SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Petar Knežević

Upravljanje portfeljem uz pomoć Schurovog komplementa i strojnog učenja: Napredni pristup izgradnji investicijskog portfelja

Zagreb, 2024.

Ovaj rad izraden je na Zavodu za primijenjenu matematiku pod vodstvom doc. dr. sc. Petre Posedel Šimović i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2023./2024.

SADRŽAJ

1. Uvod

Izgradnja optimalnog investicijskog portfelja predstavlja ključni cilj svakog investitora te je ujedno i istraživačko pitanje koje se već dugi niz godina provlači među znanstvenicima iz područja kvantitativnih financija. Prvi značajan odgovor na to pitanje ponudio je američki ekonomist Harry Markowitz još davne 1952., u svom radu „Portfolio Selection" [1], postavivši time temelje Moderne teorije portfelja. Markowitzeva metoda izgradnje portfelja, optimizacijom očekivanja i varijance (engl. *mean variance optimization*), koristi očekivane buduće prinose skupa investicija u kombinaciji s inverzom kovarijacijske matrice prošlih prinosa, radeći time kompromis između očekivanih prinosa i varijance. Međutim, iako je ova metoda uspjela spojiti matematičku teoriju s praktičnim svijetom investiranja, nastali su neki drugi problemi. Između ostalog, postavlja se pitanje postoji li uopće inverz takve kovarijacijske matrice i je li on stabilan.

Jedno od mogućih rješenja ovog problema, dao je Marcos Lopez de Prado u svom radu „Building diversified portfolios that outperform out of sample" [2], više od pola stoljeća kasnije. U svom se radu de Prado odmakao od klasičnih matematičkih grana, geometrije, linearne algebre i matematičke analize, unutar kojih se godinama pokušavalo pronaći rješenje problema izgradnje portfelja. Uvidjevši da kovarijacijskoj matrici nedostaje doza hijerarhije, predlaže rješenje problema koristeći moderne grane matematike, teoriju grafova i strojno učenje. De Pradova metoda, hijerarhijski paritet rizika (HRP), u potpunosti izbjegava invertiranje kovarijacijske matrice i umjesto toga koristi hijerarhijsko grupiranje za pronalaženje grupa unutar skupa investicija, kvazidijagonalizaciju kovarijacijske matrice te, konačno, rekurzivnu bisekciju za dodjeljivanje težina investicijama u portfelju. Iako hijerarhijski paritet rizika daje puno stabilnije rješenje od optimizacije inverzom kovarijacijske matrice, u svojoj eleganciji gubi dio informacija o međuovisnosti promatranih investicija. Pitanje koje se postavlja je koliko je taj gubitak informacija skup i postoji li način da dio tih informacija ipak ugradimo u model.

U ovom radu predlažemo novu metodu rekurzivne alokacije imovinskih klasa u portfelju inspiriranu hijerarhijskim paritetom rizika. Nova metoda izgradnje portfelja koristi Schurov komplement uz pomoć kojeg pokušava doskočiti problemima HRP-a ugrađujući dio izgubljenih informacija natrag u model i pritom napraviti korak prema optimizaciji. U eksperimentalnom dijelu rada pokazujemo kako Schurova metoda uistinu smanjuje varijancu portfelja, što ju čini korisnom i zanimljivom za financijsku praksu.

2. Moderna teorija portfelja

Proces izgradnje svakog portfelja sastoji se od dva jednako važna koraka, odabira investicija i alokacije sredstava između tih investicija. Na odabir investicija uvelike ovise individualne sklonosti pojedinca o riziku i očekivanom prinosu na investiciju, pa se ovaj rad, a i cijela teorija portfelja primarno bavi zadatkom alokacije sredstava između investicija, odnosno pretvaranjem skupa investicija u portfelj. Moderna teorija portfelja, investicijska je teorija koja omogućuje investitoru da stvori diverzificiran portfelj koji maksimizira omjer očekivanog prinosa i rizika portfelja, a njezin začetnik je Harry Markowitz.

2.1. Teorijska podloga za Modernu teoriju portfelja

Iako je intuitivni pojam diverzifikacije postojao i ranije, možemo reći da je „Izbor portfelja“ (engl. „*Portfolio Selection*“) [1] Harryja Markowitza predvodnik ideje optimizacije portfelja, pa samim tim i Moderne teorije portfelja. Taj je rad dao matematičku teorijsku podlogu pojmu diverzifikacije opisavši ga kao kompromis između rizika i prinosa.

U originalnom je radu [1] rizik definiran kao volatilnost, odnosno kao varijanca prinosa. Matematička definicija očekivanog prinosa portfelja i varijance portfelja dana je izrazima

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) \qquad 2.1.$$

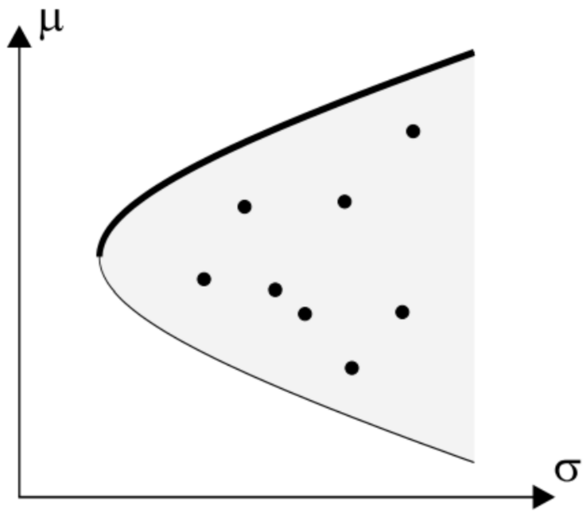
$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j} \qquad 2.2.$$

gdje su investicije u portfelju indeksirane po i, $\mathrm{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ vektor težina investicija u portfelju, $E(R_p)$ očekivani prinos portfelja, $E(R_i)$ očekivani prinos investicije i, σ_p^2 varijanca prinosa portfelja, σ_i^2 varijanca prinosa investicije i te $\sigma_{i,j}$ kovarijanca prinosa investicija i, j.

Iz gornje formule za varijancu portfelja, jasno se vidi da negativna kovarijanca između dvije investicije smanjuje ukupnu varijancu portfelja, što ju čini iznimno poželjnim sredstvom u izgradnji diverzificiranog portfelja.

Definirajmo pojam dominacije portfelja u kontekstu prinosa i rizika kao u [4], odnosno portfelj A je dominantan u odnosu na portfelj B ako ima viši očekivani prinos i jednaku ili nižu standardnu derivaciju prinosa od portfelja B.

Efikasni portfelj je onaj nad kojim ni jedan drugi portfelj ne dominira, a skup svih efikasnih portfelja naziva se efikasnom granicom.



Slika 1: Efikasna granica. Slika je preuzeta s [6]

Ideju za rješenje problema dobivanja efikasne granice iz skupa investicija predložio je ponovno Markowitz 1987. Radi se o algoritmu kritičnog pravca (engl. *The critical line algorithm*) (CLA). Kao što je navedeno u [7] i implementirano u [11], CLA je računalno efikasna metoda pronalaska cijele efikasne granice. CLA, kao i većina drugih algoritama za izgradnju investicijskog portfelja koristi metode kvadratnog programiranja te u jednom trenutku računa inverz kovarijacijske matrice koji se onda koristi za raspodjelu sredstava unutar portfelja.

2.2. Optimizacija očekivanja i varijance

U slučaju korištenja Moderne teorije portfelja za raspodjelu kapitala, nerijetko investitora u praksi ne zanima cijela efikasna granica, već se može zadovoljiti pronalaskom alokacije portfelja s minimalnom varijancom za željeni prinos, ili pak maksimalnog prinosa za određenu razinu rizika, odnosno varijance portfelja. U tom slučaju investitor poseže za optimizacijom očekivanja i varijance (engl. *mean-variance optimization*), koja se često naziva i Markowitzevom optimizacijom.

Optimizacija očekivanja i varijance konceptualno je prilično jednostavna. Zapišimo varijancu portfelja u matričnom zapisu

$$\sigma_p^2 = \mathrm{w}^T \Sigma \mathrm{w} \tag{2.3.}$$

gdje je Σ kovarijacijska matrica prinosa skupa investicija.

U cilju optimizacije portfelja potrebno je pronaći težine w^* koje minimiziraju varijancu portfelja uz neke zadane uvjete (npr. željeni prinos, nenegativnost težina, zbroj težina jednak 100% sredstava). Postupak takve uvjetne optimizacije provodi se pomoću kvadratnih algoritama (ili kvadratnim programiranjem). U ovom radu nećemo ulaziti u detalje tog procesa.

Promotrimo slučaj optimizacije bez dodatnih uvjeta i pretpostavimo, radi jednostavnosti, jednake očekivane prinose svih investicija u skupu investicija. Na taj način dobivamo portfelj minimalne varijance (engl. *minimum variance portfolio*) Rješenje optimizacije za kovarijacijsku matricu Σ pronalazimo jednostavnim invertiranjem kovarijacijske matrice

$$w(\Sigma) \propto \Sigma^{-1}\vec{1} \qquad 2.4.$$

gdje je $\vec{1}$ vektor jedinica, a simbol $\propto$ predstavlja relaciju proporcionalnosti. Težine $w(\Sigma)$ nisu jednake nego proporcionalne ($\propto$) $\Sigma^{-1}\vec{1}$ zbog izostavljanja skaliranja. Jednostavnim dijeljenjem težina s $\vec{1}\Sigma^{-1}\vec{1}$ dobivamo jednakost.

Formula 2.4. kasnije će nam poslužiti kao motivacija za uvođenje Schurovog komplementa i nove metode hijerarhijske izgradnje portfelja.

2.3. Markowitzeva kletva

Gledajući unazad, Markowitzev rad i Markowitzeva metoda optimizacije portfelja bili su strahovito velik napredak u investitorskom svijetu i praktički su samostalno začeli Modernu teoriju portfelja. Međutim, daleko od toga da metoda optimizacije očekivanja i varijance nema mana. Jedan od najvećih problema, pa posljedično i kritika metodi općenito je korištenje inverza kovarijacijske matrice prinosa u računanju težina.

Naime, sam izračun inverza, ako on postoji, nije problem ni s teorijske ni s računalne strane, koliko je s numeričke. Kovarijacijska matrica prinosa teško može biti singularna jer je malo vjerojatno da prinosi dvije investicije imaju istu varijancu i iste kovarijance sa svim drugim investicijama. Međutim, za sličnu vrstu investicije kovarijacijska matrica postaje multikolinearna, odnosno blizu singularnoj. Iako inverz takve matrice teorijski postoji, numerički je nestabilan i najmanje promjene poput nekoliko dana duljeg ili kraćeg promatranja prinosa ili malim pogreškama u procjeni kovarijacijske matrice, mogu imati veliki utjecaj na konačan rezultat, pa tako i na samu alokaciju sredstava unutar portfelja. Ovaj fenomen poznat je i kao Markowitzeva kletva (engl. *Markowitz curse*).

Primjer 1 Markowitzeva kletva

Ilustrirajmo ovaj problem na jednostavnom primjeru. Zamislimo da imamo skup koji sadrži četiri investicije. Neka je procijenjena kovarijacijska matrica $\mathbf{\Sigma}$ dana s

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.091 & -1.022 & 0.23 & 0.1 \\ -1.022 & 2.548 & 1.052 & -0.124 \\ 0.23 & 1.052 & 1.788 & -0.79 \\ 0.1 & -0.124 & -0.79 & 0.857 \end{pmatrix}$$

Koristeći formulu 2.4 i skalirajući težine dobivamo rezultat:

$$\mathrm{w}(\Sigma) = [-13.341, -10.098, 12.748, 11.691]^T$$

Međutim, napravimo li samo malu modifikaciju u procjeni kovarijacijske matrice, na primjer pomnožimo vrijednosti izvan dijagonale s 1.03, dobivamo potpuno drugačije rješenje:

$$\mathrm{w}(\Sigma) = [0.806, 0.544, -0.313, -0.037]^T$$

Naravno, ovaj primjer je dosta ekstreman zbog iznimne nestabilnosti inverza, ali nijedan upravitelj portfeljem ne želi gubiti vrijeme na ispitivanje stabilnosti inverza, a pogotovo ne želi ostaviti mogućnost da mala pogreška u procjeni kovarijacijske matrice prinosa toliko utječe na alokaciju imovine u portfelju [15].

Upravo je zbog ovakvih primjera akademska i financijska poslovna zajednica u konstantnoj potrazi za stabilnim i efikasnim rješenjem izgradnje portfelja. Jedna od potencijalnih mogućnosti kako pobjeći od invertiranja nestabilnih matrica, upravo je hijerarhijski paritet rizika koji predlaže Marcos Lopez de Prado u radu [2].

3. Hijerarhijski paritet rizika

Odmakom od klasičnih grana matematike, geometrije, linearne algebre i matematičke analize, unutar kojih se desetljećima tražila optimalna metoda izgradnje portfelja uvodeći dodatne uvjete [12], ili pak pokušavajući poboljšati numeričku stabilnost inverza kovarijacijske matrice [16], otvorile su se brojne nove mogućnosti. Hijerarhijski paritet rizika kojeg je prvi put opisao Marcos Lopez de Prado u radu [2], algoritam je za izgradnju portfelja koji izbjegava računanje inverza kovarijacijske matrice [10]. Glavna je ideja algoritma HRP-a postojanje hijerarhijskih struktura u skupu investicija i rekurzivna alokacija sredstava.

3.1. Motivacija

Poslužimo se de Pradovim radom u kojem je iznio ideju hijerarhijskog pariteta rizika [2]. Promotrimo korelacijsku matricu prinosa kao matricu kosinusa kutova između bilo koja dva vektora koji predstavljaju prinose određene investicije. Kvadratne metode optimizacije, često korištene u optimizaciji portfelja, nerijetko su nestabilne jer tretiraju vektorski prostor prinosa kao potpuno povezani graf. Nestabilnost se jasno očituje prilikom invertiranja kovarijacijske matrice te i najmanje pogreške u procjeni kovarijance mogu dovesti do značajnih odstupanja od optimalnog rješenja.

Upravo predstavljena topološka struktura dolazi iz ranijeg de Pradovog rada izrađenog u suradnji s Calkinom, "The Topology of Macro Financial Flows: An Application of Stochastic Flow Diagrams." [3]. U navedenoj topološkoj strukturi svaka investicija je potencijalna zamjena za bilo koju drugu u skupu investicija. Intuitivno nam je jasno da takvo ponašanje nije ni potrebno ni poželjno. Ako promatramo tri potencijalne investicije, dionice dvije tehnološke kompanije i jedan obveznički fond, puno više smisla ima odlučivati o raspodjeli sredstava hijerarhijski tako da prvo odlučujemo o alokaciji između skupa tehnoloških kompanija i obvezničkog fonda, te zatim o raspodjeli sredstava između dvije tehnološke kompanije. Drugim riječima, intuitivno pretpostavljamo hijerarhijsku strukturu u skupu investicija.

HRP koristi hijerarhiju u skupu investicija i služi se modernim granama matematike, teorijom grafova i strojnim učenjem [13]. Kao rezultat toga, ne zahtijeva invertibilnost ni pozitivnu semidefinitnost kovarijacijske matrice koju zahtijeva CLA, odnosno optimizacija očekivanja i varijance. Samim time, ne nasljeđuje probleme koji nastaju zbog singularnosti ili multikolinearnosti kovarijacijske matrice. Algoritam se sastoji od tri dijela, hijerarhijskog grupiranja, kvazidijagonalizacije i rekurzivne bisekcije, koje detaljnije obrađujemo u nastavku.

3.2. Hijerarhijsko grupiranje

Cilj ovog koraka je od danog skupa investicija stvoriti hijerarhijsko stablo u kojem je imovina grupirana na različitim razinama [14]. Ovaj je dio algoritma poveznica sa strojnim učenjem i koristi hijerarhijsko aglomerativno grupiranje.

Algoritam hijerarhijskog aglomerativnog grupiranja (HAC) iterativno povezuje najbliže parove grupa počevši od jednočlanih grupa. Samo povezivanje može se napraviti na više načina. Mi ćemo ovdje predstaviti metodu jednostrukog povezivanja u kojem je udaljenost između dvije grupe najmanja udaljenost između bilo koje dvije točke unutar tih grupa. Koristit ćemo implementaciju iz rada „Building diversified portfolios using the risk parity principle and machine learning“ [4], D. Deković, posebno napravljenu za HRP.

Prvi korak grupiranja je računanje korelacijske matrice ρ te računanje matrice udaljenosti iz korelacijske matrice. Definirajmo mjeru udaljenosti kao

$$d_{i,j} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho_{i,j})} \quad 3.1.$$

i matricu udaljenosti $\{d_{i,j}\}$.

Primjer 2 Računanje matrice udaljenosti iz korelacijske matrice

Koristit ćemo dvije tehnološke kompanije i obveznički fond s burzovnim oznakama AAPL, MSFT i BND

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0.75 & 0.18 \\ 0.75 & 1 & 0.19 \\ 0.18 & 0.19 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{d_{i,j}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0.35 & 0.64 \\ 0.35 & 0 & 0.64 \\ 0.64 & 0.64 & 0 \end{pmatrix}$$

U drugom koraku definiramo i računamo euklidsku udaljenost svakog para vektora unutar matrice udaljenost. Definirajmo euklidsku udaljenost dva vektora kao

$$\tilde{d}_{i,j} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} (d_{n,i} - d_{n,j})^2} \quad 3.2.$$

Primjer 3 Računanje euklidske udaljenosti

$$\{d_{i,j}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0.35 & 0.64 \\ 0.35 & 0 & 0.64 \\ 0.64 & 0.64 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\tilde{d}_{i,j}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.90 \\ 0.25 & 0 & 0.89 \\ 0.90 & 0.89 & 0 \end{pmatrix}$$

U sljedećim se koracima stvaraju grupe metodom jednostrukog povezivanja. Grupiranje se radi po formuli

$$(i,j) = argmin_{\substack{(i,j)\\ i\neq j}}\{\tilde{d}_{i,j}\} \qquad 3.3.$$

gdje je (i,j) par vektora stupaca matrice $\{\tilde{d}_{i,j}\}$.

Primjer 3 Grupiranje po najmanjoj udaljenosti

$$\{\tilde{d}_{i,j}\} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0.25} & 0.90 \\ 0.25 & 0 & 0.89 \\ 0.90 & 0.89 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (AAPL, MSFT)$$

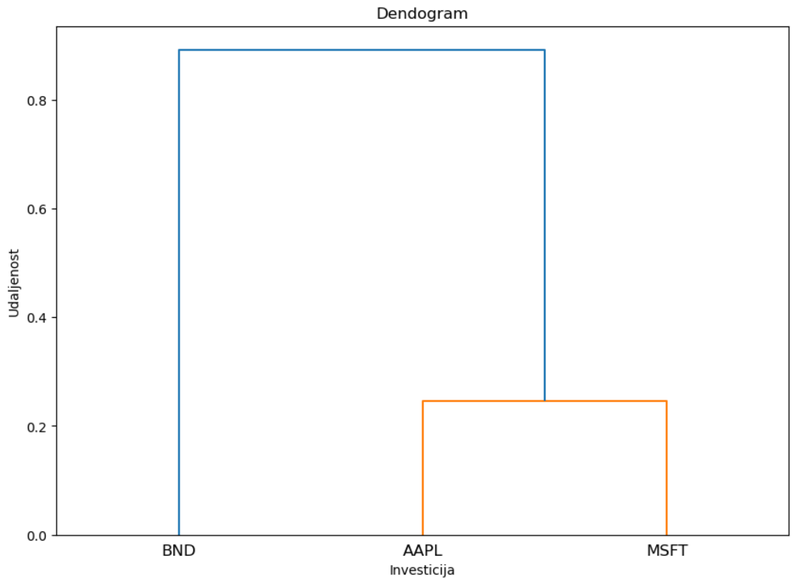
Nakon grupiranja, ponovno se računa udaljenost između novonastale grupe i svih ostalih.

Primjer 4 Izračun novih udaljenosti i ažuriranje matrice euklidske udaljenosti

$$\{\tilde{d}_{i,(AAPL,MSFT)}\} = \begin{pmatrix} \min(0, 0.25) \\ \min(0.25, 0) \\ \min(0.90, 0.89) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.90 \end{pmatrix}$$

$$\{\tilde{d}_{i,j}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 \\ 0.9 & 0 \end{pmatrix}$$

Postupak ponavljamo sve dok ne grupiramo sve investicije. Kao rezultat HAC algoritma dobivamo dendogram koji prikazuje hijerarhijsku strukturu podataka.

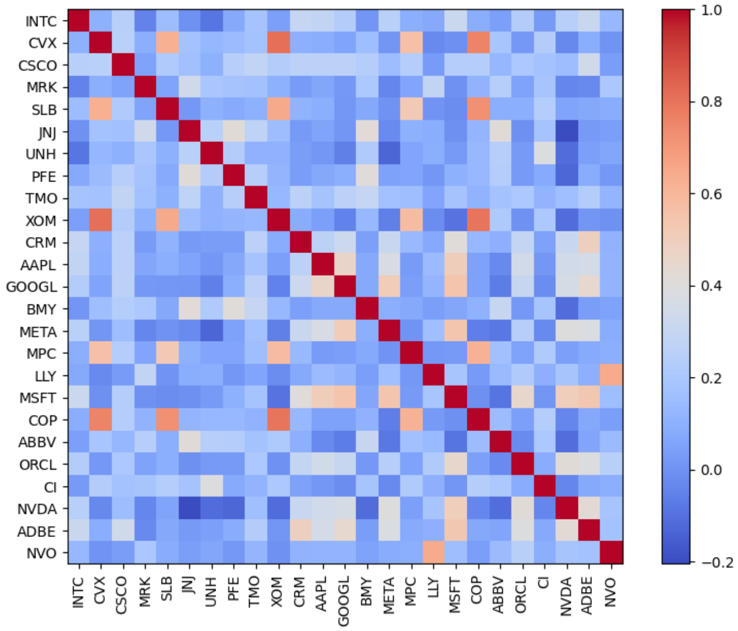


Slika 2: Primjer dendograma

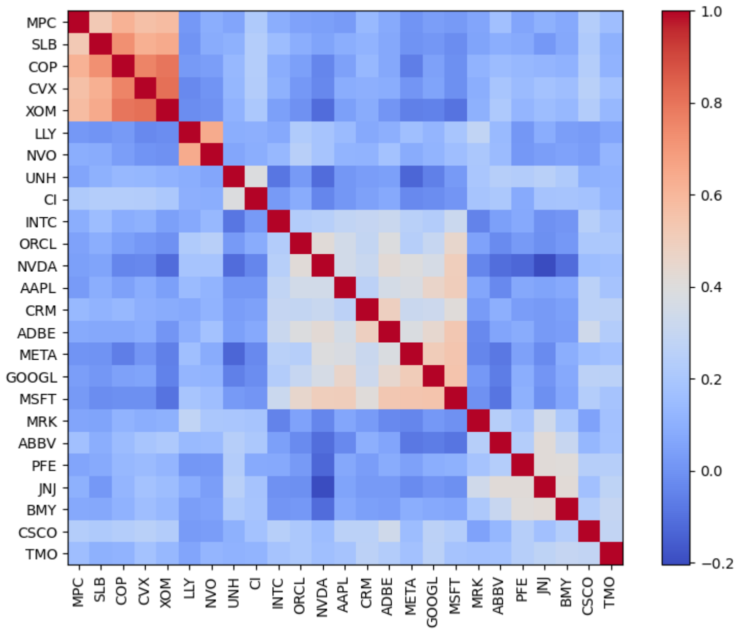
Uz minimalno domensko znanje možemo vidjeti da algoritam prilično logično grupira slične investicije i razdvaja različite. Duljina linije na dendogramu predstavlja udaljenost dvije grupe.

3.3. Kvazidijagonalizacija

Nakon grupiranja imovine u hijerarhijsko stablo, provodi se postupak kvazidijagonalizacije. U ovom koraku radi se reorganizacija kovarijacijske matrice prinosa tako da se veće kovarijance stavljaju uz dijagonalu, dok manje ostaju raspršene okolo. Ovo se postiže rastavom dobivenih grupa šetnjom kroz binarno stablo sve dok se ne dođe do listova koji predstavljaju početne investicije. Tako mijenjamo redoslijed retcima i stupcima kovarijacijske matrice zadržavajući pritom poredak grupiranja.



Slika 3: Primjer korelacijske matrice prije kvazidijagonalizacije



Slika 4: Korelacijska matrica nakon kvazidijagonalizacije

3.4. Rekurzivna bisekcija

U posljednjem koraku algoritma HRP-a imovini pridružujemo težine, čime od početnog skupa investicija stvaramo portfelj. Algoritam je uzet iz originalnog rada o hijerarhijskom paritetu rizika [2] i koristi činjenice da je alokacija inverzne varijance optimalna za dijagonalne kovarijacijske matrice te da mi sada baratamo s kvazidijagonalnom matricom.

1. Algoritam inicijaliziramo s:

   a. postavljanjem liste svih investicija: $L = \{L_0\}$, $L_0 = \{n\}_{n=1,\dots,N}$

   b. dodjeljivanjem početnih težina investicijama: $w_n = 1, \forall n = 1, \dots, N$

2. Ako $|L_i| = 1, \forall L_i \in L$, zaustavi algoritam

3. Za svaki $L_i \in L$ takav da $|L_i| > 1$:

   a. podijeli L_i na pola u dva podskupa $L_i^{(1)} \cup L_i^{(2)} = L_i$, čuvajući poredak

   b. definiraj varijancu od $L_i^{(j)}$ kao kvadratnu formu $\widetilde{V}_i^{(j)} = \widetilde{w}_i^{(j)^T} V_i^{(j)} \widetilde{w}_i^{(j)}$, gdje je $V_i^{(j)}$ podmatrica kovarijacijske matrice koja sadrži elemente iz $L_i^{(j)}$, a $\widetilde{w}_i^{(j)} = diag\left[V_i^{(j)}\right]^{-1} \frac{1}{tr\left[diag\left[V_i^{(j)}\right]^{-1}\right]}$, gdje su $diag$, tr redom operatori dijagonale i traga matrice

   c. izračunaj alokacijski faktor $\alpha_i = 1 - \frac{\widetilde{V}_i^{(1)}}{\widetilde{V}_i^{(1)} + \widetilde{V}_i^{(2)}}$

   d. pomnoži w_n s α_i, za svaki $n \in L_i^{(1)}$

   e. pomnoži w_n s $(1 - \alpha_i)$, za svaki $n \in L_i^{(2)}$

4. Vrati se na korak 2.

Ovaj algoritam radi po „top-down“ principu, ali koristi kvazidijagonalnu matricu i „bottom-up“ pristup prilikom definiranja varijance. Skaliranje težina u koraku 3.d. i 3.e. osigurava da je zbroj konačnih težina jednak 1, odnosno 100% zadanih sredstava, a nenegativnost varijance osigurava nenegativnost težina.

3.5. Kritika hijerarhijskom paritetu rizika

Pogledom na algoritam rekurzivne bisekcije možemo primijetiti da je HRP doista iskoristio hijerarhiju u podacima u cilju alociranja bez računanja potencijalno nestabilnog inverza kovarijacijske matrice. Samim time, došao je kao veliki novitet u svijetu kvantitativnih financija i stvorio potpuno nove mogućnosti za izgradnju portfelja.

Međutim, svojim elegantnim rješenjem bez invertiranja kovarijacijske matrice, ipak se moralo žrtvovati nešto drugo. Između ostalog, gubitak, odnosno ne korištenje svih dostupnih podataka u dijelu rekurzivne bisekcije. Pogledajmo detaljnije.

Definirajmo kovarijacijsku matricu nakon kvazidijagonalizacije, $\boldsymbol{\Sigma}$, kao blok matricu

$$\Sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C = B^T & D \end{pmatrix} \qquad 3.4.$$

gdje je $A = V_0^{(1)}$ i $D = V_0^{(2)}$. Ponovnim pogledom na algoritam rekurzivne bisekcije, vidimo da u pojednostavljenom i poopćenom obliku vrijedi

$$w(\Sigma) \propto \begin{pmatrix} \frac{1}{v(A)} \mathrm{w}(A) \\ \frac{1}{v(D)} \mathrm{w}(D) \end{pmatrix} \qquad 3.5.$$

gdje je $\frac{1}{v(\cdot)}$ neka funkcija inverzne varijance, u slučaju HRP-a to znači $\frac{1}{v(A)} = \alpha_i$, $\frac{1}{v(D)} = 1 - \alpha_i$.

Ostaje pitanje gdje je u tom procesu nestala matrica B, koja sadrži podatke o međuovisnosti investicija iz dvije grupe, i želimo li si dozvoliti izgubiti ju u potpunosti.

U ovom radu nećemo dati odgovor na pitanje je li takav gubitak informacija značajan nego ćemo ponuditi rješenje koje je bazirano na hijerarhijskom paritetu rizika, a koje ipak dozvoljava ugradnju dijela izgubljenih informacija natrag u postupak izgradnje portfelja.

4. Schurova hijerarhijska shema

Analizom Markowitzeve optimizacije portfelja i hijerarhijskog pariteta rizika upoznali smo njihove prednosti i ukazali na nedostatak u pogledu gubitka potencijalno važnih informacija. U ovom ćemo se poglavlju upoznati s matematičkim pojmom Schurovog komplementa i uz pomoć njega povezati „moderni“ pristup izgradnji portfelja s onim hijerarhijskim. Ovaj bi korak mogao biti iznimno bitan financijsku za praksu jer osim samog povezivanja dvije metode, stvorit ćemo mogućnost i da svaki upravitelj portfelja po svojoj želji bira udio modernog, odnosno hijerarhijskog pristupa.

4.1. Schurov komplement

Schurov komplement originalno, naravno, nema veze s financijama. Naime, sam pojam dolazi iz linearne algebre, u kojoj su najčešći problemi izračun determinante, inverza, ranga ili rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Većina se ovih problema rješava nekom metodom svođenja matrice na trokutastu ili dijagonalnu zbog povoljnih svojstava takvih matrica. Tako postoje različite metode svođenja matrice na dijagonalnu ili trokutastu, a Schurov komplement nudi rješenje tog problema za blok matrice.

Uvedimo pojam Schurovog komplementa. Definirajmo blok-matricu M kao

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Kao što je detaljnije objašnjeno u radu [8], za regularnu matricu A vrijedi

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad 4.1.$$

Jasno je da ovakav rastav daje umnožak tri matrice odličnih svojstava za rješavanje zadataka linearne algebre, a poslužiti će i za definiciju Schurovog komplementa. Definiramo Schurov komplement matrice M po A, M/A, kao $M/A = D - CA^{-1}B$. Analogno definiramo $M/D = A - BD^{-1}C$.

Pogledajmo zašto nam je uopće zanimljiv Schurov komplement u kontekstu izgradnje portfelja. Već smo spominjali da optimizacijske metode alokacije sredstava u portfelju obično koriste inverz kovarijacijske matrice. Neka je Σ kovarijacijska matrica nakon postupka kvazidijagonalizacije definirana kao u formuli 3.4. i neka su A i D regularne matrice. Poslužimo se radom [9] i pogledajmo kako izgleda inverz kovarijacijske matrice koristeći Schurov komplement

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C) & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad 4.2.$$

Iz formule 4.2. možemo izvesti sličan identitet, malo manje zanimljiv u sferi linearne algebre, ali korisniji u onome što želimo postići.

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \qquad 4.3.$$

Pokušajmo kratko objasniti ljepotu ovog rezultata kroz dvije analizirane metode. Jasno je da je sam inverz kovarijacijske matrice nužan dio Markowitzeve optimizacije, ali promotrimo li prvu matricu s desne strane jednakosti, možemo vidjeti djelić onoga što radi hijerarhijski paritet rizika. Naime, HRP ne postavlja elemente izvan dijagonale na nulu, ali ih ne koristi, što se svodi na isto. Također, možemo uočiti mogućnost umetanja dijela informacija iz B u kovarijacijsku matricu. Ideju je potrebno dalje analitički razraditi, no rezultati koje smo dobili su dobra polazišna točka.

4.2. Hijerarhijska shema

Optimizacija očekivanja i varijance i hijerarhijski paritet rizika, u teoriji su dvije potpuno različite metode izgradnje portfelja. Jedna traži globalno rješenje u cijelom skupu podataka, a druga pretpostavlja hijerarhiju u podacima i do alokacije dolazi spuštanjem kroz tu hijerarhiju. No, što bi se dogodilo ako i u optimizacijski postupak uspijemo uvesti dio hijerarhije?

Pogledajmo još jednom formulu 4.3. i iskoristimo ju za izračunavanje težina portfelja minimalne varijance. Dobivamo težine u rekurzivnom obliku

$$\mathrm{w}(\Sigma) \propto \Sigma^{-1}\vec{1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1}(\vec{1} - BD^{-1}\vec{1}) \\ (D - CA^{-1}B)^{-1}(\vec{1} - CA^{-1}\vec{1}) \end{pmatrix} \qquad 4.4.$$

To je upravo ono što smo htjeli. Dobili smo rekurzivnu razdiobu po hijerarhiji koju je pronašao HRP, a provodimo čistu Markowitzevu optimizaciju. Također, ako označimo s $\frac{1}{v(A)} = (A - BD^{-1}C)^{-1}$ i $\mathrm{w}(A) = (\vec{1} - BD^{-1}\vec{1})$ dobivamo isti osnovni oblik rekurzivne hijerarhijske sheme kao što imamo i u HRP-u

$$w(\Sigma) \propto \begin{pmatrix} \dfrac{1}{v(A)}\mathrm{w}(A) \\ \dfrac{1}{v(D)}\mathrm{w}(D) \end{pmatrix}$$

Radi preglednosti, poslužimo se notacijom iz [5] i definirajmo oznake za dobivene matrice i vektore kao

$$A^c = A - BD^{-1}C \qquad 4.5.$$

$$D^c = D - CA^{-1}B \qquad 4.6.$$

$$b_A = \vec{1} - BD^{-1}\vec{1} \qquad 4.7.$$

$$b_D = \vec{1} - CA^{-1}\vec{1} \qquad 4.8.$$

Dakle, težine portfelja minimalne varijance računamo rekurzivno po formuli

$$\mathrm{w}(\Sigma) \propto \Sigma^{-1}\vec{1} = \begin{pmatrix} (A^c)^{-1} b_A \\ (D^c)^{-1} b_D \end{pmatrix} \qquad 4.9.$$

4.3. Konačno rješenje

Iako je rekurzivno računanje težina u optimizaciji očekivanja i varijance intrigantno, uvođenje hijerarhijske sheme bilo je iz drugih razloga. Naime, osim drugačijeg pogleda na sam postupak izračuna, krajnji rezultat se nije pomakao od klasične Markowitzeve optimizacije, niti je riješio problem računanja inverza kovarijacijske matrice, koji se i dalje računa. Glavna ideja i dalje ostaje kombiniranjem metoda omogućiti upravitelju portfelja apsolutnu slobodu i jednostavan izbor metode izgradnje portfelja ili neke njihove kombinacije.

Na tragu takve mogućnosti, definirat ćemo nove parametre. Neka su $\gamma, \delta \in [0,1]$ parametri naše nove metode izgradnje portfelja takvi da vrijedi

$$A^c(\gamma) = A - \gamma BD^{-1}C \qquad 4.10.$$

$$b_A(\delta) = \vec{1} - \delta BD^{-1}\vec{1} \qquad 4.11.$$

Analogno definiramo $D^c(\gamma) = D - \gamma CA^{-1}B$ i $b_D(\delta) = \vec{1} - \delta CA^{-1}\vec{1}$.

Nakon provedbe procesa hijerarhijskog grupiranja i kvazidijagonalizacije, ovakvom definicijom funkcija po parametrima γ, δ dobivamo mogućnost da za odabir parametara $\gamma = \delta = 1$, dobivamo alokaciju sredstava hijerarhijskom shemom Markowitzeve optimizacije koristeći Schurov komplement. S druge strane, odabirom $\gamma = \delta = 0$, u algoritam ulaze samo matrice A, D i vektori jedinica, odnosno radimo običan algoritam rekurzivne bisekcije kojim dobivamo hijerarhijski paritet rizika. Ono što je novo i drugačije je da za $\gamma, \delta \in (0,1)$, dobivamo kombinaciju dvije metode, koja nudi investitoru željenu slobodu izbora i mogućnost korištenja dijela izgubljenih informacija iz hijerarhijskog pariteta rizika. U nastavku je dan algoritam alokacije sredstava nove metode.

1. Algoritam inicijaliziramo s:

a. postavljanjem liste svih investicija: $L = \{L_0\}$, $L_0 = \{n\}_{n=1,\dots,N}$

b. definiranjem vektora početnih težina investicijama: $w = \vec{1}$

c. određivanjem vrijednosti parametara γ, δ

2. Ako $|L_i| = 1, \forall L_i \in L$

a. izračunaj konačne težine kao $w_n = w_n(\gamma \frac{1-\sigma_n}{\sigma_n} + 1)$, $\forall n = 1, \dots, N$, gdje je σ_n varijanca investicije n

b. zaustavi algoritam

3. Za svaki $L_i \in L$ takav da $|L_i| > 1$:

a. podijeli L_i na pola u dva podskupa $L_i^{(1)} \cup L_i^{(2)} = L_i$, čuvajući poredak

b. definiraj matrice A, B, C, D iz kovarijacijske matrice Σ uz pomoć $L_i^{(1)}, L_i^{(2)}$

c. izračunaj $A^c(\gamma)$ i $D^c(\gamma)$ iz definiranih matrica i koristi ih kao modificirane podmatrice kovarijacijske matrice

d. rastavi vektor težina w na $w^{(1)}, w^{(2)}$ prema elementima iz $L_i^{(1)}, L_i^{(2)}$

e. definiraj varijancu od $L_i^{(j)}$ kao kvadratnu formu $\widetilde{V}_i^{(j)} = \widetilde{w}_i^{(j)^T} V_i^{(j)} \widetilde{w}_i^{(j)}$, gdje je $V_i^{(j)}$ podmatrica kovarijacijske matrice koja sadrži elemente iz $L_i^{(j)}$, a $\widetilde{w}_i^{(j)} = diag\left[V_i^{(j)}\right]^{-1} \frac{1}{tr\left[diag\left[V_i^{(j)}\right]^{-1}\right]}$, gdje su $diag$, tr redom operatori dijagonale i traga matrice

f. izračunaj alokacijski faktor $\alpha_i(\delta) = 1 - (1 - \delta) \frac{\widetilde{V}_i^{(1)}}{\widetilde{V}_i^{(1)} + \widetilde{V}_i^{(2)}}$

g. pomnoži $w^{(1)}$ s $\alpha_i(\delta)$

h. pomnoži $w^{(2)}$s $(1 - \alpha_i(\delta))$

i. modificiraj vektore težina tako da je $b_A(\delta) = w^{(1)} - \delta B D^{-1} w^{(2)}$, $b_D(\delta) = w^{(2)} - \delta C A^{-1} w^{(1)}$

4. Vrati se na korak 2 koristeći modifikacije $A^c(\gamma)$ i $D^c(\gamma)$ kao kovarijacijske matrice i $b_A(\delta), b_D(\delta)$ kao vektore težina.

Algoritam ima elemente rekurzivne bisekcije i rekurzivne alokacije Markowitzeve optimizacije. Količina korištene metode regulirana je parametrima γ, δ. Lako možemo primijetiti da metoda za svaki $\gamma, \delta \neq 0$, koristi inverz dijelova kovarijacijske matrice, što nam se može činiti kao korak unazad od same ideje hijerarhijskog pariteta rizika.

Posljedično, Schurova metoda zahtjeva regularnost i pozitivnu semidefinitnost kovarijacijske matrice kao i moderna teorija portfelja, čime nasljeđuje i njezine nedostatke. Međutim, ono što dobivamo po cijenu tih uvjeta je proizvoljna mogućnost ugrađivanja podataka izvan dijagonale blok matrice u proces izgradnje portfelja, čineći pritom korak prema optimizaciji.

5. Testiranje rezultata

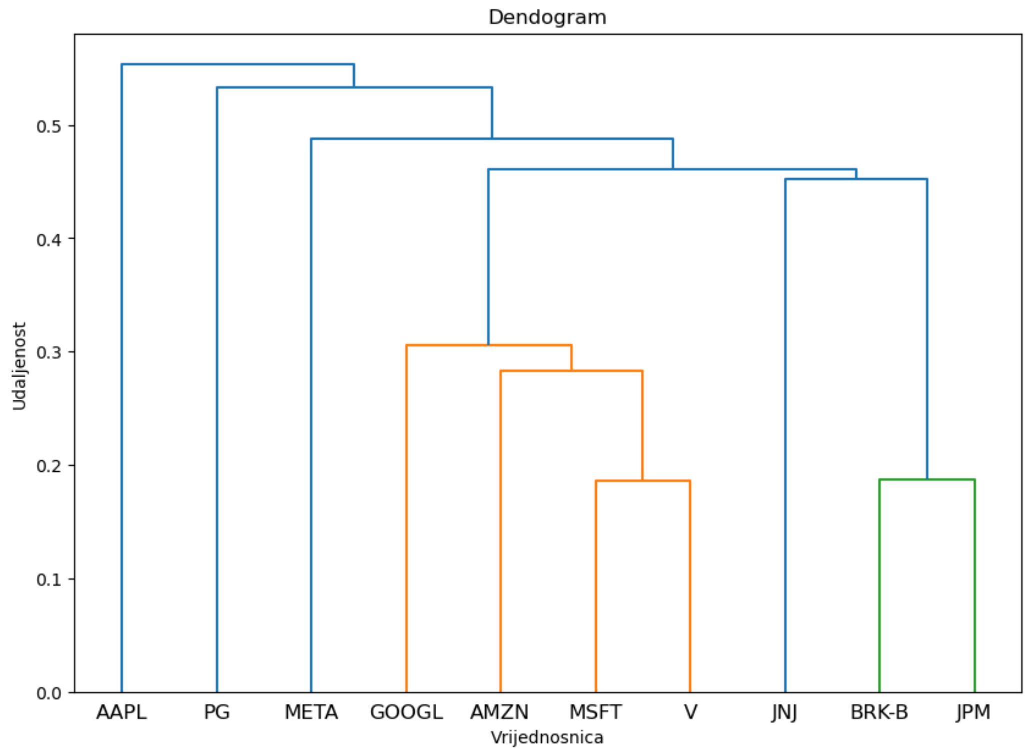
5.1. Hijerarhijski paritet rizika i portfelj minimalne varijance

Ostaje nam pokazati korištenje Schurove metode izgradnje portfelja u praksi i kakve rezultate daje u odnosu na preostale dvije analizirane metode. Sve metode ćemo testirati unatražnim testiranjem (engl. *backtesting*) na stvarnim podacima, koristeći podatke iz posljednjih pet godina i mjesečnu realokaciju sredstava.

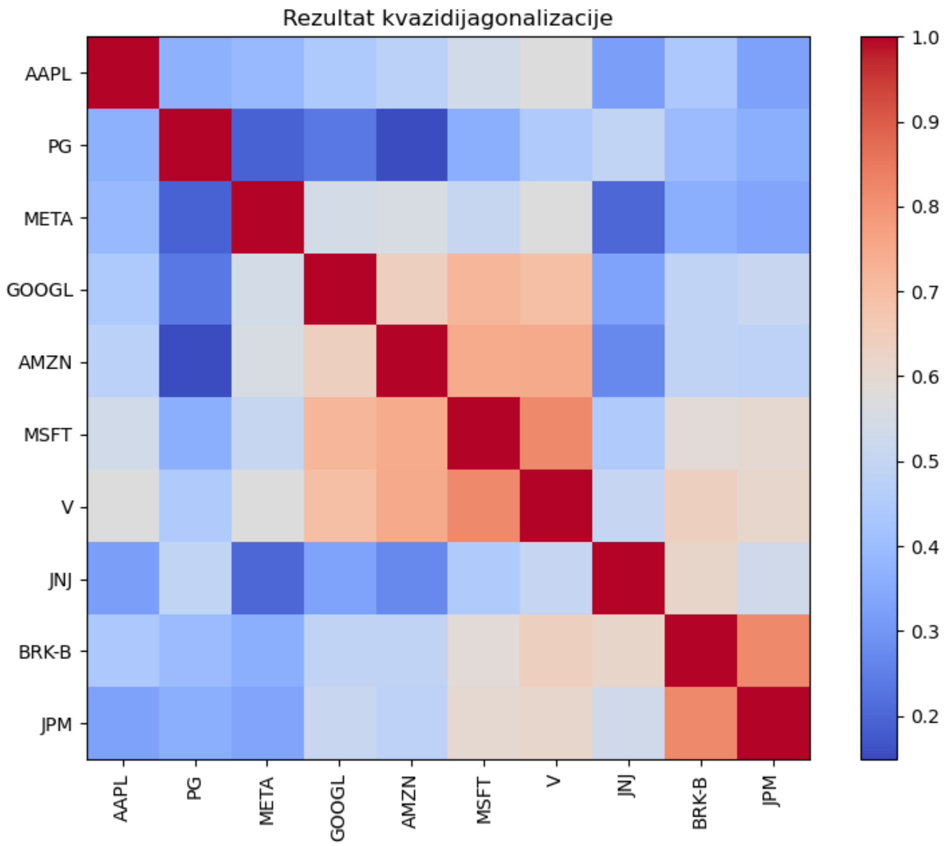
Prvi izazov s kojim se susrećemo je definiranje skupa investicija sa što manjim korištenjem znanja koja imamo o stanju na tržištu. Definirajmo skup investicija kao skup deset najvećih Američkih kompanija prema tržišnoj vrijednosti krajem kolovoza 2019. S obzirom da su najveće svjetske kompanije uvijek u najvećem fokusu javnosti i investitora, dobivamo jedan vrlo realan skup investicija iz tog vremena. Upoznajmo se kratko s kompanijama.

- Microsoft (MSFT) – Informacijska tehnologija
- Apple (AAPL) – Informacijska tehnologija
- Amazon (AMZN) – Diskrecijska potrošnja
- Alphabet (GOOGL/GOOG) – Informacijska tehnologija / Komunikacijske usluge
- Facebook (Danas Meta (META)) (FB) – Komunikacijske usluge
- Berkshire Hathaway (BRK.B) – Financije
- Johnson & Johnson (JNJ) – Zdravstvo
- Visa (V) – Financije
- JPMorgan Chase (JPM) – Financije
- Procter & Gamble (PG) – Potrošačka roba

Za početnu alokaciju sredstava koristimo podatke iz dvije godine prije testiranja. Na skupu investicija provodimo hijerarhijsko grupiranje i kvazidijagonalizaciju. Grafički prikaz rezultata dan je u nastavku



Slika 5: Rezultat grupiranja na stvarnim podacima



Slika 6: Rezultat kvazidijagonalizacije na stvarnim podacima

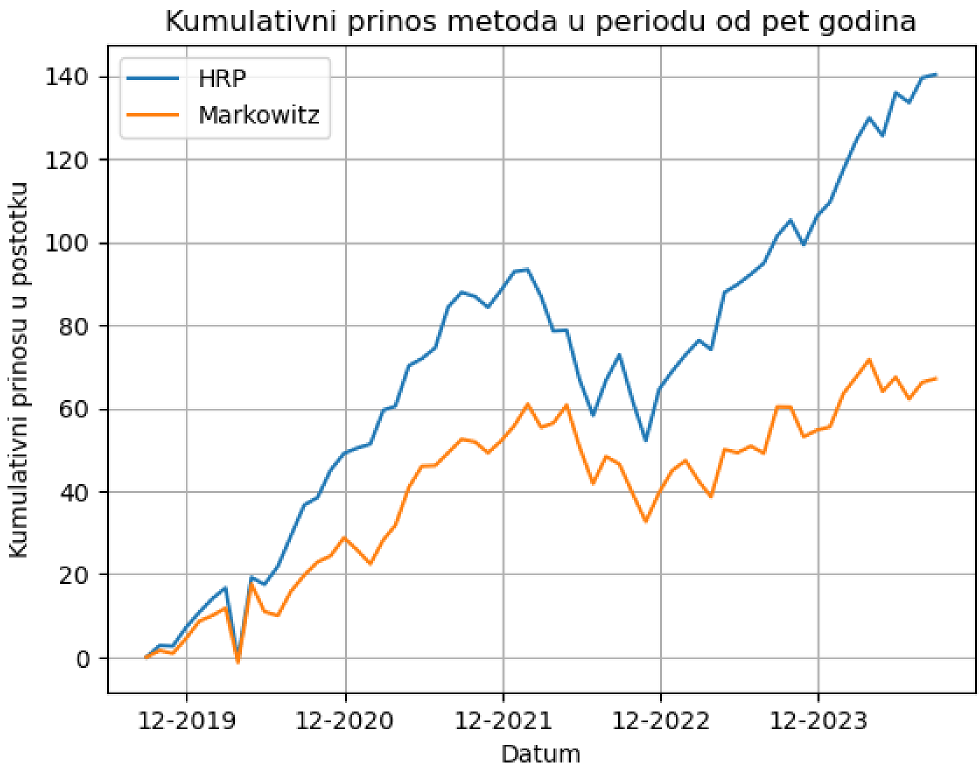
Iz gornjih slika jasno možemo razabrati grupe među vrijednosnicama, kao i one poprilično različite od ostalih. Provedimo metode HRP-a i Markowitzeve optimizacije i usporedimo rezultate.

Tablica 5.1. Alokacija i standardne devijacije dionica

	HRP portfelj	MV portfelj	σ
AAPL	8.96%	-1.44%	0.276
PG	21.38%	34.74%	0.179
META	6.37%	3.62%	0.305
GOOGL	6.34%	5.32%	0.239
AMZN	4.46%	-3.11%	0.285
MSFT	11.4%	8.18%	0.197
V	14.37%	22.58%	0.176
JNJ	14.61%	25.80%	0.182
BRK.B	6.38%	0.51%	0.204
JPM	5.73%	3.78%	0.215

Tablica 5.1 nam ukazuje na nekoliko jasnih razlika u rezultatima dvije metode. Iako obje metode zapravo imaju isti cilj, stvoriti portfelj sa što manjom varijancom, rezultati su prilično različiti. Odmah na prvi pogled možemo primijetiti da se podudaraju u tri dionice kojima daju najviše sredstava, čak i u njihovom poretku, ali portfelj minimalne varijance je u toj alokaciji puno agresivniji dodjeljujući više od 80% sredstava tim investicijama, za razliku od oko 50% koje im daje HRP. Druga razlika koju možemo primijetiti je u mogućnosti dodjeljivanja negativnih težina investicijama Markowitzevom optimizacijom, koju smo dozvolili ne dodajući uvjete na sam postupak optimizacije.

Dvije metode, iako imaju isti konačni cilj, zapravo su iznimno različite. Analizirat ćemo dvije metode uz pomoć metrika kumulativnog prinosa, prosječnog prinosa, standardne derivacije prinosa, maksimalnog pada i Sharpeovog omjera. Počnimo s analizom kumulativnog prinosa.



Slika 7: Kumulativni prinos metoda u testiranom periodu

Jasno je vidljivo da hijerarhijski paritet rizika uistinu radi ono što de Prado tvrdi, a to je bolji performans izvan uzorka. Portfelj minimalne varijance skupo plaća svoju koncentraciju u manje volatilnoj imovini i gubi velik dio mogućih prinosa. Pogledajmo je li HRP jednako dominantan u ostalim metrikama.

Tablica 5.2. Analiza metrika HRP-a i Markowitzeve optimizacije

	$R[P]$	$Avg\_R[P]$	σ_P	Max_dd	$Sharpe$
HRP portfelj	140.35%	19.17%	0.1574	-21.33%	0.9638
MV portfelj	67.09%	10.81%	0.1542	-17.60%	0.4418

Oba portfelja su uspješno obavila zadaću smanjenja volatilnosti prinosa, što možemo vidjeti kroz standardnu devijaciju koja je manja od svake pojedinačne standardne devijacije dionica. Sama standardna devijacija oba portfelja je vrlo slična i tu ne dolazi do neke značajne razlike. Ono gdje portfelj minimalne varijance dominira, je maksimalni zabilježeni pad, koji iznosi samo 17.6%. Već smo spominjali znatno veće prinose HRP portfelja koji se onda odražavaju i na veći Sharpeov omjer takve strategije.

Možemo zaključiti da je portfelj izgrađen hijerarhijskim paritetom rizika dao puno bolje rezultate od portfelja minimalne varijance na promatranim metrikama. Mala žrtva u varijabilnosti i maksimalnom padu, donijela je gotovo dvostruko bolje prosječne godišnje prinose i više nego dvostruko bolji Sharpeov omjer, kao mjera prinosa portfelja u odnosu na rizik.

5.2. Schur kao poboljšanje hijerarhijskog pariteta rizika

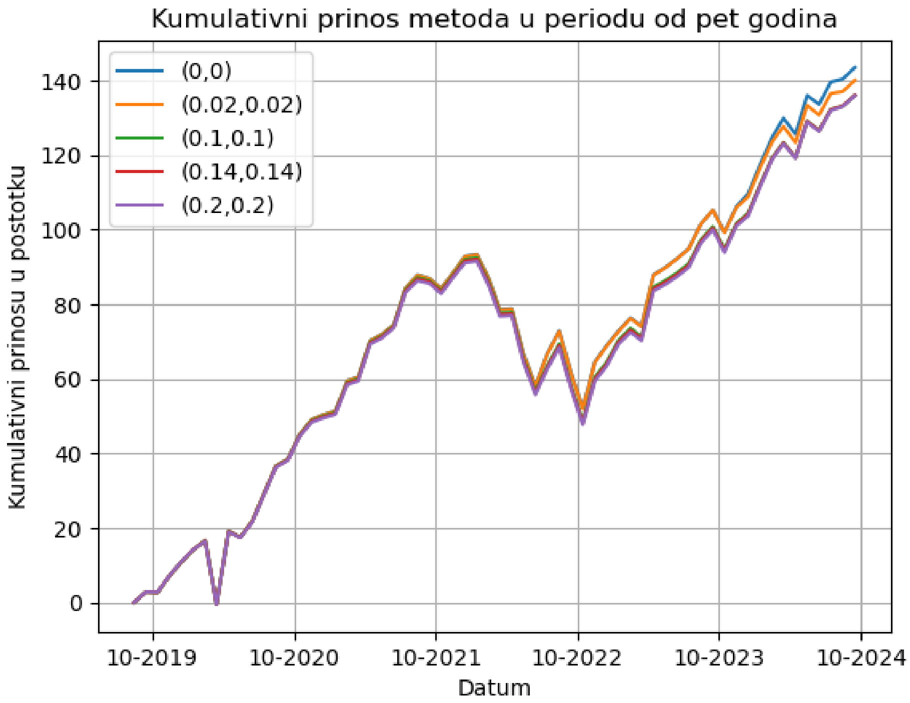
Usporedbnom rezultata hijerarhijskog pariteta rizika i Markowitzeve optimizacije, vidimo da je logičnije pokušati poboljšati rezultat blagim udaljavanjem od HRP-a prema portfelju minimalne varijance, nego obrnuto. U skladu s tim, radimo unatražno testiranje i počevši od parametara (0, 0) (vrijednost parametara (γ, δ)), pomičemo se prema portfelju minimalne varijance. Testiranje je napravljeno za parametre između (0,0) i (0.2, 0.2), pomičući se za (0.02, 0.02).

Tablica 5.3. Početna alokacija Schurovom metodom

	(0,0)	(0.02,0.02)	(0.1,0.1)	(0.14,0.14)	(0.2,0.2)
AAPL	8.96%	9.00%	9.07%	9.06%	8.97%
PG	21.38%	21.36%	21.43%	21.56%	21.87%
META	6.37%	6.39%	6.44%	6.46%	6.47%
GOOGL	6.34%	6.46%	6.91%	7.12%	7.44%
AMZN	4.46%	4.52%	4.78%	4.89%	5.03%
MSFT	11.40%	11.31%	10.95%	10.75%	10.46%
V	14.37%	14.35%	14.25%	14.21%	14.17%
JNJ	14.61%	14.54%	14.32%	14.25%	14.19%
BRK.B	6.38%	6.37%	6.29%	6.22%	6.08%
JPM	5.73%	5.70%	5.56%	5.47%	5.30%

Vidimo da se sama alokacija ne mijenja previše, što je i logično jer smo parametrima jako blizu parametrima hijerarhijskog pariteta rizika. Razlike su možda male, ali nismo ni htjeli otići predaleko od HRP-a, a ovo nam daju mali koraci prema optimizaciji.

Usporedimo metode iz tablice 5.3. na temelju kumulativnog prinosa.



Slika 8: Usporedba kumulativnih prinosa Schurove metode za različite parametre

Možemo primijetiti da na skupu investicija korištenom u prošloj usporedbi, HRP ponovno pobjeđuje, ali razlika je puno manja. Čini se da nam pomak prema optimizaciji nije donio ništa sa strane prinosa. Pogledajmo ostale metrike.

Tablica 5.4. Analiza metrika Schurove metode

	$R[P]$	$Avg\_R[P]$	σ_P	Max_dd	$Sharpe$
(0,0)	143.43%	19.48%	0.1561	-21.33%	0.991
(0.02,0.02)	139.99%	19.13%	0.1560	-21.37%	0.970
(0.1,0.1)	135.97%	18.73%	0.1559	-22.78%	0.945
(0.14,0.14)	135.99%	18.74%	0.1558	-22.83%	0.946
(0.2,0.2)	135.83%	18.72%	0.1557	-22.89%	0.946

Primijećujemo da se udaljavanjem od hijerarhijskog pariteta rizika, u ovom slučaju, blago smanjuje varijanca portfelja, ali cijena toga je manji konačni kumulativni prinos. Takav rezultat ima smisla jer smo gornjom analizom vidjeli da portfelj minimalne varijance generalno ima manju varijancu, ali i manje prinose od hijerarhijskog pariteta rizika.

Ono što ova metoda omogućuje je individualan izbor investitoru o količini potencijalnog budućeg prinosa kojeg želi žrtvovati za manju volatilnost i potencijalne gubitke. Ni jedna metoda nije univerzalno najbolja, ali pametnim izborom parametara u pravom trenutku, upravitelj portfeljem može izvući najbolje od obje metode.

Zaključak

Analizom dvije metode izgradnje portfelja ukazali smo na neke njihove prednosti i nedostatke te smo opisali kako ih upotrijebiti. Korištenjem Schurovog komplementa naizgled smo zakomplicirali elegantno rješenje izgradnje portfelja bez računanja inverzne matrice, koje nudi HRP. Međutim, uvođenjem parametara γ, δ dajemo upravitelju portfelja mogućnost odabira svoje „vlastite" metode izgradnje portfelja. Schurova hijerarhijska shema ne rješava problem inverza kovarijacijske matrice, ali pametnim odabirom parametara može se smanjiti značaj nestabilnosti inverza u cjelokupnoj izgradnji portfelja, a u isto vrijeme dati jedan korak prema optimizaciji. S druge strane, skeptici algoritma hijerarhijskog pariteta rizika ovime su dobili mogućnost ostati blizu optimizaciji očekivanja i varijance, a ipak uvesti nužnu hijerarhiju u svoj portfelj po vlastitim pravilima.

Literatura

[1] Harry Markowitz. Portfolio selection. The Journal of Finance, 7(1):77–91, 1952.

ISSN 00221082, 15406261.

[2] Marcos M. Lopez de Prado. Building diversified portfolios that outperform out of sample. The Journal of Portfolio Management, 42:59 – 69, 2016.

[3] Calkin, N. and M. López de Prado. "The Topology of Macro Financial Flows: An Application of Stochastic Flow Diagrams." Algorithmic Finance, Vol. 3, No. 1, 2014, pp. 43-85. Available at http://ssrn.com/abstract=2379319

[4] Dario Deković. Building diversified portfolios using the risk parity principle and machine learning, Master's thesis, University of Zagreb. Faculty of Electrical Engineering and Computing, 2023.

[5] Microprediction. Schur Complementary Portfolios — A Unification of Machine Learning and Optimization-Based Allocation, Medium, 2022.

[6] Marek Capinski i Tomasz Zastawniak. Mathematics for Finance: An introduction to financial engineering. Springer, 2011.

[7] Harry Markowitz. Avoiding the Downside: A Practical Review of the Critical Line Algorithm for Mean-Semivariance Portfolio Optimization, Chapter 17 in Handbook of Applied Investment Research, 2020, pp 369-415 from World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[8] Dora Mifka. Schurov komplement, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu Prirodoslovno-matematički fakultet Matematički odsjek, 2018.

[9] Jean Gallier. The Schur Complement and Symmetric Positive Semidefinite (and Definite) Matrices, Penn Engineering, 1-12, 2010.

[10] Bailey, D. and M. López de Prado. "Balanced Baskets: A new approach to Trading and Hedging Risks." Journal of Investment Strategies, Vol. 1, No. 4, 2012, pp. 21-62. Available at http://ssrn.com/abstract=2066170

[11] Bailey, D. and M. López de Prado. "An open-source implementation of the critical-line algorithm for portfolio optimization." Algorithms, Vol. 6, No. 1, 2013, pp. 169-196. Available at http://ssrn.com/abstract=2197616

[12] Clarke, R., H. De Silva, and S. Thorley. "Portfolio constraints and the fundamental law of active management." Financial Analysts Journal, Vol. 58, 2002, pp. 48–66.

[13] Brualdi, R. The Mutually Beneficial Relationship of Graphs and Matrices. Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional Conference Series in Mathematics, Nr. 115, 2010.

[14] Rokach, L. and O. Maimon. "Clustering methods", in Data mining and knowledge discovery handbook. Springer, U.S. 2005. pp. 321-352.

[15] Michaud, R. Efficient asset allocation: A practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation. Boston: Harvard Business School Press, 1998.

[16] Ledoit, O. and M. Wolf. “Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns With an Application to Portfolio Selection.” Journal of Empirical Finance, Vol. 10, No. 5, 2003, pp. 603-621.

Sažetak

Petar Knežević, *Upravljanje portfeljem uz pomoć Schurovog komplementa i strojnog učenja: Napredni pristup izgradnji investicijskog portfelja*

Izgradnja portfelja ključan je izazov svakog upravitelja portfeljem. Investitori već više od pola stoljeća traže optimalnu metodu balansiranja rizika i prinosa. U ovom radu analiziramo dvije metode alokacije portfelja, optimizacijsku metodu moderne teorije portfelja, i metodu alokacije strojnim učenjem hijerarhijskog pariteta rizika. Nadalje, uvodimo matematički pojam Schurovog komplementa i nudimo novi obećavajući pristup izgradnji portfelja koji, ne samo da kombinira analizirane metode, nego i ostavlja mogućnost upravitelju portfelja da u ovisnosti o situaciji dođe po želji blizu svakoj od metoda.

Ključne riječi: Financijska matematika, Teorija portfelja, Schurov komplement, upravljanje rizikom

Summary

Petar Knežević, *Portfolio Management Using the Schur Complement and Machine Learning: An Advanced Approach to Investment Portfolio Construction*

Portfolio construction is a crucial challenge for every portfolio manager. For more than half a century, investors have been seeking the optimal method for balancing risk and return. This paper analyzes two portfolio allocation methods: the optimization method from modern portfolio theory and the machine learning-based hierarchical risk parity method. Furthermore, we introduce the mathematical concept of the Schur complement and propose a new promising approach to portfolio construction that combines the analyzed methods while offering portfolio managers the flexibility to move closer to either method depending on the situation.

Keywords: Financial Mathematics, Portfolio Theory, Schur Complement, Risk Management