poluosi elipsoida (za inkrement 0,2) numeričkim i geometrijskim podacima kreiran je slikovni prikaz odnosa polumjera zakrivljenosti prvih vertikala (slikom 5.23). Razvidno je kako se povećavanjem spljoštenosti elipsoida razlika geometrijsko i numeričko definiranog polumjera zakrivljenosti prvog vertikala također povećava. Napominje se kako su sve veličine u svim modelima iskazani bez mjernih jedinica osim kutnih vrijednosti.



Slika 5.23: Odnos vrijednosti numeričko i grafičko definiranih polumjera zakrivljenosti prvih vertikala točaka Q_1 i Q_2

Slijedi prikaz geodetske linije u modelu rotacijskog elipsoida. Zbog složenosti iste za prikaz geodetske linije, odabran su početni referentni (Greenwich) meridijan i ekvator koji su također geodetske linije te će u algebarskome sučelju detaljno objasniti dokaz ove tvrdnje. Sam dokaz temelji se glavnom teoremu geodetske linije odnosno Clairautovom teoremu koji kaže da je umnožak radijusa paralele svake točke geodetske linije i sinus kuta geodetskog azimuta iste

točke konstanta vrijednost. Izraz (3.9) predstavlja Clairautov teorem koji je teorijski potkrijepljen u poglavlju 3.1. ovog rada. Slika 5.24 prikazuje algebarsko sučelje na temelju čijih elemenata će u nastavku biti dokazano da meridijan i ekvator spadaju pod geodetske linije.

⊗	Geodetska linija	⋮
○	$C_{Greenwich} = \text{Point}(\text{Greenwich})$ $= (5.9769, 0, 1.9652)$	⋮ ▶
○	$C_{Ekvator} = \text{Point}(\text{Ekvator})$ $= (5.1432, 3.9746, 0)$	⋮ ▶
○	$XY_{CG} : \text{Plane}(C_{Greenwich}, XY_{Ravnina})$ $= z = 1.9652$	⋮
○	$C'_{Greenwich} = \text{Intersect}(XY_{CG}, z\text{Axis})$ $= (0, 0, 1.9652)$	⋮
○	$r_{CG} = \text{Segment}(C'_{Greenwich}, C_{Greenwich})$ $= 5.9769$	⋮
○	$r_{CE} = \text{Segment}(O, C_{Ekvator})$ $= 6.5$	⋮
	$C_G = r_{CG} \sin(0^\circ)$ $= 0$	⋮
	$C_E = r_{CE} \sin(90^\circ)$ $= 6.5$	⋮

Slika 5.24: Elementi algebarskog sučelja kojima je dokazana geodetska linija

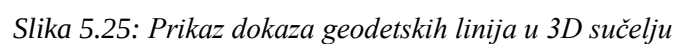
Elementi *Greenwich* i *Ekvator* ranije su definirani elementi na kojima su postavljene točke $C_{Greenwich}$ (na referentnom meridijanu) i $C_{Ekvator}$ (na ekvatoru, odnosno paraleli najvećeg radijusa). Uspostavom navedenih točaka naredbom *Point*, istima je omogućeno manipuliranje u vidu klika na gumb za reprodukciju koji pokreće kretanje točke duž krivulje na kojoj je zadana (u ovom slučaju duž referentnog meridijana i ekvatora). Narednim postupkom definirati će se radijusi točaka $C_{Greenwich}$ i $C_{Ekvator}$ u obliku duljina. Radijus točke $C_{Greenwich}$ uspostavljen je definiranjem paralelne ravnine s $XY_{Ravnina}$ koja prolazi točkom $C_{Greenwich}$, a koja se kreće duž početnog meridijana. Navedena ravnina u algebarskome sučelju nazvana je XY_{CG} te je definirana naredbom *Plane* elementima $XY_{Ravnina}$ i $C_{Greenwich}$. Uspostavom ravnine XY_{CG} omogućeno je definiranje točke $C'_{Greenwich}$ koja predstavlja projiciranu točku $C_{Greenwich}$ na z -os koordinatnog sustava alata *GeoGebra*®. Navedena točka (u algebarskome sučelju nazvana $C'_{Greenwich}$) uspostavljena je naredbom *Intersect* elementima XY_{CG} i z -os ($z\text{Axis}$). Zatim je

naredbom *Segment* definirana dužina odabiranjem elemenata $C'_{Greenwich}$ i $C_{Greenwich}$, koja je u algebarskome sučelju nazvana r_{CG} te predstavlja radijus točke $C_{Greenwich}$. Također, istom naredbom elementima O i $C_{Ekvator}$ definiran je radijus točke $C_{Ekvator}$ u algebarskome sučelju nazvan r_{CE} . Napominje se kako su vrijednosti veličina r_{CG} i r_{CE} automatski definirane i naznačene u algebarskome sučelju. Poznata je činjenica da je geodetski azimut na meridijanu iznosa 0° ili 180° , odnosno na ekvatoru iznosa 90° ili 270° . Element C_G konstantna je vrijednost u algebarskome sučelju koja dokazuje da je početni meridijan geodetska linija. Navedeni element definiran je izrazom (5.11). Izrazom (5.12), definiran je element C_E koji dokazuje da je ekvator geodetska linija.

$$C_G = r_{CG} \sin 0^\circ \quad (5.11)$$

$$C_E = r_{CE} \sin 90^\circ \quad (5.12)$$

Činjenicom da je vrijednost sinusa kuta od 0° (ili 180°) jednaka nuli ($\sin(0^\circ) = \sin(180^\circ) = 0$) vrijednost nule pomnožena s radijusom bilo kojeg iznosa bit će naravno opet nula. Poznato je kako su paralele kružnice od kojih je najveća ekvator čiji je radijus jednak vrijednosti velike poluosi elipsoida ($a_{Elipsoid}$). Dakle, vrijedi da je r_{CE} konstantan i jednak velikoj poluosi elipsoida ($r_{CE} = a_{Elipsoid}$). Također je poznato da je sinus kuta vrijednosti 90° jednak jedinici ($\sin 90^\circ = 1$), odnosno sinus kuta vrijednosti 270° jednak je -1 ($\sin(270^\circ) = -1$). Dakle, ukoliko se vrijednost velike poluosi elipse (odnosno vrijednost r_{CE}) pomnoži sa sinusom kuta geodetskog azimuta vrijednosti 90° ili 270° , Claurautov teorem bit će ispunjen odnosno dokazano je da je ekvator geodetska linija. Klikom na gumb za reprodukciju koji je dan na točkama $C_{Greenwich}$ i $C_{Ekvator}$, pokreće se animacija kojom se prezentira objašnjeni proces. Slika 5.25 prikazuje položaj točaka $C_{Greenwich}$ i $C_{Ekvator}$ s pripadnim radijusima (elementima r_{CG} i r_{CE}) u 3D modelu alata *GeoGebra*®.



61

$f = \frac{a_{\text{Elipsoid}} - b_{\text{Elipsoid}}}{a_{\text{Elipsoid}}}$ = 0.0566	⋮		$r'_{Q1} = \text{Segment}(O, Q_1)$ = 5.0847
 Kružnica $_{Q1}$: Circle($O, a_{\text{Elipsoid}}, ZQ1E_{\text{Ravnina}}$) = $X = (0, 0, 0) + (-4.3696 \cos(t), -2.9995 \cos(t), 5.3 \sin(t))$	⋮		$r'_{Q2} = \text{Segment}(O, Q_2)$ = 5.1788
 Kružnica $_{Q2}$: Circle($O, a_{\text{Elipsoid}}, ZQ2E_{\text{Ravnina}}$) = $X = (0, 0, 0) + (-0.8796 \cos(t), -5.2265 \cos(t), 5.3 \sin(t))$	⋮		$r_{Q1} = \text{Segment}(O, A_{Q1})$ = 5.3
 Okomica $_{Q1}$: PerpendicularLine(Q_1, XY_{Ravnina}) = $X = (2.2968, 1.5766, 4.2536) + \lambda (0, 0, -1)$	⋮		$r_{Q2} = \text{Segment}(O, A_{Q2})$ = 5.3
 Okomica $_{Q2}$: PerpendicularLine(Q_2, XY_{Ravnina}) = $X = (0.6751, 4.0111, 3.2055) + \lambda (0, 0, -1)$	⋮		$u_{Q1} = \text{Angle}(A_{Q1}, O, PT_1)$ = 58°17'22"
 $M'_1 = \text{Intersect}(Okomica_{Q1}, p_{Q1})$ = (2.2968, 1.5766, 0)	⋮		$u_{Q2} = \text{Angle}(A_{Q2}, O, PT_2)$ = 39°52'28.604"
 $M'_2 = \text{Intersect}(Okomica_{Q2}, p_{Q2})$ = (0.6751, 4.0111, 0)	⋮		$\varphi'_{Q1} = \text{Angle}(Q_1, O, PT_1)$ = 56°46'39.5081"
 $A_{Q1} = \text{Intersect}(Okomica_{Q1}, Kružnica_{Q1}, 2)$ = (2.2968, 1.5766, 4.5088)	⋮		$\varphi'_{Q2} = \text{Angle}(Q_2, O, PT_2)$ = 38°14'28.8618"
 $A_{Q2} = \text{Intersect}(Okomica_{Q2}, Kružnica_{Q2}, 2)$ = (0.6751, 4.0111, 3.3979)	⋮		

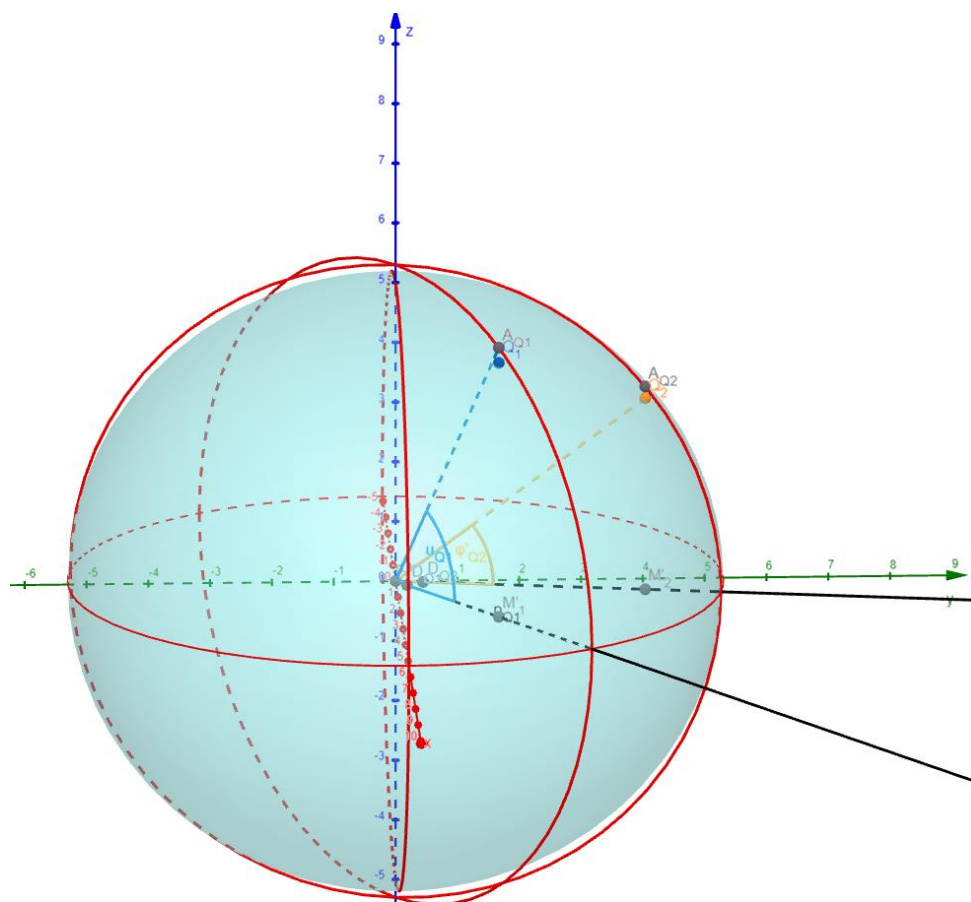
Slika 5.26: Pomoćni elementi za prikaz koordinata elipsoidne širine, geocentrične širine i reducirane širine točaka Q_1 i Q_2

Slika 5.27: Definirajući elementi koordinata elipsoidne širine, geocentrične širine i reducirane širine točaka Q_1 i Q_2

Spljoštenost elipsoida (f) u algebarskome sučelju (slika 5.26), definirana je izrazom (3.4) čija vrijednost također piše u algebarskome sučelju. U poglavlju 3.1. definirane su teorijske osnove spljoštenosti elipsoida f , geocentrične širine φ' i reducirane širine u . Naredbom *Circle* odabiranjem elemenata O , a_{Elipsoid} i $ZQ1E_{\text{Ravnina}}$ definirana je kružnica sa centrom u ishodištu koordinatnog sustava, radijusa velike poluosi rotacijskog elipsoida i orijentacijom prema točki Q_1 . Navedena kružnica u algebarskome sučelju imenovana je *Kružnica $_{Q1}$* te se nalazi u ravnini meridijanske elipse točke Q_1 . Također naredbom *Circle* odabiranjem elemenata O , a_{Elipsoid} i $ZQ2E_{\text{Ravnina}}$ definirana je kružnica sa centrom u ishodištu koordinatnog sustava, radijusa velike poluosi rotacijskog elipsoida i orijentacijom prema točki Q_2 . Navedena kružnica u algebarskome sučelju imenovana je *Kružnica $_{Q2}$* te se nalazi u ravnini meridijanske elipse točke Q_2 . Definiranjem kružnica *Kružnica $_{Q1}$* i *Kružnica $_{Q2}$* naredbom *PrependicularLine*, odabiranjem elemenata Q_1 i *Kružnica $_{Q1}$* te postavljanjem broja dva (2) kao zadnjeg elementa naredbe (koji definira da se radi o drugom presjeku na sjevernoj hemisferi rotacijskog elipsoida) definiran je element u algebarskome sučelju nazvan A_{Q1} . Također naredbom *PrependicularLine*, odabiranjem elemenata Q_2 i *Kružnica $_{Q2}$* te postavljanjem broja dva (2) kao zadnjeg elementa naredbe (koji definira da se radi o presjeku na sjevernoj

hemisferi) definiran je element u algebarskome sučelju nazvan A_{Q_2} . Naredbom *Intersect* definirani su elementi M'_1 (odabiranjem elemenata $Okomica_{Q_1}$ i p_{Q_1}) i M'_2 ($Okomica_{Q_2}$ i p_{Q_2}). Time su kreirani svi elementi koji su potrebi za prikaz geocentrične širine φ' i reducirane širine u . Slika 5.27 prikazuje algebarsko sučelje unutar kojeg su definirani kutne vrijednosti $(u_{Q_1}, u_{Q_2}, \varphi'_{Q_1}, \varphi'_{Q_2})$ i radijvektori točaka Q_1 i Q_2 (r'_{Q_1} i r'_{Q_2}), odnosno točaka A_{Q_1} i A_{Q_2} (r_{Q_1} i r_{Q_2}). Dakle naredbom *Segment* označavanjem elemenata O i Q_1 , definiran je element r'_{Q_1} , odnosno označavanjem elemenata O i Q_2 definiran je element r'_{Q_2} . Istom naredbom odabiranjem elemenata O i A_{Q_1} definiran je element r_{Q_1} , odnosno odabiranjem elemenata O i A_{Q_2} definiran je element r_{Q_2} . Zatim je započeto definiranje elemenata u algebarskome sučelju nazvanih: $u_{Q_1}, u_{Q_2}, \varphi'_{Q_1}$ i φ'_{Q_2} . Dakle, naredbom *Angle* odabiranjem elemenata A_{Q_1} , O i PT_1 definiran je kutu vrhu točke O s krakovima usmjerenim prema točkama: A_{Q_1} i PT_1 . Time je definiran kut u algebarskome sučelju nazvan u_{Q_1} koji predstavlja reduciranu širinu točke Q_1 . Također naredbom *Angle* odabiranjem elemenata A_{Q_2} , O i PT_2 definiran je kut u vrhu točke O s krakovima usmjerenim prema točkama: A_{Q_2} i PT_2 . Time je definiran kut u algebarskome sučelju nazvan u_{Q_2} koji predstavlja reduciranu širinu točke Q_2 . Zatim je naredbom *Angle* odabiranjem elemenata Q_1 , O i PT_1 definiran je kut u vrhu točke O s krakovima usmjerenim prema točkama: Q_1 i PT_1 . Time je definiran kut u algebarskome sučelju nazvan φ'_{Q_1} koji predstavlja geocentričnu širinu točke Q_1 . Također naredbom *Angle* odabiranjem elemenata Q_2 , O i PT_2 definiran je kut u vrhu točke O s krakovima usmjerenim prema točkama: Q_2 i PT_2 . Time je definiran kut u algebarskome sučelju nazvan φ'_{Q_2} koji predstavlja reduciranu širinu točke Q_2 . Time su definirani kutovi koji su u algebarskome sučelju nazvani: $u_{Q_1}, u_{Q_2}, \varphi'_{Q_1}, \varphi'_{Q_2}$. Svi elementi koji se odnose na točku Q_1 označeni su plavom bojom, dok su svi elementi koji su povezani točkom Q_2 označeni plavom bojom. Napominje se kako koordinata reducirane širine točaka Q_1 i Q_2 u algebarskome sučelju predstavlja samo pozitivnu vrijednost reducirane širine, jer se elementi A_{Q_1} A_{Q_2} nalaze samo na sjevernoj hemisferi.

Slika 5.28 prikazuje geocentričnu širinu točke Q_2 (kut φ'_{Q_2}) i reduciranu širinu točke Q_1 (kut u_{Q_1}).



Slika 5.28: Prikaz geocentrične širine točke Q_2 (kut φ'_{Q2}) i reducirane širine točke Q_1 (kut u_{Q1}).

Modelu rotacijskog elipsoida moguće je pristupiti putem poveznice: [Rotacijski elipsoid](#).

Također, navedenom modelu moguće je pristupiti i skeniranjem QR koda (slika 5.29).



Slika 5.29: QR kod modela rotacijskog elipsoida

5.3. Matematičke operacije nad koordinatama

5.3.1 PVT konvencija transformacije

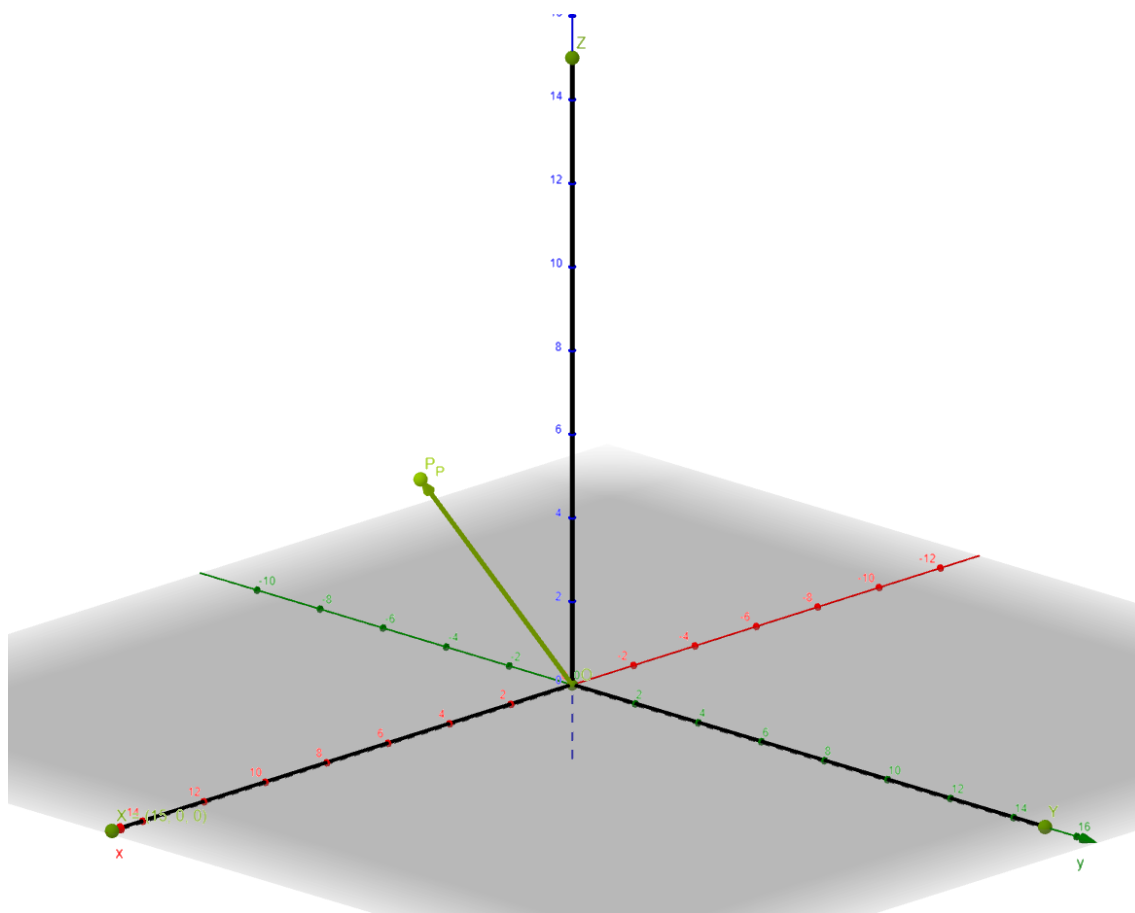
PVT konvencija transformacije temelji se na rotaciji vektora položaja polazišne točke za iznos Eulerovih kutova rotacije. Teorijske osnove PVT konvencije transformacije dane su u potpoglavlju 3.2.1 ovog rada. Dakle, cilj je izraditi trodimenzionalni prikaz transformacije. Za potrebe ovog modela bit će definirani Eulerovi kutovi rotacije oko svake od osi K.S. većeg iznosa. U svrhu izrade modela, radi boljeg prikaza definirani su Eulerovi kutovi rotacije oko x–osi za vrijednost 25° , oko y–osi za vrijednost 25° te oko z–osi za vrijednost 10° . Iznosom ovih kutova moguće je bolje prezentirati kako se vektor polazišne točke rotira oko svake od koordinatnih osi. Kao prvi korak izrade ovog modela u algebarskome sučelju definirano je ishodište koordinatnog sustava alata *GeoGebra*®, odnosno definiran je polazišni K.S., također definiran je položaj polazišne točke te njezin vektor položaja. U svrhu lakše izrade modela definirane su ravnine x–y–osi, x–z–osi te y–z–osi. Algebarski prikaz navedenih elemenata prikazan je slikom 5.30.

☐	$O = (0, 0, 0)$	⋮
☐	$X = (15, 0, 0)$	⋮
☐	$Y = (0, 15, 0)$	⋮
☐	$Z = (0, 0, 15)$	⋮
☒	$P_P = (7, 2, 7)$	⋮
☒	$r_P = \text{Vector}(O, P_P)$	⋮
	$= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$	
☐	$x_{os} = \text{Segment}(X, O)$ $= 15$	⋮
☐	$y_{os} = \text{Segment}(O, Y)$ $= 15$	⋮
☐	$z_{os} = \text{Segment}(O, Z)$ $= 15$	⋮
☐	$XZ_{\text{RAVNINA}} : y = 0$	⋮
☐	$YZ_{\text{RAVNINA}} : x = 0$	⋮
☐	$XY_{\text{RAVNINA}} : z = 0$	⋮

Slika 5.30: Prikaz defilirajućih elemenata koordinatnog sustava alata *GeoGebra*

Ishodišna točka K.S. nazvana je O te je definirana koordinatama $(0, 0, 0)$ K.S. alata *GeoGebra*®. Radi uspostave pravaca osi spomenutog definirane su točke na svakoj od osi K.S. udaljene od ishodišta za vrijednost 15, te su u algebarskome sučelju nazvane X , Y i Z . Nadalje definirane su osi koordinatnog sustava pomoću naredbe *Segment* elementima ishodišne točke (O) i prijašnje definiranih točaka koje se nalaze na koordinatnim osima (X , Y i Z). Kao rezultat definirani su pravci u algebarskome sučelju nazvani x_{os} , y_{os} i z_{os} . Zatim je definirana polazišna točka u algebarskome sučelju nazvana P_p koja će biti predmet transformacije, s pripadnim koordinatama $(7, 2, 7)$. Naredbom *Vector* definiran je polazišni vektor elementima O i P_p u algebarskome sučelju nazvan r_p . Navedeni će također biti predmet rotacije zajedno s točkom na vrhu istog (elementom P_p). Izrazima (5.1), (5.13) i (5.2) definirane su pomoćne ravnine u algebarskome sučelju nazvane $XY_{RAVNINA}$, $YZ_{RAVNINA}$ i $XZ_{RAVNINA}$. Elementi x_{os} , y_{os} i z_{os} definirani su crnom bojom dok je element r_p s točkom P_p u trodimenzionalnom sučelju prikazan zelenom bojom (slika 5.31).

$$x = 0 \tag{5.13}$$



Slika 5.31: Elementi x_{os} , y_{os} , z_{os} , r_P s točkom P_P u 3D sučelju alata GeoGebre

Nakon definiranja početnih elemenata koji su nužni za izradu modela slijedi postupak rotacije elemenata r_P i P_P za iznos Eulerovih kutova rotacije oko svake od koordinatnih osi. Naime navedeni elementi rotirani su za iznos Eulerovog kuta rotacije α_x oko x–osi te je time definirana točka P' . Zatim je točka P' rotirana za iznos Eulerovog kuta rotacije oko y–osi α_y te je time definirana točka P'' . Konačno točka P'' rotirana je oko z–osi za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_z te je time definirana odredišna točka i njezin vektor nazvana P_O . Navedenim postupkom na točki P_P izvršena je transformacije PVT konvencije. Nadalje sve točke rotacije povezane su kružnim lukovima te na iste postavljene točke koje se kreću. Tako klikom na gumb za reprodukciju omogućen je prikaz rotacije pojedinog vektora.

Slika 5.32 prikazuje algebarsko sučelje kojim je postignuta rotacija prostornog vektora polazišne točke oko x–osi (elementa x_{os}) koordinatnog sustava.

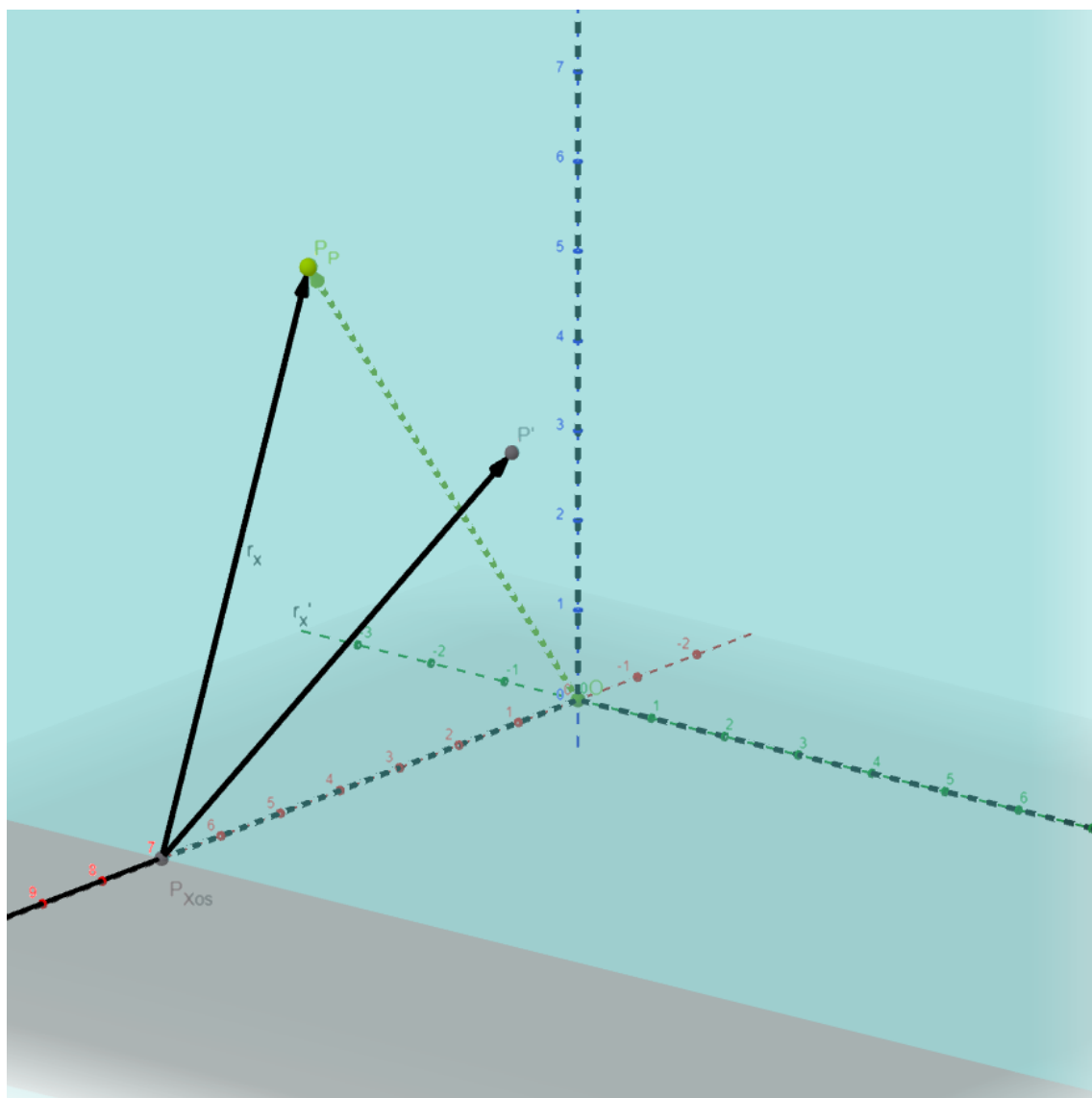
○	$ZY_P : \text{Plane}(P_P, YZ_{\text{RAVNINA}})$ $= x = 7$	⋮
○	$P_{x_{os}} = \text{Intersect}(x_{os}, ZY_P)$ $= (7, 0, 0)$	⋮
○	$r_x = \text{Vector}(P_{x_{os}}, P_P)$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$	⋮
	$\alpha_x = 25^\circ$	⋮
○	$r'_x = \text{Rotate}(r_x, -\alpha_x, x\text{Axis})$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ 4.77 \\ 5.5 \end{pmatrix}$	⋮
○	$P' = (x(P_P), y(r'_x), z(r'_x))$ $= (7, 4.77, 5.5)$	⋮

Slika 5.32: Prikaz algebarskog sučelja rotacije polazišnog vektora oko x–osi K.S.

Naredbom *Plane*, elementima P_P i YZ_{RAVNINA} , definirana je paralelna ravnina s yz ravninom koordinatnog sustava koja prolazi točkom koja je predmet rotacije (element P_P). Navedena ravnina u algebarskome sučelju nazvana je ZY_P . Naredbom *Intersect* definira se točka presijecanja elemenata ZY_P i x_{os} u algebarskome sučelju nazvana $P_{x_{os}}$. Nadalje, definira se vektor koji će biti predmet rotacije, naredbom *Vector*, elementima $P_{x_{os}}$ i P_P , u algebarskom sučelju nazvan r_x . Element α_x definiran je kao Eulerov kut rotacije oko x–osi iznosa 25° . Naredbom *Rotate* rotiran je vektor r_x za negativni iznos kuta α_x ($-\alpha_x$) oko x–osi ($x\text{Axis}$), kako bi se dobila rotacija vektora u smjeru kretanja kazaljke na satu. Kao rezultat ove naredbe definiran je vektor r'_x u vrhu čijeg se nalazi točka koja predstavlja rotiranu polazišnu točku za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_x oko x–osi. Ista je definirana izrazom (5.14) te u algebarskome sučelju nazvana P' :

$$(x(P_P), y(r'_x), z(r'_x)) \quad (5.14)$$

Dakle, točka P' definira točku P_P nakon rotacije oko x–osi. Navedeni rezultat sa svim elementima prikazan je na slici 5.33.



Slika 5.33: Prikaz elemenata rotacije točke P_P oko x -osi

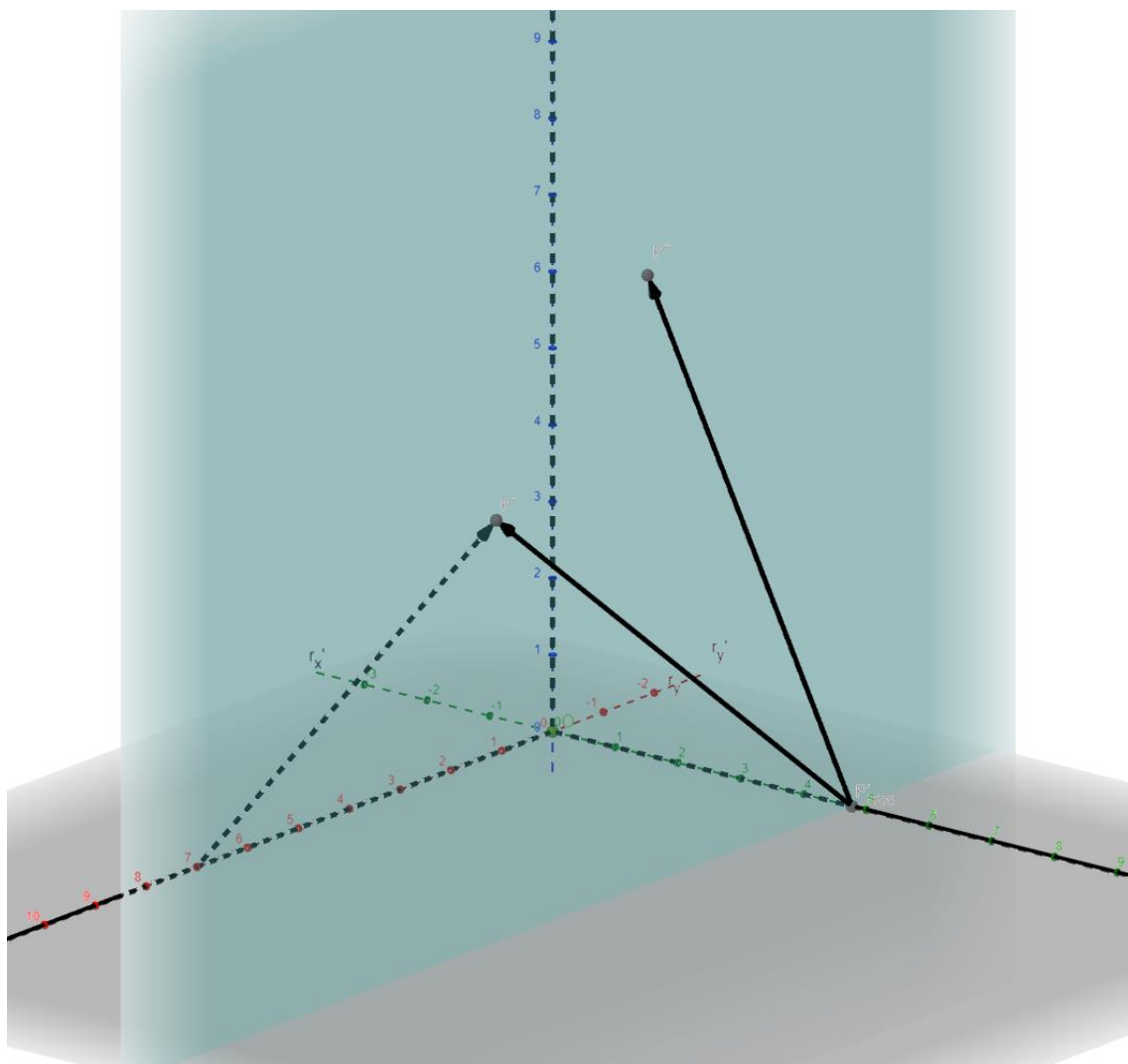
Analogno vrijedi i za drugu rotaciju gdje je rotirana točka P' oko y -osi za vrijednost Eulerovog kuta α_y . Slika 5.34 prikazuje elemente kojima je navedeno omogućeno.

○	$ZX_{P'} : \text{Plane}(P', XZ_{\text{RAVNINA}})$ $= y = 4.77$	⋮
○	$P'_{yos} = \text{Intersect}(y_{os}, ZX_{P'})$ $= (0, 4.77, 0)$	⋮
○	$r_y = \text{Vector}(P'_{yos}, P')$ $= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5.5 \end{pmatrix}$	⋮
	$\alpha_y = 25^\circ$	⋮
○	$r'_y = \text{Rotate}(r_y, -\alpha_y, y\text{Axis})$ $= \begin{pmatrix} 4.02 \\ 0 \\ 7.94 \end{pmatrix}$	⋮
○	$P'' = (x(r'_y), y(P'), z(r'_y))$ $= (4.02, 4.77, 7.94)$	⋮

Slika 5.34: Prikaz algebarskog sučelja rotacije vektora točke P' oko y -osi K.S

Postupak rotacije točke P' oko y -osi započet je definiranjem paralelne ravnine s ravninom z - x -osi koja prolazi točkom P' . Navedena je ravnina konstruirana naredbom *Plane* elemenata y_{os} i XZ_{RAVNINA} te u algebarskome sučelju nazvana $ZX_{P'}$. P'_{yos} jest točka koja definira sjecište elemenata ravnine $ZX_{P'}$ i elementa y_{os} , konstruirana naredbom *Intersect*. Naredbom *Vector* elementima, P'_{yos} i P' , definiran je vektor koji će biti predmet rotacije u algebarskome sučelju nazvan r_y . Definiran je drugi Eulerov kut rotacije, odnosno kut rotacije oko y -osi iznosa 25° u algebarskom sučelju nazvan α_y . Zatim je vektor r_y naredbom *Rotate* rotiran za negativan iznos Eulerovog kuta rotacije α_y oko y -osi ($y\text{Axis}$). Navedeni kut negativno je rotiran ($-\alpha_y$) kako bi se dobila rotacije u smjeru kretanja kazaljke na satu. Kao rezultat dobiven je vektor u algebarskome sučelju nazvan r'_y čiji vrh definira položaj točke P_p nakon rotacije oko x -osi te nakon rotacije oko y -osi. Time je izrazom (5.15) definirana točka P'' . Rezultat navedenog postupka sa svim opisanim elementima predložen je slikom 5.35.

$$(x(r'_y), y(r'_y), z(r'_y)) \quad (5.15)$$



Slika 5.35: Prikaz elemenata rotacije točke P' oko y -osi

Kao posljednji korak transformacije točke P_P PVT konvencijom preostaje rotacije točke P'' oko z -osi, za vrijednost Eulerovog kuta α_z . Slika 5.36 prikazuje algebarsko sučelje u kojem se nalaze svi elementi kojima je posljednja rotacija obavljena.

○	$XY_{P''} : \text{Plane}(P'', XY_{RAVNINA})$ $= z = 7.94$	⋮
○	$P''_{Zos} = \text{Intersect}(z_{os}, XY_{P''})$ $= (0, 0, 7.94)$	⋮
○	$r_z = \text{Vector}(P''_{Zos}, P'')$ $= \begin{pmatrix} 4.02 \\ 4.77 \\ 0 \end{pmatrix}$	⋮
	$\alpha_z = 10^\circ$	⋮
○	$r'_z = \text{Rotate}(r_z, -\alpha_z, z\text{Axis})$ $= \begin{pmatrix} 4.79 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	⋮
○	$P_O = (x(r'_z), y(r'_z), z(P''))$ $= (4.79, 4, 7.94)$	⋮
○	$r_O = \text{Vector}(O, P_O)$ $= \begin{pmatrix} 4.79 \\ 4 \\ 7.94 \end{pmatrix}$	⋮
	$a = \text{Length}(r_P)$ $= 10.1$	⋮
	$b = \text{Length}(r_O)$ $= 10.1$	⋮

Slika 5.36: Prikaz algebarskog sučelja rotacije vektora točke P'' oko z -osi K.S

Posljednja rotacija započeta je definiranjem ravnine u algebarskom sučelju nazvanom $XY_{P''}$ naredbom *Plane* elementima P'' i $XY_{RAVNINA}$. Navedena ravnina paralelna je s x-y ravninom (elementom $XY_{RAVNINA}$) te prolazi točkom P'' . Naredbom *Intersect* elementima z_{os} i $XY_{RAVNINA}$ definirano je točka sjecišta, u algebarskome sučelju nazvana P''_{Zos} . Zatim je naredbom *Vector* elementima P''_{Zos} i P'' definiran vektor u algebarskome sučelju nazvan r_z koji će biti predmet rotacije. Uslijedila je definicija trećeg Eulerovog kuta rotacije nazvanog α_z sa zadanom pripadnom vrijednošću iznosa 10° . Naredbom *Rotate* element r_z rotiran je za vrijednost α_z oko z -osi ($z\text{Axis}$). Navedenim je definiran vektor r'_z koji u svome vrhu definira položaj točke P''' . Točka P''' poistovjećuje se sa točkom P_O odnosno odredišnom točkom koja je rezultat transformacije točke P_P temeljem PVT konvencije. U algebarskome prikazu izrazom (5.16) definiran je položaj točke P''' a naziv joj je dan P_O , radi ukazivanja da se radi o odredišnoj točki. Naredbom *Vector* elementima O i P_O uspostavljen je vektor u algebarskome sučelju nazvan r_O koji predstavlja vektor položaja transformirane točke P_P . Naredbom

$$(x(r'_z), y(r'_z), z(r'_z)) \quad (5.16)$$

$$(x(r'_z), y(r'_z), z(r'_z)) \quad (5.16)$$

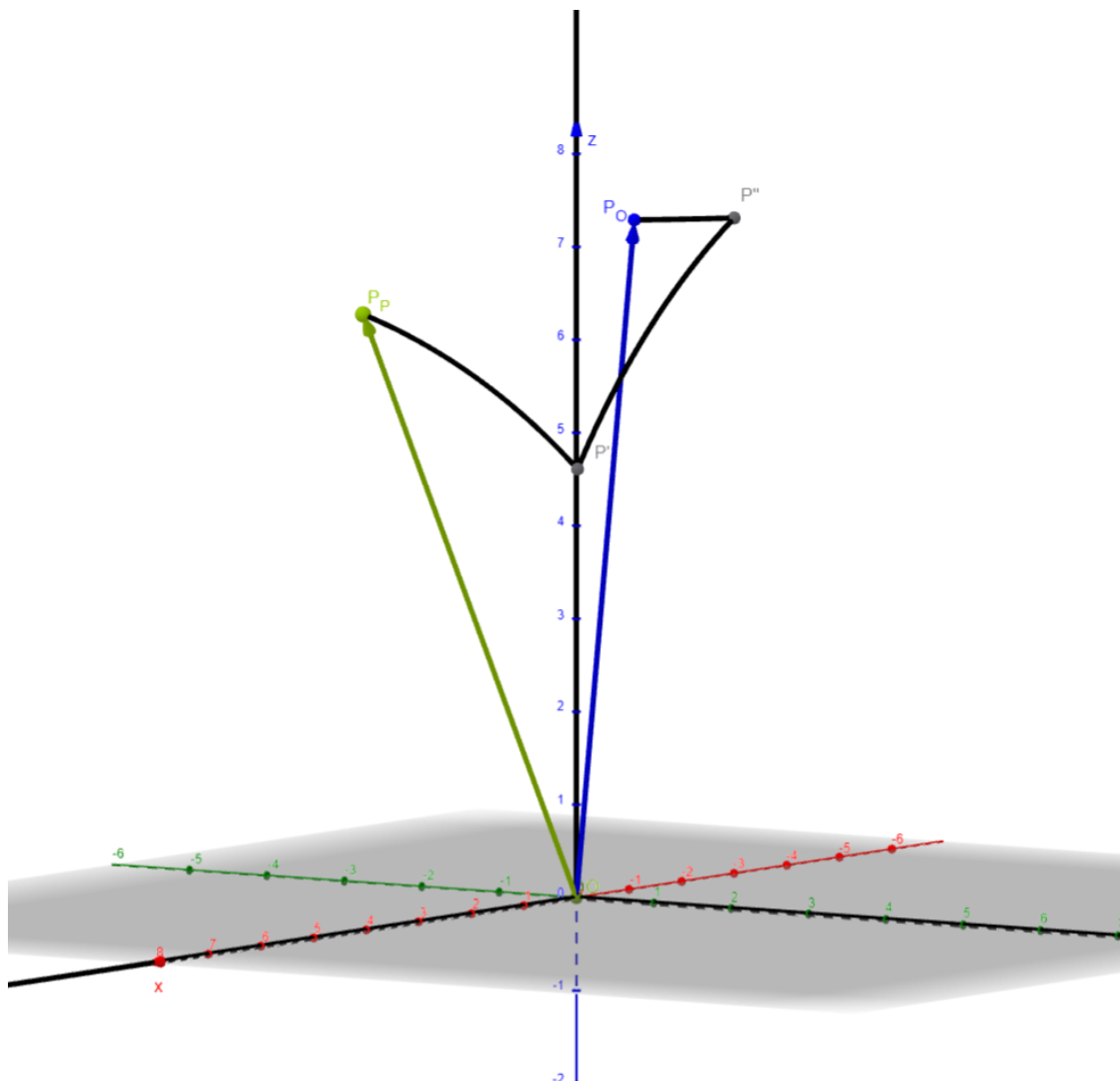
Nakon transformacije koordinata točke P_p PVT konvencijom uslijedio je proces prezentiranja svake od rotacije pomoću lukova rotacije te točaka koje se kreću na lukovima kao i definiranje vektora kojima se prikazuje svaka rotacija ponaosob. Prvi korak prezentiranja izrađenog modela predstavlja definiranje lukova koji predstavljaju Eulerove kutove rotacije. Na svaki definirani luk postavljena je točka koja se giba duž istog, te su definirana tri vektora čije je ishodište postavljeno u ishodišnu točku koordinatnog sustava te kao krajnje točke svakog vektora

izabrane su, u prijašnjem koraku definirane točke na lukovima. Naime kako je za transformaciju točke P_P u točku P_O bila nužna rotacija oko sve tri koordinate osi K.S. odnosno kako su uspostavljene točke P' i P'' sve točke povezane su lukovima. Dakle točka P_P povezana je lukom s točkom P' , točka P' povezana je lukom s točkom P'' te konačno točka P'' povezana je lukom s točkom P''' (koja se poistovjećuje s odredišnom točkom P_O). Slika 5.38 prikazuje navedene lukove koji predstavljaju Eulerove kutove rotacije.

○	$P'_{LUK} : \text{CircularArc}(P_{Xos}, P', P_P)$ = 3.18	⋮
○	$P''_{LUK} : \text{CircularArc}(P'_{Yos}, P', P'')$ = 3.88	⋮
○	$P'''_{LUK} : \text{CircularArc}(P''_{Zos}, P'', P_O)$ = 1.09	⋮

Slika 5.38: Prikaz lukova rotacije točke P_P PVT konvencijom

Za predstavljanje lukova upotrebljavala se naredba *CircularArc*. Luk u geometrijskome smislu predstavlja dio kružnice omeđen krajnjim točkama luka, time spomenuta naredba prvo zahtjeva unos točke koja predstavlja centar kružnice te zatim unos krajnjih točaka luka. Za definiranje luka koji predstavlja rotaciju točke P_P oko x–osi za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_x unesen je element P_{xos} te zatim elementi P_P i P' odnosno krajnje točke luka na kružnici, te se time definirao luk u algebarskome sučelju nazvan P'_{LUK} . Istom naredbom definiran je luk u algebarskome sučelju nazvan P''_{LUK} koji predstavlja rotaciju točke P' oko y–osi za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_y , gdje je za centar kružnice unesena je točka P'_{yos} , te za krajnje točke luka unesene su točke P' i P'' . Za luk u algebarskome sučelju nazvan P'''_{LUK} koji predstavlja Eulerov kut rotacije (vrijednosti α_z) točke P'' oko z–osi za centar kružnice unesena je točka P''_{zos} dok su za krajnje točke luka uzete točke P'' i P_O (odnosno točka P''). Navedeni lukovi rotacije P'_{LUK} , P''_{LUK} i P'''_{LUK} predloženi su slikom 5.39.



Slika 5.39: Prikaz lukova rotacije u 3D sučelju GeoGebre

Sljedeći korak prezentiranja PVT konvencije transformacije predstavlja izradu točaka koje se gibaju na svakom od lukova rotacije (P'_{LUK} , P''_{LUK} i P'''_{LUK}). Slikom 5.40 prikazane su navedene u algebarskom sučelju.

☐	$X_{\text{ROTACIJA}} = \text{Point}(P'_{LUK})$ $= (7, 3.82, 6.19)$	$\vdots$ $\rightarrow$
☐	$Y_{\text{ROTACIJA}} = \text{Point}(P''_{LUK})$ $= (4.56, 4.77, 7.65)$	$\vdots$ $\rightarrow$
☐	$Z_{\text{ROTACIJA}} = \text{Point}(P'''_{LUK})$ $= (4.19, 4.63, 7.94)$	$\vdots$ $\rightarrow$

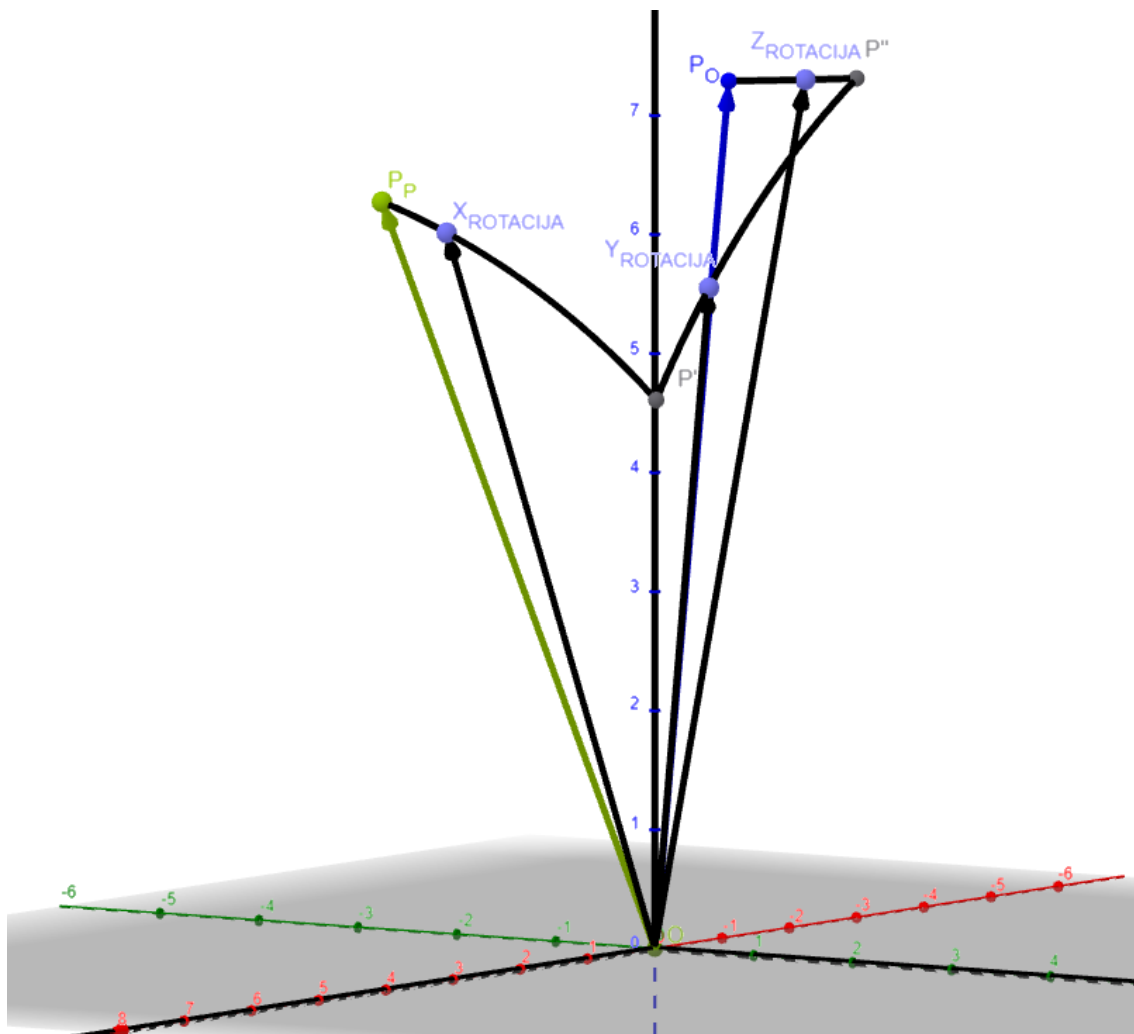
Slika 5.40. Algebarski prikaz animiranih točaka na lukovima koji predstavljaju rotaciju oko svake od koordinatnih osi K.S.

Točke su definirane naredbom *Point* klikom na pojedini luk. Time točka $X_{ROTACIJA}$ predstavlja točka koja se giba duž luka P'_{LUK} , točka $Y_{ROTACIJA}$ točka je koja se giba duž luka P''_{LUK} , te konačno točka $Z_{ROTACIJA}$ koja predstavlja zadnju rotaciju. Navedene točke moguće je zaustaviti te pokrenuti njihovo kretanje gumbom za reprodukciju. Slika 5.41 prikazuje konačne vektore rotacije definiranih u algebarskome sučelju koji predstavljaju svaku pojedinu rotaciju oko svake od osi koordinatnog sustava.

☒	Vektori rotacija:	⋮
☐	$r' = \text{Vector}(O, X_{ROTACIJA})$ $= \begin{pmatrix} 7 \\ 3.82 \\ 6.19 \end{pmatrix}$	⋮
☐	$r'' = \text{Vector}(O, Y_{ROTACIJA})$ $= \begin{pmatrix} 4.56 \\ 4.77 \\ 7.65 \end{pmatrix}$	⋮
☐	$r''' = \text{Vector}(O, Z_{ROTACIJA})$ $= \begin{pmatrix} 4.19 \\ 4.63 \\ 7.94 \end{pmatrix}$	⋮

Slika 5.41: Prikaz vektora rotacije u algebarskome sučelju

Naredbom *Vector* kreirani su vektori u algebarskome sučelju nazvani r' r'' i r''' , od kojih vektor r' predstavlja rotaciju točke P_P oko x–osi koordinatnog sustava za iznos Eulerovog kuta rotacije α_x , vektor r'' predstavlja rotaciju točke P_P oko y–osi koordinatnog sustava za iznos Eulerovog kuta rotacije α_y te konačno vektor r''' koji predstavlja rotaciju točke P_P oko z–osi za iznos Eulerovog kuta rotacije α_z . Svaki navedeni vektor rotacije ima jednaku točku ishodišta O odnosno samo ishodište koordinatnog sustava. Time je za odredišnu točku vektora r' odabrana točka $X_{ROTACIJA}$, za vektor r'' točka $Y_{ROTACIJA}$, te za vektor r''' točka $Z_{ROTACIJA}$. Time su kreirane navedeni vektori, koji se kreću u modelu klikom na gumb za reprodukciju točaka $X_{ROTACIJA}$ $Y_{ROTACIJA}$ i $Z_{ROTACIJA}$. Navedeni vektori prikazani su slikom 5.42.



Slika 5.42: Prikaz vektora rotacije r' , r'' i r''' u 3D sučelju

Navedenim postupkom definirana je rotacija početnog vektora položaja oko sve tri osi koordinatnog sustava, no nije prikazana promjena mjerila i translacija koordinatnih sustava jer bi se implementacijom tih elemenata transformacije dotični model znatno zakomplicirao te bi se time njegovo korištenje otežalo.

Ovom modelu animacija PVT konvencije transformacije moguće je pristupiti putem poveznice: [PVT konvencija transformacije](#).

Također, navedenom modelu moguće je pristupiti skeniranjem QR koda (slika 5.43):



Slika 5.43: QR kod animacije PVT konvencije transformacije

5.3.2 CFR konvencija transformacije

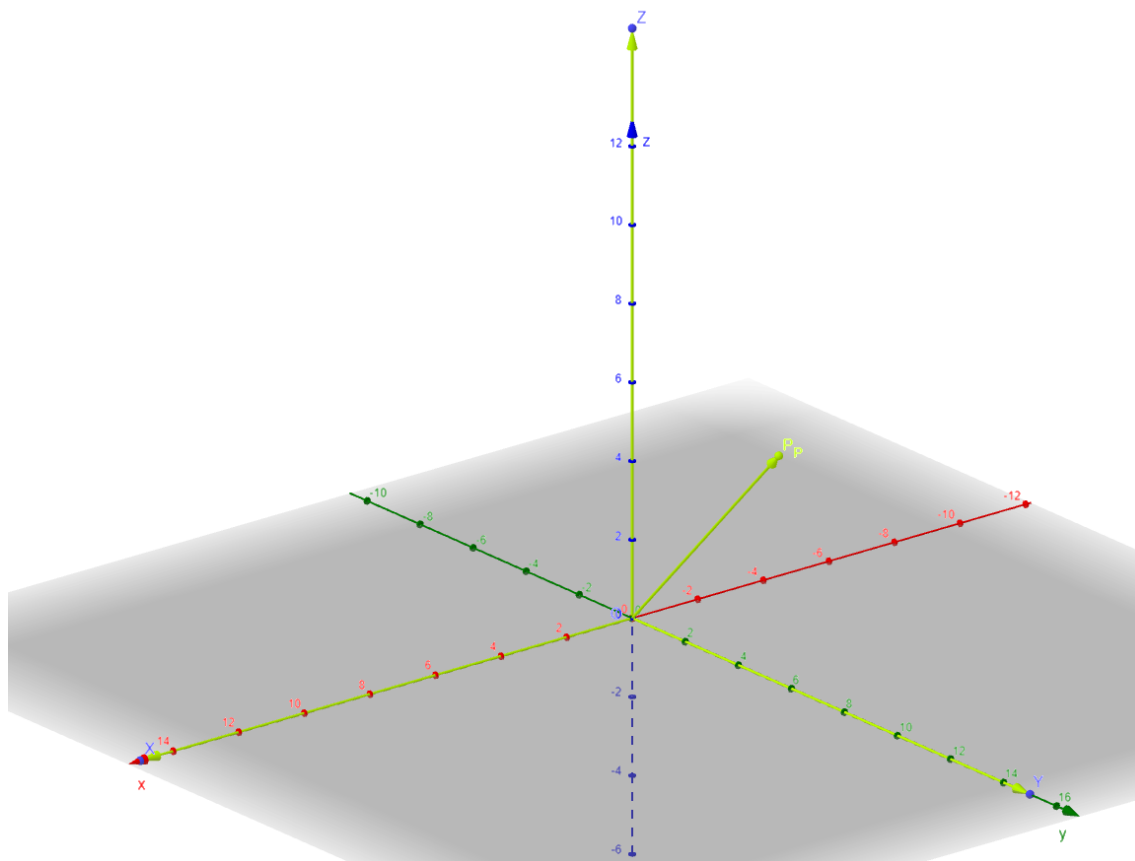
CFR konvencija transformacije, konvencija je koja odgovara rotaciji odredišnog koordinatnog sustava oko polazišnog za iznos Eulerovih kutova rotacije za svaku os K.S. Primjenjuje se za transformaciju koordinata između dva koordinatna sustava od kojih je jedan globalnog karaktera (geocentričan geodetski datum), dok je drugi lokalnog karaktera (ne-geocentrični geodetski datum), te je vektor položaja točke fiksiran. Za izradu ovog modela definiran je koordinatni sustav s vektorom položaja točke koja će biti predmet transformacije. Nužno je napomenuti iako se obavlja rotacija koordinatnih osi K.S. konačni cilj je rotacija vektora položaja točke od značaja s koordinatnim osima. Kao prvi korak izrade modela CFR transformacije definiran je polazišni koordinatni sustav te (polazišna) točka koja će biti predmet transformacije, s vektorom položaja točke. Algebarsko sučelje navedenih elementa prikazani su slikom 5.44. Teorijska osnova ove konvencije transformacije nalazi se u poglavlju 3.2.2. ovog rada.

☐	$O = (0, 0, 0)$	⋮
☐	$X = (15, 0, 0)$	⋮
☐	$Y = (0, 15, 0)$	⋮
☐	$Z = (0, 0, 15)$	⋮
☐	$x_{OS} = \text{Vector}(O, X)$	⋮
☐	$= \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
☐	$y_{OS} = \text{Vector}(O, Y)$	⋮
☐	$= \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$	
☐	$z_{OS} = \text{Vector}(O, Z)$	⋮
☐	$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$	
☐	$P_P = (2, 8, 7)$	⋮
☐	$r_{PP} = \text{Vector}(O, P_P)$	⋮
☐	$= \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$	
☐	$\text{Polazišni}_{KS} = \{x_{OS}, y_{OS}, z_{OS}, r_{PP}\}$	⋮
☐	$= \{(15, 0, 0), (0, 15, 0), (0, 0, 15), (2, 8, 7)\}$	

Slika 5.44: Prikaz polazišnog koordinatnog sustava unutar algebarskog sučelja

Točka O s pripadnim koordinatama (0,0,0) definira ishodište koordinatnog sustava. Zatim su definirane točke X, Y i Z u svrhu definiranja osi koordinatnog sustav u ovom modelu predstavljene s vektorima. Točka X definirana je pripadnim koordinatama (15,0,0), točka Y s koordinatama (0,15,0), te konačno točka Z s koordinatama (0,0,15). Naredbom *Vector*

definirana je x_{os} gdje je kao početna točka vektora odabran element O dok je kao završna točka vektora odabran element X . Istom naredbom definiran je vektor y_{os} gdje je, za razliku od elementa x_{os} kao krajnja točka uzet element Y , te konačno za vektor z_{os} kao završna točka uzet je element Z . Time su definirane osi polazišnog korodiranog sustava s pridodanom mu zelenom bojom. Zatim je naredbom definirana točka P_p s pripadnim koordinatama (2,8,7), proizvoljno izabranim s ciljem što boljeg prezentiranja transformacije koordinata. Naredbom *Vector* definiran je vektor položaja točke P_p (polazišna točka) gdje je za početnu točku odabrana ishodišna točka koordinatnog sustava O te točka koja će biti predmet transformacije P_p , navedeni vektor u algebarskome sučelju nazvan je r_{pp} . Element *Polazišni_{KS}* predstavlja uniformnu skupinu vektora (x_{os} , y_{os} , z_{os} i r_{pp}) polazišnog koordinatnog sustava koja će kao cjelina biti u narednom postupku rotirana za Eulerove kutove rotacije oko svake od koordinatnih osi sustava. Točki P_p dodijeljen je naziv s ciljem jasnog naznačavanja da se radi o točki koja se nalazi u polazišnom koordinatnom sustavu. Slika 5.45 predstavlja prijašnje definirane elemente u trodimenzionalnom sučelju.



Slika 5.45: Prikaz polazišnog K.S. zajedno sa vektorom položaja polazišne točke u 3D sučelju

Nadalje uslijedilo je definiranje Eulerovih kutova rotacije (slika 5.46), za čiji će (pozitivan) iznos (određišni) koordinatni sustav biti rotiran oko svake osi koordinatnog sustava. Navedeni Eulerovi kutovi rotacije definirani su u algebarskome sučelju pod nazivima: α_X , α_Y i α_Z , od kojih je za kut α_X definirana vrijednost od 20° , za α_Y vrijednost 15° te za α_Z vrijednost 10° . Zadane vrijednosti Eulerovih kutova nisu vjerodostojne, te se njihov iznos poistovjećuje s vrijednošću u kutnim mili-lučnim sekundama (eng. *mas*) prilikom transformacije, te su za predočavanje ovog modela izabrane kutne vrijednosti stupnjeva radi bolje prezentacije same rotacije.

Ⓜ	Eulerovi kutovi rotacije	⋮
	$\alpha_X = 20^\circ$	⋮
	$\alpha_Y = 15^\circ$	⋮
	$\alpha_Z = 10^\circ$	⋮

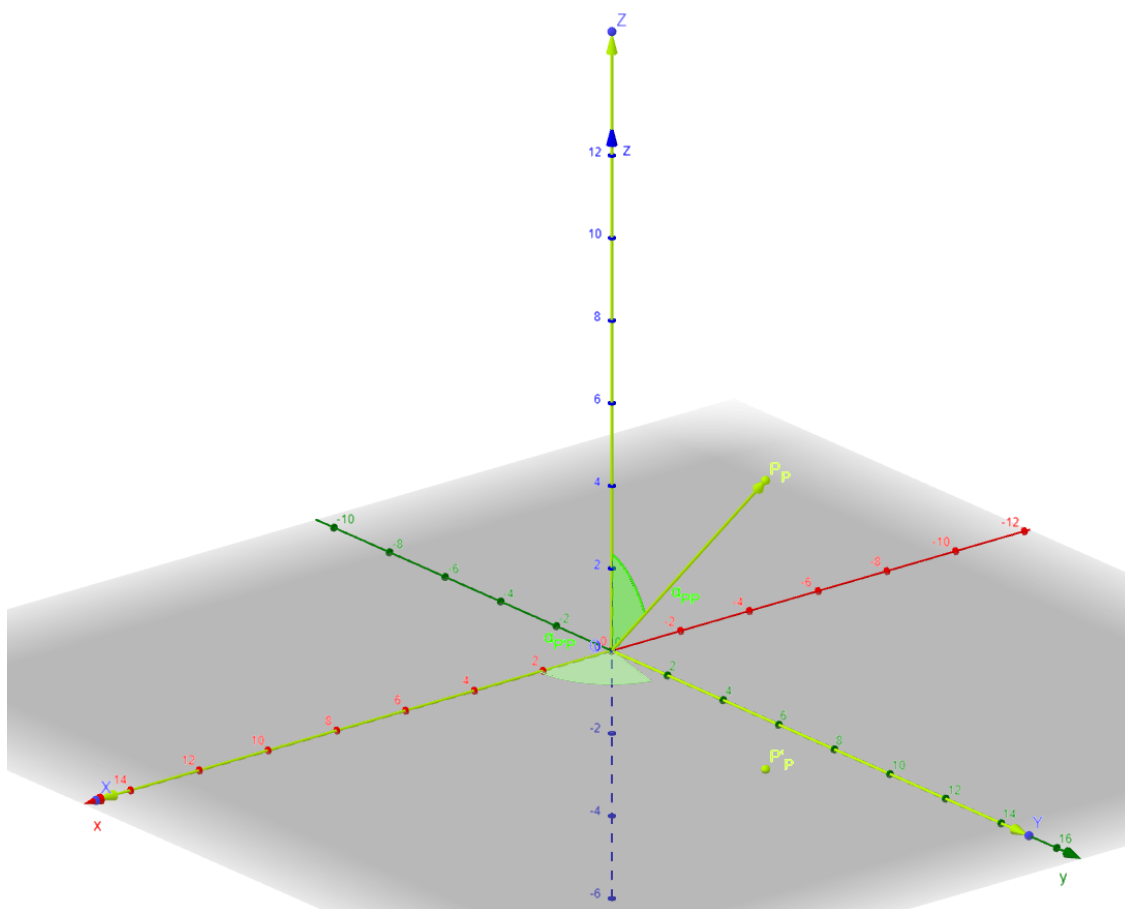
Slika 5.46: Prikaz Eulerovih kutova rotacije u algebarskome sučelju

Nakon definiranja Eulerovih kutova rotacije uslijedila je uspostava pomoćnih veličina, koji su nužni za narednu izradu modela čiji je prikaz u algebarskome sučelju predodčen slikom 5.47.

○	$\alpha_{pp} = \text{Angle}(Z, O, P_p)$ $= 49.67292^\circ$	⋮
	Duljina = $\text{Length}(r_{pp})$ $= 10.81665$	⋮
○	$P'_p = (2, 8, 0)$	⋮
○	$\alpha_{p'p} = \text{Angle}(X, O, P'_p)$ $= 75.96376^\circ$	⋮

Slika 5.47: Prikaz pomoćnih veličina unutar algebarskog sučelja tijekom izrade modela transformacije CFR konvencije

Zadana je točka P'_p koja predstavlja točku P_p u ravnini x–y–osi definiranog koordinatnog sustava, s pripadnim koordinatama (2,8,0). Naredbom *Length* definirana je duljina vektora položaja točke P_p , te su naredbom *Angle* definirani kutovi α_{pp} i $\alpha_{p'p}$ sa ishodištem u točki O . Kut α_{pp} predstavlja kut između točaka Z i P_p s vrhom u točki O , dok kut $\alpha_{p'p}$ predstavlja kut između točaka X i P'_p sa vrhom u točki O . Navedeni kutovi sa svim dosadašnje kreiranim elementima prikazani su slikom 5.48.



Slika 5.48: Prikaz polazišnog koordinatnog sustava, vektora položaja te polazišne točke zajedno sa pomoćnim elementima u 3D sučelju

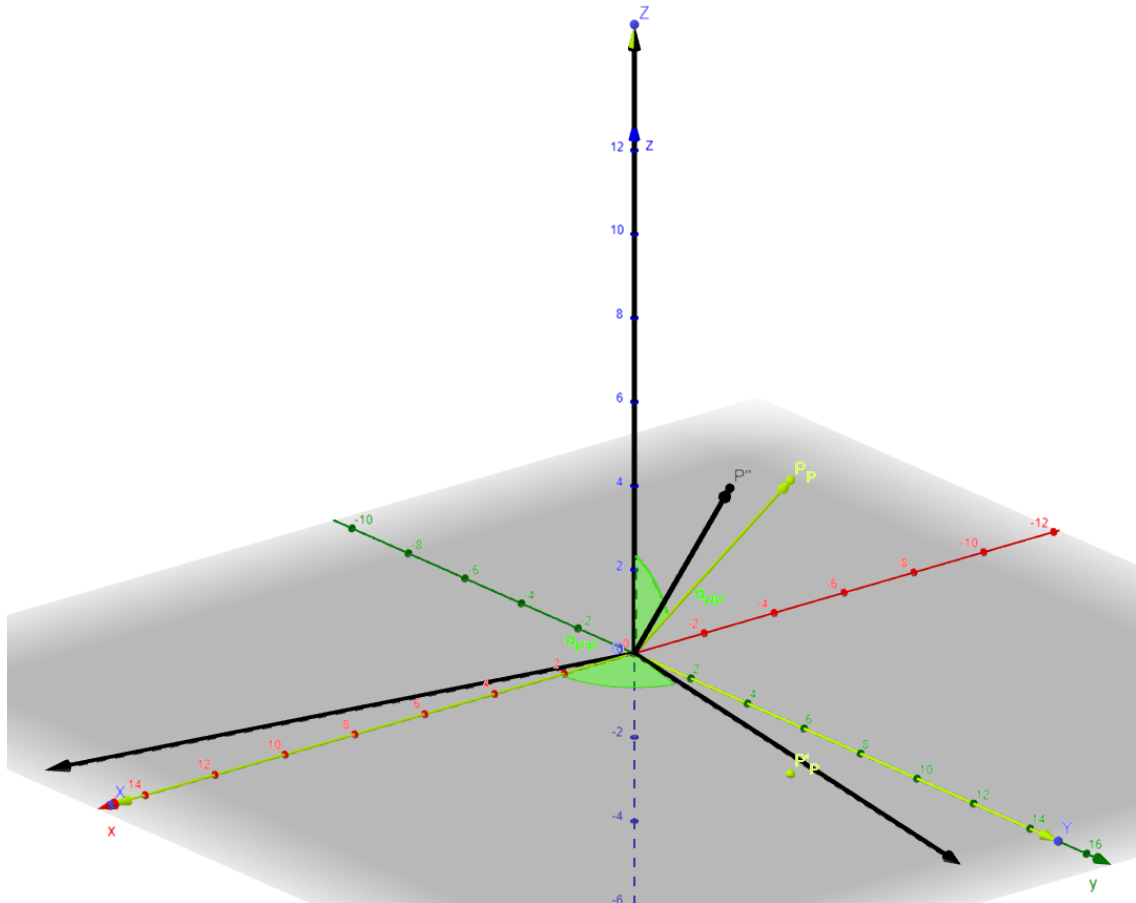
U narednom postupku predstavljena je rotacija polazišnog koordinatnog sustava oko svake osi za definirane Eulerove kutove rotacije. Naime CFR transformacija odgovara rotaciji odredišnog koordinatnog sustava oko polazišnog koordinatnog sustava. Dakle ako se želi prikazala CFR konvencija transformacije nužno je definirati odredišni koordinatni sustav koji će se rotacijom poistovjetiti s polazišnim. Ako se želi da zadani Eulerovi kutovi rotacije odgovarali ovom modelu transformacije polazišni koordinatni sustav rotiran je za negativne vrijednosti Eulerovih kutova rotacije za oko svake od koordinatne osi krenuvši od z–osi prema x–osi. Ovim postupkom definiran je odredišni koordinatni sustav, te je prezentiranje CFR transformacije definirano rotacijom (odredišnog koordinatnog sustava) oko svake koordinatne osi za vrijednost pozitivnog iznosa Eulerovih kutova rotacije te je time prezentirana CFR model.

Dakle slijedila je rotacija polazišnog koordinatnog sustava za negativnu, prijašnje definiranu vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_z oko z–osi koordinatnog sustava (elementa z_{os}). Slika 5.49 prikazuje algebarski prikaz u kojem je naredbom *Rotate* polazišni koordinatni sustav (element *Polazišni_{KS}*) rotiran za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_z oko ishodišne točke O , u smjeru z–osi (elementa z_{os}), te je time navedeni koordinatni sustav nazvan KS_z . Koordinate točke P u novom koordinatnom sustavu KS_z s pripadnim koordinatama (3.3588, 7.53117, 7), nazvana je P'' u algebarskome sučelju. Koordinate točke P'' poistovjećuju se s četvrtim članom skupa KS_z .

Ⓔ	Izrada odredišnog koordinatnog sustava	⋮
Ⓔ	Rotacija oko Z osi za negativnu vrijednost α_z	⋮
○	$KS_z = \text{Rotate}(\text{Polazišni}_{KS}, -\alpha_z, O, z_{os})$	⋮
	$= \{(14.77212, -2.60472, 0), (2.60472, 14.77212, 0), (0, 0, 15), (3.3588, 7.53117, 7)\}$	
○	$P'' = (3.3588, 7.53117, 7)$	⋮

Slika 5.49: Algebarski prikaz rotacija polazišnog koordinatnog sustava za negativnu vrijednost kuta α_z oko z–osi

Rezultati rotacije polazišnog koordinatnog sustava oko z–osi za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_y predstavljen je slikom 5.50.



Slika 5.50: Prikaz rotiranog polazišnog koordinatnog sustava (crni) za negativnu vrijednost kuta α_Z oko z-osi

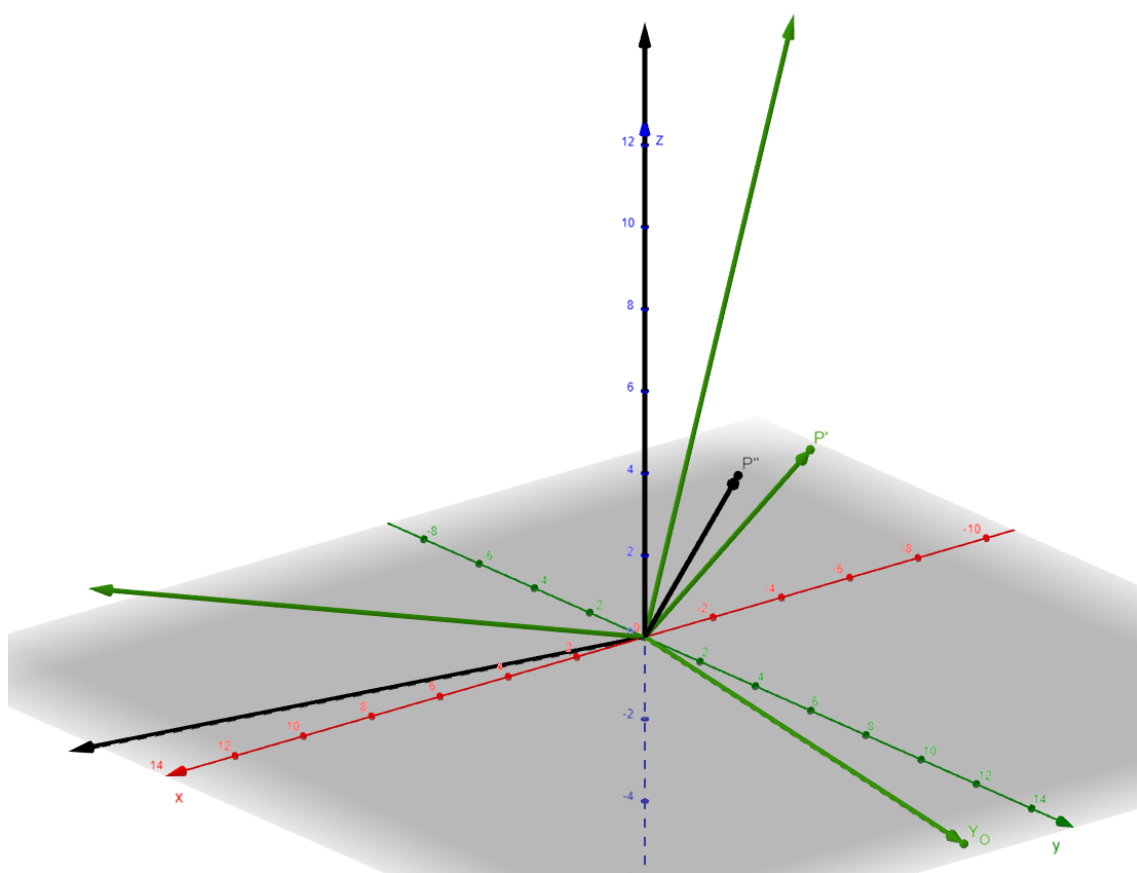
Nakon rotacije polazišnog koordinatnog sustava oko z-osi za negativni iznos Eulerovog kuta rotacije α_Y (odnosno definiranje elementa KS_Z), slijedila je rotacija elementa KS_Z oko y-osi za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_Y . Napominje se kako se rotacija navedenog koordinatnog sustav obavlja oko y-osi koordinatnog sustava KS_Z . Slika 5.51 prikazuje algebarsko sučelje unutar kojeg se nalaze svi elementi kojima se koordinati sustav KS_Z rotirao oko y-osi.

Ⓜ	Rotacija oko Y osi za negativan iznos α_Y	⋮
○	$Y_0 = (2.60472, 14.77212, 0)$	⋮
○	$y_0 = \text{Vector}(O, Y_0)$	⋮
○	$= \begin{pmatrix} 2.60472 \\ 14.77212 \\ 0 \end{pmatrix}$	⋮
○	$KS_Y = \text{Rotate}(KS_Z, -\alpha_Y, O, y_0)$	⋮
○	$= \{(14.26877, -2.51597, 3.88229), (2.60472, 14.77212, 0), (-3.82331, 0.67415, 14.48889), (1.50748, 7.8576, 7.27912)\}$	⋮
○	$P' = (1.50748, 7.8576, 7.27912)$	⋮

Slika 5.51: Prikaz algebarskog sučelja rotacije oko y-osi za negativan iznos kuta α_Y

Za uspostavu rotacije koordinatnog sustava KS_Z oko y-osi prvo se mora definirati os (vektor) oko koje će se navedeni rotirati (y-os koordinatnog sustava KS_Z). Navedeni vektor definiran je naredbom *Vector* točkama O i Y_0 , te je u algebarskome sučelju nazvan y_0 . Točka Y_0 definirana

je pripadnim koordinatama (2,60472, 14,77212, 0), odnosno definirana je vrhom trećeg člana grupe vektora KS_Z (predočen slikom 5.52). Nakon definicije vektora y_O naredbom *Rotate* element KS_Z rotiran je za negativnu vrijednost Eulerovog kuta rotacije oko y–osi α_Y , oko točke O u odnosu na vektor y_O . Navedeni koordinatni sustav u algebarskome sučelju nazvan je KS_Y te mu je pridodana tamno zelena boja. Kao zadnji postupak rotacije koordinatnog sustava KS_Z oko y–osi uspostavljan je točka P' sa pripadnim koordinatama (1,50748, 7,85760, 7,27912). Koordinate točke P' poistovjećuju se s četvrtim članom elementa KS_Y (predočen slikom 5.51). Prikaz rotacije elementa KS_Z oko y–osi istog predstavljen je slikom 5.52. gdje tamno zeleni koordinatni sustav predstavlja KS_Y , dok koordinatni sustav crne boje predstavlja KS_Z .



Slika 5.52: Prikaz rotacije koordinatnog sustava KS_Z (crni K.S.) za negativnu vrijednost kuta α_Y oko y–osi te time definiranje KS_Y (zeleni K.S.)

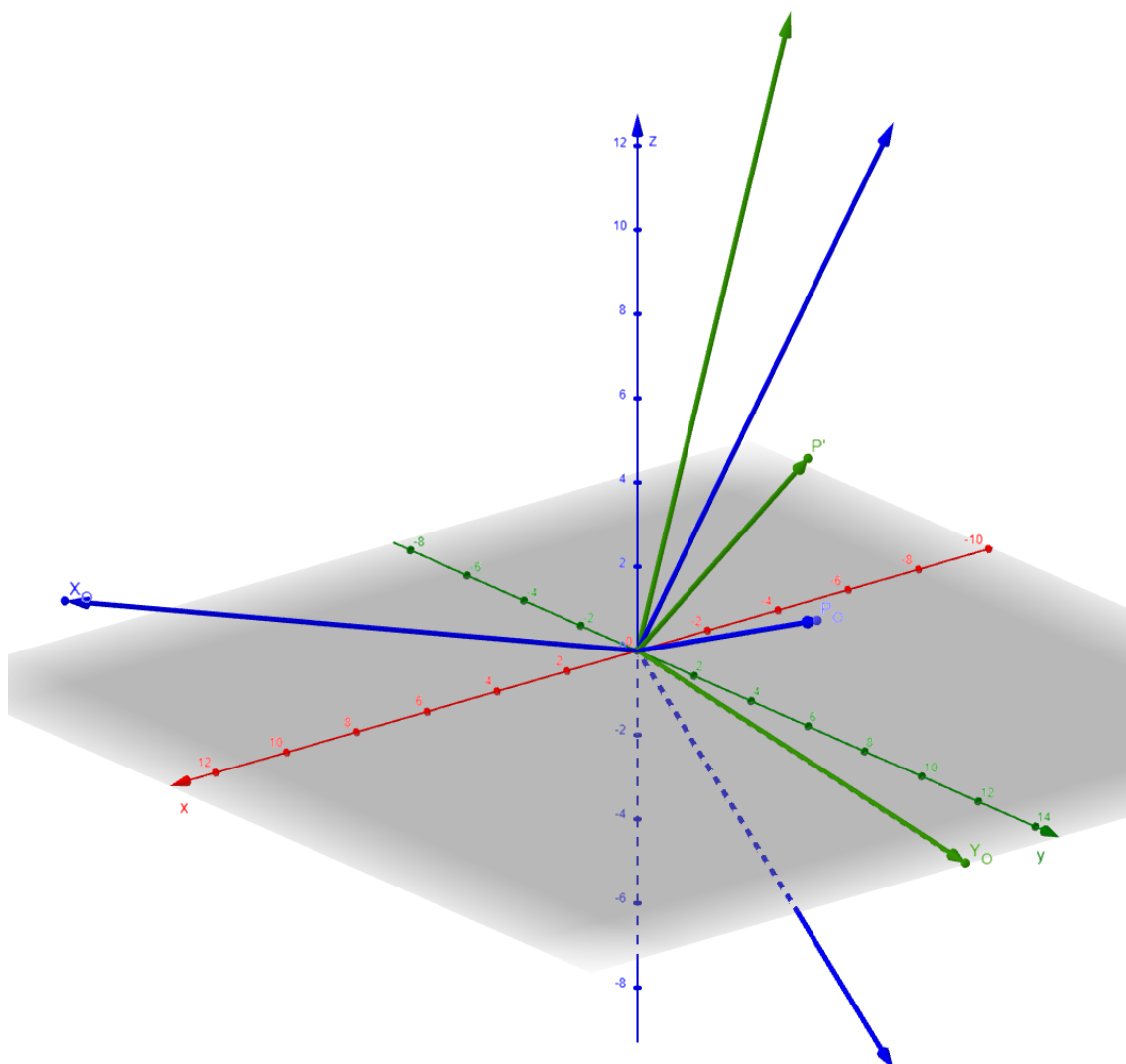
Zadnji korak definiranja određiškog koordinatnog sustava predstavlja rotaciju koordinatnog sustava KS_Y za iznos negativne vrijednosti Eulerovog kuta rotacije α_X oko x–osi navedenog. Slika 5.53 prikazuje sve navedene elemente algebarskog sučelja kojima je riješen navedeni zadatak.

Ⓔ	Rotacija oko X osi za negativan iznos α_X	⋮
○	$X_O = (14.26877, -2.51597, 3.88229)$	⋮
○	$x_O = \text{Vector}(O, X_O)$	⋮
○	$= \begin{pmatrix} 14.26877 \\ -2.51597 \\ 3.88229 \end{pmatrix}$	⋮
○	$\text{Odredišni}_{KS} = \text{Rotate}(KS_Y, -\alpha_X, O, x_O)$	⋮
○	$= \{(14.26877, -2.51597, 3.88229), (3.75529, 13.65068, -4.95549), (-2.70186, 5.68586, 13.6151), (2.64445, 9.5983, 4.22842)\}$	⋮
○	$P_O = (2.64445, 9.5983, 4.22842)$	⋮

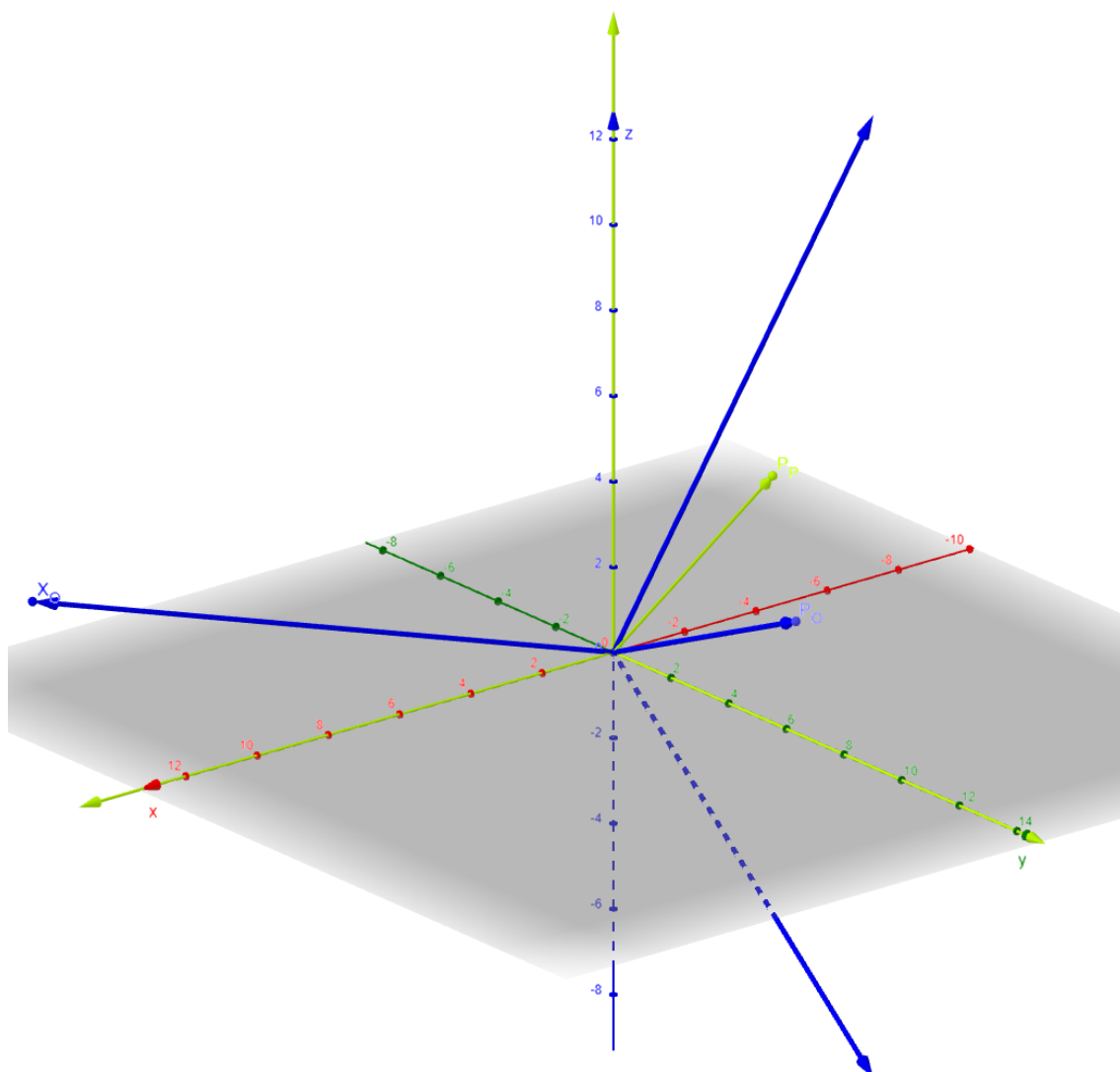
Slika 5.53: Prikaz algebarskog sučelja rotacije oko x-osi za negativan iznos kuta α_X

Točka X_O vrh je vektora koji predstavlja x-os koordinatnog sustava KS_Y . Koordinate točke X_O poistovjećuju se s prvim članom skupa KS_Y koji je prikazan slikom 4.45. naredbom *Vector* definiran je vektor u algebarskome sučelju nazvan x_O s početnom točkom O te završnom X_O . Navedeni vektor predstavlja x-os konačnog odredišnog koordinatnog sustava. Naredbom *Rotate* koordinatni sustav KS_Y rotiran je za negativnu vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_X , oko točke O u odnosu na uspostavljeni vektor x_O . Kao rezultat kreiran je odredišni koordinatni sustav koji je u algebarskome sučelju nazvan *Odredišni_{KS}*, te je istom dodijeljena plava boja. Kao zadnji korak definirana je točka P u odredišnom koordinatnom sustavu u algebarskome sučelju nazvana P_O , te također kao i *Odredišni_{KS}* pridodana joj je plava boja. Koordinate točke P_O poistovjećuju se s četvrtim elementom skupa *Odredišni_{KS}* što je vidljivo na slici 5.53.

Slika 5.54 prikazuje plavi odredišni koordinatni sustav (element *Odredišni_{KS}*) i koordinatni sustav KS_Y kojem je pridodana tamno zelena boja. Slika 5.55 prikazuje međusobni odnos *Polazišni_{KS}* (svijetlo zelena boja) i *Odredišni_{KS}* (plava boja).



Slika 5.54: Prikaz odnosa odredišnog (plava boja) koordinatnog sustava i KS_Y koordinatnog sustava (tamno zelena boja)



Slika 5.55: Prikaz odnosa polazišnog (svijetlo zelena) i odredišnog (plava boja) koordinatnog sustava

Navedenim postupkom uspostavljena su dva koordinatna sustava, odredišni (element $Odredišni_{KS}$, označen plavom bojom) i polazišni (element $Polazišni_{KS}$, označen svijetlo zelenom bojom) gdje su međusobno povezani poznatim (zadanim) Eulerovim kutovima rotacije, što bitno olakšava proces prezentiranja rotacije koordinatnog sustava (odredišnog zajedno sa vektorom položaja točke). U nastavku će biti detaljno objašnjen proces izrade elemenata modela koji prezentiraju proces transformacije CFR konvencije. Proces prezentiranja podrazumijeva izradu koordinatnog sustava koji će se klikom na gumb za reprodukciju moći kretati te tako predložiti rotacija koordinatnog sustava zajedno sa vektorom položaja točke P (oko jedne od koordinatnih osi). Time, povrgnuta je izrada koordinatnog sustava koji prezentira rotaciju odredišnog koordinatnog sustava (element $Odredišni_{KS}$) oko x -osi te dobivanje točke P' (od početne točke P_O). Slike 5.56 i 5.57 prikazuju algebarsko sučelje

izrade koordinatnog sustava koji prezentiraju (animacijom) rotaciju odredišnog vektora oko x -osi za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_X .

⊙	Rotacija oko X osi	⋮
○	$P_{XZ} = (-2.70186, 5.68586, 13.6151)$	⋮
○	$P_{XY} = (3.75529, 13.65068, -4.95549)$	⋮
○	$P_{XX} = (14.26877, -2.51597, 3.88229)$	⋮
○	$P'_{XZ} = (-3.82331, 0.67415, 14.48889)$	⋮
○	$P'_{XY} = (2.60472, 14.77212, 0)$	⋮
○	$P'_{XX} = (14.26877, -2.51597, 3.88229)$	⋮
○	$\alpha = \text{Angle}(P'_{XZ}, O, P_{XZ})$ $= 20.00003^\circ$	⋮
○	$\text{Rotacija}_{XZ} : \text{CircularArc}(O, P_{XZ}, P'_{XZ})$ $= 5.23599$	⋮
○	$\text{Rotacija}_{XY} : \text{CircularArc}(O, P'_{XY}, P_{XY})$ $= 5.23599$	⋮
○	$R_X = \text{Point}(\text{Rotacija}_{XZ})$ $= (-3.62714, 1.72936, 14.45175)$	⋮
○	$\text{Ravnina}_X : \text{Plane}(P'_{XZ}, P_{XZ}, P'_{XY})$ $= -60.29545x + 10.63182y - 16.40525z = 0.00172$	⋮

Slika 5.56: Prikaz definirajućih elemenata prezentacije rotacije odredišnog koordinatnog sustava oko x -osi

○	$R_{XY} = (x(r_{XY}), y(r_{XY}), z(r_{XY}))$ $= (2.8716, 14.68602, -1.03667)$	⋮
○	$\text{Ravnina}'_X : \text{Plane}(O, R_{XY}, P_{XX})$ $= 54.40716x - 25.94041y - 216.77632z = 0$	⋮
○	$r'_{XP} = \text{Rotate}(r_{XY}, 90^\circ - \alpha_{PP}, O, \text{Ravnina}'_X)$ $= \begin{pmatrix} 6.24654 \\ 13.63732 \\ -0.06413 \end{pmatrix}$	⋮
○	$P''_X = (x(r'_{XP}), y(r'_{XP}), z(r'_{XP}))$ $= (6.24654, 13.63732, -0.06413)$	⋮
○	$\text{Ravnina}''_X : \text{Plane}(O, R_X, P''_X)$ $= -197.19412x + 90.0409y - 60.26703z = 0$	⋮
○	$r_{XP} = \text{UnitVector}(\text{Rotate}(r'_{XP}, \alpha_{PP} - 90^\circ, O, \text{Ravnina}''_X))$ Duljina $= \begin{pmatrix} 1.74135 \\ 8.30412 \\ 6.7089 \end{pmatrix}$	⋮
○	$P'_X = (x(r_{XP}), y(r_{XP}), z(r_{XP}))$ $= (1.74135, 8.30412, 6.7089)$	⋮
○	$r_{XX} = \text{Vector}(O, P_{XX})$ $= \begin{pmatrix} 14.26877 \\ -2.51597 \\ 3.88229 \end{pmatrix}$	⋮
○	$\text{Rotacija}_{XP} : \text{CircularArc}(O, P_O, P')$ $= 3.70998$	⋮

Slika 5.57: Prikaz elemenata rotacije odredišnog koordinatnog sustava oko x -osi

Elementi P_{XZ} , P_{XY} i P_{XX} predstavljaju točke koje se nalaze na vrhovima vektora koji tvore odredišni koordinatni sustav (element *Odredišni*_{KS}). Koordinate navedenih točaka prepisane su iz elementa *Odredišni*_{KS}, koji je vidljiv na slici 5.53. Elementi P'_{XZ} , P'_{XY} i P'_{XX} predstavljaju točke koje se nalaze na vrhovima vektora koji tvore koordinatni sustav *KS*_Y. Koordinate navedenih točaka prepisane su iz elementa *KS*_Y koji je predložen slikom 5.51 te su postavljene s oznakom ' koja ukazuje da se radi o koordinatnom sustavu koji je rotiran u odnosu na x -os. Naredbom *Angle* definiran je kut čiji se vrh nalazi u toči O dok su krakovi kuta tvoreni točkama: P'_{XZ} i P_{XZ} . Kut α jednak je zadanom kutu α_X , što ukazuje da je definiranje odredišnog koordinatnog sustava (iz inicijalnog polazišnog) uspješno obavljeno. Naredbom *CircularArc* kreirani su lukovi kružnice u algebarskome sučelju nazvani *Rotacija*_{XZ} i *Rotacija*_{XY} koji predstavljaju putanju vrhova vektora koji predstavljaju koordinatni sustav. Dakle luk *Rotacija*_{XZ} predstavlja putanju vektora koji predstavlja z -os koordinatnog sustava, dok luk *Rotacija*_{XY} predstavlja rotaciju vektora koji predstavlja y -os koordinatnog sustava. Cilj je

izrada koordinatnog sustava koji bi animacijom prikazivao rotaciju odredišnog K.S. (element $Odredišni_{KS}$) oko x -osi istog, te time kao rezultat dobivanje već poznatog koordinatnog sustav u algebarskome sučelju nazvanog KS_Y . Izazov animacije riješen je postavljanjem točke na luk $Rotacija_{XZ}$ koja je u algebarskome sučelju nazvana R_X te je tom točkom moguće manipulirati u vidu pritiska na gumb za reprodukciju, kada se točka krene kretati. Naredbom *Vector* definiran je vektor u algebarskome sučelju nazvan r_{XZ} s početnom mu točkom O i krajnjom točkom vektora R_X . Ovime je dobiven vektor koji predstavlja rotaciju z -osi korodiranog sustava oko x -osi. Cilj je u narednim koracima izraditi sve vektore koji predstavljaju animirani koordinatni sustav. Ukoliko se želi ostvariti spomenuta animacija svih ostalih osi (predstavljene vektorima) moraju biti jedinstveno povezane s vektorom r_{XZ} . Navedeno se omogućilo naredbom *Rotate* kojom se rotirao vektor r_{XZ} u različitim smjerovima za različite kutne vrijednosti. Dakle, kao prvi korak kreirana je ravnina naredbom *Plane* koja je tvorena od tri točke: P'_{XZ} , P'_{XY} i P'_{XX} . Navedena ravnina u algebarskome sučelju nazvana je *Ravnina_X* unutar koje se rotira z -os i y -os animiranog koordinatnog sustava, te je nužna za rotaciju z -osi (vektora r_{XZ}) u y -os animiranog K.S. Zatim se naredbom *Rotate* rotirao vektor r_{XZ} oko točke O za iznos kuta vrijednosti 90° (osi koordinatnih sustava međusobno su ortogonalne), u ravnini *Ravnina_X*. Kao zadnji korak izrade animiranog koordinatnog sustav je izrada x -osi koja je predstavljena vektorom r_{XX} koji je definiran naredbom *Vector* točkama O i P_{XX} . Kao zadnji korak izrade animiranog koordinatnog sustava, izrada je vektora položaja točke P koji se također mora kretati s svim ostalim osima animiranog koordinatnog sustava, odnosno navedeni također mora imati jedinstvenu vezu s animiranim K.S. Ukoliko se navedeno želi omogućiti izrazom (5.17) definirana je točka u algebarskome sučelju nazvana R_{XY} , koja predstavlja vrh vektora r_{XY} (reprezentacija y -os animiranog korodiranog sustava):

$$(x(r'_{XP}), y(r'_{XP}), z(r'_{XP})) \quad (5.17)$$

Zatim je naredbom *Plane* definirana ravnina koja je u algebarskome sučelju nazvana *Ravnina'_X*, točkama: O , R_{XY} i P_{XX} . Unutar element *Ravnina'_X*, naredbom *Rotate* rotiran je vektor r_{XY} za vrijednost kuta $90^\circ - \alpha_{P/P}$ (gdje je kut $\alpha_{P/P}$ prijašnje definiran vrijednost koja predstavlja kut čiji je vrh u točki O između x -osi koordinatnog sustava i točke P u x - y ravnini, te je navedena vrijednost kuta konstanta, odnosno vrijedi za sve koordinatne sustave definirane u ovom modelu), oko točke O te je time dobiven vektor položaja točke P u xy ravnini animiranog koordinatnog sustava, koji je u algebarskome sučelju nazvan r'_{XP} . Zatim je

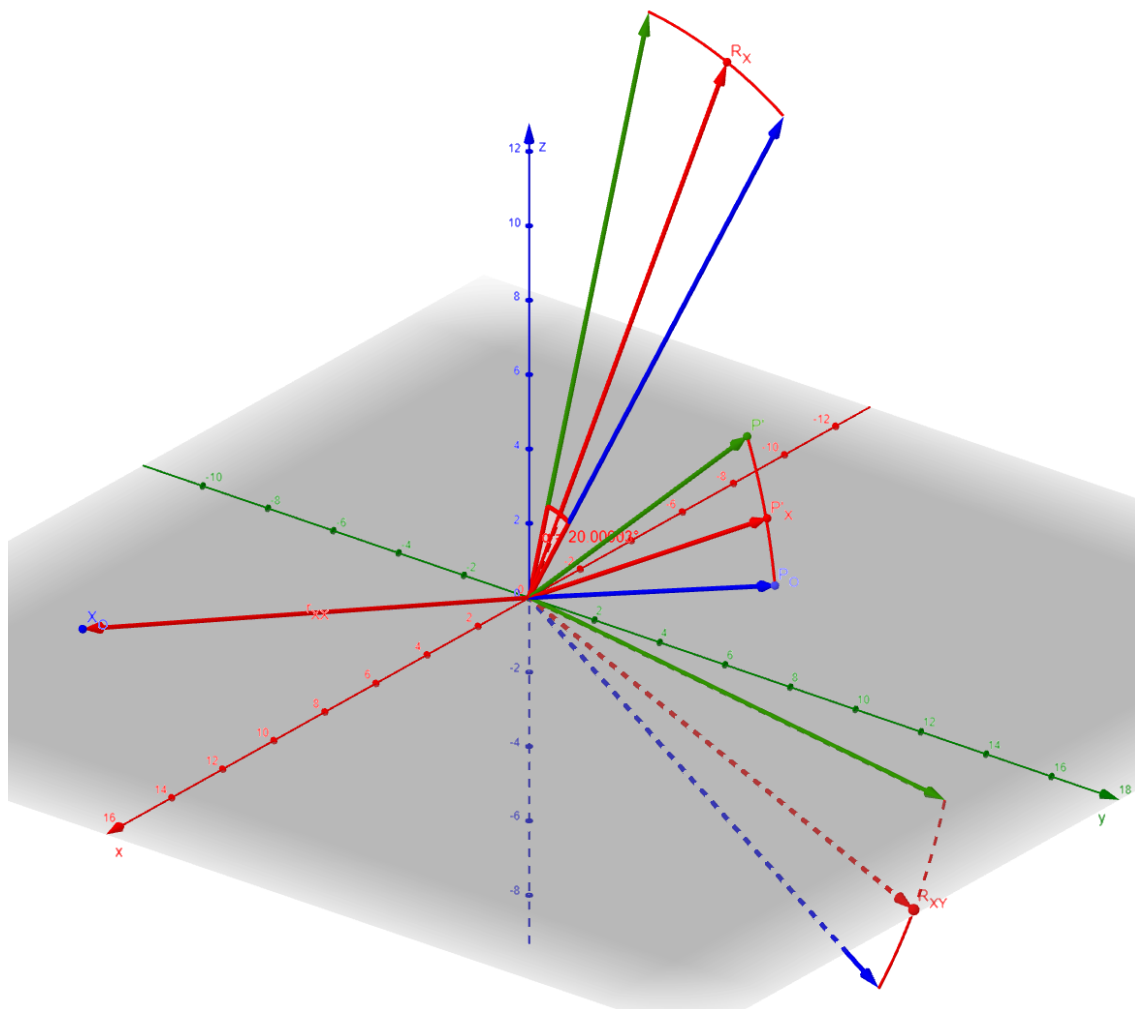
definirana točka u algebarskome sučelju nazvana P_X'' izrazom (5.18) koja predstavlja vrh vektora r_{XP}' .

$$(x(r'_{XP}), y(r'_{XP}), z(r'_{XP})) \quad (5.18)$$

Naredbom *Plane* definirana je ravnina u algebarskome sučelju nazvana $Ravnina_X''$ točakam: O, R_{XY} i P_{XX} . $Ravnina_X''$ rotacijom animiranog koordinatnog sustava mijenja svoju orijentaciju, te se unutar iste nalazi vektor položaja točke P . Naredbom *UnitVector* definiran je jedinični vektor koji predstavlja vektor položaja točke P koji se zajedno rotira s animiranim koordinatnim sustavom. Unutar same naredbe *UnitVector* direktno je rotiran (naredbom *Rotate*) vektor r_{XP}' za vrijednost kuta α_{PP} umanjenog za 90° , oko točke O u prethodno definiranoj ravnini $Ravnina_X''$. Navedeni jedinični vektor pomnožen je s vrijednošću duljine vektora položaja točke P_P u algebarskome sučelju nazvanom *Duljina*, što kao rezultira jednaku duljinu vektora položaja kao i u zadanom koordinatnom sustavu. Time je definiran vektor položaja točke P povezan s animiranim koordinatnim sustavom. Naredbom *CircularArc* definiran je luk sa središnjom točkom O i graničnim točkama P_O i P' u algebarskome sučelju nazvan *Rotacija_{XP}*. Kao zadnji korak animacije rotacije korodiranog sustava oko x–osi izrazom (5.19) definirana je točka P_X koja ukazuje kako se točka P rotira s osima korodiranog sustava u odnosu na x–os.

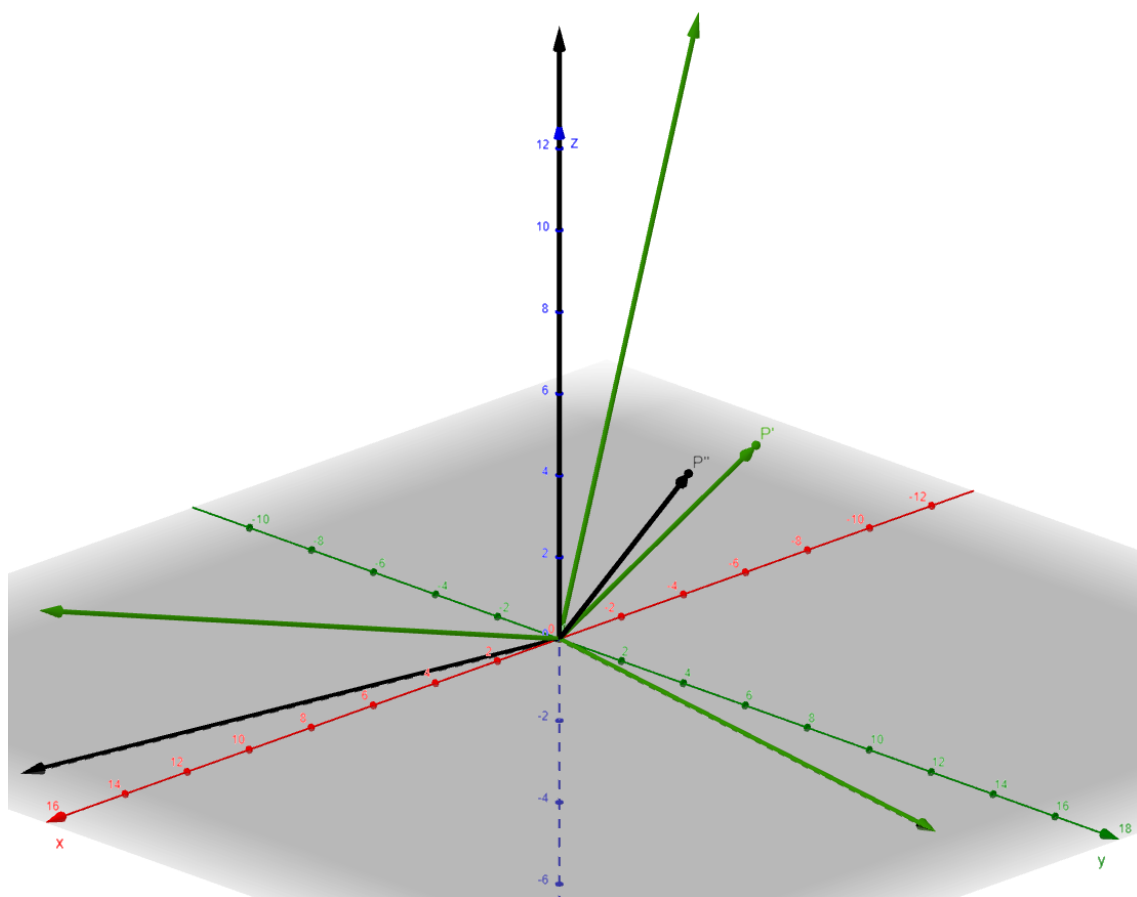
$$(x(r_{XP}), y(r_{XP}), z(r_{XP})) \quad (5.19)$$

Točka P kreće se duž luka *Rotacija_{XP}* Slika 5.58. prikazuje odredišni koordinatni sustav (element *Odredišni_{KS}*, označen plavom bojom), element KS_Y označen tamno zelenom bojom koji prikazuje rotirani odredišni koordinatni sustav oko x–osi za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_X i animirani koordinatni sustav označen crvenom bojom koji predstavlja rotaciju odredišnjog koordinatnog sustava oko x–osi.



Slika 5.58: Prikaz rotacije odredišnog koordinatnog sustava oko x -osi za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_x

Sljedeći korak animacija je rotacije elementa KS_Y oko y -osi istog koordinatnog sustava te time izrada elementa KS_Z (prethodno definiranog), istom metodologijom kao što je objašnjeno u prethodnom dijelu rada. Slika 5.59 prikazuje trodimenzionalno sučelje gdje su prikazani elementi KS_Y (tamno zelene boje) i KS_Z (crna boja).



Slika 5.59: Prikaz elemenata KS_Y (tamno zelene boje) i KS_Z (crna boja)

Slike 5.60 i 5.61 prikazuju algebarsko sučelje kojim je koordinatni sustav KS_Y rotiran oko y -osi za prijašnje zadanu vrijednost Eulerovog kuta rotacija α_Y te time dobiven koordinatni sustav KS_X .

Ⓐ	Rotacija oko Y osi za vrijednost Eulerovog kuta rotacija α_Y	⋮
○	$P_{YZ} = (-3.82331, 0.67415, 14.48889)$	⋮
○	$P_{YY} = (2.60472, 14.77212, 0)$	⋮
○	$P_{YX} = (14.26877, -2.51597, 3.88229)$	⋮
○	$P'_{YZ} = (0, 0, 15)$	⋮
○	$P'_{YY} = (2.60472, 14.77212, 0)$	⋮
○	$P'_{YX} = (14.77212, -2.60472, 0)$	⋮
○	$\alpha'_Y = \text{Angle}(P'_{YZ}, O, P_{YZ})$ $= 15.00001^\circ$	⋮
○	Rotacija _{YZ} : CircularArc(O, P'_{YZ}, P_{YZ}) $= 3.92699$	⋮
○	Rotacija _{YX} : CircularArc(O, P'_{YX}, P_{YX}) $= 3.927$	⋮
○	Rotacija _{YP} : CircularArc(O, P', P'')	⋮
	$= 1.90294$	⋮
○	$R_Y = \text{Point}(\text{Rotacija}_{YZ})$ $= (-1.48316, 0.26152, 14.9242)$	⋮
○	Ravnina _Y : Plane(O, P_{YZ}, P_{YX}) $= 39.07086x + 221.58184y + 0.00004z = 0$	⋮

Slika 5.60:Prikaz definirajućih elemenata rotacije elementa KS_Y oko y–osi

○	$r_{YZ} = \text{Vector}(O, R_Y)$	⋮
	$= \begin{pmatrix} -1.48316 \\ 0.26152 \\ 14.9242 \end{pmatrix}$	⋮
○	$r_{YX} = \text{Rotate}(r_{YZ}, 90^\circ, O, \text{Ravnina}_Y)$	⋮
	$= \begin{pmatrix} 14.69747 \\ -2.59156 \\ 1.50604 \end{pmatrix}$	⋮
○	$R'_Y = (x(r_{YX}), y(r_{YX}), z(r_{YX}))$ $= (14.69747, -2.59156, 1.50604)$	⋮
○	Ravnina'_Y : Plane(O, R'_Y, P_{YY}) $= -22.24741x + 3.92281y + 223.8631z = 0$	⋮
○	$r'_{YP} = \text{Rotate}(r_{YX}, \alpha_{PP}, O, \text{Ravnina}'_Y)$	⋮
	$= \begin{pmatrix} 6.09161 \\ 13.70251 \\ 0.36527 \end{pmatrix}$	⋮
○	$r_{YY} = \text{Vector}(O, P_{YY})$	⋮
	$= \begin{pmatrix} 2.60472 \\ 14.77212 \\ 0 \end{pmatrix}$	⋮
○	$P'_Y = (x(r'_{YP}), y(r'_{YP}), z(r'_{YP}))$ $= (6.09161, 13.70251, 0.36527)$	⋮
○	Ravnina''_Y : Plane(O, R_Y, P'_Y) $= -204.40356x + 91.4542y - 21.91611z = 0$	⋮
○	$r_{YP} = \text{UnitVector}(\text{Rotate}(r'_{YP}, \alpha_{PP} - 90^\circ, O, \text{Ravnina}''_Y))$ Duljina	⋮
	$= \begin{pmatrix} 2.65671 \\ 7.65496 \\ 7.16543 \end{pmatrix}$	⋮
○	$P_Y = (x(r_{YP}), y(r_{YP}), z(r_{YP}))$ $= (2.65671, 7.65496, 7.16543)$	⋮

Slika 5.61:Prikaz rotacije elementa KS_Y oko y–osi za prijašnje zadanu vrijednost Eulerovog kuta rotacija α_Y

Točke u algebarskome sučelju nazvane P_{YZ} , P_{YY} i P_{YX} , predstavljaju vrhove vektora (koji simboliziraju koordinatne osi koordinatnog sustava KS_Y) definirane prepisivanjem elemenata iz skupa vektora KS_Y koji je prikazan slikom 5.51 točke u algebarskome sučelju nazvane P'_{YZ} , P'_{YY} i P'_{YX} , predstavljaju vrhove vektora (koji simboliziraju koordinatni sustav KS_Z), definirane prepisivanjem elemenata iz skupa KS_X koji je prikazan slikom 5.53, te znak apostrofa (') ukazuje da se radi o rotiranom koordinatnom sustavu. Nakon definiranja dotičnih točaka naredbom *CircularArc* definirani su kružni lukovi koji predstavljaju rotaciju vrhova koordinatnog sustava KS_Y . Kružni luk u algebarskome sučelju nazvan Rotacija_{YZ} predstavlja putanju rotacije vrha z–osi koordinatnog sustava, kružni luk Rotacija_{YX} predstavlja rotaciju x–osi koordinatnog sustava te kružni luk Rotacija_{YP} predstavlja putanju točke P prilikom rotacije koordinatnog sustava. Točka R_Y postavljena je na kružni luk Rotacija_{YZ}, te je njezinim postavljanjem omogućeno njezino kretanje, odnosno definiran je gumb za reprodukciju. Uslijedila je izrada koordinatnih osi animiranog koordinatnog sustava koje su reprezentirane vektorima. Dakle naredbom

Vector definiran je vektor u algebarskome sučelju nazvan r_{YZ} s početnom točkom O te krajnjom točkom R_Y . Pošto je vektor r_{YZ} vezan za točku R_Y koja se klikom na gumb za reprodukciju kreće također se i vektor r_{YZ} kreće odnosno animiran je. Dakle vektor r_{YZ} potrebno je rotirati tako te u konačnici definirati animirati koordinatni sustav. Slijedila je izrada vektora koji reprezentira y -os. Naredbom *Plane* definirana je ravnina u algebarskome sučelju nazvana *Ravnina_Y* točkama: O , P_{YZ} i P_{YX} . Zatim je naredbom *Rotate* vektor r_{YZ} rotiran za vrijednost 90° (koordinatne osi sustava su međusobno oktogonalne) oko točke O u *Ravnina_Y*. Ovaj element u algebarskome sučelju nazvan je r_{YX} te predstavlja y -os animiranog koordinatnog sustava. Naredbom *Vector* točkama O i P_{YY} definiran je vektor u algebarskome sučelju nazvan r_{YY} koji predstavlja y -os animiranog koordinatnog sustava. Navedeni ne mora strogo biti vezan uz vektor r_{YZ} jer se radi o rotaciji koordinatnog sustava oko y -osi odnosno y -os animiranog koordinatnog sustava statična je i ne mijenja svoju orijentaciju i položaj. Izrazom (5.19) definirana je točka u algebarskome sučelju nazvana R'_Y koja predstavlja vrh x -osi animiranog koordinatnog sustava. Spomenuta potreba je pri definiciji ravnine koja je nužna za uspostavu vektora položaja točke P .

$$(x(r_{YX}), y(r_{YX}), z(r_{YX})) \quad (5.19)$$

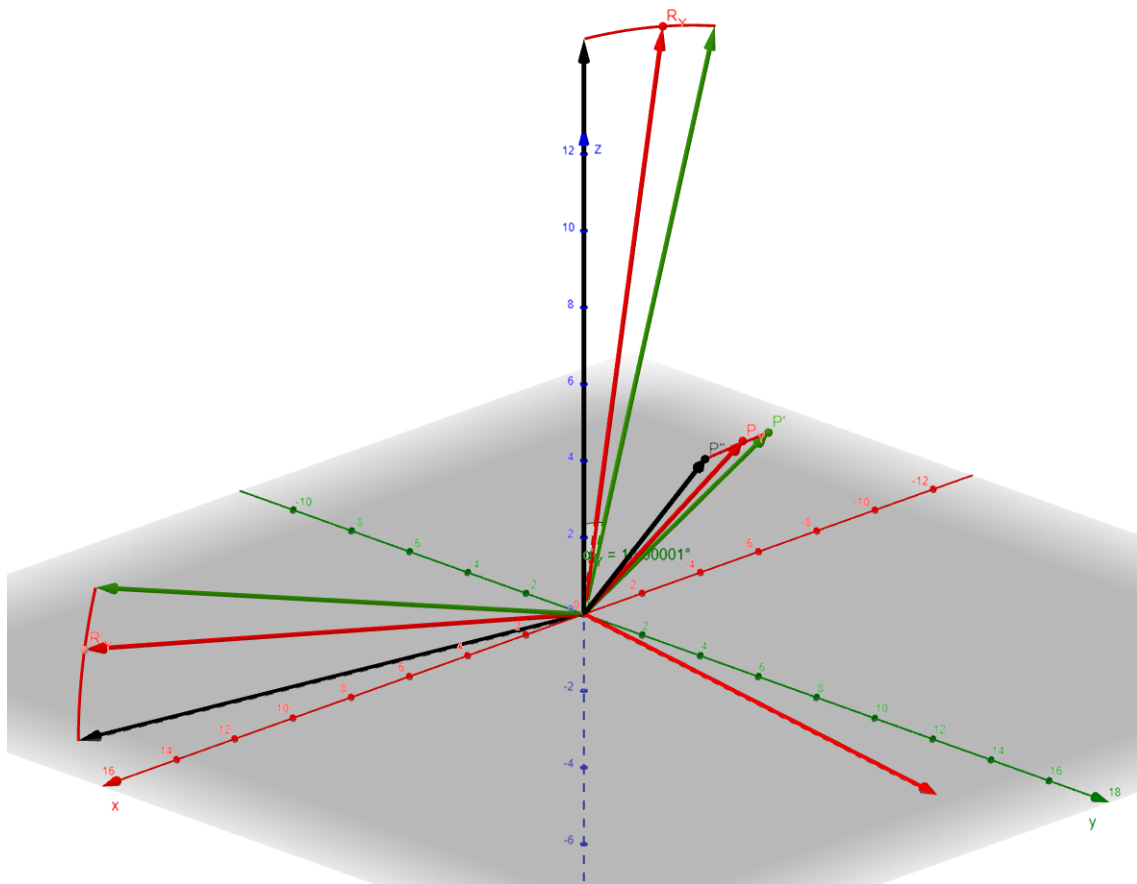
Naredbom *Plane* definirana je ravnina točkama: O , R'_Y i P_{YY} . Navedenoj ravnini u algebarskome sučelju dijeljen je naziv *Ravnina'_Y*. Naredbom *Rotate* definiran je vektor položaja točke P u ravnini *Ravnina'_Y*, na način da je vektor r_{YX} rotiran oko točke O za iznos kuta $\alpha_{P'P}$ u ravnini *Ravnina'_Y*. Navedenom vektoru u algebarskome sučelju dodijeljen je naziv r'_{YP} . Izrazom (5.20) definirana je točka u algebarskome sučelju nazvana P''_Y koja predstavlja vrh vektora r'_{XP} :

$$(x(r'_{YP}), y(r'_{YP}), z(r'_{YP})) \quad (5.20)$$

Zatim je definirana ravnina unutar koje će se vektor r'_{YP} rotirati te tako definirati vektor položaja točke P . Dakle, naredbom *Plane* definirana je ravnina točkama: O , R_Y i P''_Y . Navedenoj ravnini u algebarskome sučelju dodijeljen je naziv *Ravnina''_Y*. Naredbom *UnitVector* kojom se naredbom *Rotate* vektor r'_{XP} rotirao za vrijednost kuta α_{PP} umanjenog za 90° , oko točke O u ravnini *Ravnina''_Y*, koji je pomnožen elementom *Duljina*. Kao zadnji korak kompletiranja animiranog koordinatnog sustav koji se rotira oko y -osi izrazom (5.21) definiran je točka P_Y koja predstavlja točku P koja se rotira s animiranim koordinatnim sustavom duž kružnog luka *Rotacija_{YP}*.

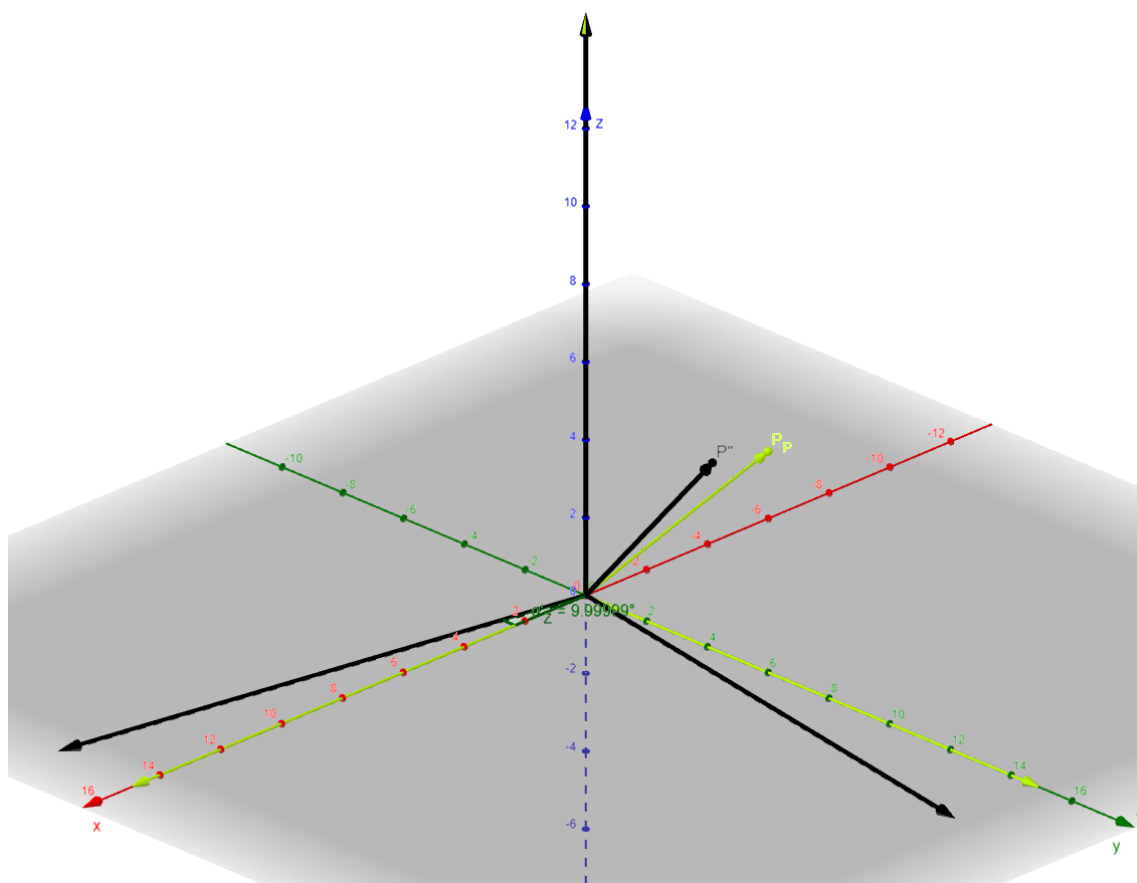
$$(x(r_{YP}), y(r_{YP}), z(r_{YP})) \quad (5.21)$$

Animirani koordinatni sustav kojem je dodijeljena crvena boja prikazan je slikom 5.62 zajedno sa kormanim sustavom KS_Y (tamno zelene boje) i KS_Z (crne boje) te bitnim elementima koji ukazuju na rotaciju.



Slika 5.62: Prikaz KS_Y (tamno zelena boja) i KS_Z (crna boja) te animiranog koordinatnog sustava (crvena boja)

Kao zadnji korak izrade modela CFR konvencije transformacije je animacija rotacije koordinatnog sustava KS_Z oko z -osi za vrijednost zadanog Eulerovog kuta rotacije α_Z . Slikom 5.63 predloženi su koordinatni sustavi od značaja u ovoj rotaciji, odnosno spomenuti koordinatni sustav KS_Z i polazišni koordinatni sustav $Polazišni_{KS}$.



Slika 5.63: Prikaz elemenata KS_Z (crna boja) i $Polazišni_{KS}$ (svijetlo zelena boja)

Slike 5.64 i 5.65 prikazuju algebarsko sučelje sa čijim je elementima koordinatni sustav KS_Z rotiran oko z-osi te time izrada elementa $Polazišni_{KS}$, odnosno izrada sve tri animacije rotacije odredišnog koordinatnog sustava oko sve tri osi prema CFR konvenciji transformacije.

99	Rirotacija oko Z osi za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_Z	⋮
○	$P_{ZZ} = (0, 0, 15)$	⋮
○	$P_{ZY} = (2.60472, 14.77212, 0)$	⋮
○	$P_{ZX} = (14.77212, -2.60472, 0)$	⋮
○	Rotacija _{ZY} : CircularArc(O, P _{ZY} , Y) = 2.61799	⋮
○	Rotacija _{ZX} : CircularArc(O, P _{ZX} , X) = 2.61799	⋮
○	R _Z = Point(Rotacija _{ZX}) = (14.9584, -1.11638, 0)	⋮ ▶

Slika 5.64: Prikaz definirajućih elemenata rotacije koordinatnog sustava KS_Z oko z–osi

○	$r_{ZX} = \text{Vector}(O, R_Z)$ = $\begin{pmatrix} 14.9584 \\ -1.11638 \\ 0 \end{pmatrix}$	⋮
○	$r_{ZZ} = \text{Vector}(O, Z)$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$	⋮
○	Ravnina _Z : $z = 0$	⋮
○	$r_{ZY} = \text{Rotate}(r_{ZX}, 90^\circ, O, \text{Ravnina}_Z)$ = $\begin{pmatrix} 1.11638 \\ 14.9584 \\ 0 \end{pmatrix}$	⋮
○	$r'_{ZP} = \text{Rotate}(r_{ZX}, \alpha_{PP}, O, \text{Ravnina}_Z)$ = $\begin{pmatrix} 4.71099 \\ 14.24102 \\ 0 \end{pmatrix}$	⋮
○	$P'_Z = (x(r'_{ZP}), y(r'_{ZP}), z(r'_{ZP}))$ = (4.71099, 14.24102, 0)	⋮
○	Ravnina' _Z : Plane(O, Z, P' _Z) = $-213.61532x + 70.66483y = 0$	⋮
○	$r_{ZP} = \text{UnitVector}(\text{Rotate}(r'_{ZP}, \alpha_{PP} - 90^\circ, O, \text{Ravnina}'_Z))$ Duljina = $\begin{pmatrix} 2.58985 \\ 7.82896 \\ 7 \end{pmatrix}$	⋮
○	$P_Z = (x(r_{ZP}), y(r_{ZP}), z(r_{ZP}))$ = (2.58985, 7.82896, 7)	⋮
○	Rotacija _{ZP} : CircularArc(O, P'', P _P) = 1.43847	⋮
●	$\alpha'_Z = \text{Angle}(P_{ZX}, O, X)$ = 9.99999°	⋮

Slika 5.65: Prikaz elemenata rotacije koordinatni sustav KS_Z rotiran oko z–osi

Točke u algebarskome sučelju nazvane P_{ZZ} , P_{ZY} i P_{ZX} predstavljaju vrhove vektora koji simboliziraju osi koordinatnog sustava. Točke su definirane prepisivanjem koordinata iz elementa KS_Z koji je prikazan slikom 5.49. Vrhovi vektora koji predstavljaju koordinatne osi polazišnog koordinatnog sustava (element *Polazišni*_{KS}) već su definirani elementi u algebarskome sučelju nazvani: X , Y i Z . Navedeni elementi prikazani su slikom 5.44. Pošto su poznati vrhovi vektora koji predstavljaju koordinatne osi koordinatnih sustava od značaja, naredbom *CircularArc* definirane su putanje vrhova osi animiranog koordinatnog sustava koji se rotira od koordinatnog sustava KS_Z do *Polazišni*_{KS} u obliku kružnih lukova. Spomenuti elementi u algebarskome sučelju nazvani su: *Rotacija*_{ZY}, *Rotacija*_{ZX} i *Rotacija*_{ZP}. Element *Rotacija*_{ZY} prikazuje rotaciju y–osi animiranog koordinatnog sustava čija je središnja točka O , dok su za krajnje točke kružnog luka odabrani elementi: Y i P_{ZY} . Kružni luk *Rotacija*_{ZX} prikazuje rotaciju vrha x–osi animiranog koordinatnog sustava, te je dotični definiran sa središnjom točkom O i graničnim točkama kružnog luka: X i Z . Kružni luk *Rotacija*_{ZP}

prikazuje rotaciju vrha vektora položaja točke P (odnosno točke u algebarskome sučelju kasnije nazvane P_Z) te je definiran sa središnjom točkom O i graničnim točkama: P'' i P_O . Slijedilo je definiranje animirane točke postavljene na kružni luk $Rotacija_{ZX}$, u algebarskome sučelju nazvana R_Z , čije se kretanje može zaustaviti, odnosno pokrenuti klikom na gumb za reprodukciju. Naredbom *Vector* zatim je definiran vektor u algebarskome sučelju nazvan r_{ZX} s početnom točkom O i završnom točkom R_Z . Time je vektor r_{ZX} animiran u prostoru. Istom naredbom definiran je vektor u algebarskome sučelju nazvan r_{ZZ} s početnom točkom O te završno točkom Z . Zatim je slijedila rotacija vektora r_{ZX} , odnosno definirane y -osi animiranog korodiranog sustava. Izrazom (5.2) definirana je ravnina u algebarskome sučelju nazvana $Ravnina_Z$ unutar koje će se rotirati vektor r_{ZX} za potrebe izrade y -osi animiranog koordinatnog sustava, kao i izrade vektora položaja točke P .

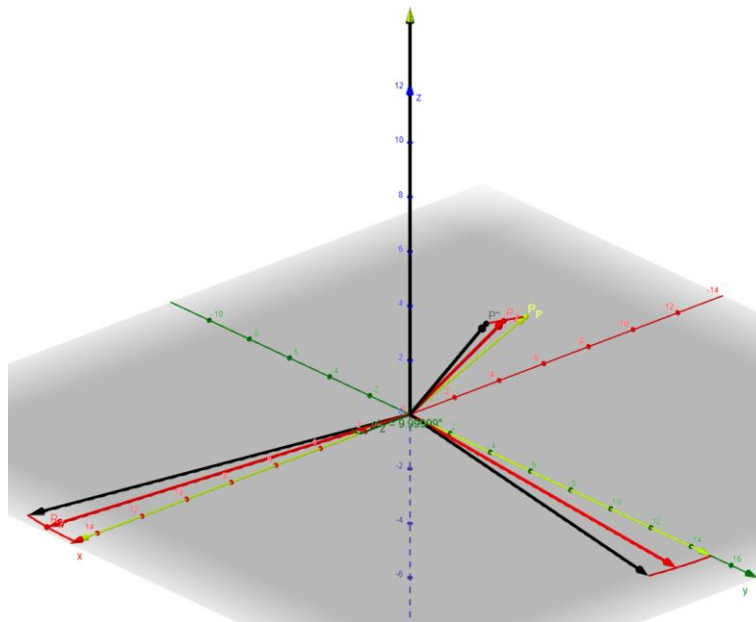
Slijedila je izrada y -osi animiranog koordinatnog sustava, koja je uspostavljena naredbom *Rotate*, s kojom je obavljena rotacija vektora r_{ZX} za vrijednost kuta iznosa 90° (koordinatne osi koordinatnog sustava međusobno su ortogonalne) oko točke O u elementu $Ravnina_Z$, te je kreirani vektor u algebarskome sučelju nazvan r_{ZY} . Naredni korak izrada je vektora položaja točke P u ravnini $Ravnina_Z$. Navedeni zadatak također je obavljen naredbom *Rotate* vektora r_{YX} , za vrijednost kuta $\alpha_{P,P}$, oko točke O u ravnini $Ravnina_Z$, koji je u algebarskome sučelju nazvan r'_{ZP} . Izrazom (5.22), definirana je točka u algebarskome sučelju nazvana P'_Z , koja se nalazi na vrhu vektora r'_{ZP} . Naredbom *Plane* definirana je ravnina u algebarskom sučelju nazvana $Ravnina_Z$ točkama: O , Z i P'_Z . Unutar definirane ravnine vektor r'_{ZP} rotirati će se u svrhu izrade vektora položaja točke P . Dakle naredbom *UnitVector* unutar koje je upotrijebljena naredba *Rotate* definirana je jedinični vektor rotacijom vektora r'_{ZP} u ravnini $Ravnina'_Z$, oko točke O za vrijednost kuta α_{PP} umanjenog za iznos pravog kuta (90°), zatim je jedinični vektor pomnožen modulom *Duljina* te je time definiran vektor u algebarskome sučelju nazvan r_{ZP} .

$$(x(r'_{ZP}), y(r'_{ZP}), z(r'_{ZP})) \quad (5.22)$$

Izrazom (5.23) definirana je točka u vrhu vektora r_{ZP} koja se kreće duž kružnog luka $Rotacija_{ZP}$ i koja predstavlja rotaciju točke P zajedno s rotacijom animiranog koordinatnog sustava oko z -osi. Kao zadnji korak definiran je kut naredbom *Angle* u algebarskome sučelju nazvan α'_Z koji je jednakog iznosa kao i kut α_Z što ukazuje na matematičku odnosno geometrijsku točnost transformacije.

$$(x(r_{zP}), y(r_{zP}), z(r_{zP})) \quad (5.23)$$

Slika 5.66. prikazuje koordinatni sustav KS_Z (crna boja), animirani koordinatni sustav (označen crvenom bojom) koji se klikom na gumb za reprodukciju (točke R_Z) pokreće te je prikazana rotacija oko z–osi koordinatnog sustava, također prikazana je ciljani koordinatni sustav prikazan zelenom bojom, odnosno $Polazišni_{KS}$.



Slika 5.66: Prikaz animiranog koordinatnog sustava (crvena boja) koji predstavlja rotaciju K.S. oko z–osi

U ovom poglavlju detaljno je obrazložena izrada modela CFR konvencije transformacije koja geometrijski i matematički vjerodostojno prikazuje transformaciju koordinata.

Obrazloženim procesom, CFR konvencija transformacije je zgotovljen. U poglavlju 4.2 dane su teorijske osnove ovog rada. Ovim modelom konkretno je prikazana samo dio transformacije prema CFR konvenciji, naime promjena mjerila i translacija ishodišta K.S. nije predstavljena, činjenicom složenosti prikazivanja istih elemenata CFR konvencije transformacije model znatno teže koristio zbog složenosti istog.

Ovom modelu koordinatnog sustava moguće je pristupiti putem poveznice: [CFR konvencija transformacije](#).

Također, navedenom modelu moguće je pristupiti skeniranjem QR koda:



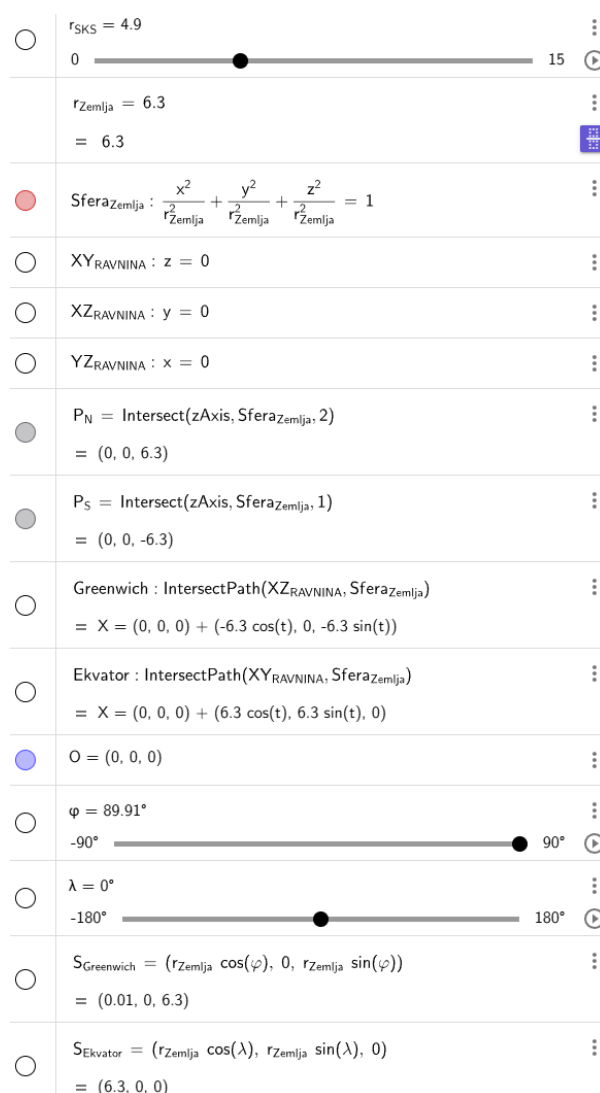
Slika 5.67: QR kod modela transformacije CFR konvencije

5.4. Vizualizacija koordinatnih sustavi nebeskih sfera

U poglavlju 4 predstavljena je teorijska osnova koordinatnih sustava nebeskih sfera.

5.4.1 Horizontski koordinatni sustav

Cilj ovog potpoglavlja izrada je horizontnog koordinatnog sustava koji je teorijska potkrijepljen u poglavlju 4.2. Ovaj sferni nebeski koordinatni sustav u nastavku bit će realiziran s pomoću dvije sfere, od kojih će jedna predstavljati Zemlju (Zemljina sfera), dok će druga predstavljati sferu dotičnog koordinatnog sustava. Sferi nebeskog koordinatnog sustav bit će omogućena manipulacija u vidu promjene položaja njezinog ishodišta, odnosno, pošto se radi o teocentričnom ishodištu, omogućena je manipulacija položaja motritelja na Zemljinoj sferi. Također uz određena ograničenja uspostavljen je nebeskog tijela kojem je omogućena manipulacija s koordinatama ovog koordinatnog sustava.



Slika 5.68. Prikaz algebarskog sučelja gdje je definirana Zemljina sfera, pomoćne veličine, sjeverni i južni nebeski pol, referentni meridijan i ekvator te elipsoidne koordinate

Izrada modela započelo je definiranjem točke ishodišta narednom *Point* te zadavanjem koordinata ishodišta (0,0,0). Postavljen je klizač r_{SKS} u interval od 0 do 15 koji predstavlja radijus sfere, sfernog koordinatnog sustav odnosno u ovom slučaju nebeskog horizontskog koordinatnog sustav. Nadalje zadan je element r_{Zemlja} s vrijednošću 6,37 koji predstavlja skaliranu, aproksimiranu vrijednost Zemljine sfere. Srednji radijus Zemljine sfere iznosi 6 371 000 m. Sukladno izrazu (3.1) kartezijeve jednadžbe elipse u algebarskom sučelju unošenjem za veliku (a) i malu (b) poluos sfere element r_{Zemlja} . Navedenoj sferi dano je ime $Sfera_{Zemlja}$. Zatim su zbog daljnjeg olakšavanja izrade trodimenzionalnog modela, definirane iduće ravnine pomoću osi koordinatnog sustava alata *GeoGebra*®: ravnina xy ravnina nazvana $XY_{RAVNINA}$ dana izrazom (5.2), ravnina xz ravnina nazvana $XZ_{RAVNINA}$ dana izrazom (5.1) i ravnina yz ravnina nazvana $YZ_{RAVNINA}$ dana izrazom (5.13). Naredbom *Intersect* definirane su točke sjevernog Zemljinog pola P_N i južnog Zemljinog pola P_S , kao presjecišta elementa $Sfera_{Zemlja}$ i z–osi koordinatnog alata *GeoGebra*®. Referentni Zemljin meridijan (Greenwich) definiran je kružnicom naredbom *IntersectPath* elementa $XZ_{RAVNINA}$ i $Sfera_{Zemlja}$, imenovana *Greenwich*. Zemljin ekvator također je definiran kao kružnica imena *Ekvator*, naredbom *Intersect* elemenata $XY_{RAVNINA}$ i $Sfera_{Zemlja}$. Elementi P_N (točka sive boje), P_S (točka sive boje), *Greenwich* (plava kružnica u x-z ravnini) i *Ekvator* (plava kružnica u x-y ravnini) prikazani su slikom 5.69.

$$(r_{Zemlja} \cos \lambda, r_{Zemlja} \sin \lambda, 0) \quad (5.24)$$

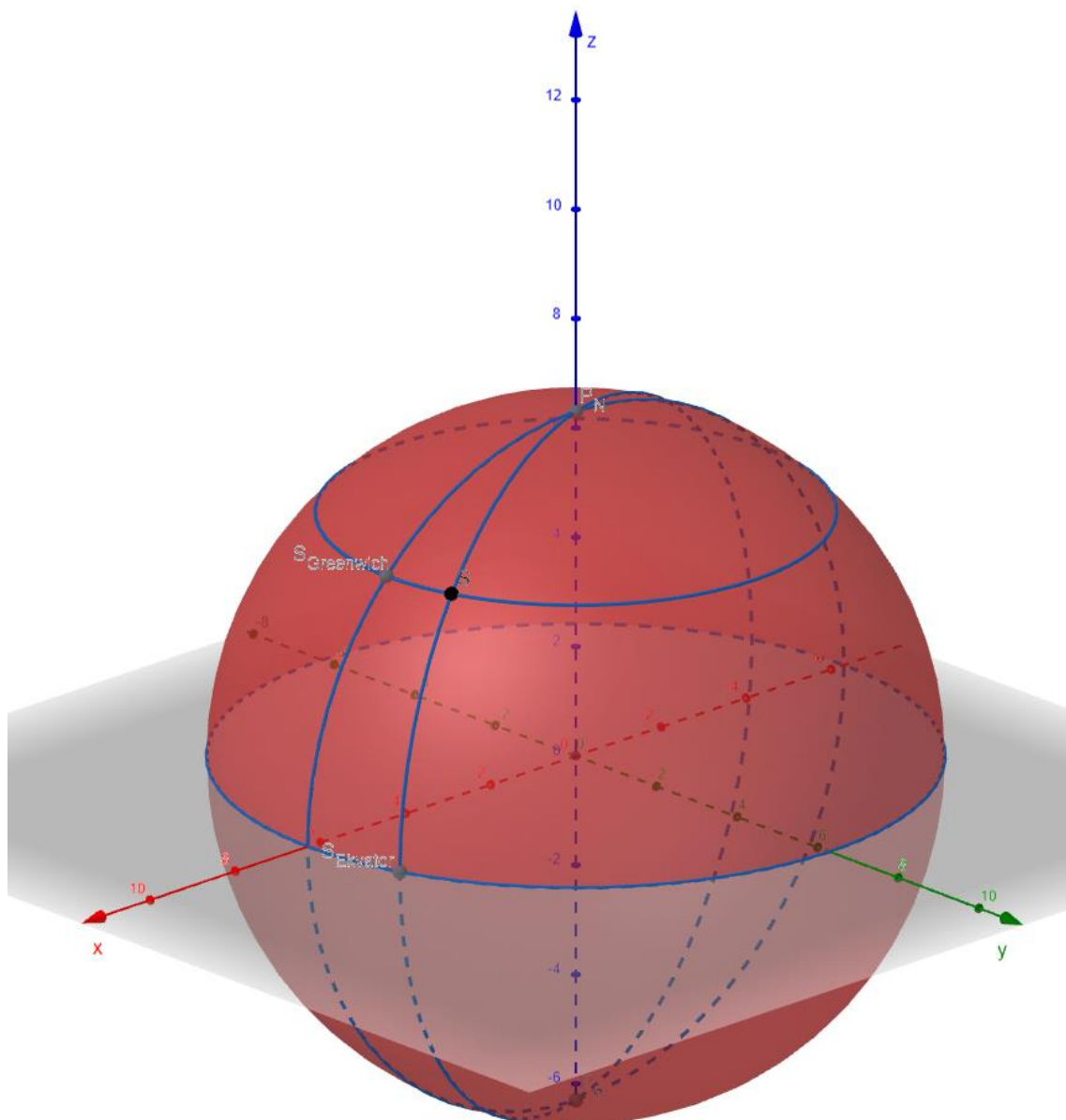
Slijedi izrada elemenata uz pomoć kojih se ostvaruje prikaz točke motritelja (S) na Zemljinoj sferi te definiranje ravnine nebeskog horizonta motritelja u algebarskome sučelju koji su prikazi slikom 5.70.

○	MeridijanskaRavnina : Plane($P_N, S_{Ekvator}, P_S$) = $-24.66x + 75.45y = 0$	⋮
○	Meridijan _S : IntersectPath(MeridijanskaRavnina, Sfera _{Zemlja}) = $X = (0, 0, 0) + (4.23 \cos(t) - 4.23 \sin(t), 1.38 \cos(t) - 1.38 \sin(t), -4.45 \cos(t) - 4.45 \sin(t))$	⋮
○	RavninaParalele : Plane($S_{Greenwich}, XY_{RAVNINA}$) = $z = 4.46$	⋮
○	Paralela _S : IntersectPath(RavninaParalele, Sfera _{Zemlja}) = $X = (0, 0, 4.46) + (4.45 \sin(t), 4.45 \cos(t), 0)$	⋮
○	$S = \text{Intersect}(\text{Meridijan}_S, \text{Paralela}_S, 2)$ = $(4.23, 1.38, 4.46)$	⋮
○	Tangent($S, \text{Meridijan}_S$) = $\text{Tan: } X = (-707.6, -231.28, 750.73) + \lambda (6.84, 2.24, -7.17)$	⋮
○	Tangent($S, \text{Paralela}_S$) = $\text{Tangentas}_P: X = (0, 14.31, 4.46) + \lambda (2.23, -6.82, 0)$	⋮
○	RavninaHorizonta : Plane($\text{Tan}, \text{Tangentas}_P$) = $-48.88x - 15.97y - 51.6z = -458.93$	⋮
○	PravacVertikala : PerpendicularLine($S, \text{RavninaHorizonta}$) = $X = (4.23, 1.38, 4.46) + \lambda (-48.88, -15.97, -51.6)$	⋮
○	Sfera _{SKS} : $(x - x(S))^2 + (y - y(S))^2 + (z - z(S))^2 = r_{SKS}^2$	⋮
○	NebeskiHorizont : IntersectPath(RavninaHorizonta, Sfera _{SKS}) = $X = (4.23, 1.38, 4.46) + (2.69 \cos(t) + 1.24 \sin(t), 0.88 \cos(t) - 3.8 \sin(t), -2.82 \cos(t))$	⋮

Slika 5.70. Prikaz algebarskog sučelja za definiranje točke motritelja na Zemljinoj sferi i ravnine nebeskog horizonta motritelja

Uspostavom ravnine koja sadrži z -os koordinatnog te koja prolazi točkom $S_{Ekvator}$ definirana je ravnina meridijana točke S u algebarskome sučelju nazvanom *MeridijanskaRavnina* naredbom *Plane* koja prolazi točkama sjevernog Zemljinog pola P_N , južnog Zemljinog pola P_S , i točkom $S_{Ekvator}$. Naredbom *IntersectPath* elemenata *Sfera_{Zemlja}* i *MeridijanskaRavnina* definirana je meridijanska kružnica točke S u algebarskome sučelju nazvana *Meridijan_S*. Element *RavninaParalele* definiran je naredbom *Plane* pomoću elemenata $S_{Greenwich}$ i $XY_{RAVNINA}$. Naredbom *Intersect* elemenata *RavninaParalele* i *Sfera_{Zemlja}* definirana je kružnica paralela točke S nazvan *Paralela_S*. Konačno presjecištem kružnice paralele točke S (elementa *Paralela_S*) i meridijanske kružnice točke S (elementa

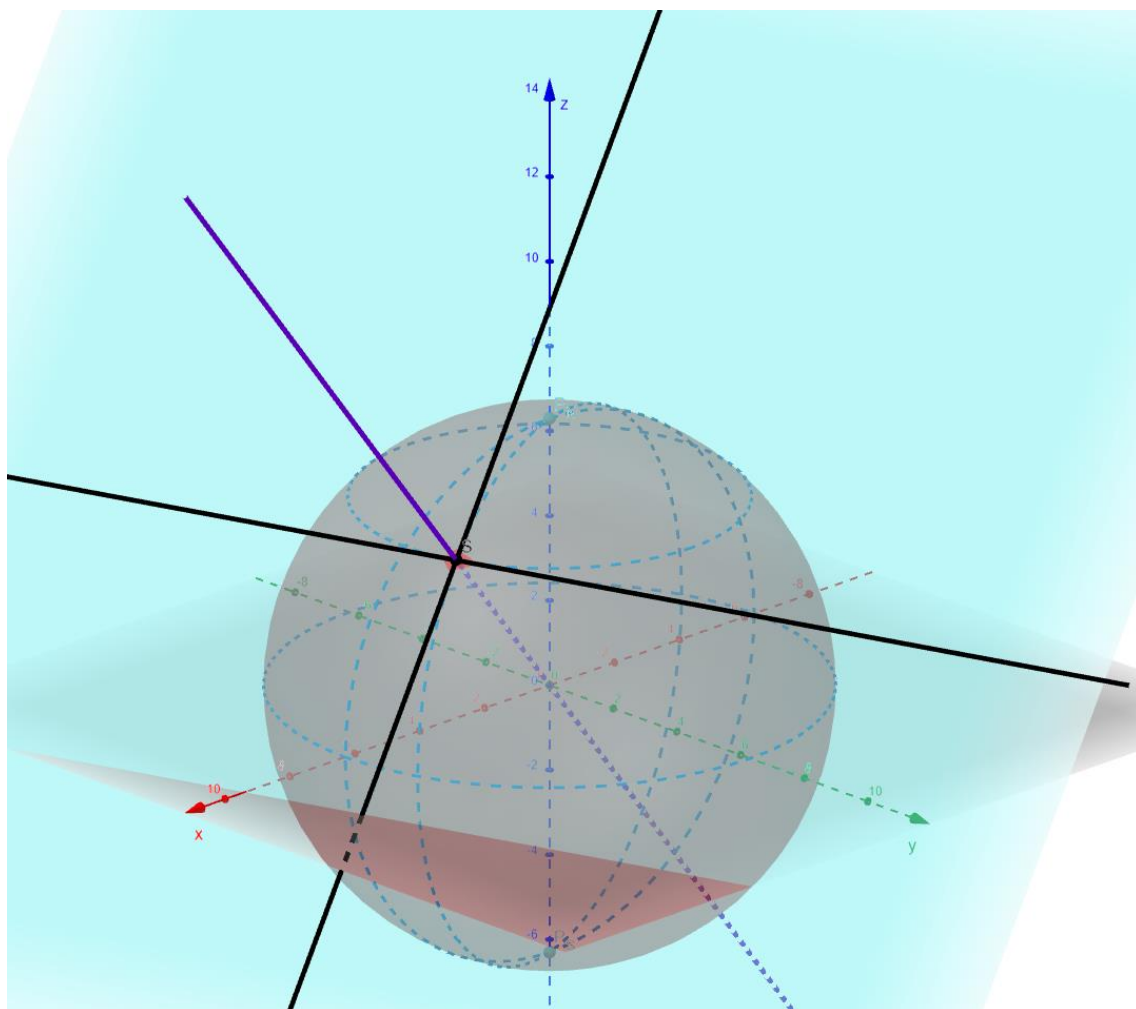
$Meridian_S$), što je ostvareno naredbom *Intersect* definiran je položaj točke S na Zemljinoj sferi. Slika 71 prikazuje točku S na Zemljinoj sferi sa pripadnim koordinatama elipsoidne širine $\varphi = 45.1^\circ$ i elipsoidne dužine $\lambda = 18.1^\circ$.



Slika 5.71. Prikaz položaja točke S s pripadnim koordinatama te elementima $Meridian_S$ i $Paralela_S$

Definiranje nebeskog horizonta u alatu *GeoGebra*® ostvareno je definiranje dva pravca: pravca tangente na kružnicu meridijana (element *Meridijan_S*) u točki *S* i pravca tangente na kružnicu paralele (elementa *Paralela_S*) u točki *S*. Elementi spomenutih pravaca u algebraskome sučelju nazvani su: *Tangenta_{SM}* i *Tangenta_{SP}*. Navedeno je ostvareno naredbom *Tangent* te odabiranjem točke *S* i pripadne joj kružnice paralele i kružnice meridijana. Naredbom *Plane* te označavanjem elemenata *Tangenta_{SM}* i *Tangenta_{SP}* ostvarena je ravnina koja predstavlja ravninu nebeskog horizonta motritelja nazvanom u algebraskome sučelju *RavninaHorizonta* koja mijenja svoj nagib, položaj i orijentaciju promjenom elipsoidnih koordinata (φ i λ) točke motritelja (*S*). Na ovaj način omogućena je spoznaja kako položaj motritelja u ovom nebeskom koordinatnom sustavu utječe na vidljivi dio nebeskog svoda.

Naredbom *PerpendicularLine*, elementima *S* i *RavninaHorizonta* definiraj je pravac okomit na ravninu nebeskog horizonta motritelja (element *RavninaHorizonta*) koja definira prividni smjer ubrzanja sile teže, u algebraskome sučelju nazvan *PravacVertikala*. Elementi *RavninaHorizonta*, *PravacVertikala*, *Tangenta_{SM}* i *Tangenta_{SP}* zajedno s *Meridijan_S* i *Paralela_S* prikazani su slikom 5.72.



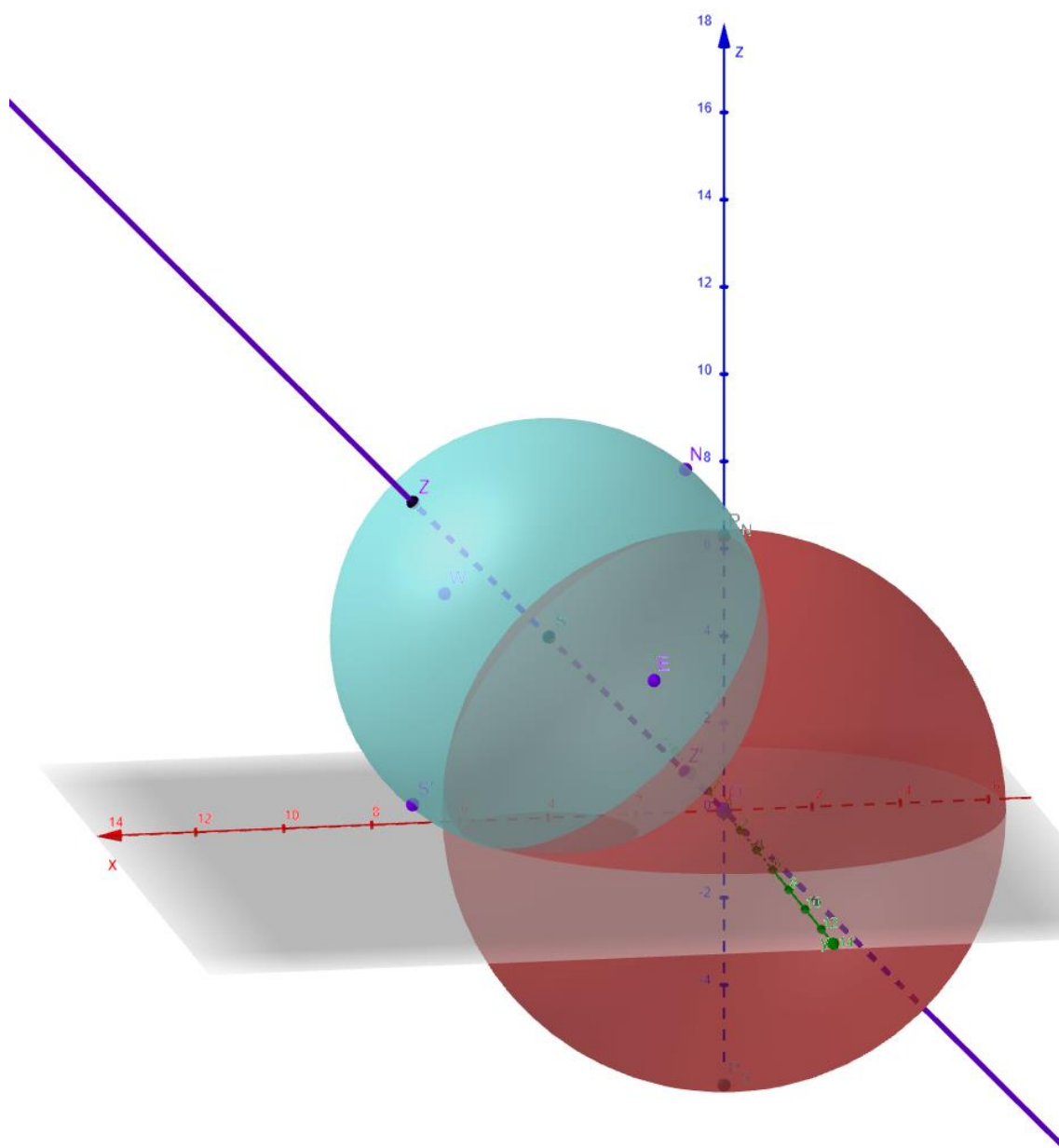
Slika 5.72. Prikaz ravnine nebeskog horizonta, tangente na paralelu i meridijan elementa S zajedno sa meridijanom i paralelom

Slijedi definicija sfere koja predstavlja nebeski horizonstki koordinatni sustav. Izrazom (3.1), gdje je za vrijednosti velike (a) i male (b) poluosi elipsoida odabran element r_{SKS} definirana je sfera čije je ishodište točka S koja predstavlja sferni horizonstki koordinatni sustav (Slika 5.68). Navedenoj sferi omogućena je promjena radijusa pomoću definiranog klizača r_{SKS} u intervalu od 0 do 15. Na sferi definirana je kružnica nebeskog horizonta u algebarskome sučelju nazvanom *NebeskiHorizont*, naredbom *IntersectPath* te označavanjem elemenata *RavninaHorizonta* i *Sfera_{SKS}*. Slikom 5.73 prikazani su elementi algebarskog sučelja koji definiraju mjesni astronomski meridijan (vertikal), sjevernu točku obzora (N), južnu točku obzora (S'), istočnu točku obzora (E) i zapadnu točku obzora (W). Također uspostavljene su koordinate nebeskog horizonstskog koordinatnog sustava u obliku intervala kutova gdje je astronomski azimut (A) definiran kao horizontalni kut u intervalu od 0° do 360° te zenitna daljina ($z_{daljina}$) definiran u intervalu od 0° do 90° .

○	RavninaVertikala : Plane(Tangenta _{SM} , PravicVertikala)	⋮
	= $-229.91x + 703.4y = 0$	
○	Vertikal : IntersectPath(RavninaVertikala, Sfera _{SKS})	⋮
	= $X = (4.23, 1.38, 4.46) + (2.69 \cos(t) - 2.68 \sin(t), 0.88 \cos(t) - 0.88 \sin(t), -)$	
○	N = Intersect(Tangenta _{SM} , Vertikal, 2)	⋮
	= (1.53, 0.5, 7.29)	
○	S' = Intersect(Tangenta _{SM} , Vertikal, 1)	⋮
	= (6.92, 2.26, 1.64)	
○	W = Intersect(Tangenta _{SP} , NebeskiHorizont, 1)	⋮
	= (5.47, -2.42, 4.46)	
○	E = Intersect(Tangenta _{SP} , NebeskiHorizont, 2)	⋮
	= (2.98, 5.18, 4.46)	
○	Z = Intersect(PravicVertikala, Vertikal, 2)	⋮
	= (6.91, 2.26, 7.3)	
○	Z' = Intersect(PravicVertikala, Vertikal, 1)	⋮
	= (1.54, 0.5, 1.63)	
○	A = 148.85°	⋮
	0°  360° 	
○	z _{daljina} = 39.92°	⋮
	0°  180° 	

Slika 5.73: Definicija koordinata nebeskog horizontskog koordinatnog sustava i točaka na sferi istog Naredbom *Plane* definirana je ravnina astronomskog mjesnog meridijana (vertikala), elementima *Tangenta_{SM}* i *PravicVertikala*. Ravnina astronomskog mjesnog meridijana nazvana je u algebarskome sučelju *RavninaVertikala*. Naredbom *IntersectPath* elemenata *RavninaVertikala* i *Sfera_{SKS}* definirana je kružnica na nebeskoj sferi koja predstavlja kružnicu astronomskog mjesnog meridijana u algebarskome sučelju nazvanom *Vertikal*. Navedeno omogućuje promjenom položaja motritelja uz pomoć koordinata elipsoidne širine (φ) i elipsoidne dužine (λ), automatsku promjenu položaja kružnice astronomskog mjesnog meridijana horizontskog sfernog koordinatnog sustava. Naredbom *Intersect* elemenata *Tangenta_{SM}* i *Sfera_{SKS}* definirani su elementi sjeverne točke obzora (*N*) i južne točke obzora (*S*), gdje je element sjeverne točke obzora postavljen u smjeru sjevernog nebeskog pola (*P_N*). Upotrebom naredbe *Intersect* elemenata *Tangenta_{SP}* i *Sfera_{SKS}* definirane su elementi istočne točke obzora (*E*) i zapadne točke obzora (*W*), gdje je istočna točka obzora definira u smjeru pozitivnog rasta elipsoidne širine (λ), dok je zapadna točka obzora definirana u smjeru negativnog rasta elipsoidne širine (λ). Točka zenita motritelja (*Z*) i točka nadira motritelja (*Z'*)

definirane su također naredbom *Intersect* elemenata *PravacVertikala* i *Sfera_{SKS}*. Elementi *RavninaVertikala*, *N*, *S*, *W*, *E*, *Z* i *Z'* prikazani su slikom 5.74.



Slika 5.74. Prikaz Zemljine sfere i nebeske sfere horizonstskog koordinatnog sustava

Definirane su koordinate horizontskog sfernog koordinatnog sustava, naredbom *Slider*, gdje je odabran kut te za astronomski azimut (*A*) horizontalni kut u intervalu od 0° do 360° . Istom naredbom definiran je vertikalni kut u intervalu od 0° do 90° nazvan *z_{daljina}*.

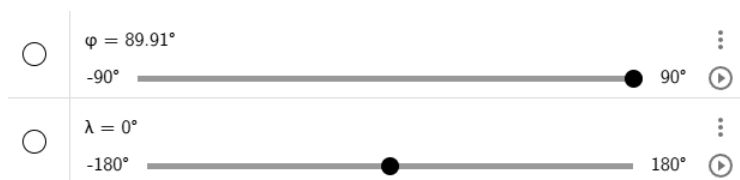
Slikom 5.75 prikazani su elementi koji definiraju položaj nebeskog tijela na sferi horizontskog koordinatnog sustava (elementu *Sfera_{SKS}*).

○	$\Sigma_A = (x(O) + r_{SKS} \cos(A), y(O) - r_{SKS} \sin(A), z(S))$ $= (-3.42, -2.07, 4.46)$	⋮
○	RavninaVertikala : Plane(Σ_A , zAxis) $= 2.07x - 3.42y = 0$	⋮
○	Vertikal $_{\Sigma}$: IntersectPath(RavninaVertikala, Sfera $_{SKS}$) $= X = (3.71, 2.24, 4.46) + (2.21 \cos(t) + 2.47 \sin(t), 1.34 \cos(t) + 1.49 \sin(t),$	⋮
○	$\Sigma_Z = (x(S), y(S) + r_{SKS} \sin(z_{daljina}), z(S) + r_{SKS} \cos(z_{daljina}))$ $= (4.23, 3.95, 7.53)$	⋮
○	RavninaAlmukantarat : Plane(Σ_Z , XY $_{RAVNINA}$) $= z = 7.53$	⋮
○	Almukantarat : IntersectPath(RavninaAlmukantarat, Sfera $_{SKS}$) $= X = (4.23, 1.38, 7.53) + (2.57 \sin(t), 2.57 \cos(t), 0)$	⋮
○	$\Sigma = \text{Intersect}(\text{Almukantarat}, \text{Vertikal}_{\Sigma}, 1)$ $= (1.69, 1.02, 7.53)$	⋮
○	ZenitnaDaljina = Angle(Σ , S, Z) $= 84.43^\circ$	⋮

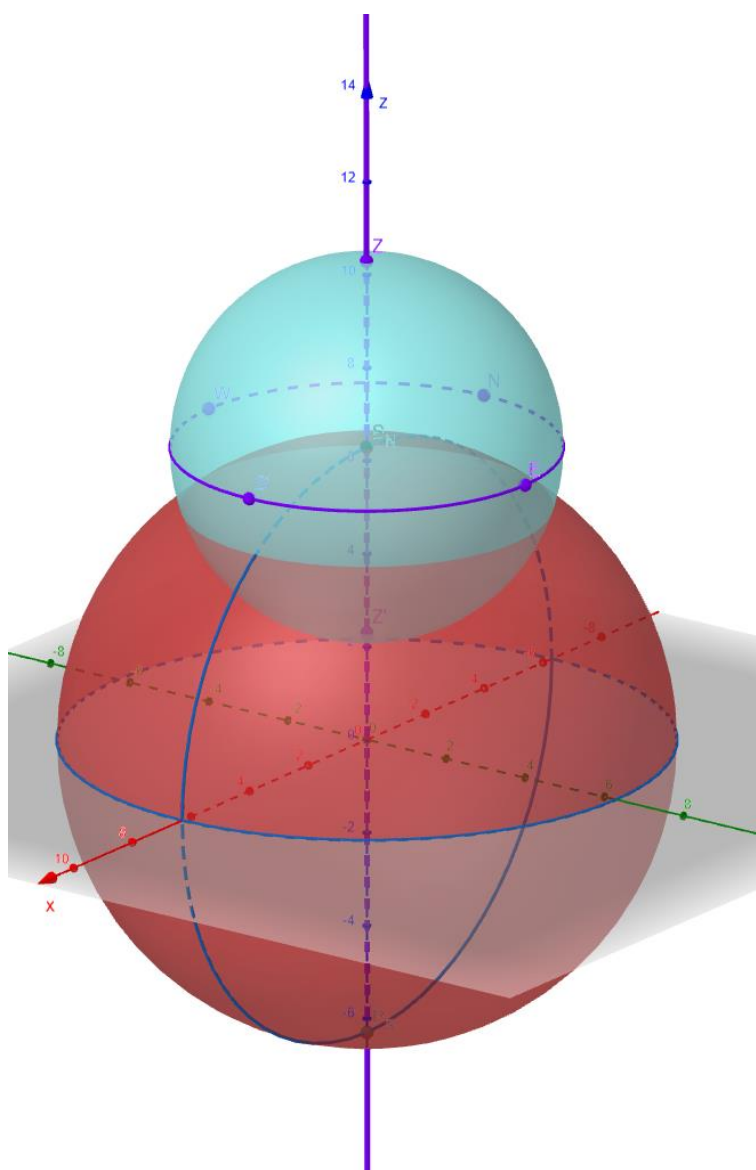
Slika 5.75. Definirajući elementi nebeskog tijela

Kut astronomskog azimuta kreće se u ravnini horizonta odnosno duž kružnice nebeskog horizonta (*NebeskiHrozont*) od južne točka obzora (S) u smjeru dnevnog gibanja nebeskih tijela, odnosno u smjeru zapada. Naime parametarska jednadžba točke koja bi se kretala duž kružnice nebeskog horizonta (i kružnice astronomskog mjesnog meridijana za koordinatu zenitne daljine) vrlo je zahtjevena, zbog činjenice da se mora uzeti u obzir kretanje točke duž *Sfera $_{SKS}$* (oko točke S). Činjenica da je uspostavljen sustav tako da se istom mijenja orijentacija i položaj otežava uspostavu koordinata astronomskog azimuta i zenitne daljine te je izabran alternativan pristup. Ukoliko se želi omogućiti točna promjena koordinata sfernog horizontskog koordinatnog sustava točka motritelja (S) mora se postaviti u točku sjevernog nebeskog pola (P_N), odnosno elipsoidna širina mora iznositi približno 90° ($\varphi \approx 90^\circ$), dok elipsoidna dužina mora iznositi približno 0° ($\lambda \approx 90^\circ$) (slika 5.76). Na ovaj način uspostavljena je pravilna orijentacija koordinatnog sustava kojom se bitno olakšavaju parametarska jednadžbe koje definiraju položaj nebeskog tijela na elementu *Sfera $_{SKS}$* . Slika 5.77 prikazuje 3D sučelje alata *GeoGebra®* gdje je sferni horizontski koordinatni sustav postavljen u sjevernog nebeskog pola (P_N). Napominje se kako elipsoidna širina točke S ne smije iznositi strogo 90° već je nužno da bude približno tom iznosu, u suprotnome nije moguća definicija ravnine nebeskog horizonta, jer je ista definirana elementima *Tangenta $_{SM}$* i *Tangenta $_{SP}$* . Naime element *Tangenta $_{SP}$*

nepostojeća je prilikom iznosa koordinata elipsoidne širine $\varphi = 90^\circ$ zbog ne postoji paralela točke S (element $Paralela_S$). Općenito prilikom iznosa elipsoidne širine od 90° paralela na plohi Zemljine sfere (Zemljinog elipsoida) nije definirala jer se radi o točki sjevernog nebeskog pol.



Slika 5.76 Prikaz koordinata točke S kako bi se omogućilo pravilna upotreba koordinata sfernog horizontskog koordinatnog sustava



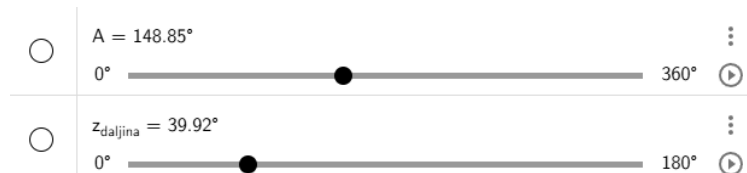
Slika 5.77. Prikaz pravilnog položaja nebeskog sfernog horizontskog sustava za opažanje koordinata istog

Izrazi (5.24) i (5.25), predstavljaju parametarske jednačbe kojima su definirane točke položaja nebeskog tijela na kružnici nebeskog horizonta i kružnici astronomskog mjesnog meridijana.

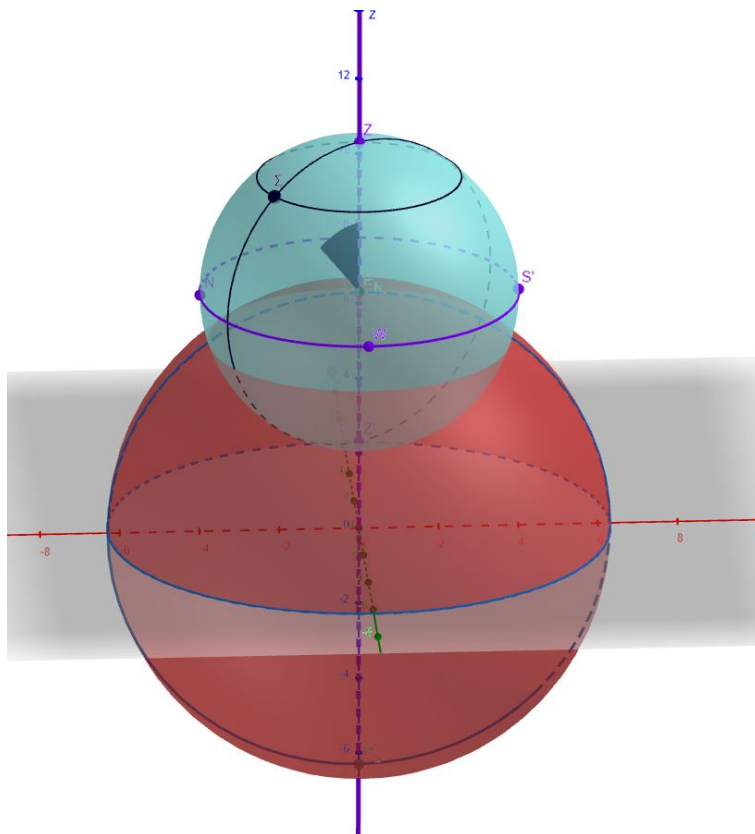
$$(x(O) + r_{SKS} \cos A, y(O) - r_{SKS} \sin A, z(S)) \quad (5.24)$$

$$(x(S), y(S) + r_{SKS} \sin z_{daljina}, z(S) + r_{SKS} \cos z_{daljina}) \quad (5.25)$$

Izraz (5.24) definira element Σ_A , odnosno točku koja se promjenom kuta astronomskog azimuta kreće duž kružnice nebeskog horizonta (*NebeskiHorizont*), od južne točke obzora u smjeru dnevnog gibanja nebeskih tijela. Izrazom (5.25) definiran je element Σ_Z , točka na kružnici astronomskog mjesnog meridijana, koja s promjenom koordinate $z_{daljina}$ mijenja svoj položaj duž iste. Naredbom *Plane* definirane su ravnine *RavninaVertikala* i *RavninaAlmukantarat* pomoću elemenata Σ_A i z-osi (za definiranje elementa *RavninaVertikala*) te elemenata Σ_Z i $XY_{RAVNINA}$ (za definiranje elementa *RavninaAlmukantarat*). Navedene ravnine omogućuju izradu kružnice mjesnog vertikala i kružnice nebeskog tijela Σ . Pomoćne kružnice uspostavljene su naredbom *IntersectPath* te odabirom elementa *SferaSKS* i elementa *RavninaVertikala* kojima je definirana kružnica mjesnog vertikala nebeskog tijela Σ nazvana *Vertikal Σ* . Pomoćna kružnica almukantarat također je definirana naredbom *IntersectPath*, odnosno presjekom elemenata *SferaSKS* i *RavninaAlmukantarat*. Konačno definiranjem presjeka elemenata *Almukantarat* i *Vertikal Σ* definiran je položaj nebeskog tijela. Kut zenitne daljine označen je na crteži zbog boljeg prostornog razumijevanja istog, naredbom *Angle* uz pomoć elemenata Σ (jedan krak kuta), S (vrh kuta), Z (drugi krak kuta). Primjenom navdene naredbe nije moguće definirati kut astronomskog azimuta jer se navedeni kreće u intervalu od 0° do 360°, dok alat *GeoGebra*® omogućuje crtanje kutova u intervalima od 0° do 180° ili od 180° do 360°. Primjera radi odabran je astronomski azimut (A) vrijedosti 150°, te zenitna daljina ($z_{daljina}$) vrijednosti 48° (slika 5.78), te je slikom 5.79 dan prikaz 3D sučelja.



Slika 5.78. Prikaz definiranih koordinata horizontskog sfernog koordinatnog sustava



Slika 5.79. Prikaz položaja nebeskog tijela na nebeskoj sferi

Navedenom 3D modelu moguće je pristupiti klikom na: [Horizontski koordinatni sustav](#)

Također pristup je omogućen putem QR koda (slika 5.80):



Slika 5.80: QR kod modela nebeskog horizonstskog koordinatnog sustava

5.4.2 Nebeski ekvatorski koordinatni sustav

Teorijska osnova nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava obrazložena je u poglavlju 4.3 U ovom poglavlju prikazan je proces izrade 3D modela nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava. Elementi s kojima je započela izrada ovog 3D modela prikazani su slikom 5.81.

	$O = (0, 0, 0)$	
	$r_{SKS} = 6.6$ 5 15	
	$Sfera_{SKS} : \frac{x^2}{r_{SKS}^2} + \frac{y^2}{r_{SKS}^2} + \frac{z^2}{r_{SKS}^2} = 1$	
	$N = \text{Intersect}(xAxis, Sfera_{SKS}, 2)$ $= (6.6, 0, 0)$	
	$W = \text{Intersect}(yAxis, Sfera_{SKS}, 2)$ $= (0, 6.6, 0)$	
	$E = \text{Intersect}(xAxis, Sfera_{SKS}, 1)$ $= (-6.6, 0, 0)$	
	$S = \text{Intersect}(yAxis, Sfera_{SKS}, 1)$ $= (0, -6.6, 0)$	
	$Z = \text{Intersect}(zAxis, Sfera_{SKS}, 2)$ $= (0, 0, 6.6)$	
	$Z' = \text{Intersect}(zAxis, Sfera_{SKS}, 1)$ $= (0, 0, -6.6)$	
	$XY_{RAVNINA} : z = 0$	
	$ZX_{RAVNINA} : y = 0$	
	$ZY_{RAVNINA} : x = 0$	
	$NebeskiHorizont : \text{IntersectPath}(XY_{RAVNINA}, Sfera_{SKS})$ $= X = (0, 0, 0) + (6.6 \cos(t), 6.6 \sin(t), 0)$	

Slika 5.81: Prikaz algebarskog sučelja definiranja pomoćnih elemenata i sfere nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava

Kao prvi korak izrade modela definirana je točka ishodišta koordinatnog sustava alata *GeoGebra*® nazvanom točkom O s pripadnim koordinatama $(0, 0, 0)$. Zatim je u obliku klizača u intervalu od 5 do 15 definiran radijus sfernog koordinatnog sustava nazvan r_{SKS} . Izrazom (3.1) gdje je za iznos velike (a) i male (b) poluosi elipsoida iskorišten radijus sfere, odnosno element r_{SKS} , te je time definirana sfera nebeskog koordinatnog sustava nazvana $Sfera_{SKS}$.

Naredbom *Intersect* elemenata x -osi koordinatnog sustava alata *GeoGebra*® i $Sfera_{SKS}$ definirane su dvije točke označene zelenom bojom, od kojih je ona na pozitivnom dijelu x -osi nazvana N (sjeverna točka obzora), dok je ona na negativnom dijelu x -osi nazvana S (južna točka obzora). Također upotrebom naredbe *Intersect* elemenata y -osi i $Sfera_{SKS}$ definirane su dvije točke zelene boje od kojih se jedna nalazi na pozitivnom dijelu y -osi te je nazvana W (zapadna točka obzora), dok točka koja se nalazi na negativnom dijelu y -osi nazvana E (istočna točka obzora). Naredbom *Intersect* elemenata z -osi i $Sfera_{SKS}$ definirana su točke označene zelenom bojom od kojih se jedna nalazi na pozitivnom dijelu z -osi nazvana Z koja definira točku zenita motritelja. Točka na negativnom dijelu z -osi nazvana je Z' odnosno ista označava točku nadira motritelja. Zbog daljnjeg olakšavanja izrade modela izrazima (5.2), (5.1) i (5.13) definirane su ravnine u algebarskome sučelju nazvane: $XY_{RAVNINA}$, $ZX_{RAVNINA}$ i $ZY_{RAVNINA}$.

Kružnica nebeskoga horizonta definirana je naredbom *IntersectPath* elemenata $XY_{RAVNINA}$ i $Sfera_{SKS}$ te u algebarskome sučelju nazvana *NebeskiHorizont*. Slika 5.82 prikazuje sferu nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava, zajedno sa svim ostalim prijašnje definiranim elementima.

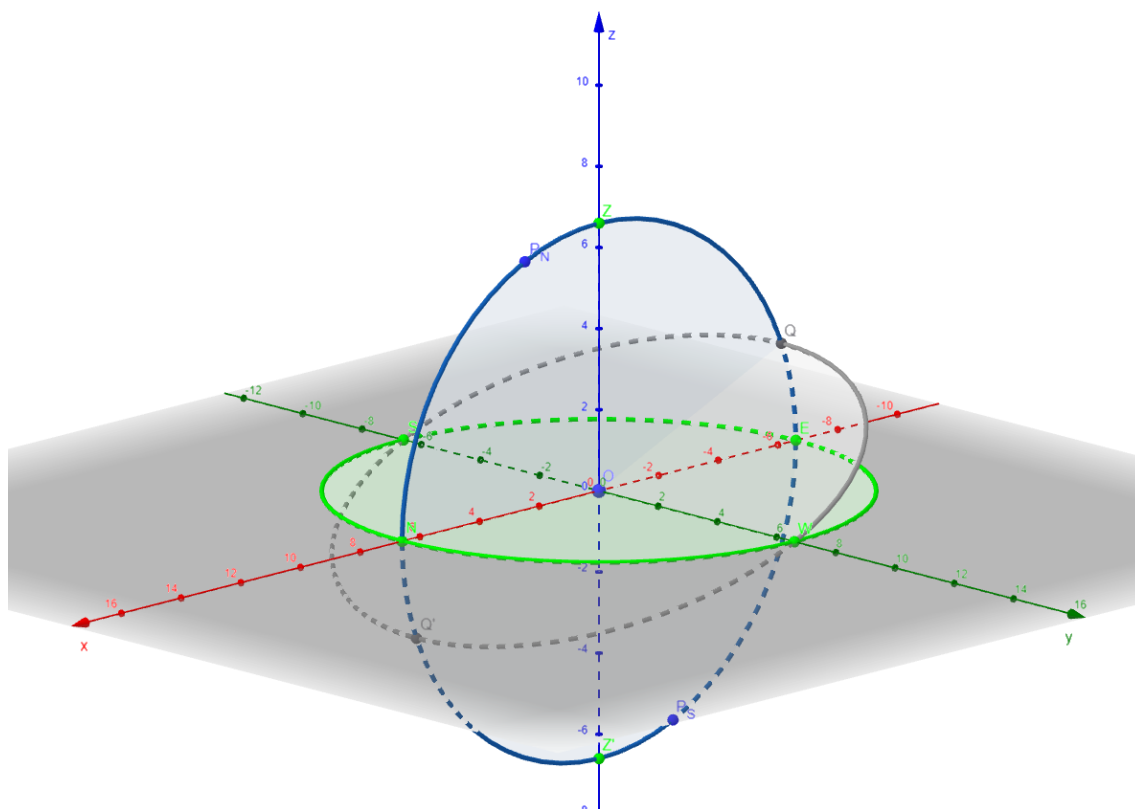
	$\varphi = 67.91^\circ$ -90°  90° 	
	Vertikal : $\text{IntersectPath}(ZX_{\text{RAVNINA}}, \text{Sfera}_{\text{SKS}})$ $= X = (0, 0, 0) + (-6.6 \cos(t), 0, -6.6 \sin(t))$	
	$P_N = (r_{\text{SKS}} \cos(\varphi), 0, r_{\text{SKS}} \sin(\varphi))$ $= (2.48, 0, 6.12)$	
	SvjetskaOs : $\text{Line}(P_N, O)$ $= X = (2.48, 0, 6.12) + \lambda (-2.48, 0, -6.12)$	
	RavninaSvjetskaOs : $\text{Plane}(W, \text{SvjetskaOs})$ $= 40.36x - 16.38z = 0$	
	PravacEkvatora : $\text{PerpendicularLine}(O, \text{RavninaSvjetskaOs})$ $= X = (0, 0, 0) + \lambda (40.36, 0, -16.38)$	
	RavninaEkvatora : $\text{Plane}(S, \text{PravacEkvatora})$ $= -108.13x - 266.39z = 0$	
	$P_S = \text{Intersect}(\text{SvjetskaOs}, \text{Sfera}_{\text{SKS}}, 2)$ $= (-2.48, 0, -6.12)$	
	$Q = \text{Intersect}(\text{PravacEkvatora}, \text{Sfera}_{\text{SKS}}, 1)$ $= (-6.12, 0, 2.48)$	
	$Q' = \text{Intersect}(\text{PravacEkvatora}, \text{Sfera}_{\text{SKS}}, 2)$ $= (6.12, 0, -2.48)$	
	NenebskiEkvator : $\text{IntersectPath}(\text{RavninaEkvatora}, \text{Sfera}_{\text{SKS}})$ $= X = (0, 0, 0) + (6.12 \sin(t), 6.6 \cos(t), -2.48 \sin(t))$	

Slika 5.83: Definirajući elementi za uspostavu odnosa nebeskog ekvatora i nebeskog horizonta

Jedan od ciljeva ovog modela jest omogućavanje prikaza međusobnog odnosa kružnice nebeskog obzora te kružnice nebeskog ekvatora na nebeskoj sferi. Navedeno je omogućeno definiranjem kuta koji predstavlja elipsoidnu širinu (φ) na kojoj se nalazi motritelj. Naime elipsoidna širina motritelja definira kutni odnos ravnine obzora motritelja i ravnine nebeskog ekvatora. Nalazi li se motritelj na sjevernom ($\varphi = 90^\circ$) ili južnom ($\varphi = -90^\circ$) Zemljinom polu ravnina nebeskog ekvatora i ravnina obzora bit će paralele, nalazi li se motritelj na Zemljinom ekvatoru, ravnina nebeskog ekvatora bit će okomita na ravninu nebeskog horizonta. Naredbom *Slider* definiran je klizač koji predstavlja kut elipsoidne širine u algebarskome sučelju nazvan φ s pripadnim intervalom -90° do 90° koji predstavlja položaj motritelja na meridijanu. Naredbom *IntersectPath* elemenata $\text{Sfera}_{\text{SKS}}$ i ZX_{RAVNINA} definirana je kružnica astronomskog mjesnog meridijana koja je u algebarskome sučelju nazvana *Vertikal*. Izrazom (5.26) definirana je točka sjevernog nebeskog pola u algebarskome sučelju nazvanom P_N .

$$(r_{SKS} \cos \varphi, 0, r_{SKS} \sin \varphi) \quad (5.26)$$

Naredbom *Line* definiran je pravac koji prolazi elementima P_N i O u algebarskome sučelju nazvan *SvjetskaOs*. Naredbom *Plane* definirana je ravnina u algebarskome sučelju nazvana *RavninaSvjetskaOs*, elementima W i *SvjetskaOs*. Element *RavnianSvjetskaOs* predstavlja ravninu svjetske osi kojom je omogućena uspostava pravca nebeskog ekvatora koji definira najvišu (Q) i najnižu točku ekvatora (Q'). Naime pravac nebeskog ekvatora pravac je okomit na element *SvjetskaOs* koji se nalazi u ravnini elementa ekliptike, time je primijenjena funkcija *PerpendicularLine* odabiranjem elemenata O (pravac Q' prolazi ishodištem sustava) *RavninaSvjetskaOs* (pravac Q' okomit je na ravninu svjetske osi) definiran element *PravacEkvatora*. Slijedi definiranje ravnine nebeskog ekvatora, u algebarskome sučelju nazvanom *RavninaEkvatora* naredbom *Plane* elementima S (istočna točka obzora) i *PravacEkvatora*. Naredba *Intersect* elemenata *PravacEkvatora* i *Sfera_{SKS}* omogućuje definiciju točaka Q i Q' . Također je element južnog nebeskog pola P_S definiran istom naredbom *Intersect* elemenata *PravacSvjetskaOs* i *Sfera_{SKS}*. Konačno presjekom ravnine nebeskog ekvatora (*RavninaEkvatora*) i nebeske sfere (*Sfera_{SKS}*) definirana je naredbom *IntersectPath* kružnica nebeskog ekvatora (*NebeskiEkvator*). Rezultati navedenih elemenata prikazani su slikom 5.84.



Slika 5.84: Prikaz odnosa nebeskog horizonta i nebeskog ekvatora u 3D sučelju

Usljedila je izrada kružnice ekliptike. Na nebeskoj sferi navedena kružnica ima tri specifične, po položaju poznate točke kojim je definirana, proljetnu točku ekvinoncija (Υ), jesensku točku ekvinoncija (Ω) i točka na astronomskom mjesnom meridianu koja predstavlja inklinaciju ekliptike. U svrhu izrade ovog modela uzete su proizvoljni položaju proljetne točke i jesenske točke ekvinoncija. Inklinacija ekliptike (ϵ), odnosno njena nagnutost od kružnice nebeskog ekvatora iznosi 23.26° . Slika 5.85 predstavlja algebarsko sučelje kojim je definirana ravnina ekliptike, odnosno kružnica ekliptike na nebeskoj sferi.

	$\varepsilon = 23.26^\circ$	$\vdots$
$\bigcirc$	$u = \text{Vector}(O, Q)$ $= \begin{pmatrix} -6.12 \\ 0 \\ 2.48 \end{pmatrix}$	$\vdots$
$\bigcirc$	$u' = \text{Rotate}(u, -\varepsilon, O, ZX_{\text{RAVNINA}})$ $= \begin{pmatrix} -4.64 \\ 0 \\ 4.7 \end{pmatrix}$	$\vdots$
$\bigcirc$	$P = (x(u'), y(u'), z(u'))$ $= (-4.64, 0, 4.7)$	$\vdots$
$\bigcirc$	$\Upsilon = \text{Point}(\text{NenebskiEkvator})$ $= (-0.94, 6.52, 0.38)$	$\vdots$ D
$\bigcirc$	$\text{Ravnina}_\Upsilon : \text{Plane}(\Upsilon, \text{SvjetskaOs})$ $= 39.89x + 6.67y - 16.19z = 0$	$\vdots$
$\bigcirc$	$JTE = (0.94, -6.52, -0.38)$	$\vdots$
$\bigcirc$	$\text{RavninaEkliptike} : \text{Plane}(\Upsilon, P, JTE)$ $= 61.25x + 5.27y + 60.5z = 0$	$\vdots$
$\bigcirc$	$\text{Ekliptika} : \text{IntersectPath}(\text{RavninaEkliptike}, \text{Sfera}_{\text{SKS}})$ $= X = (0, 0, 0) + (-2.82 \cos(t) + 3.69 \sin(t), -4.98 \cos(t) - 4.32 \sin(t), 3.29 \cos(t) - 3.36 \sin(t))$	$\vdots$

Slika 5.85: Definirajući elementi za uspostavu kružnice ekliptike prikazani u algebarskome sučelju

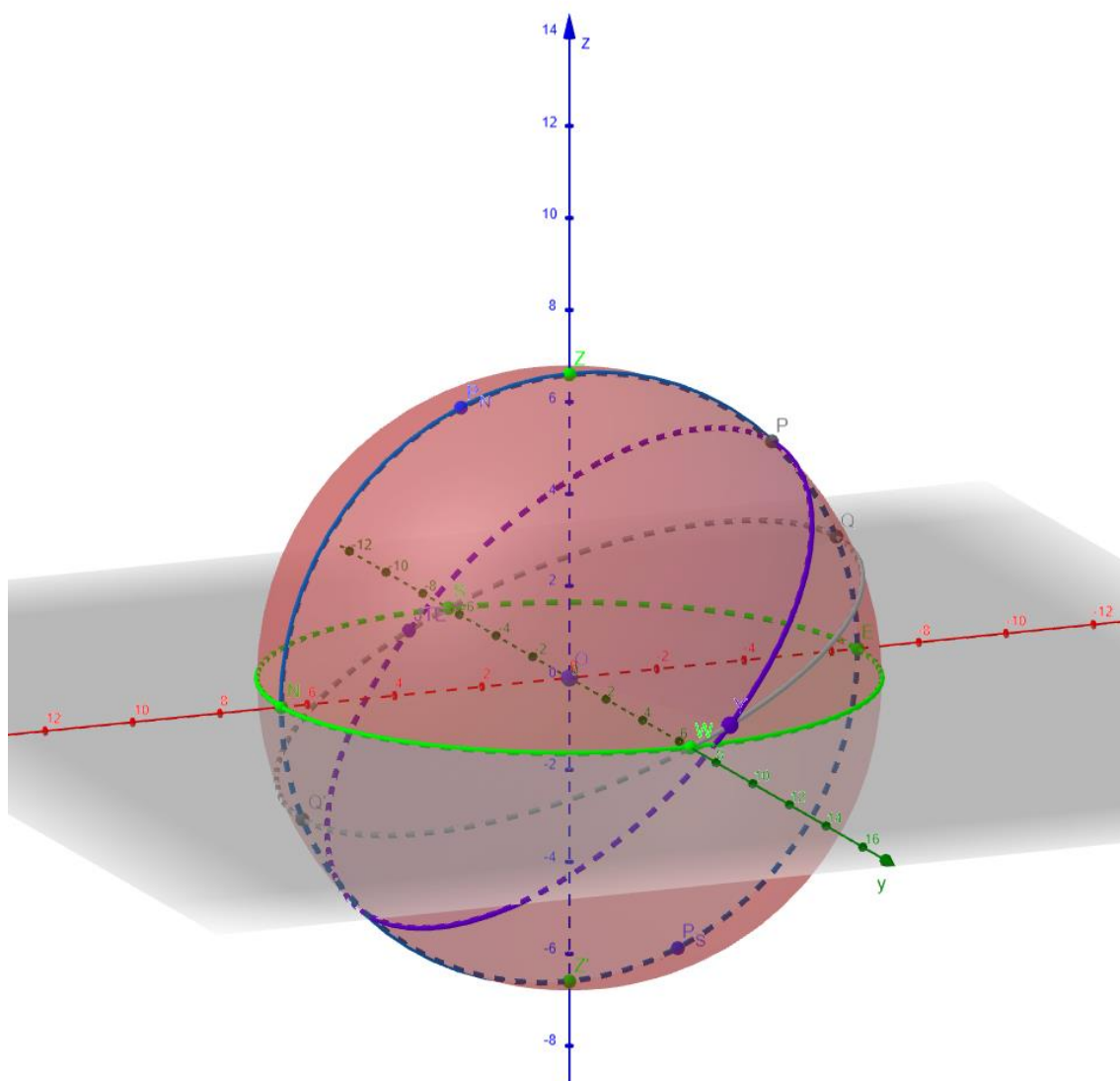
Kao prvi korak definiranja kružnice ekliptike na nebeskoj sferi unesen je kut inklinacije (ε) u iznosu od 23,26°.

Za definiranje elementa P odnosno točke koja definira presjecište ekliptike s mjesnim astronomskim meridijanom (elementom *Vertikal*) upotrijebljen je novi pristup upotrebom naredbe *Rotate* zaobilazeći parametarski pristup koji bi bio znatno složeniji zbog činjenice da ekliptika mora imati konstantan odnos s nebeskim ekvatorom sukladno promjenom položaja (geodetske širine) motritelja duž meridijana. Inicijalno je naredbom *Vector* elemenata O i Q definira element u algebarskome sučelju nazvan u koji se nalazi u ravnini nebeskog ekvatora. Naredbom *Rotate* definiran je vektor u' koji je rotiran oko elementa O za vrijednost zadanog kuta inklinacije (ε) u x-z ravnini koordinatnog sustava alata *GeoGebra*® (element $ZX_{RAVNINA}$). U vrhu vektora u' nalazi se točka u kojoj ekliptika siječe astronomski mjesni meridijan. Navedena točka uspostavljena je izrazom (5.27) te u algebarskome sučelju nazvana P .

$$(x(u'), y(u'), z(u')) \quad (5.27)$$

Ovim postupkom definirana je jedna do tri točke kojima je ekliptika definirana. Slijedi definiranje proljetne točke ekvinoncija (Y), odabiranjem naredbe *Point* te postavljanjem točke na element *NebeskiEkvator* između točke W i točke Q . Ovim načinom odabran je proizvoljan položaj proljetne točke ekvinocija koji približno odgovara njezinom istinitom položaju. Upotrijebljenom naredbom za definiranje točke Y kao rezultat dobiven je klizač odnosno točki je omogućeno kretanje duž kružnice nebeskog ekvatora (elemenata *NebeskiEkvator*), cilj je onemogućiti navedeni klizač tako da u modelu smjer proljetne točke ekvinoncija bude fiksiran u prostoru. Navedeno je omogućeno postavljanjem brzine klizača na vrijednost nula (0), time je onemogućeno kretanje proljetne točke ekvinoncija. Naredbom *Plane* elemenata *SvjetskaOs* i Y definirana je ravnina u algebarskome sučelju nazvana *Ravnina_Y*. Naredbom *Intersect* elemenata *Ravnina_Y* i *NebeskiEkvator* definirana je jesenska točka ekvinoncija u algebarskome sučelju nazvana *JTE*. Ovim proces definirane su dvije nepomične točke na nebeskoj sferi kroz koje prolazi kružnica ekliptike (proljetna i jesenska točka ekvinoncija), te jedna pomična točka ekliptike koja uspostavlja odnos između ravnine ekliptike i ravnine nebeskog ekvatora. Navedenim se omogućilo, promjenom elipsoidne širine motritelja odnos ekliptike i nebeskog ekvatora ostane jednak dok se odnos nebeskog ekvatora i obzora motritelja mijenja. Konačno naredbom *Plane* definirana je ravnina ekliptike u algebarskome sučelju nazvana *RavninaEkliptike* pomoću elemenata Y , *JTE* i P . Kružnica ekliptike na nebeskoj sferi definirana je naredbom *IntersectPath* elemenata *Sfera_{SKS}* i *RavninaEkliptike* u

algebarskome sučelju nazvana *Ekliptika*. Opisani sadržaj izrade ekliptike prikazana je slikom 5.86.



Slika 5.86: Prikaz kružnica: ekliptike, nebeskog horizonta i nebeskog ekvatora u 3D sučelju

Nakon definiranih glavnih kružnica nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava slijedi definiranje položaja nebeskog tijela Σ koordinatama rektascenzije (α) i deklinacije (δ) kojima je moguće manipulirati položaj istog. Slika 5.87 prikazuje sve elemente u algebarskome sučelju koje omogućuju uspostavu navedenog.

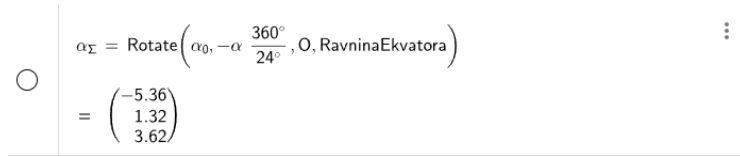
☐	$\alpha = 4.64^\circ$ 0°  24°	⋮
☐	$\delta = 43.69^\circ$ -90°  90°	⋮
☐	$\alpha_0 = \text{Vector}(O, \gamma)$ $= \begin{pmatrix} -0.84 \\ 6.52 \\ 0.57 \end{pmatrix}$	⋮
☐	$\alpha_\Sigma = \text{Rotate}\left(\alpha_0, -\alpha \frac{360^\circ}{24^\circ}, O, \text{RavninaEkvatora}\right)$ $= \begin{pmatrix} -5.36 \\ 1.32 \\ 3.62 \end{pmatrix}$	⋮
☐	$\Sigma_\alpha = (x(\alpha_\Sigma), y(\alpha_\Sigma), z(\alpha_\Sigma))$ $= (-5.36, 1.32, 3.62)$	⋮
☐	$\text{Ravnina}\Sigma_\alpha : \text{Plane}(\Sigma_\alpha, \text{SvjetskaOs})$ $= 7.25x + 42.67y - 4.89z = 0$	⋮
☐	$\delta_0 = \text{Vector}(O, \Sigma_\alpha)$ $= \begin{pmatrix} -5.36 \\ 1.32 \\ 3.62 \end{pmatrix}$	⋮
☐	$\delta_\Sigma = \text{Rotate}(\delta_0, \delta, O, \text{Ravnina}\Sigma_\alpha)$ $= \begin{pmatrix} -1.33 \\ 0.96 \\ 6.39 \end{pmatrix}$	⋮
☒	$\Sigma = (x(\delta_\Sigma), y(\delta_\Sigma), z(\delta_\Sigma))$ $= (-1.33, 0.96, 6.39)$	⋮

Slika 5.87: Uspostava koordinata rektascenzije i deklinacije

Koordinate rektascenzija (α) i deklinacija (δ) definiraju jedinstveni položaj nebeskog tijela u ovome koordinatnom sustavu, time su definirani naredbom *Slider*. Kut rektascenzije (α) definiran je u intervalu od 0° do 24° , kao horizontalni kut. Naime alat *GeoGebra®* ne dozvoljava promjenu postavke za jedinicu pojedinog kuta tijekom izrade modela, već se mora odabrati jedna mjerna jedinica (kutna) koja se koristi u modelu. Time je za mjernu jedinicu kuta odabran stupanj u decimalnome zapisu. Inicijalno koordinata rektascenzije kreće se u intervalu od 0 do 24 sata, ali u ovome slučaju radi ograničenja programskoga sustava izabrana je navedena alternativa. Koordinata deklinacije (δ) definirana je u intervalu od -90° do 90° kao vertikalni kut. Ovime su uspostavljeni klizači kojima korisnik može definirati koordinate u nebeskome ekvatorskome koordinatnome sustavu. Definiran je vektor

α_0 naredbom *Vector* elementima O i Y . Za definiranje položaja koordinata nebeskog tijela (proizvoljno odabranih od strane korisnika), upotrijebljen je novi pristup koji omogućuje promjenu položaja točke duž kružnice koja ne mora biti strogo horizontalna ili vertikalna u prostoru već može biti proizvoljno orijentirana u prostoru što se omogućava naredbom *Rotate* nad određenim vektorima.

Vektor α_0 predstavlja smjer proljetne točke ekvinoxija od koje se u ravnini nebeskog ekvatora kreće koordinata rektascenzije. Naredbom *Rotate* definiran je vektor α_Σ (slika 5.88) rotiranjem vektora α_0 oko elementa O za kut $-\alpha \frac{360^\circ}{24^\circ}$ (pošto je kut α zadan u intervalu od 0° do 24°) u ravnini nebeskog ekvatora. Naredbom *Point* izrazom (5.28) definirane su koordinate točke Σ_α , odnosno položaj točke nebeskog objekta sa korisničkim definiranjem koordinate rektascenzije.



$$\alpha_\Sigma = \text{Rotate}\left(\alpha_0, -\alpha \frac{360^\circ}{24^\circ}, O, \text{RavninaEkvatora}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -5.36 \\ 1.32 \\ 3.62 \end{pmatrix}$$

Slika 5.88: Prikaz zadane naredbe *Rotate* prilikom definiranja vektora α_Σ

$$(x(\alpha_\Sigma), y(\alpha_\Sigma), z(\alpha_\Sigma)) \quad (5.28)$$

Naredbom *Plane* definirana je ravnina u algebarskome sučelju nazvana *RavninaSigma* elementima *SvjetskaOs* i Σ_α . Naime u ovoj ravnini kreće se koordinata deklinacije (δ) nebeskog tijela Σ .

Naredbom *Vector* elementima O i Σ_α definiran je vektor koji označava početni smjer od kojeg se odbrojava koordinata deklinacije nazvan δ_0 . Upotrebom naredbe *Rotate* definiran je vektor δ_Σ kojim se definira položaj nebeskog tijela (Σ) na nebeskoj sferi. Naredbom *Rotate* zadano je da se vektor δ_0 rotira oko točke O u ravnini nazvanoj *RavninaSigma* za vrijednost kuta δ koju korisnik odabire. Naredba *Rotate* za deklinaciju (δ) prikazana je slikom 5.89. Izrazom (5.29) definiran je konačni položaj nebeskog tijela na nebeskoj sferi u algebarskome sučelju nazvana Σ .



$$\delta_\Sigma = \text{Rotate}(\delta_0, \delta, O, \text{RavninaSigma})$$

$$= \begin{pmatrix} -4.92 \\ 4.17 \\ -1.39 \end{pmatrix}$$

Slika 5.89: Prikaz zadane naredben *Rotate* prilikom definiranja vektora δ_Σ

$$(x(\delta_\Sigma), y(\delta_\Sigma), z(\delta_\Sigma)) \quad (5.29)$$

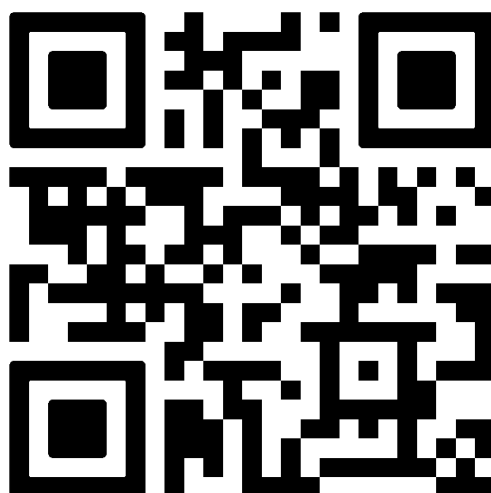
Kao zadnji korak kojim se formira model ovog koordinatnog sustava jest uspostava pomoćnih kružnica, odnosno kružnice nebeske dnevne paralele i rektascenzijskog meridijana. Algebarski prikaz ovih elemenata predložen je slikom 5.90.

☒	RavninaDnevneParalele : $\text{Plane}(\Sigma, \text{RavninaEkvatora})$	$\vdots$
	$= -175.88x - 260.64z = -1476.88$	
☐	NebeskaDnevnaParalela : $\text{IntersectPath}(\text{RavninaDnevneParalele}, \text{Sfera}_{SKS})$	$\vdots$
	$= X = (2.63, 0, 3.89) + (4.08 \sin(t), 4.92 \cos(t), -2.75 \sin(t))$	
☐	RektascenzijskiMeridijan : $\text{IntersectPath}(\text{Ravnina}\Sigma\alpha, \text{Sfera}_{SKS})$	$\vdots$
	$= X = (0, 0, 0) + (6.59 \cos(t) + 1.22 \sin(t), -0.96 \cos(t) - 0.96 \sin(t), 1.35 \cos(t) - 6.62 \sin(t))$	

Slika 5.90: Uspostava pomoćnih kružnica nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava

Ravnina dnevne paralele definirana je naredbom *Plane* označavanjem elemenata Σ i *RavninaEkvatora* koja je u algebarskome sučelju nazvana *RavninaDnevneParalele*. Navedena ravnina paralelna je s ravninom ekvatora (elementom *RavninaEkvatora*) i prolazi elementom Σ . Zatim je definirana nebeska dnevna paralela u algebarskome sučelju nazvana *NebeskaDnevnaParalela*, naredbom *IntersectPath* odabiranjem elemenata *RavninaDnevneParalele* i *Sfera_{SKS}*. Navedeni element definiran je sivom bojom. Kao zadnji element ovog modela definiran je element *RektascenzijskiMeridijan* naredbom *IntersectPath* odabiranjem elemenata *Ravnina $\Sigma\alpha$* i *Sfera_{SKS}*. Dotični element također je označen svijetlo sivom bojom.

Izrađenom modelu nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava moguće je pristupiti putem poveznice [Nebeski ekvatorski koordinatni sustav](#) ili skeniranjem QR koda (slika 5.91):



Slika 5.91: QR kod modela sfernog nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava

5.4.3 Mjesni ekvatorski koordinatni sustav

Teorijska osnova ovog koordinatnog sustava obrazložena je u poglavlju 4.4 ovog rada. Također u ovom poglavlju predstavljen je dio izrade modela mjesnog ekvatorskog koordinatnog sustava, činjenicom da se isti razlikuje samo po koordinatama i koje ne zahtijevaju postojanost ekliptike. Time je sav proces izrade obrazložen u prijašnjem poglavlju rada dok se ovdje nastavlja samo od elemenata koji se razlikuju, odnosno od koordinata mjesnog ekvatorskog koordinatnog sustava.

Slika 5.92 prikazuje algebarsko sučelje gdje su definirane koordinate dotičnog koordinatnog sustava u vidu klizača te je uz pomoć istih definiran položaj nebeskog tijela Σ na nebeskog sferi.

☒	$t = 3.09^\circ$ 0°  24° 	$\vdots$
☒	$\delta = 50.28^\circ$ -90°  90° 	$\vdots$
☐	$t_0 = \text{Vector}(O, Q)$ $= \begin{pmatrix} -5.01 \\ 0 \\ 4.89 \end{pmatrix}$	$\vdots$
☐	$t_\Sigma = \text{Rotate}\left(t_0, t \frac{360^\circ}{24}, O, \text{RavninaEkvatora}\right)$ $= \begin{pmatrix} -3.45 \\ 5.07 \\ 3.37 \end{pmatrix}$	$\vdots$
☐	$\Sigma_t = (x(t_\Sigma), y(t_\Sigma), z(t_\Sigma))$ $= (-3.45, 5.07, 3.37)$	$\vdots$
☐	$\delta_0 = \text{Vector}(O, \Sigma_t)$ $= \begin{pmatrix} -3.45 \\ 5.07 \\ 3.37 \end{pmatrix}$	$\vdots$
☐	$\text{Ravnina}\Sigma_t : \text{Plane}(\Sigma_t, \text{SvjetskaOs})$ $= 25.39x + 33.79y - 24.8z = 0$	$\vdots$
☐	$\delta_\Sigma = \text{Rotate}(\delta_0, \delta, O, \text{Ravnina}\Sigma_t)$ $= \begin{pmatrix} 1.56 \\ 3.24 \\ 6.01 \end{pmatrix}$	$\vdots$
☒	$\Sigma = (x(\delta_\Sigma), y(\delta_\Sigma), z(\delta_\Sigma))$ $= (1.56, 3.24, 6.01)$	$\vdots$
☒	$\text{MeridijanSatnogKuta} : \text{IntersectPath}(\text{Ravnina}\Sigma_t, \text{SferaSKS})$ $= X = (0, 0, 0) + (5.9 \cos(t) - 1.02 \sin(t), -3.59 \cos(t) - 3.59 \sin(t), 1.16 \cos(t) - 5.93 \sin(t))$	$\vdots$
☐	$\text{RavninaNebeskeParalele} : \text{Plane}(\Sigma, \text{RavninaEkvatora})$ $= -239.66x - 245.38z = -1846.72$	$\vdots$
☒	$\text{NebeskaPralela} : \text{IntersectPath}(\text{RavninaNebeskeParalele}, \text{SferaSKS})$ $= X = (3.76, 0, 3.85) + (3.2 \sin(t), 4.47 \cos(t), -3.13 \sin(t))$	$\vdots$
☒	$\alpha = \text{Angle}(\Sigma, O, \Sigma_t)$ $= 50.28^\circ$	$\vdots$

Slika 5.92. Definirajući elementi koordinata mjesnog ekvatorskog koordinatnog sustava

Klizači za koordinate mjesnog ekvatorskog koordinatnog sustava uspostavljeni su uz pomoć naredbe *Slider* gdje je za koordinatu satnog kuta (t) izabrana mjerna jedinica stupanj. Naime zbog ne mogućnosti upotrebe različitih kutnih mjernih jedinica u jednoj aktivnosti, nužna je upotreba stupnjeva. Satni kut (t) time je definiran kao horizontalni kut u interval od 0° do 24° što odgovara intervalu od 0 do 24 sata. Deklinacija (δ) također je definiran kao klizač koji predstavlja vertikalni kut u intervalu od 0° do 90° . Naredbom *Vector* elementima O i Q definiran je vektor u algebarskome sučelju nazvan t_0 koji definira koordinatu satnog kuta iznosa 0 sati. Primjenom naredbe *Rotate*, vektor t_0 rotiran je u ravnini nebeskog ekvatora, oko elementa O za kut t pomnožen omjerom $\frac{360^\circ}{24^\circ}$ ($t \frac{360^\circ}{24^\circ}$) koji kao rezultat daje stvarnu količinu rotacije s obzirom na zadan interval satnog kuta (t). Navedenom naredbom kao rezultat dobiven je vektor u algebarskome sučelju nazvan t_Σ koji definira smjer nebeskog tijela Σ sa korisnički

definiranom koordinatom satnog kuta (t). Navedenim, korištenjem naredbe *Point* izrazom (5.30) definirana je točka u algebarskome sučelju nazvana Σ_t koja definira položaj nebeskog objekta Σ na kružnici nebeskog ekvatora s korisnički zadanom koordinatom satnog kuta (t).

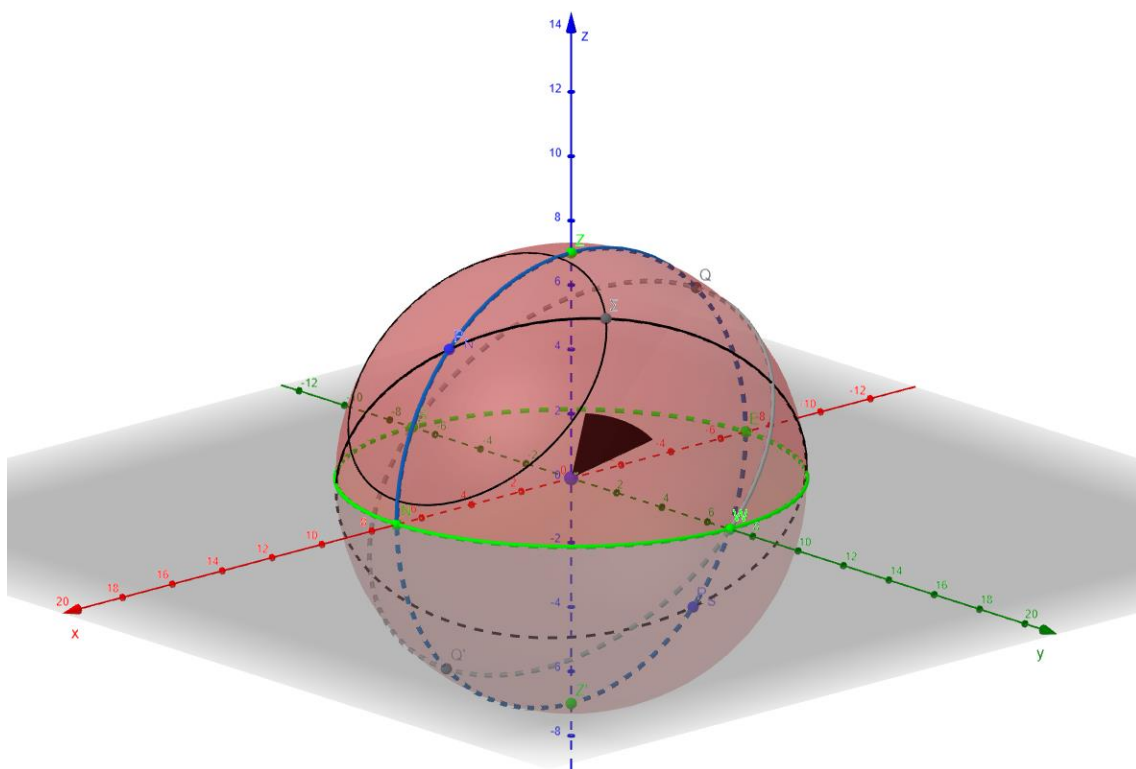
$$(x(t_\Sigma), y(t_\Sigma), z(t_\Sigma)) \quad (5.30)$$

Naredbom *Plane* elementima Σ_t i *SvjetskaOs* definiran je ravnina u algebarskome sučelju nazvana *Ravnina* Σ_t . Spomenuta ravnina nužna je jer se unutar iste kreće koordinata deklinacije, odnosno ona je ravnina meridijana satnog kuta. Naredbom *Vector* elemenata O i Σ_t definiran je vektor u algebarskome sučelju nazvan δ_0 koji definira smjer nebeskog tijela pri koordinati deklinacije iznosa 0° , odnosno pri koordinati satnog kuta (t) postavljenom od strane korisnika pomoću klizača. Upotrebom naredbe *Rotate* vektor δ_0 rotiran oko elementa O za iznos kuta deklinacije (δ), u ravnini meridijana satnog kuta (element *Ravnina* Σ_t). Navedenom naredbom *Rotate* definiran je, u algebarskome sučelju nazvan vektor δ_Σ . Vektor δ_Σ definira smjer nebeskog tijela Σ . Izrazom (5.31) definiran je položaj nebeskog tijela Σ kao točka na nebeskog sferi.

$$(x(\delta_\Sigma), y(\delta_\Sigma), z(\delta_\Sigma)) \quad (5.31)$$

Kao zadnji korak definirane su pomoćne kružnice. Naredbom *IntersectPath* elemenata *Ravnina* Σ_t i *SvjetskaOs* definirana je kružnica na nebeskog sferi koja predstavlja meridijan satnog kuta u algebarskome sučelju nazvana *MeridijanSatnogKuta*. Naredbom *Plane* elementima Σ i *RavninaEkvatora* definirana je ravnina paralelna sa ravninom nebeskog ekvatora, koja prolazi točkom nebeskog objekta na nebeskoj sferi. Naredbom *IntersectPath* elementima *RavninaNebeskeParalele* i *Sfera* $_{SKS}$ definirana je pomoćna kružnica nebeske paralela u algebarskome sučelju nazvana *NebeskaParalela*.

Slika 5.93 prikazuje konačni model mjesnog nebeskog ekvatora zajedno s svim elementima. Položaj nebeskog tijela definiran je sa pripadnim mu koordinatama gdje je satni kut (t) postavljenim na iznosa od 3 sata (na klizaču 3°) te deklinacije (δ) definiranog iznosa od 50° . Kao iznos elipsoidne širine na kojoj se motritelj nalazi postavljen je iznos od 45° .



Slika 5.93. Prikaz mjesnog ekvatorskog koordinatnog sustava

Ovom modelu moguće je pristupiti putem poveznice [Mjesni ekvatorski koordinatni sustav](#) ili skeniranjem QR koda:



Slika 5.94: QR kod modela nebeskog mjesnog ekvatorskog koordinatnog sustava

6. DISKUSIJA I ZAKLJUČAK

Na temelju provedenog rada može se zaključiti da je alata *GeoGebra*® imao važnu ulogu u boljem razumijevanju i savladavanju pojmova elipsoidne geodezije i geodetske astronomije.

U ovom poglavlju predstavljena je SWOT analiza (tablica 6.1) alata *GeoGebra*®, koja se sastoji od četiri element: snage (eng. *Strengths*), slabosti (eng. *Weaknesses*), prilike (eng. *Opportunities*) i prijetnje (eng. *Threats*)

Tablica 6.1: SWOT analiza alata *GeoGebra*®

Snaga (eng. <i>Strengths</i>)	
S1	Politika otvorenih podataka
S2	Velika zajednica korisnika i resursa
S3	Dinamički i interaktivni prikaz matematičkih objekata
S4	Besplatni modeli za svladavanje gradiva
S5	Unaprjeđenje znanosti
S6	Korištenje aplikacije Internet preglednikom
Slabosti (eng. <i>Weaknesses</i>)	
W1	Loše performanse aplikacije
W2	Ograničenost alata
Prilike (eng. <i>Opportunities</i>)	
O1	Digitalizacija obrazovanja
O2	Veća integracija sa drugim sustavima obrazovanja
Prijetnje (eng. <i>Threats</i>)	
T1	Nedostatak profesionalne upotrebe

Dinamičko i interaktivno 3D okruženje omogućilo je jednostavnije povezivanje matematičkih izraza s njihovim geometrijskim prikazom (S3), čime je ostvarena jasnija vizualizacija gradiva i time pojednostavljenost učenja. Poseban doprinos rada očituje se u razvoju modela koji omogućuju manipulaciju parametrima i time automatsku promjenu geometrijskih svojstava, što dodatno olakšava razumijevanje spomenutih matematičkih izraza. Time je potvrđeno da interaktivna vizualizacija ima značajnu ulogu u obrazovnom procesu.

Također važan rezultat ovog rada jest spoznaja vezana uz problematiku polumjera zakrivljenosti prvog vertikala na rotacijskom elipsoidu. Postupkom povećavanja spljoštenosti (s ciljem boljeg geometrijskog prikaza osobina polumjera zakrivljenosti prvog vertikala) uočeno je da polumjer zakrivljenosti prvog vertikala iste točke, kada se definira numerički nije jednak s onim koji je definiran grafički. Ova činjenica otvara prostor za daljnje rasprave i istraživanja te iako ista nije bila primarni cilj ovog rada, ukazuje da se s alatom GeoGebra može doći do novih spoznaja koje nisu izvorno bile planirane. Ovime se dodatno odražava potencijal alata ne samo u obrazovanju već i u znanstvenim istraživanjima. U budućem radu prepoznaje se potencijal daljnjeg istraživanja kolegija poput „Državne izmjere“ i „Geodetski referentni okviri“ kroz ovaj alat. Time se otvara prostor za dodatna eksperimentiranja i širu primjenu istog u obrazovanju i znanstvenim istraživanjima, ali i za potencijalno unapređenje samog kroz povratne informacije korisnika.

Međutim tijekom izrade modela uočeni su i nedostaci alata *GeoGebra*®. Najizraženiji problem odnosio se na nemogućnost definiranja kutova u intervalu od 0° do 360° te ne mogućnost postavljanja kutova na plohama drugog reda, specifično na rotacijskom elipsoidu (W2). Ova ograničenja otežala su vjerodostojni prikaz fundamentalnih elementima izrađenih modela poput geodetske dužine, satnog kuta i azimuta. Osim toga, u pojedinim fazama modeliranja javljale su se slabije performanse sustava koje se očituju kroz usporen rad i povremene padove alata (W1), što je otežavalo kontinuiran rad i zahtijevalo dodatno vrijeme za ponavljanje postupka. U određenim trenucima dodatne poteškoće uzrokovale su otežavanje preglednosti modela kada se broj elemenata povećao. Svi navedeni nedostaci, s ciljem poboljšanja samog alata poslani su tehničkom timu alata *GeoGebra*®.

Bitan pozitivan čimbenik je mogućnost jednostavnog i brzog pristupa što je omogućeno Internet preglednikom, također alat *GeoGebra*® nudi opcije preuzimanja na Windows, macOS, Linux, Android i iOS sustave, no naglašava se brz i jednostavan pristup Internet preglednikom (S6). Pristupom u alat odmah su vidljivi radovi brojnih kreatora koji iz dana u dan, politikom otvorenih podataka alata (S1) unapređuju isti te time, studenti i učenici imaju mogućnost

besplatnog usavršavanja gradiva (S4). Ovom politikom *GeoGebra*® privlači širok spektar korisnika koji izrađuju samostalne modele što rezultira velikom zajednicom korisnika i resursa (S2) kojima se u konačnici unapređuje znanost (S5).

Napretkom tehnologije očekuje se veća i šira upotreba ovog programa u obrazovanju, odnosno sveopćom digitalizacijom, digitalizira se i obrazovanje (O1), što studentima i učenicima omogućuje lakše i brže savladavanje gradiva. Ova činjenica posebno se očituje ovim radom. Također prilika ovog programa je u integraciji s drugim sličnim programima, odnosno s programima obrazovanja (O2). Takva integracija u nekoj mjeri je i iskorištena primjerom mogućnosti objave modela na Google aplikacija poput Google Classroom,

Kao prijetnje programa do izražaja dolazi nedostatak profesionalne upotrebe (T1), što dugoročno može naškoditi ovom programu.

ZAHVALA

Zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc. Marku Pavasoviću na ukazanoj prilici, svim stručnim savjetima, pomoći i podršci tijekom izrade rada. Posebno zahvaljujem na ukazanom povjerenju i izdvojenom vremenu prilikom pomoći u izradi rada.

Zahvaljujem se asistentima Tediju Bankvoiću, mag. ing. geod. et geoinf. i Antoniju Banku, mag. ing. geod. et geoinf. na pomoći tijekom izrade modela u alatu *GeoGebra*® te na svim stručnim savjetima, mišljenjima i prijedlozima prilikom izrade rada.

Također se zahvaljujem obitelji, djevojci Sari i kolegi Stjepanu na podršci tijekom pisanja rada i studiranja.

LITERATURA

- Banković, T.; Dubrović, M.; Banko, A.; & Pavasović, M. (2024): Detail Explanation of Coordinate Transformation Procedures Used in Geodesy and Geoinformatics on the Example of the Territory of the Republic of Croatia. *Applied Sciences*, 14(3), 1067., <https://doi.org/10.3390/app14031067>
- Čubranić, N. (1974): Viša geodezija: II. dio. Tehnička knjiga, Zagreb.
- Deakin, R. E. & Hunter, M. N. (2013): Geometric Geodesy – Part A. School of Mathematical & Geospatial Sciences, Royal Melbourne Institute of Technology (RMIT).
- Deakin, R. E. & Hunter, M. N. (2010): Geometric Geodesy – Part B. School of Mathematical & Geospatial Sciences, Royal Melbourne Institute of Technology (RMIT).
- Deakin, R. E. (2006): A note on the Bursa–Wolf and Molodensky–Badekas transformations. School of Mathematical & Geospatial Sciences, Royal Melbourne Institute of Technology
- Hohenwarter, M., Jarvis, D., & Lavicza, Z. (2009): Linking geometry, algebra, and mathematics teachers: GeoGebra software and the establishment of the International GeoGebra Institute. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 16(2), 83–87.
- Hooijberg, M. (2008): Geometrical Geodesy using Information and Computer Technology. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Jekeli, C. (2016): Geometric Reference Systems in Geodesy. Division of Geodetic Science School of Earth Sciences, Ohio State University.
- Muminagić, A. (1987): Viša geodezija II. Građevinski fakultet Sarajevo/Naučna knjiga, Beograd.
- Orlić, M. (2001): Geofizika. Geofizika, vol. 18-19, 2001-2002.
- Pavasović, M. (2025): Predavanja iz kolegija "Državna izmjera". Sveučilište u Zagrebu - Geodetski fakultet, Zagreb.
- Plag, H.-P., Beutler, G., Gross, R., Herring, T. A., Rizos, C., Rummel, R., Sahagian D., Zumberge J. (2009a): Introduction Chapter. Global Geodetic Observing System Meeting the Requirements of a Global Society on a Changing Planet in 2020. Eds. H.-P. Plag, M. Perlman. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978- 3-642-02687-4. pp. 1-13, doi: 10.1007/978-3-642-02687-4_1.

Rapp, R. H. (1991): Geometric Geodesy – Part I. The Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying, Columbus, Ohio.

Rummel, R. & Peters, T. (2001): Reference Systems in Satellite Geodesy. Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie Technische Universität München.

Soffel, M. & Langhas, R. (2013): Space-Time Reference Systems. Springer Heidelberg New York Dordrecht London.

Špoljarić, D. (2021): Predavanja iz kolegija „Geodetska astronomija“. Sveučilište u Zagrebu - Geodetski fakultet, Zagreb

Torge, W. & Müller, J. (2012): Geodesy (4th Edition). Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston.

Torge, W. (2001): Geodesy 3rd edition. Walter de Gruyter, Berlin, New York.

Mrežne adrese

URL 1: IUGG

<https://iugg.org/>

(18. 08. 2025.).

URL 2: Orion Bear Astronomy

<https://orionbearastronomy.com/2019/02/05/using-the-celestial-coordinates/>

(24. 08. 2025.).

POPIS SLIKA

Slika 3.1: Geodetski (elipsoidni) i Kartezijev pravokutni 3D koordinatni sustavi elipsoida (Pavasović, 2025).....	7
Slika 3.2: Tangencijalna ravnina u točki Q elipsoida (Pavasović, 2025).....	8
Slika 3.3: Ravnina prvog vertikala (žuto) i prvi vertikal (sivo) (Pavasović, 2025)	11
Slika 3.4: Meridijanska elipsa točke P na fizičkoj površini Zemlje, odnosno točke Q na elipsoidu (Pavasović, 2025; Deakin i Hunter, 2013).....	12
Slika 3.5: Tlocrtni prikaz ekvatorske kružnice (Pavasović, 2025; Deakin i Hunter, 2013).....	12
Slika 3.6: Geodetska, reducirana i geocentrična širina na elipsoidu (Pavasović, 2025; Deakin i Hunter, 2013)	13
Slika 3.7: Dvojnost normalnih presjeka na plohi rotacijskog elipsoida (Pavasović, 2025).....	14
Slika 3.8: Geodetska linija između točaka Q1 i Q2 na elipsoidu (zeleno) (Pavasović, 2025). 15	
Slika 3.9: Pravilo desne (lijevo) i pravilo lijeve ruke (desno) za Kartezijev pravokutni 3D koordinatni sustav (Pavasović, 2025).....	17
Slika 3.10: Pravilo desne (lijevo) i pravilo lijeve ruke (desno) za rotacije (Pavasović, 2025) 18	
Slika 3.11: PVT konvencija rotacije (lijevo) i CFR konvencija rotacije (desno) (Pavasović, 2025).....	19
Slika 3.12: Rotacija oko X–osi prema PVT konvenciji (Pavasović, 2025).....	20
Slika 3.13: Rotacija oko X–osi prema CFR konvenciji (Pavasović, 2025).....	22
Slika 4.1: Nebeska sfera (URL 2)	24
Slika 4.2: Osnovni elementi nebeske sfere (Špoljarić, 2021).....	26
Slika 4.3: Horizontski koordinatni sustav (Špoljarić, 2021)	29
Slika 4.4: Nebeski ekvatorski koordinatni sustav (Špoljarić, 2021)	30
Slika 4.5: Mjesni ekvatorski koordinatni sustav (Špoljarić, 2021)	31
Slika 5.1: Opcije alata GeoGebra®	33
Slika 5.2: Algebarsko sučelje	33
Slika 5.3: 3D sučelje.....	34

Slika 5.4: Sučelje s postavkama	34
Slika 5.5. Definirajući elementi plohe rotacijskog elipsoida, početnog meridijana i ekvatora	35
Slika 5.6: Prikaz rotacijskog elipsoida zajedno sa referentnim meridijanom i ekvatorom	37
Slika 5.7: Uspostava klizača geodetskih (elipsoidnih) koordinata.....	38
Slika 5.8: Elementi za uspostavu točaka na rotacijskom elipsoidu.....	38
Slika 5.9: Prikaz točaka $Q1$ i $Q2$ na rotacijskom elipsoidu.....	40
Slika 5.10: Definirajući elementi tangencijalnih ravnina i normala točaka $Q1$ i $Q2$	41
Slika 5.11: Prikaz tangente točke $Q1$ i tangente točke $Q2$	42
Slika 5.12: Definirajući elementi za polumjer zakrivljenosti prvog vertikala točaka $Q1$ i $Q2$ i pojave dvojnosti normalnih presjeka na rotacijskom elipsoidu	43
Slika 5.13: Prikaz pojave dvojnosti normalnih presjeka i polumjera zakrivljenosti točaka $Q1$ i $Q2$	45
Slika 5.14: Prikaz koordinata točaka $Q1$ i $Q2$ unutar algebarskog sučelja	46
Slika 5.15: Definirajući elementi numeričkih vrijednosti polumjera zakrivljenosti točaka $Q1$ i $Q2$, osnovnih parametara elipsoida i točaka $DQ1$ i $DQ2$	47
Slika 5.16: Prikaz polumjera zakrivljenosti točke $Q1$ ($N1$) koji se poistovjećuje sa polarnim polumjerom elipsoida (c)	49
Slika 5.17: Algebarsko sučelje gdje se prikazuje poistovjećenost polumjera zakrivljenosti točke $Q1$ ($N1$) sa polarnim polumjerom elipsoida (c)	50
Slika 5.18: Definirajući elementi koeficijenta smjera pravca tangente točaka $Q1$ i $Q2$	51
Slika 5.19: Koeficijent smjera pravca tangente točaka $Q1$ (α) i $Q2$ (β).....	52
Slika 5.20: Definirajući elementi polumjera zakrivljenosti meridijanskih elipsi točaka $Q1$ i $Q2$	53
Slika 5.21: Polumjeri zakrivljenosti meridijanskih elipsi točkaka $Q1$ i $Q2$	56
Slika 5.22: Odnos geometrijski i numeričko definiranih polumjera zakrivljenosti prvih vertikala točaka $Q1$ i $Q2$	57
Slika 5.23: Odnos vrijednosti numeričko i grafičko definiranih polumjera zakrivljenosti prvih vertikala točaka $Q1$ i $Q2$	58

Slika 5.24: Elementi algebarskog sučelja kojima je dokazana geodetska linija	59
Slika 5.25: Prikaz dokaza geodetskih linija u 3D sučelju	61
Slika 5.26: Pomoćni elementi za prikaz koordinata elipsoidne širine, geocentrične širine i reducirane širine točaka $Q1$ i $Q2$	62
Slika 5.27:Definirajući elementi koordinata elipsoidne širine, geocentrične širine i reducirane širine točaka $Q1$ i $Q2$	62
Slika 5.28: Prikaz geocentrične širine točke $Q2$ (kut $\varphi Q2'$) i reducirane širine točke $Q1$ (kut $uQ1$).	64
Slika 5.29: QR kod modela rotacijskog elipsoida	64
Slika 5.30: Prikaz defilirajućih elemenata koordinatnog sustava alata GeoGebra.....	65
Slika 5.31: Elementi xos , yos , zos , rP s točkom PP u 3D sučelju alata GeoGebre	67
Slika 5.32: Prikaz algebarskog sučelja rotacije polazišnog vektora oko x–osi K.S.....	68
Slika 5.33: Prikaz elemenata rotacije točke P_P oko x–osi	69
Slika 5.34: Prikaz algebarskog sučelja rotacije vektora točke P' oko y–osi K.S.....	70
Slika 5.35: Prikaz elemenata rotacije točke P' oko y–osi.....	71
Slika 5.36: Prikaz algebarskog sučelja rotacije vektora točke P'' oko z–osi K.S.....	72
Slika 5.37: Prikaz elemenata rotacije točke P'' oko z–osi	73
Slika 5.38: Prikaz lukova rotacije točke PP PVT konvencijom	74
Slika 5.39: Prikaz lukova rotacije u 3D sučelju GeoGebre.....	75
Slika 5.40. Algebarski prikaz animiranih točaka na lukovima koji predstavljaju rotaciju oko svake od koordinatnih osi K.S.....	75
Slika 5.41: Prikaz vektora rotacije u algebarskome sučelju	76
Slika 5.42: Prikaz vektora rotacije r' , r'' i r''' u 3D sučelju.....	77
Slika 5.43: QR kod animacije PVT konvencije transformacije	78
Slika 5.44: Prikaz polazišnog koordinatnog sustava unutar algebarskog sučelja	79
Slika 5.45: Prikaz polazišnog K.S. zajedno sa vektorom položaja polazišne točke u 3D sučelju	81

Slika 5.46: Prikaz Eulerovih kutova rotacije u algebarskome sučelju	81
Slika 5.47: Prikaz pomoćnih veličina unutar algebarskog sučelja tijekom izrade modela transformacije CFR konvencije.....	82
Slika 5.48: Prikaz polazišnog koordinatnog sustava, vektora položaja te polazišne točke zajedno sa pomoćnim elementima u 3D sučelju.....	82
Slika 5.49: Algebarski prikaz rotacija polazišnog koordinatnog sustava za negativnu vrijednost kuta α_Z oko z -osi.....	83
Slika 5.50: Prikaz rotiranog polazišnog koordinatnog sustava (crni) za negativnu vrijednost kuta α_Z oko z -osi.....	84
Slika 5.51: Prikaz algebarskog sučelja rotacije oko y -osi za negativan iznos kuta α_Y	84
Slika 5.52: Prikaz rotacije koordinatnog sustava KS_Z (crni K.S.) za negativnu vrijednost kuta α_Y oko y -osi te time definiranje KS_Y (zeleni K.S.)	85
Slika 5.53: Prikaz algebarskog sučelja rotacije oko x -osi za negativan iznos kuta α_X	86
Slika 5.54: Prikaz odnosa odredišnog (plava boja) koordinatnog sustava i KS_Y koordinatnog sustava (tamno zelena boja)	87
Slika 5.55: Prikaz odnosa polazišnog (svijetlo zelena) i odredišnog (plava boja) koordinatnog sustava	88
Slika 5.56: Prikaz definirajućih elemenata prezentacije rotacije odredišnog koordinatnog sustava oko x -osi	89
Slika 5.57: Prikaz elemenata rotacije odredišnog koordinatnog sustava oko x -osi.....	89
Slika 5.58: Prikaz rotacije odredišnog koordinatnog sustava oko x -osi za vrijednost Eulerovog kuta rotacije α_X	92
Slika 5.59: Prikaz elemenata KS_Y (tamno zelene boje) i KS_Z (crna boja)	93
Slika 5.60: Prikaz definirajućih elemenata rotacije elementa KS_Y oko y -osi.....	94
Slika 5.61: Prikaz rotacije elementa KS_Y oko y -osi za prijašnje zadanu vrijednost Eulerovog kuta rotacija α_Y	94
Slika 5.62: Prikaz KS_Y (tamno zelena boja) i KS_Z (crna boja) te animiranog koordinatnog sustava (crvena boja)	96
Slika 5.63: Prikaz elemenata KS_Z (crna boja) i Polazišni $_{KS}$ (svijetlo zelena boja)	97

Slika 5.64: Prikaz definirajućih elemenata rotacije koordinatnog sustava <i>KSZ</i> oko <i>z</i> -osi.....	98
Slika 5.65: Prikaz elemenata rotacije koordinatni sustav <i>KSZ</i> rotiran oko <i>z</i> -osi	98
Slika 5.66: Prikaz animiranog koordinatnog sustava (crvena boja) koji predstavlja rotaciju <i>K.S.</i> oko <i>z</i> -osi	100
Slika 5.67: QR kod modela transformacije CFR konvencije	101
Slika 5.68. Prikaz algebarskog sučelja gdje je definirana Zemljina sfera, pomoćne veličine, sjeverni i južni nebeski pol, referentni meridijan i ekvator te elipsoidne koordinate	102
Slika 5.69: Prikaz elemenata <i>PN</i> , <i>PS</i> , Greenwich i Ekvator.....	104
Slika 5.70. Prikaz algebarskog sučelja za definiranje točke motritelja na Zemljinoj sferi i ravnine nebeskog horizonta motritelja	105
Slika 5.71. Prikaz položaja točke <i>S</i> s pripadnim koordinatama te elementima <i>MeridijanS</i> i <i>ParalelaS</i>	106
Slika 5.72. Prikaz ravnine nebeskog horizonta, tangente na paralelu i meridijan elementa <i>S</i> zajedno sa meridijanom i paralelom.....	108
Slika 5.73: Definicija koordinata nebeskog horizontskog koordinatnog sustava i točaka na sferi istog	109
Slika 5.74. Prikaz Zemljine sfere i nebeske sfere horizonstskog koordinatnog sustava.....	110
Slika 5.75. Definirajući elementi nebeskog tijela	111
Slika 5.76 Prikaz koordinata točke <i>S</i> kako bi se omogućilo pravilna upotreba koordinata sfernog horizontskog koordinatnog sustava	112
Slika 5.77. Prikaz pravilnog položaja nebeskog sfernog horizontskog sustava za opažanje koordinata istog	112
Slika 5.78. Prikaz definiranih koordinata horizontskog sfernog koordinatnog sustava.....	113
Slika 5.79. Prikaz položaja nebeskog tijela na nebeskoj sferi.....	114
Slika 5.80: QR kod modela nebeskog horizonstskog koordinatnog sustava	114
Slika 5.81: Prikaz algebarskog sučelja definiranja pomoćnih elemenata i sfere nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava	115
Slika 5.82: Prikaz sfere nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava3D sučelja.....	117

Slika 5.83: Definirajući elementi za uspostavu odnosna nebeskog ekvatora i nebeskog horizonta	118
Slika 5.84: Prikaz odnosa nebeskog horizonta i nebeskog ekvatora u 3D sučelju.....	120
Slika 5.85: Definirajući elementi za uspostavu kružnice ekliptike prikazani u algebarskome sučelju.....	121
Slika 5.86: Prikaz kružnica: ekliptike, nebeskog horizonta i nebeskog ekvatora u 3D sučelju	123
Slika 5.87:Uspostava koordinata rektascenzije i deklinacije	124
Slika 5.88: Prikaz zadane naredbe <i>Rotate</i> prilikom definiranja vektora $\alpha\Sigma$	125
Slika 5.89: Prikaz zadane naredben <i>Rotate</i> prilikom definiranja vektora $\delta\Sigma$	125
Slika 5.90: Uspostava pomoćnih kružnica nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava	126
Slika 5.91: QR kod modela sfernog nebeskog ekvatorskog koordinatnog sustava	127
Slika 5.92. Definirajući elementi koordinata mjesnog ekvatorskog koordinatnog sustava ...	128
Slika 5.93. Prikaz mjesnog ekvatorskog koordinatnog sustava	130
Slika 5.94: QR kod modela nebeskog mjesnog ekvatorskog koordinatnog sustava.....	130

POPIS TABLICA

Tablica 4.1: Koordinatni sustavi nebeske sfere (Špoljarić, 2021; Jekeli, 2016; Soffel i Langhas, 2013).....	27
Tablica 6.1: SWOT analiza alata GeoGebra®	131

SAŽETAK

Trodimenzionalna vizualizacija elemenata geometrijske geodezije i geodetske astronomije u alatu otvorenog koda GeoGebra®

Marko Liović

Ovaj rad omogućuje prvenstveno studentima, ali i zainteresiranoj geoosposobljenoj javnosti stjecanje bolje razumijevanje nastavne materije geometrijske geodezije, matematičkih operacija nad koordinatama i geodetske astronomije, pokrivena kroz predmete „Geodetski referentni okviri“ i „Državna izmjera“ na sveučilišnom Prijediplomskom studiju Geodezija i geoinformatika Sveučilišta u Zagrebu – Geodetskog fakulteta u vidu upotrebe trodimenzionalnih, dinamičkih modela u programskom rješenju otvorenog koda (eng *open-source*) *GeoGebra*®. Navedeni modeli teorijski su potkrijepljeni, te im je omogućeno manipuliranje u vidu promjene parametara koji su od značaja jer se promjenom istih omogućuje automatska promjena geometrijskih odnosa koji definiraju model. Na ovaj način korisniku (studentu, nastavniku i inom geoosposobljenom članu društva) je omogućeno bolje razumijevanje samog modela, odnosno nastavnog gradiva te stjecanje novih znanja na jedinstven i interaktivan način. Alat *GeoGebra*® povrnut je SWOT analizi, te su u radu spomenuta prednosti i nedostaci istog.

Ključne riječi: *GeoGebra*, nebeska sfera, rotacijski elipsoid, transformacija.

SUMMARY

Three-dimensional visualization of elements of geometric geodesy and geodetic astronomy in the open-source tool GeoGebra®

Marko Liović

This paper primarily enables students, but also the interested geodetically educated public, to gain a better understanding of the subject matter of geometric geodesy, mathematical operations on coordinates, and geodetic astronomy, covered through the courses Geodetic Reference Frames and State Survey within the undergraduate university program in Geodesy and Geoinformatics at the University of Zagreb – Faculty of Geodesy, by employing three – dimensional, dynamic models in the open – source software *GeoGebra*®. The presented models in this paper are theoretically substantiated and allow manipulation through changes of relevant parameters, whereby such modifications automatically alter the geometric relationships that define the model. In this way users (students, lecturers, and other geodetically educated members of society) are provided with a better understanding of the models and the teaching material, as well as the opportunity to acquire new knowledge in a unique and interactive manner. The *GeoGebra*® tool has been subjected to a SWOT analysis, and both its strengths and weaknesses are discussed in the paper.

Keywords: *GeoGebra*®, celestial sphere, rotational ellipsoid, transformation.

ŽIVOTOPIS

Marko Liović, rođen je 7. travnja 2003. u Slavonskom Brodu gdje je završio i osnovnu školu. 2018. godine upisuje Srednju školu Matije Antun Reljković, koju završava 2022. godine gdje stječe srednju stručnu spremu u zvanju Tehničar geodezije i geoinformatike. U sklopu srednjoškolskog obrazovanja izborio se za državno natjecanje iz geodezije i geoinformatike gdje je osvojio 5. mjesto. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja dodatno je stjecao praktična znanja iz područja geodezije u ovlaštenoj geodetskoj firmi u Slavonskome Brodu. 2022. godine upisuje se na preddiplomski sveučilišni studij Geodezije i geoinformatike na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Trenutno je na trećoj godini prijediplomskog studija gdje je obavljao posao demonstratora na Geodetskom fakultetu. Posebno ga zanimaju područje Državne izmjere i inženjerske geodezije. Od osobnih vještina može istaknuti rad u alatu *GeoGebra®* s posebnim naglaskom na izradu trodimenzionalnih, interaktivnih modela iz područja elipsoidne geodezije i geodetske astronomije. Također vješt je u upotrebi CAD i GIS alata kao i Microsoft Office alata.