SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Krznarić

Weierstrassova reprezentacijska formula minimalnih B-pravčastih ploha u Lorentz-Minkowskijevom prostoru

Zagreb, 2022.

Ovaj rad izrađen je na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta pod vodstvom prof. dr. sc. Željke Milin-Šipuš i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2021./2022.

Sadržaj

Uvod

Proučavanje minimalnih ploha, otkako ih je uveo Lagrange $1760.$ pa i danas, predstavlja veliki interes matematičara zbog toga što se minimalne plohe pojavljuju u raznim granama matematike (poput varijacijskog računa, matematičke fizike i kompleksne geometrije), no one također igraju bitnu i značajnu ulogu i u raznim drugim znanostima poput fizike, kemije, biologije i arhitekture. Povijest teorije minimalnih ploha nam je pokazala koliko je zahtjevno izučavati takve plohe zbog njihove složenosti i na tom su povijesnom putu izvedene mnoge metode koje su matematičarima služile kako bi savladali te izazove i što bolje razumjeli tu važnu klasu ploha. Jedna od tih metoda, za čiji je razvoj zaslužan njemački matematičar Karl Weierstrass, naziva se Weierstrassova reprezentacija minimalnih ploha i ona je izuzetno moćan alat za proučavanje minimalnih ploha zbog toga što se tom metodom minimalna ploha opisuje pomoću kompleksnih brojeva i holomorfnih funkcija, pa ona povezuje područja diferencijalne geometrije i kompleksne analize i taj nam spoj tih matematičkih disciplina omogućuje izučavanje geometrije ploha pomoću vrlo jake teorije funkcija kompleksne varijable. U svojoj originalnoj formi, Weiesrstrassova reprezentacijska formula opisivala je samo minimalne plohe u euklidskom prostoru budući da u tom doba koncept neeuklidske geometrije nije još uzeo maha, međutim već krajem 19., a svakako tokom 20. stoljeća, postalo je evidentno da euklidska geometrija ne predstavlja apsolutan model geometrije stvarnosti. Zbog toga, novi zadatak postaje razumjeti i opisati svojstva geometrijskih objekata, među kojima su svakako i plohe, u tim novim ambijentalnim prostorima koji nisu euklidski. Jedan od tih neeuklidskih prostora jest i Lorentz-Minkowskijev prostor, a upravo taj prostor čini ambijent u kojemu se proučavaju plohe u ovom radu.

U prvom poglavlju ovog rada dajemo vrlo elementarni pregled već spomenutog Lorentz-Minkowskijevog prostora, u oznaci $\mathbb{R}^3_1$, kao uređenog para skupa $\mathbb{R}^3$ i simetričnog bilinearnog funkcionala kojim je taj prostor snabdjeven (tzv. pseudoskalarni produkt). Taj će funkcional bitno utjecati na samu geometriju tog prostora pa se također u ovom poglavlju bavimo geometrijskim posljedicama njegove definicije. Osim toga, uvodimo i glavne geometrijske objekte koji će nam biti važni, a to su parametrizirane krivulje i plohe te se bavimo najosnovnijim pojmovima koji su vezani uz njih.

Dalje, u drugom poglavlju uvodimo pojam 'hiperboličkih brojeva' koji će činiti algebru nad kojom ćemo parametrizirati plohe od interesa. Najprije opisujemo glavna algebarska svojstva tih brojeva, a nakon toga na skupu svih hiperboličkih brojeva uvodimo i opisujemo glavne pojmove i rezultate diferencijalnog računa na toj algebri koji će biti esencijalni za metode korištene u ovom radu.

Treće poglavlje za cilj ima uvesti glavnu klasu ploha kojom se u ovom radu bavimo, a to su 'B-pravčaste plohe' i one su određene parametriziranom krivuljom u prostoru $\mathbb{R}^3_1$ i glatkim vektorskim poljem duž te krivulje. Proučit ćemo osnovna svojstva te klase ploha, opisat ćemo metodu kojom ćemo generirati B-pravčaste plohe i onda ćemo na raznim primjerima vidjeti kako se konkretno koristi ta metoda.

Za kraj, u četvrtom poglavlju, koje predstavlja i originalni doprinos ovoj temi, izvodimo Weierstrassovu reprezentacijsku formulu za prethodno opisane B-pravčaste plohe. U samom izvodu ćemo, uz završni oblik te reprezentacije, kao posljedicu dobiti i konkretne formule kojima možemo eksplicitno odrediti funkcije koje čine Weierstrassovu reprezentaciju. Te se funkcije nazivaju 'Weierstrassovi podaci'. Dodatno, okarakterizirat ćemo situacije u kojima je moguće, odnosno u kojima nije moguće, reprezentirati danu minimalnu B-pravčastu plohu s obzirom na geometrijska svojstva njenih sastavnica, dakle pripadne krivulje i glatkog vektorskog polja duž nje. Na samom kraju primjenjujemo metodu koju smo izveli kako bismo odredili Weiestrassove podatke konkretnih B-pravčastih ploha.

1 Lorentz-Minkowskijev prostor

Cilj ovog poglavlja jest opisati svojstva Lorentz-Minkowskijevog prostora koja ćemo korisiti u ovom radu te uvesti geometrijske objekte kojima ćemo se baviti. Naš će pristup biti relativno elementaran, a detaljnija analiza može se pronaći u [12] i [4].

Definicija 1.1. ***Lorentz-Minkowskijev prostor****, u oznaci $\mathbb{R}^3_1$, jest uređeni par realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i simetričnog bilinearnog preslikavanja $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiranog s*

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Napomena 1.2.

1. *Preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nije skalarni produkt budući da ono nije pozitivno definitno. To se preslikavanje još naziva i* ***pseudoskalarni produkt****.*

2. *Preko pseudoskalarnog produkta možemo definirati* ***pseudonormu*** *vektora $x \in \mathbb{R}^3_1$ sa $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$. Preslikavanje $\|\cdot\|$ nije norma u klasičnom smislu budući da općenito $\|x\| = 0$ ne povlači da je $x = 0$. Ako je $\|x\| = 1$, onda kažemo da je vektor x* ***normiran*** *ili* ***jedinični****.*

3. *Vremenski vektori i prostorni vektori različiti od nul-vektora mogu se normirati tako da se naprosto skaliraju recipročnom vrijednošću njihove pseudonorme. Svjetlosne vektore ne možemo normirati.*

4. *Za vektore $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ kažemo da su* ***ortogonalni*** *ako je $\langle x, y \rangle = 0$ i pišemo $x \perp y$.*

Definicija 1.3. *Za vektor $x \in \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je*

1. ***prostorni** ako je $\langle x,x\rangle > 0$ ili ako je $x = 0$,*
2. ***vremenski** ako je $\langle x,x\rangle < 0$,*
3. ***svjetlosni** ako je $\langle x,x\rangle = 0$.*

Nadalje, u Lorentz-Minkowskijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$ imamo i dobro definirani **vektorski produkt** vektora $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ i on je dan formulom

$$x \times y = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Vrijedi da je $x \times y \perp x, y$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^3_1$.

Glavni geometrijski objekti kojima se bavimo u ovom radu jesu krivulje i plohe Lorentz-Minkowskijevog prostora. Njihove definicije jesu iste kao i u euklidskom slučaju, međutim njihova se svojstva razlikuju od svojstava krivulja i ploha u $\mathbb{R}^3$, jer je sama geometrija prostora $\mathbb{R}^3_1$ drugačija od euklidske geometrije zbog pseudoskalarnog produkta kojim je taj prostor snabdjeven.

Definicija 1.4. *Za glatko preslikavanje $c : I \to \mathbb{R}^3_1$, pri čemu je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, kažemo da je **parametrizirana krivulja** u $\mathbb{R}^3_1$. Nadalje, za parametriziranu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je **regularna** ako je $c'(t) \neq 0$ za sve $t \in I$. **Trag** parametrizirane krivulje jest skup $c(I)$ i označavamo ga sa c^*.*

Definicija 1.5. ***Parametrizirana (imerzirana) ploha** u $\mathbb{R}^3_1$ jest glatko preslikavanje $\varphi : U \to \mathbb{R}^3_1$, pri čemu je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, takvo da je diferencijal $d\varphi_x \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3_1)$ injektivan za svaki $x \in U$. **Nosač** parametrizirane plohe φ jest skup $\varphi(U)$.*

Definicija 1.6. *Za povezan skup $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je* ***(regularna) ploha*** *u $\mathbb{R}^3_1$ ako za svaku točku $p \in S$ postoji otvoren podskup $U \subseteq \mathbb{R}^2$ i glatko preslikavanje $\varphi : U \to \mathbb{R}^3_1$ koje zadovoljava sljedeće:*

1. *$\varphi(U)$ je otvorena okolina točke p u S,*
2. *φ je homeomorfizam na svoju sliku,*
3. *$d\varphi_x \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3_1)$ je injektivan za svaki $x \in U$.*

Za svako preslikavanje φ koje zadovoljava gornja svojstva kažemo da je ***lokalna parametrizacija plohe*** *S oko točke p.*

Uočimo kako parametrizirane plohe i regularne plohe nisu iste vrste geometrijskih objekata i ti objekti posjeduju drugačija svojstva, primjerice, topološka svojstva (vidi [1] i [6]). U nekim je situacijama "prirodnije" raditi sa parametriziranim plohama nego sa općenitim lokalnim parametrizacijama, pa se prirodno postavlja pitanje u kojoj mjeri smijemo umjesto sa plohama (dakle, podskupovima od $\mathbb{R}^3_1$) raditi sa parametriziranim plohama (dakle, preslikavanjima)? Odgovor na to pitanje je dan u sljedećoj poznatoj činjenici iz diferencijalne geometrije prostora $\mathbb{R}^3_1$ koju navodimo bez dokaza.

Propozicija 1.7. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $\varphi : U \to \mathbb{R}^3_1$ parametrizirana ploha i $x \in U$ proizvoljna točka. Tada postoji otvorena okolina V točke x u $\mathbb{R}^2$ za koju vrijedi da je $V \subseteq U$ i takva da je $\varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^3_1$ regularna ploha.*

Definicija 1.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ regularna ploha i $p \in S$ točka plohe S.* ***Tangencijalni vektor*** *na S u točki p je svaki vektor oblika $c'(0)$, pri čemu $c : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to \mathbb{R}^3_1$ parametrizirana krivulja čiji je trag sadržan u S i vrijedi $c(0) = p$. Skup svih tangencijalnih vektora na S u točki p označavamo sa T_pS i nazivamo ga* ***tangencijalna ravnina*** *plohe S u točki p.*

Napomena 1.9. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ ploha, $p \in S$ točka i neka je $\varphi : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S oko točke p. Tada se, analogno kao i u euklidskom slučaju, pokazuje da je $T_pS = d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2)$, pri čemu je $x_0 \in U$ točka za koju je $\varphi(x_0) = p$. Dakle, T_pS jest vektorski potprostor od $\mathbb{R}^3_1$ dimenzije 2. Također, može se pokazati da T_pS ne ovisi o izboru lokalne parametrizacije φ, već da samo ovisi o plohi S i točki p.*

Kao i u euklidskom slučaju, tangencijalna ravnina plohe jest od esencijalne važnosti za proučavanje geometrijskih svojstava plohe. Također, u prethodnoj smo napomeni vidjeli da je tangencijalna ravnina plohe u točki ustvari vektorski potprostor od $\mathbb{R}^3_1$, a budući da u $\mathbb{R}^3_1$ imamo tri vrste vektora (vidi Definiciju 1.3.), na temelju te podjele imat ćemo i tri vrste ploha koje će se razlikovati po tipu njihovih tangencijalnih ravnina u točkama plohe.

Definicija 1.10. *Za potprostor $V \leq \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je:*

1. ***prostorni** ako je svaki vektor $x \in V$ prostorni,*
2. ***vremenski** ako postoji vektor $x \in V$ koji je vremenski,*
3. ***svjetlosni** ako V sadrži barem jedan svjetlosni vektor i ne sadrži niti jedan vremenski vektor.*

Definicija 1.11. *Za plohu $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je*

1. ***prostorna** ako je T_pS prostorni potprostor od $\mathbb{R}^3_1$ za svaku točku $p \in S$,*
2. ***vremenska** ako je T_pS vremenski potprostor od $\mathbb{R}^3_1$ za svaku točku $p \in S$,*
3. ***svjetlosna** ako je T_pS svjetlosni potprostor od $\mathbb{R}^3_1$ za svaku točku $p \in S$.*

Definicija 1.12. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ ploha i $p \in S$ proizvoljna točka. Sa $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ označavamo restrikciju pseudoskalarnog produkta $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na tangencijalnu ravninu T_pS.* ***Prva fundamentalna forma*** *jest kvadratna forma $I_p : T_pS \to \mathbb{R}$ pridružena pseudoskalarnom produktu $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, odnosno, riječ je o preslikavanju $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = \langle v, v \rangle$.*

Neka je sada $\varphi : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S oko točke p te neka su ∂_1, ∂_2 bazni vektori tangencijalne ravnine T_pS inducirani lokalnom parametrizacijom φ. **Metrički koeficijenti** od S u p s obzirom na lokalnu parametrizaciju φ jesu funkcije $E, F, G : U \to \mathbb{R}$ definirane sa

$$E(x) = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle_{\varphi(x)}, \ F(x) = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)}, \ G(x) = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)}.$$

Napomena 1.13. *Metrički koeficijenti plohe S u točki p određuju prvu fundamentalnu formu plohe S u točki p zbog toga što vrijedi*

$$I_p(v) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(x) & F(x) \\ F(x) & G(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $p = \varphi(x)$ te $v = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2$.

Definicija 1.14. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ prostorna ili vremenska ploha.* ***Gaussovo preslikavanje*** *jest glatko preslikavanje $N : S \to \mathbb{R}^3_1$ takvo da je $\|N\| = 1$ i $N(p) \perp T_pS$, za svaku točku $p \in S$.*

Napomena 1.15. *Za svjetlosne plohe općenito ne možemo definirati Gaussovo preslikavanje zato što vektor normale plohe S u točki p može biti svjetlosni vektor, pa ga kao takvog ne možemo normirati.*

Definicija 1.16. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ prostorna ili vremenska ploha te N pripadno Gaussovo preslikavanje.* ***Operator oblika plohe*** *S u točki $p \in S$, u oznaci S_p, jest preslikavanje $-dN_p : T_pS \to T_pS$, pri čemu je dN_p diferencijal Gaussovog preslikavanja u točki p.*

Definicija 1.17. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ prostorna ili vremenska ploha te N pripadno Gaussovo preslikavanje.* ***Gaussova zakrivljenost*** *plohe S u točki p jest funkcija $K : S \to \mathbb{R}$ definirana sa $K(p) = \det(S_p)$, a* ***srednja zakrivljenost*** *plohe S u točki p jest funkcija $H : S \to \mathbb{R}$ definirana sa $H(p) = \frac{1}{2}Tr(S_p)$.*

Definicija 1.18. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ prostorna ili vremenska ploha. Za plohu S kažemo da je* ***minimalna*** *ako za njenu srednju zakrivljenost vrijedi $H \equiv 0$.*

2 Hiperbolički brojevi

U ovom ćemo se poglavlju baviti algebrom tzv. 'hiperboličkih brojeva', proučit ćemo neka njena algebarska svojstva te ćemo uvesti osnovne pojmove i rezultate iz diferencijalnog računa na toj algebri koji će nam biti potrebni u nastavku rada. Uglavnom ćemo pratiti pristup iz [8], a više o ovoj algebri i njenim svojstvima može se pronaći u [3] i [10].

Definicija 2.1. ***Hiperbolički broj*** *jest broj oblika* $x+\tau y$*, pri čemu su* $x,y\in\mathbb{R}$*, a* τ *je oznaka za element za koji vrijedi* $\tau^2=1, \tau\neq 1$*. Skup svih hiperboličkih brojeva označavamo sa* $\mathbb{L}$*.*

Napomena 2.2. *Elemente skupa* $\mathbb{L}$ *najčešće ćemo pisati u obliku* $z=x+\tau y$*. Također, prvu komponentu hiperboličkog broja* $z=x+\tau y$ *zovemo njegov* ***realni dio*** *i označavamo ga sa* $\mathrm{Re}(z)$*, a drugu komponentu od* z *zovemo njegov* ***imaginarni dio*** *i označavamo ga sa* $\mathrm{Im}(z)$.

Na skupu $\mathbb{L}$ uvodimo operacije zbrajanja i množenja na potpuno analogni način kao i u slučaju kompleksnih brojeva:

$$(x_1+\tau y_1)+(x_2+\tau y_2)=x_1+x_2+\tau(y_1+y_2)$$

$$(x_1+\tau y_1)\cdot(x_2+\tau y_2)=x_1x_2+y_1y_2+\tau(x_1y_2+x_2y_1).$$

Skup hiperboličkih brojeva $\mathbb{L}$ sa ovako definiranim operacijama jest asocijativna, komutativna algebra nad $\mathbb{R}$ koju nazivamo **algebra hiperboličkih brojeva**.

Definicija 2.3. *Neka je* $z=x+\tau y\in\mathbb{L}$*. Hiperbolički broj* $x-\tau y$ *zovemo* ***hiperbolički konjugirani broj*** *broja* z *i označavamo ga sa* $\bar{z}$*.*

Uočimo kako algebra $\mathbb{L}$ nema strukturu integralne domene zbog toga što, primjerice, imamo

$$(1+\tau)(1-\tau) = 1-\tau^2 = 1-1 = 0,$$

što pokazuje da su elementi $1+\tau, 1-\tau \in \mathbb{L}$ djelitelji nule.

Budući da će nam za izvod Weierstrassove reprezentacijske formule biti vrlo bitno znati kako izgledaju djelitelji nule u algebri $\mathbb{L}$, u sljedećoj propoziciji dajemo karakterizaciju takvih elemenata. Također, u nastavku rada sa K označavamo skup svih djelitelja nule u $\mathbb{L}$.

Propozicija 2.4. *Element $x+\tau y \neq 0$ jest djelitelj nule u algebri $\mathbb{L}$ ako i samo ako je $x = \pm y$.*

Dokaz. *Neka je $x = \pm y$. Tada imamo*

$$(\pm y+\tau y)(\pm y-\tau y) = (\pm y)^2 - y^2 = y^2 - y^2 = 0$$

pa zaključujemo da je $\pm y+\tau y$ djelitelj nule.

Obratno, pretpostavimo da je $x+\tau y$ djelitelj nule. Tada je $x \neq 0$ ili $y \neq 0$ te postoji $a+\tau b \in \mathbb{L}\setminus\{0\}$ takav da je $(x+\tau y)(a+\tau b) = 0$. Budući da je

$$0 = (x+\tau y)(a+\tau b) = xa+yb+\tau(xb+ya),$$

dobivamo sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{cases} xa+yb = 0 \\ xb+ya = 0. \end{cases}$$

Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je $x \neq 0$ (slučaj $y \neq 0$

promatramo analogno). U tom slučaju iz druge jednadžbe gornjeg sustava dobivamo $b = -\frac{ya}{x}$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo

$$0 = xa + yb = xa - \frac{y^2 a}{x} = \frac{a}{x}(x^2 - y^2).$$

Kada bi bilo $a = 0$, onda bismo imali $xb + ya = xb = 0$, pa budući da je $x \neq 0$, slijedilo bi da je $b = 0$, međutim to je nemoguće jer je $a + \tau b \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$. Stoga mora biti $a \neq 0$, iz čega iz gornje jednadžbe slijedi $x^2 - y^2 = 0$, a to povlači da je $x = \pm y$. ■

Propozicija 2.5. *Neka je $z = x + \tau y \in \mathbb{L}$. Tada je z djelitelj nule u algebri $\mathbb{L}$ ako i samo ako z nema multiplikativni inverz u algebri $\mathbb{L}$.*

Dokaz. *Neka je z djelitelj nule u $\mathbb{L}$. Tada postoji element $a \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$ takav da je $z \cdot a = a \cdot z = 0$. Pretpostavimo da z ima multiplikativni inverz u $\mathbb{L}$ te ga označimo sa w. Tada imamo*

$$a = 1 \cdot a = w \cdot \underbrace{z \cdot a}_{=0} = 0,$$

međutim to je kontradikcija sa činjenicom da je $a \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$.
Stoga, zaključujemo da je z nema multiplikativni inverz u $\mathbb{L}$.

Obratno, neka $z = x + \tau y$ nema multiplikativni inverz u $\mathbb{L}$. Pretpostavimo da $z = x + \tau y$ nije djelitelj nule. Tada, po Propoziciji 2.4., slijedi da je $x \neq \pm y$, no iz toga pak izlazi da je $x^2 - y^2 \neq 0$. Sada definirajmo $\omega \in \mathbb{L}$ sa

$$\omega = \frac{x}{x^2 - y^2} - \tau \frac{y}{x^2 - y^2}.$$

Uzmemo li u obzir da je algebra $\mathbb{L}$ komutativna, imamo

$$z \cdot \omega = \omega \cdot z = \frac{1}{x^2 - y^2}(x + \tau y)(x - \tau y) = 1,$$

međutim to je suprotno pretpostavci da z nema multiplikativni inverz u $\mathbb{L}$. Zbog toga zaključujemo da je z djelitelj nule u algebri $\mathbb{L}$. ■

Napomena 2.6. *Ukoliko element $z \in \mathbb{L}$ posjeduje multiplikativni inverz, onda se lako provjeri da je $z^{-1} = \frac{1}{z\bar{z}}\bar{z}$.*

U nastavku ovog rada, posebno kod izvođenja Weierstrassove reprezentacijske formule minimalnih B-pravčastih ploha (vidi Poglavlje 4), veliku će ulogu igrati funkcije kojima je domena i kodomena podskup skupa hiperboličkih brojeva $\mathbb{L}$, posebno one funkcije koje će biti derivabilne u hiperboličkom smislu, pa stoga moramo opisati neka njihova osnovna svojstva. Napomenimo samo da ćemo dokaze nekih tehnički zahtjevnijih tvrdnji izostaviti budući da su glavne ideje i tehnike dokazivanja tih tvrdnji analogne onima iz [13].

Kako bismo mogli govoriti o derivabilnosti funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, moramo uvesti topologiju na $\mathbb{L}$. Budući da je $\mathbb{L} \cong \mathbb{R}^2$, za skup $\Omega \subseteq \mathbb{L}$ kažemo da je **otvoren** ako je Ω otvoren u $\mathbb{R}^2$.

Definicija 2.7. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{L}$ otvoren skup, $f : \Omega \to \mathbb{L}$ funkcija i $z_0 \in \Omega$ točka. Kažemo da je funkcija f $\mathbb{L}$-* ***derivabilna u točki*** *z_0 ako postoji*

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z - z_0 \notin K}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ako je funkcija f $\mathbb{L}$-derivabilna u svakoj točki $z_0 \in \Omega$, onda kažemo da je funkcija f $\mathbb{L}$- ***derivabilna****.*

Napomena 2.8. *Uočimo da, za razliku od kompleksnog slučaja, kod definicije $\mathbb{L}$-derivabilne funkcije moramo kod limesa zahtjevati da je $z - z_0 \notin K$ zbog toga što su samo takvi elementi invertibilni. Također, može se provjeriti da za $\mathbb{L}$-derivabilne funkcije vrijede iste formule kao i za realne derivabilne funkcije realne varijable u smislu derivacije linearne kombinacije, produkta i derivacije racionalne funkcije.*

Primjer 2.9. *Na skupu $\mathbb{L}$ hiperboličkih brojeva možemo definirati polinome hiperboličke varijable, eksponencijalnu funkciju e^z te funkcije $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\sinh(z)$, $\cosh(z)$ istim formulama kao i slučaju kompleksne varijable. Nadalje, te su funkcije $\mathbb{L}$-derivabilne.*

Ono što još trebamo uvesti u ovom poglavlju jesu $\mathbb{L}$-diferencijalne 1-forme te pojam integrala $\mathbb{L}$-diferencijalne 1-forme duž puta $\gamma = \gamma(t)$ u $\mathbb{L}$, pri čemu $t \in [a,b]$. U nastavku podrazumijevamo da za $z \in \mathbb{L}$ vrijedi $z = u + \tau v$, pri čemu su (u,v) koordinate na $\mathbb{R}^2$.

Definicija 2.10. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{L}$ otvoren, jednostavno povezan skup. Za preslikavanje $\omega : \Omega \to L(\mathbb{L},\mathbb{L})$ kažemo da je* ***1-forma*** *na Ω.*

Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ funkcija takva da je $f(u+\tau v) = f_1(u,v) + \tau f_2(u,v)$, gdje su $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klase C^1.Tada na funkciju f možemo gledati kao na funkciju koja ovisi o varijablama u i v pa iz teorije diferencijalnog računa na $\mathbb{R}^n$ znamo da tada imamo

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv.$$

Budući da je $z = u + \tau v$, imamo

$$z = u + \tau v, \quad \bar{z} = u - \tau v.$$

Iz prethodnih formula slijedi da je

$$u = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad v = \frac{z-\bar{z}}{2\tau}.$$

Sada definiramo $dz = du + \tau\, dv$, $d\bar{z} = du - \tau\, dv$. Iz tih jednadžbi dobivamo da je

$$du = \frac{dz + d\bar{z}}{2}, \quad dv = \frac{dz - d\bar{z}}{2\tau}.$$

Imajući na umu formulu za df, pomoću gornjih jednažbi dobivamo da je

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \tau\frac{\partial f}{\partial v}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \tau\frac{\partial f}{\partial v}\right) d\bar{z}.$$

Sada definirajmo **operatore hiperboličkog deriviranja** sa

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \tau\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \tau\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Tada imamo da je

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

Prokomentirajmo samo što nam ovaj račun zapravo pokazuje. Dakle, mi smo krenuli sa funkcijom f koja je zapravo hiperbolička funkcija hiperboličke varijable. Ono što se pokazuje prirodnim jest o funkciji f razmišljati kao o funkciji koja ovisi o varijablama $z, \bar{z}$, a ne kao o funkciji koja ovisi o varijablama u, v (koje zapravo predstavljaju koordinate na $\mathbb{R}^2$). Ono što bismo tada htjeli jest imati nekakav pojam derivacije funkcije f s obzirom na te nove varijable $z, \bar{z}$. Na prvu, takav pojam derivacije mogli bismo definirati na analogni način kao što smo to napravili u slučaju realnih funkcija dvije (realne) varijable (u smislu da jednu varijablu ”držimo fiksnom”, a drugoj dopustimo da ”varira”), međutim to u ovom kontekstu neće biti moguće jer varijable $z,\bar{z}$ nisu nezavisne. Zbog toga je potrebno to napraviti na neki alternativni način. U svakom slučaju, kako god definirali te operatore, htjeli bismo da vrijede jednakosti

$$\frac{\partial}{\partial z}(z) = 1,\ \frac{\partial}{\partial z}(\bar{z}) = 0,\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z) = 0,\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{z}) = 1.$$

Lako je za provjeriti da operatori hiperboličkog deriviranja, kako su gore izvedeni i definirani, zadovoljavaju te jednakosti i upravo zbog toga koristimo te operatore za proučavanje hiperboličkih funkcija u ovisnosti o varijablama $z,\bar{z}$. Također, iz ove diskusije vidimo da ti operatori predstavljaju samo formalne derivacije (u smislu da ne odražavaju nikakav "prirast" funkcije kao što je to slučaj kod realnih funkcija realne varijable), no unatoč tome ti nam operatori hiperboličkog deriviranja govore puno o svojstvima promatrane funkcije.

Nama će za uspješan izvod Weierstrassove reprezentacijske formule minimalnih B-pravčastih ploha biti vrlo bitne 1-forme oblika fdz (naime, direktno iz definicije slijedi da to zaista jest 1-forma na Ω). Za takvu 1-formu kažemo da je $\mathbb{L}$ **-diferencijalna 1-forma** ako je f $\mathbb{L}$-derivabilna na svojoj domeni.

Definicija 2.11. *Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{L}$ neprekidna hiperbolička funkcija i neka je $\gamma : [a,b] \to \Omega$ put klase C^1. Tada definiramo **integral funkcije** f **po putu** γ kao*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Koristeći slične tehnike kao u [13], može se pokazati da vrijedi sljedeća propozicija (također, vidi [8]).

Propozicija 2.12. *Ako funkcija $f : \Omega \to \mathbb{L}$ ima primitivnu funkciju F, onda vrijedi $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.*

3 B-pravčaste plohe

Glavni cilj ovog poglavlja jest uvesti pojam 'B-pravčaste plohe' u Lorentz-Minkowskijevom prostoru i obraditi glavne rezultate iz teorije vezane uz tu vrstu ploha koje ćemo kasnije koristiti za izvod Weierstrassove reprezentacijske formule. Način na koji ćemo se baviti ovom klasom ploha prati [7], a za nešto drugačiji tretman ove teme upućujemo na [2].

Definicija 3.1. *Za parametriziranu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je **svjetlosna parametrizirana krivulja** ako je vektor $c'(u)$ svjetlosni za svaki $u \in I$.*

Od esencijalne važnosti za izvod Weierstrassove reprezentacijske formule bit će nam pojam 'svjetlosnog trobrida svjetlosne krivulje' koji je generalizacija Frenet-Serretovog trobrida parametrizirane krivulje u $\mathbb{R}^3$.

Definicija 3.2. ***Nul-trobrid** jest uređena trojka vektora $L = (A,B,C)$, pri čemu su $A,B \in \mathbb{R}^3_1$ svjetlosni vektori takvi da je $\langle A,B\rangle = 1$, $C \in \mathbb{R}^3_1$ jest jedinični prostorni vektor okomit i na A i na B te uz to vrijedi $det(L) = \pm 1$.*

Neka je sada $L = (A,B,C)$ svjetlosni trobrid. Tada tom trobridu možemo pridružiti **ortonormirani nul-trobrid** $\mathscr{F}(L) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(A-B), \frac{1}{\sqrt{2}}(A+B), C)$. Direktnim računom vidimo da je prvi vektor ortonormiranog trobrida vremenski dok su preostala dva vektora tog trobrida prostorni vektori.

Definicija 3.3. *Za nul-trobrid $L = (A,B,C)$ kažemo da je **pravi nul-trobrid** ako njegov ortonormirani nul-trobrid $\mathscr{F}(L)$ čuva pseudoskalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ prostora $\mathbb{R}^3_1$ i ako je $det(\mathscr{F}(L)) = 1$.*

Definicija 3.4. ***Svjetlosni trobrid svjetlosne krivulje** $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ jest pravi nul-trobrid $L(u) = (A(u),B(u),C(u))$ pri čemu je $c'(u) = k_0(u)A(u), \forall u \in I$, gdje je $k_0 : I \to \mathbb{R}$ neka strogo pozitivna funkcija.*

U [7] je pokazano kako vektori svjetlosnog trobrida svjetlosne krivulje c zadovoljavaju određeni analogon Frenet-Serretovih formula iz realnog slučaja. Drugim riječima, postoje glatke funkcije $k_i : I \to \mathbb{R}, i = 1,2,3$ takve da vrijede sljedeće jednakosti:

$$A' = k_1 A + k_2 C$$

$$B' = -k_1 B + k_3 C$$

$$C' = -k_3 A - k_2 B.$$

Funkcije $k_i, i = 1,2,3$ zovu se **funkcije zakrivljenosti krivulje** c s obzirom na svjetlosni trobrid $L = (A,B,C)$. Napomenimo kako svjetlosni trobrid svjetlosne krivulje nije jedinstven (vidi [14]) te stoga kada zadajemo svjetlosnu krivulju moramo precizirati njen svjetlosni trobrid. Analogno kao u realnom slučaju, prirodno se javlja pitanje da li je moguće za danu svjetlosnu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ odabrati 'kanonski' parametar koji će odražavati sva geometrijska svojstva dane krivulje, a da nam omogući što jednostavnije računanje svih pripadnih veličina vezanih uz promatranu krivulju. Odgovor na to pitanje jest potvrdan, a dan je u obliku sljedeće leme čiji se dokaz nalazi u [7].

Lema 3.5. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ parametrizirana svjetlosna krivulja. Tada postoji glatka reparametrizacija $\varphi : J \to I$ takva da za reparametriziranu krivulju $\tilde{c} : J \to \mathbb{R}^3_1$, $\tilde{c} = c \circ \varphi$ vrijedi $\tilde{k}_1 \equiv 0$, pri čemu je $\tilde{k}_1$ prva funkcija zakrivljenosti krivulje $\tilde{c}$.*

Parametar iz gornje leme naziva se **istaknuti parametar krivulje** c. U slučaju da je parametrizirana krivulja c parametrizirana tim parametrom, onda za njen svjetlosni trobrid vrijede sljedeće jednakosti:

$$A' = k_2 C$$

$$B' = k_3 C$$

$$C' = -k_2 B.$$

Ako je svjetlosna krivulja parametrizirana istaknutim parametrom, onda se njen svjetlosni trobrid naziva i **Cartanov trobrid**.

Dakle, vidjeli smo da do Cartanovog trobrida svjetlosne parametrizirane krivulje c dolazimo kroz četiri koraka:

1. Reparametriziramo svjetlosnu krivulju c istaknutim parametrom;
2. Krivulji c pridružimo nul-trobrid;
3. Tom nul-trobridu pridružimo ortonormirani nul-trobrid;
4. Provjeravamo da li je taj pridruženi ortonormirani nul-trobrid pravi nul-trobrid (Definicija 3.3.).

Gornji je postupak za praktično i efikasno računanje dosta mukotrpan zbog toga što već reparametrizacija krivulje c istaknutim parametrom može predstavljati veliki problem, a provjera koraka 4. također može biti dosta naporna. Zbog toga u nastavku opisujemo metodu kojom ćemo provjeravati je li dani trobrid $L(u) = (A(u), B(u), C(u))$ zapravo Cartanov trobrid zadane svjetlosne parametrizirane krivulje $c : I \to \mathbb{R}^3_1$. U tu svrhu, pretpostavimo da je $L(u) = (A(u), B(u), C(u))$ nul-trobrid krivulje c takav da je $\det(L(u)) = 1$ za sve $u \in I$.

Definirajmo matricu $\mathscr{L} \in M_3(\mathbb{R})$ sa

$$\mathscr{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada se lako vidi da je matrica $\mathscr{L}$ invertibilna (jer je $\det(\mathscr{L}) = 1$) te da za ortonormirani nul-trobrid pridružen trobridu $L(u)$ vrijedi $\mathscr{F}(L) = L \cdot \mathscr{L}^{-1}$. Sada, prema Binet-Cauchyjevom teoremu, imamo $\det(\mathscr{F}(L)) = 1$, pa kako bismo utvrdili da je L pravi nul-trobrid, trebamo još provjeriti da $\mathscr{F}(L)$ čuva pseudoskalarni produkt. Sljedeća nam lema daje efektivni kriterij kojim ćemo provjeravati to svojstvo trobrida $\mathscr{F}(L)$ (za dokaz vidi [7]).

Lema 3.6. *Neka je $L = (A,B,C) : I \to GL(3,\mathbb{R})$ glatko preslikavanje, pri čemu je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Tada $\mathscr{F}(L)$ čuva pseudoskalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ako i samo ako je*

$$\frac{dL}{dt} = \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_3 \\ 0 & -k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix}$$

za neke funkcije $k_1, k_2, k_3 : I \to \mathbb{R}$.

Dakle, ako za prethodno opisani nul-trobrid $L = (A,B,C)$ pokažemo da postoje funkcije $k_i : I \to \mathbb{R}, i = 1,2,3$ tako da su zadovoljeni uvjeti Leme 3.6., onda zaključujemo da je riječ o Cartanovom trobridu promatrane krivulje c.

Sada smo u stanju definirati glavnu klasu ploha kojom se bavimo u ovom radu, a to su tzv. 'B-pravčaste plohe' u Lorentz-Minkowskijevom prostoru.

Definicija 3.7. *Za parametriziranu plohu $x : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ koja je definirana sa $x(u,v) = c(u) + vE(u)$, pri čemu je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ parametrizirana krivulja, a $E : I \to \mathbb{R}^3_1$ glatko vektorsko polje duž c takvo da je $E(u) \neq 0$ za svaki $u \in I$ kažemo da je **pravčasta parametrizirana ploha**.*

Napomena 3.8. *Za parametriziranu krivulju c iz gornje definicije kažemo da je **bazna krivulja**, a glatko vektorsko polje E nazivamo **izvodnicama** parametrizirane plohe x.*

U [14] je dokazan sljedeći rezultat:

Propozicija 3.9. *Svaka pravčasta parametrizirana ploha čije su izvodnice svjetlosni vektori može se reparametrizirati tako da i bazna krivulja bude svjetlosna.*

Uz pomoć Propozicije 3.9. možemo definirati sljedeći pojam:

Definicija 3.10. *Za pravčastu parametriziranu plohu čija je bazna krivulja svjetlosna i čije su izvodnice svjetlosne kažemo da je **nul-pravčasta ploha**. Pravčastu parametriziranu plohu $x : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1, x(u,v) = c(u) + vB(u)$, pri čemu je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ svjetlosna krivulja parametrizirana istaknutim parametrom i čiji je pripadni trobrid dan s (A,B,C) nazivamo **B-pravčasta ploha**.*

Napomena 3.11. *Uočimo kako smo B-pravčaste plohe definirali kao parametrizirane plohe, a ne kao regularne plohe prostora $\mathbb{R}^3_1$. Budući da se u ovom radu bavimo lokalnim svojstvima ploha, Propozicija 1.7. nam omogućuje da sve pojmove i svojstva koja su vezana uz regularne plohe poput tangencijalne ravnine, fundamentalne forme, Gaussove i srednje zakrivljenosti prenesemo na određenu otvorenu okolinu točke nosača parametrizirane plohe. Iz toga razloga, u nastavku ovog rada ćemo se prema*

B-pravčastim plohama odnositi kao prema regularnim plohama imajući ovu napomenu na umu.

U nastavku se bavimo konkretnim primjerima B-pravčastih ploha kojima ćemo se dodatno posvetiti u Poglavlju 4, a još primjera moguće je pronaći u [14] i [15].

Primjer 3.12. *Neka je $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ parametrizirana krivulja definirana sa*

$$c(u) = \left(-\frac{u^3}{6\sqrt{2}} - \frac{u}{\sqrt{2}}, -\frac{u^2}{2}, -\frac{u^3}{6\sqrt{2}} + \frac{u}{\sqrt{2}} \right)$$

te definirajmo $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ sa $A(u) = c'(u)$, $B(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Tada se direktnim računom vidi da je c svjetlosna parametrizirana krivulja. Nadalje, imamo

$$(A \times B)(u) = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{-u^2}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} & -u & -\frac{u^2}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{2}}, 1, \frac{u}{\sqrt{2}} \right).$$

Definirajmo funkcije $k_0, k_1, k_2, k_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$k_0 \equiv 1,\ k_1 \equiv 0,\ k_2 \equiv -1,\ k_3 \equiv 0.$$

Definiramo li $C = A \times B$, vidimo da trobrid (A, B, C) zadovoljava relacije koje definiraju Cartanov trobrid, pa zaključujemo da je to Cartanov trobrid svjetlosne krivulje c. Stoga, sa $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_1$, $x(u,v) = c(u) + vB(u)$ je dana jedna parametrizacija B-pravčaste plohe u $\mathbb{R}^3_1$.

Primjer 3.13. *Neka je $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3_1$ parametrizirana krivulja definirana sa*

$$c(u)=\left(-\frac{u^3}{6}-\frac{u}{2},-\frac{u^3}{6}+\frac{u}{2},\frac{u^2}{2}\right).$$

Definirajmo $A,B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3_1$ sa $A(u)=c'(u)$, $B(u)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. Još definirajmo funkcije $k_0,k_1,k_2,k_3:I\to\mathbb{R}$ sa

$$k_0\equiv 1,k_1\equiv 0,k_2\equiv -1,k_3\equiv 0.$$

Tada se potpuno analogno kao i u Primjeru 3.12. provjeri da je $\{A,B,C\}$ Cartanov trobrid svjetlosne krivulje c, pri čemu je $C=A\times B$. Stoga, sa $x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3_1$, $x(u,v)=c(u)+vB(u)$ je dana jedna parametrizacija B-pravčaste plohe u $\mathbb{R}^3_1$.

Primjer 3.14. *Neka je $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3_1$ parametrizirana krivulja definirana sa*

$$c(u)=\left(\frac{u}{\sqrt{2}},\frac{u}{\sqrt{2}},1\right)$$

te definirajmo $B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3_1$ sa

$$B(u)=\left(-\frac{u^2}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{u^2}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}},u\right).$$

Tada se na analogni način kao u prethodnim primjerima može provjeriti da je $x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3_1$, $x(u,v)=c(u)+vB(u)$ parametrizacija B-pravčaste plohe.

Primjer 3.15. *Neka je $I\subseteq\mathbb{R}$ otvoreni interval te neka su $\alpha,\beta:I\to\mathbb{R}$ dvije glatke funkcije za koje vrijedi $\alpha'=(\beta')^2$. Tada se u [7] tvrdi da je parametrizirana krivulja $c:I\to\mathbb{R}^3_1$ definirana sa*

$$c(u)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u+\frac{\alpha(u)}{2}),\frac{1}{\sqrt{2}}(u-\frac{\alpha(u)}{2}),\beta(u)\right)$$

svjetlosna parametrizirana krivulja čiji je Cartanov trobrid dan sa

$$A(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\frac{\alpha'(u)}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\frac{\alpha'(u)}{2}), \beta'(u)\right)$$

$$B(u) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$C(u) = \left(\frac{\beta'(u)}{\sqrt{2}}, -\frac{\beta'(u)}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Provjerimo tu tvrdnju. Za početak, imamo

$$\langle c', c'\rangle = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha'}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha'}{2}\right)^2 + (\beta')^2 = -\alpha' + (\beta')^2 = 0$$

pa je c zaista svjetlosna parametrizirana krivulja. Nadalje, imamo

$$A' = \left(\frac{\alpha''}{2\sqrt{2}}, -\frac{\alpha''}{2}, \beta''\right), \;\; B' = 0, \;\; C' = \left(\frac{\beta''}{\sqrt{2}}, -\frac{\beta''}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

pa ako definiramo funkcije $k_0, k_1, k_2, k_3 : I \to \mathbb{R}$ sa

$$k_0 \equiv 1, k_1 \equiv 0, k_2 = \beta'', k_3 \equiv 0,$$

vidimo da uređena trojka vektora (A, B, C) zaista zadovoljava jednakosti koje definiraju Cartanov trobrid, pa je tvrdnja dokazana. Posebno, slijedi da je $x : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$, $x(u, v) = c(u) + vB(u)$ parametrizacija B-pravčaste plohe.

Osnovna svojstva B-pravčastih ploha dana su u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.16. *Neka je $x : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1, x(u, v) = c(u) + vB(u)$ B-pravčasta ploha. Tada vrijedi:*

1. *B-pravčasta ploha jest vremenska ploha.*

2. *Metrika na $x(u,v)$ dana je sa $I = k_3^2 v^2\, du^2 + 2\, du\, dv$.*

3. *Operator oblika parametrizirane plohe $x(u,v)$ nije dijagonalizabilan.*

Korolar 3.17. *Neka je $x : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ B-pravčasta ploha. Tada je x minimalna parametrizirana ploha ako i samo ako je $K \equiv 0$, pri čemu je K Gaussova zakrivljenost B-pravčaste plohe x. Posebno, B-pravčasta ploha je minimalna ako i samo ako je $k_3 \equiv 0$, pri čemu je $k_3 : I \to \mathbb{R}$ treća funkcija zakrivljenosti parametrizirane krivulje c.*

Dokazi Propozicije 3.16. i Korolara 3.17. mogu se naći u [15].

Napomena 3.18. *B-pravčaste plohe u Lorentz-Minkowskijevom prostoru jesu primjeri ploha koje nemaju euklidski analogon. Naime, za svaku plohu S u euklidskom prostoru je pripadni operator oblika u svakoj točki $p \in S$ simetrični endomorfizam od tangencijalne ravnine T_pS, pa je kao takav dijagonalizabilan dok smo u Propoziciji 3.16. vidjeli da to nije slučaj kod B-pravčastih ploha.*

4 Weierstrassova reprezentacijska formula

U ovom ćemo poglavlju izvesti Weierstrassovu reprezentacijsku formulu za minimalne B-pravčaste plohe koristeći teoriju diferencijalnog računa na skupu $\mathbb{L}$ hiperboličkih brojeva. Napomenimo da egzistencija takve parametrizacije ima brojne posljedice i vodi prema vrlo bitnim geometrijskim zaključcima o samoj plohi koju je moguće parametrizirati na taj način. Više o tim posljedicama, primjenama i općenito o Weierstrassovoj reprezentacijskoj formuli moguće je naći u [9] i [11].

Neka je $x(u,v) = c(u) + vB(u)$ minimalna B-pravčasta ploha, pri čemu je svjetlosna bazna krivulja c parametrizirana istaknutim parametrom te neka je $L = (A,B,C)$ njen Cartanov trobrid.

U prethodnom smo poglavlju vidjeli da je promatrana B-pravčasta ploha minimalna ako i samo je $k_3 \equiv 0$, no ako je $k_3 \equiv 0$, onda iz formula za Cartanov trobrid slijedi da je $B' \equiv 0$ iz čega zaključujemo da je $B =$ konst. Stoga, minimalna B-pravčasta ploha zapravo jest oblika $x(u,v) = c(u) + vB$.

Definicija 4.1. *Za lokalnu parametrizaciju $\varphi : U \to \mathbb{R}^3_1$ vremenske plohe kažemo da je **konformna** ako za pripadne metričke koeficijente vrijedi*

$$E = -G = \lambda^2, \; F = 0,$$

pri čemu je $\lambda : U \to \mathbb{R}_{>0}$ realna glatka funkcija.

Uočimo da lokalna parametrizacija $x(u,v) = c(u) + vB$ nije konformna zbog toga što za pripadne metričke koeficijente vrijedi:

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = \langle c', c' \rangle = 0$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = \langle c', B \rangle = 1$$

$$G = \langle x_v, x_x \rangle = \langle B, B \rangle = 0.$$

U [5] je pokazano kako za svjetlosne plohe možemo, i to na vrlo prirodan način, izvesti Weierstrassovu reprezentacijsku formulu koristeći upravo konformnu parametrizaciju svjetlosnih ploha. Napomenimo kako se uvjeti konformnosti B-pravčastih ploha (koje su vremenske plohe prema Propoziciji 3.16.) i svjetlosnih ploha razlikuju, međutim u nastavku ovog rada pokazujemo kako će nam i u ovom, vremenskom, slučaju konformna parametrizacija biti od esencijalne važnosti, a u sljedećoj propoziciji dokazujemo njenu egzistenciju.

Propozicija 4.2. *Neka je* $x : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1, x(u,v) = c(u) + vB$ *parametrizacija minimalne B-pravčaste plohe. Tada postoji glatka zamjena koordinata* $(\xi, \eta) = (f(u,v), g(u,v))$ *takva da je* $x(\xi, \eta)$ *konformna parametrizacija početne minimalne B-pravčaste plohe.*

Dokaz. *Definirajmo* $f(u,v) = \dfrac{u+v}{2}$ *te* $g(u,v) = \dfrac{u-v}{2}$*. Tada, koristeći zamjenu koordinata* $(\xi, \eta) = (f(u,v), g(u,v))$ *dobivamo sljedeću reparametrizaciju polazne B-pravčaste plohe:*

$$x : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1,\ x(\xi, \eta) = c(\xi + \eta) + (\xi - \eta)B,$$

pri čemu je $J \subseteq \mathbb{R}$ *neki interval (tako da je* c *definirana u svim* $\xi + \eta$*). Sada imamo*

$$x_u = x_\xi \xi_u + x_\eta \eta_u = \frac{1}{2} x_\xi + \frac{1}{2} x_\eta$$

$$x_v = x_\xi \xi_v + x_\eta \eta_v = \frac{1}{2} x_\xi - \frac{1}{2} x_\eta.$$

Iz gornjih jednadžbi dobivamo

$$x_\xi = x_u + x_v = c' + B$$

$$x_\eta = x_u - x_v = c' - B.$$

Tada za metričke koeficijente vrijedi

$$E = \langle x_\xi, x_\xi \rangle = \langle c' + B, c' + B \rangle = 2\langle c', B \rangle = 2$$

$$F = \langle x_\xi, x_\eta \rangle = \langle c' + B, c' - B \rangle = 0$$

$$G = \langle x_\eta, x_\eta \rangle = \langle c' - B, c' - B \rangle = -2\langle c', B \rangle = -2$$

pa zaključujemo da je parametrizacija $x(\xi,\eta)$ *konformna.* ■

U nastavku ovog poglavlja podrazumijevamo da radimo sa konformnom parametrizacijom $x(\xi,\eta)$ minimalne B-pravčaste plohe. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{L}$ definiran sa $\Omega = J \times \mathbb{R}$. Definirajmo funkcije $\psi_j : \Omega \to \mathbb{L}$ sa $\psi_j = \dfrac{\partial x_j}{\partial z}, j = 1,2,3,$ pri čemu je $x(\xi,\eta) = (x_1(\xi,\eta), x_2(\xi,\eta), x_3(\xi,\eta))$. Tada imamo

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial x_3}{\partial \eta}\right).$$

Budući da je $x(\xi,\eta)$ konformna parametrizacija, imamo

$$\begin{aligned}
-\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2 &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}+\tau\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}+\tau\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2+\\
&+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi}+\tau\frac{\partial x_3}{\partial \eta}\right)^2\\
&=\frac{1}{4}(E+G+2\tau F)=0.
\end{aligned}$$

Zbog gornje jednakosti, imamo sljedeću faktorizaciju:

$$\psi_3^2=(\psi_1-\psi_2)(\psi_1+\psi_2).$$

Sada ćemo razlikovati dva slučaja. Pretpostavimo najprije da element $\psi_1(z)-\psi_2(z)$ nije djelitelj nule niti za jedan $z\in\Omega\subseteq\mathbb{L}$. U tom je slučaju taj element invertibilan za sve $z\in\Omega$, pa možemo definirati funkcije $f,g:\Omega\to\mathbb{L}$ redom sa $f=\psi_1-\psi_2$ i $g=\dfrac{\psi_3}{f}$. Tada imamo sljedeće jednakosti:

$$\psi_1=\frac{1}{2}(\psi_1-\psi_2+\psi_2+\psi_1)=\frac{1}{2}\left(f+fg^2\right)=\frac{f}{2}\left(1+g^2\right)$$

$$\psi_2=-\frac{1}{2}(\psi_1-\psi_2-\psi_2-\psi_1)=-\frac{1}{2}\left(f-g^2f\right)=-\frac{f}{2}(1-g^2)$$

$$\psi_3=fg.$$

Definirajmo sada $\mathbb{L}$-diferencijalne 1-forme $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ na Ω sa $\alpha_j=\psi_j\,\mathrm{d}z$.

U [8] je dokazan sljedeći teorem koji nam govori kada možemo integrirati dobivene forme kako bismo pomoću njih rekonstruirali parametrizaciju plohe, a njegov iskaz glasi:

Teorem 4.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{L}$ otvoren jednostavno povezan skup te neka su $\phi_j : \Omega \to \mathbb{L}, j = 1,2,3,$ $\mathbb{L}$-derivabilne funkcije takve da vrijedi:*

1. $-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$
2. $-\phi_1\overline{\phi_1} + \phi_2\overline{\phi_2} + \phi_3\overline{\phi_3} > 0.$

Tada je $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}_1^3, \varphi(z) = \mathrm{Re}(\int_{z_0}^{z} \phi_1 dz, \int_{z_0}^{z} \phi_2 dz, \int_{z_0}^{z} \phi_3 dz)$ konformna vremenska parametrizirana ploha u $\mathbb{R}_1^3$, pri čemu je $z_0 \in \Omega$ proizvoljna točka.

Napomena 4.4. *Budući da su funkcije $\phi_j, j = 1,2,3,$ $\mathbb{L}$-derivabilne funkcije, a $\Omega \subseteq \mathbb{L}$ jednostavno povezan skup, integrali 1-formi $\phi_j dz, j = 1,2,3$ su neovisni o putu (vidi [8]). Još se kaže da 1-forme $\phi_j dz, j = 1,2,3,$ **nemaju realnih perioda**.*

Mi smo definirali tri 1-forme $\alpha_j, j = 1,2,3$ sa $\alpha_j = \psi_j dz$. Sada želimo odrediti kada funkcije $\psi_j, j = 1,2,3,$ zadovoljavaju uvjete gornjeg teorema. Budući da smo funkcije $\psi_j, j = 1,2,3,$ izrazili preko funkcija f, g, ono što zapravo moramo odrediti jesu pripadni uvjeti na funkcije f, g. U tu svrhu najprije računamo:

$$\begin{aligned}
-\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 &= -\left(\frac{f}{2}(1+g^2)\right)^2 + \left(-\frac{f}{2}(1-g^2)\right)^2 + (fg)^2 \\
&= -\frac{f^2}{4}\left[(1+g^2)^2 - (1-g^2)^2 - 4g^2\right] \\
&= -\frac{f^2}{4}\left[1 + 2g^2 + g^4 - 1 + 2g^2 - g^4 - 4g^2\right] = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, vidimo da za sve funkcije f, g vrijedi prvi uvjet Teorema 4.3. Dalje, imamo

$$
\begin{aligned}
-\psi_1\overline{\psi_1}+\psi_2\overline{\psi_2}+\psi_3\overline{\psi_3} &= \frac{f\overline{f}}{4}(1+g^2)(1+\overline{g}^2)+\frac{f\overline{f}}{4}(1-g^2)(1-\overline{g}^2)^2+f\overline{f}g\overline{g} \\
&= -\frac{f\overline{f}}{4}\left(1+\overline{g}^2+g^2+g^2\overline{g}^2-1+g^2+\overline{g}^2-g^2\overline{g}^2-4g\overline{g}\right) \\
&= -\frac{f\overline{f}}{4}\left(2(g^2+2g\overline{g}+\overline{g}^2)\right) \\
&= -\frac{f\overline{f}}{2}(g-\overline{g})^2.
\end{aligned}
$$

Iz ovoga vidimo da funkcije f,g zadovoljavaju i drugi uvjet Teorema 4.3. ako i samo ako $f\overline{f}<0$ i $\mathrm{Im}(g)\neq 0$. Označimo $c=(c_1,c_2,c_3)$, te $B=(B_1,B_2,B_3)$. Odredimo sada funkcije f,g. Prvo, vrijedi

$$
\begin{aligned}
f(z) &= f(\xi+\tau\eta) \\
&= \psi_1(\xi+\tau\eta)-\psi_2(\xi+\tau\eta) \\
&= \frac{1}{2}\left(c_1'(\xi+\eta)+B_1-c_2'(\xi+\eta)-B_2\right) \\
&\quad+\frac{\tau}{2}\left(c_1'(\xi+\eta)-B_1-c_2'(\xi+\eta)+B_2)\right).
\end{aligned}
$$

Nadalje, imamo

$$
\begin{aligned}
g(z) &= g(\xi+\tau\eta) \\
&= \frac{\psi_3(\xi+\tau\eta)}{f(\xi+\tau\eta)} \\
&= \mathrm{Re(g(z))}+\frac{\tau}{f(z)\overline{f}(z)}\Big[\left(c_3'(\xi+\eta)-B_3\right)\left(c_1'(\xi+\eta)+B_1-c_2'(\xi+\eta)-B_2\right) \\
&\qquad+\left(c_3'(\xi+\eta)+B_3\right)\left(c_1'(\xi+\eta)-B_1-c_2'(\xi+\eta)+B_2\right)\Big].
\end{aligned}
$$

U nastavku rada više nećemo pisati argumente funkcija f i g kako bi nam njihov zapis i račun bio jednostavniji. Sada, imamo

$$
\begin{aligned}
f\overline{f} &= \mathrm{Re}(f)^2 - \mathrm{Im}(f)^2 \\
&= \left(c_1' + B_1 - c_2' - B_2\right)^2 - \left(c_1' - B_1 - c_2' + B_2\right)^2 \\
&= 4\,(B_1 - B_2)\left(c_1' - c_2'\right)
\end{aligned}
$$

pa vidimo da vrijedi $f\overline{f} < 0$ ako i samo ako je $(B_1 - B_2)(c_1' - c_2') < 0$. Dalje, imamo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(g) &= \frac{1}{f\overline{f}}\left[(c_3' - B_3)(c_1' + B_1 - c_2' - B_2) + (c_3' + B_3)(c_1 - B_1 - c_2' + B_2)\right] \\
&= \frac{2}{f\overline{f}}\left(c_3'(c_1' - c_2') - B_3(B_1 - B_2)\right)
\end{aligned}
$$

pa slijedi da je $\mathrm{Im}(g) \neq 0$ ako i samo ako je $c_3'(c_1' - c_2') \neq B_3(B_1 - B_2)$.

Dakle, dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 4.5. *Neka je $x : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1, x(\xi,\eta) = c(\xi+\eta) + (\xi-\eta)B$ konformna parametrizacija minimalne B-pravčaste plohe. Pretpostavimo da za sve ξ,η vrijedi sljedeće:*

1. $(B_1 - B_2)(c_1'(\xi+\eta) - c_2'(\xi+\eta)) < 0,$
2. $c_3'(\xi+\eta)(c_1'(\xi+\eta) - c_2'(\xi+\eta)) \neq B_3(B_1 - B_2).$

Tada postoje $\mathbb{L}$-derivabilne funkcije $f,g : J \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ takve da se promatrana B-pravčasta ploha lokalno može parametrizirati sa $\varphi : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$, gdje je

$$
\varphi(\xi,\eta) = \mathrm{Re}\left(\int_{z_0}^{z} \frac{f(z)}{2}(1+g(z)^2)dz, \int_{z_0}^{z} -\frac{f(z)}{2}(1-g(z)^2)dz, \int_{z_0}^{z} f(z)g(z)dz\right)
$$

te pri čemu je $z = \xi + \tau\eta \in J \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{L}$, a $z_0 = \xi_0 + \tau\eta_0 \in J \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{L}$ je proizvoljna točka. Dodatno, parametrizacija φ je konformna.

Dokaz. *Jedino još moramo komentirati konformnost parametrizacije* φ*.*

Imamo

$$\varphi_\xi = 2\,\mathrm{Re}\,(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = x_\xi$$

$$\varphi_\eta = 2\,\mathrm{Im}\,(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = x_\eta$$

pa slijedi da su metrički koeficijenti dani s

$$E = \langle \varphi_\xi, \varphi_\xi \rangle = \langle x_\xi, x_\xi \rangle = 2$$

$$F = \langle \varphi_\xi, \varphi_\eta \rangle = \langle x_\xi, x_\eta \rangle = 0$$

$$G = \langle \varphi_\eta, \varphi_\eta \rangle = \langle x_\eta, x_\eta \rangle = -2.$$

■

Napomena 4.6. *Funkcije* f, g *iz Teorema 4.5. nazivaju se* ***Weierstrassovi podaci****, a preslikavanje* φ *naziva se* ***Weierstrassova reprezentacijska formula****.*

Ovime smo razrješili prvi slučaj kada $\psi_1(z) - \psi_2(z)$ nije djelitelj nule niti za jedan $z \in \Omega \subseteq \mathbb{L}$, pa još moramo vidjeti što ako to nije istina, odnosno što ako postoji $z \in \Omega \subseteq \mathbb{L}$ takav da je $\psi_1(z) - \psi_2(z)$ djelitelj nule. Htjeli bismo da vrijede analogne formule kao i u prethodnom teoremu, pa stoga pretpostavimo da postoje funkcije $f, g : \Omega \to \mathbb{L}$ takve da vrijede sljedeće formule:

$$\psi_1 = \frac{f}{2}(1+g^2), \psi_2 = -\frac{f}{2}(1-g^2), \psi_3 = fg.$$

Budući da postoji $z \in \Omega$ takav da je $\psi_1(z) - \psi_2(z) = f(z) = f_1(z) + \tau f_2(z)$ djelitelj nule, po Propoziciji 2.4. zaključujemo da je $f_1(z) = \pm f_2(z)$. Međutim, tada imamo

$$f(z)\overline{f}(z) = (f_1(z) + f_1(z))(f_1(z) - f_1(z)) = 0.$$

Stoga, vidimo da uvjet $f\overline{f} < 0$ nije ispunjen, pa zaključujemo da u tom slučaju nije moguće izvesti Weierstrassovu reprezentacijsku formulu na prethodno opisani način.

Na temelju gornjih razmatranja vidimo da nam činjenica da postoji element $z = \xi + \tau\eta \in \Omega$ takav da je $\psi_1(z) - \psi_2(z)$ djelitelj nule onemogućuje izvođenje Weierstrassove reprezentacijske formule na prethodno opisan način, pa stoga odredimo kada nastupa ta situacija. Ako je $\psi_1(z) - \psi_2(z)$ djelitelj nule, onda je $\psi_1(z) - \psi_2(z) = \alpha \pm \tau\alpha$ za neki $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (vidi Propoziciju 2.4.). Sada razlikujemo dva slučaja.

(1) Pretpostavimo najprije da je $\psi_1(z) - \psi_2(z) = \alpha + \tau\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tada su realni i imaginarni dio broja $\psi_1(z) - \psi_2(z)$ jednaki, pa budući da je

$$\mathrm{Re}(\psi_1(z) - \psi_2(z)) = \frac{1}{2}\left(c_1'(\xi + \eta) + B_1 - c_2'(\xi + \eta) - B_2\right)$$

$$\mathrm{Im}(\psi_1(z) - \psi_2(z)) = \frac{1}{2}(c_1'(\xi + \eta) - B_1 - c_2'(\xi + \eta) + B_2),$$

zaključujemo da vrijedi

$$c_1'(\xi + \eta) + B_1 - c_2'(\xi + \eta) - B_2 = c_1'(\xi + \eta) - B_1 - c_2'(\xi + \eta) + B_2$$

iz čega očito slijedi da je $B_1 = B_2$.

(2) Ako je pak $\psi_1(z) - \psi_2(z) = \alpha - \tau\alpha$, onda na analogni način kao gore, zaključujemo da je $c_1'(\xi + \eta) = c_2'(\xi + \eta)$.

Dakle, ako je $\psi_1(z) - \psi_2(z)$ djelitelj nule onda je $B_1 = B_2$ ili postoji vrijednost parametra s tako da je $c_1'(s) = c_2'(s)$. Međutim, imajući na umu formulu za $\psi_1(z) - \psi_2(z)$ vidimo da vrijedi i obrat. Stoga, dokazali smo sljedeći rezultat.

Teorem 4.7. *Neka je $x : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1, x(\xi,\eta) = c(\xi+\eta) + (\xi-\eta)B$ konformna parametrizacija minimalne B-pravčaste plohe. Pretpostavimo da vrijedi jedno od sljedećeg:*

1. $B_1 = B_2$
2. *postoji vrijednost parametra s tako da je $c_1'(s) = c_2'(s)$.*

Tada navedena B-pravčasta ploha ne dopušta prethodno opisanu Weierstrassovu reprezentaciju.

Primjer 4.8. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ svjetlosna krivulja parametrizirana istaknutim parametrom te neka je $L = (A,B,C)$ njen Cartanov trobrid. Pretpostavimo da je trag od c sadržan u ravnini $z = z_0$, pri čemu je $z_0 \in \mathbb{R}$ po volji te pretpostavimo da je $B_3(u) = 0$ za sve $u \in I$. Tada pripadna B-pravčasta ploha, uz pretpostavku minimalnosti, ne dopuštavnu prethodno opisanu Weierestrassovu reprezentacijsku formulu. Naime, budući da je trag od c sadržan u ravnini $z = z_0$, zaključujemo da je $c_3 =$ konst., pa je $c_3' = 0$. Tada imamo*

$$\mathrm{Im}(g(\xi+\tau\eta)) = 2\underbrace{c_3'(\xi+\eta)}_{=0}(B_1 - B_2) - 2\underset{\substack{\uparrow \\ =0}}{B_3}(c_1'(\xi+\eta) - c_2'(\xi+\eta)) = 0$$

pa iz Teorema 4.5. slijedi tvrdnja.

Primjer 4.9. *Promotrimo parametriziranu plohu $x : \langle 4, +\infty\rangle \times \langle -1, 1\rangle$ definiranu sa*

$$x(u,v) = c(u) + v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

pri čemu je $c : \langle 4, +\infty\rangle \to \mathbb{R}^3_1$ *parametrizirana krivulja definirana sa*

$$c(u) = \left(-\frac{u^3}{6\sqrt{2}} - \frac{u}{\sqrt{2}}, -\frac{u^2}{2}, -\frac{u^3}{6\sqrt{2}} + \frac{u}{\sqrt{2}}\right).$$

Prema Primjeru 3.12. znamo da je x *ustvari parametrizacija B-pravčaste plohe.Tada imamo*

$$c_1'(u) - c_2'(u) = -\frac{u^2}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + u = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(u - \sqrt{2})^2$$

$$c_3'(u) = -\frac{u^2}{2\sqrt{2}} + \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{u}{2\sqrt{2}}(-u+2).$$

Označimo sa (ξ, η) *konformne koordinate tako da je parametrizacija* $x(\xi, \eta)$ *konformna (Propozicija 4.2.). Iz gornjih formula tada dobivamo*

$$c_1'(\xi+\eta) - c_2 + (\xi+\eta) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi+\eta-\sqrt{2})^2$$

$$c_3'(\xi+\eta) = \frac{\xi+\eta}{2\sqrt{2}}(-\xi-\eta+2).$$

Sada redom provjeravamo uvjete Teorema 4.5. Za početak, imamo

$$(B_1 - B_2)(c_1'(\xi+\eta) - c_2'(\xi+\eta)) = -\frac{1}{4}\left(\xi+\eta-\sqrt{2}\right)^2 < 0$$

zbog toga što je $u \in \langle 4, +\infty\rangle, v \in \langle -1, 1\rangle$*, pa iz formula za konformne koordinate imamo* $\xi = \dfrac{u+v}{2} > \dfrac{4-1}{2} > 1$ *te još imamo i* $\eta = \dfrac{u-v}{2} > \dfrac{4-1}{2} > 1$*, pa sveukupno* $\xi+\eta > 2 > \sqrt{2}$ *iz čega slijedi prethodni zaključak. Nadalje,* *imamo*

$$\begin{aligned}
&c_3'(\xi+\eta)\left(c_1(\xi+\eta)-c_2'(\xi+\eta)\right)\neq B_3(B_1-B_2)\\
&\iff \frac{\xi+\eta}{2\sqrt{2}}(-\xi-\eta+2)\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\xi+\eta-\sqrt{2}\right)^2\right]\neq\frac{1}{2}\\
&\iff (\xi+\eta)(-\xi-\eta+2)\left(\xi+\eta-\sqrt{2}\right)^2\neq 4
\end{aligned}$$

Kako je $\xi+\eta>4-1=3>0, -\xi-\eta+2<-4+1+2<0, \xi+\eta>\sqrt{2}$*, vidimo da je izraz sa lijeve strane gornje jednakosti uvijek strogo manji od 0, pa posebno nikada nije jednak* 4 *iz čega zaključujemo da je zadovoljen i drugi uvjet Teorema 4.5. Stoga, ova parametrizirana ploha dopušta prethodno opisanu Weierstrassovu reprezentaciju. Odredimo joj sada Weierstrassove podatke. Koristeći iste oznake kao i kroz cijelo ovo poglavlje, imamo*

$$\begin{aligned}
\psi_1&=\frac{1}{2}\left(-\frac{(\xi+\eta)^2}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\tau\left(-\frac{(\xi+\eta)^2}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\\
&=-\frac{(\xi+\eta)^2}{4\sqrt{2}}+\tau\left(-\frac{(\xi+\eta)^2}{4\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Budući da je $z=\xi+\tau\eta, \bar{z}=\xi-\tau\eta$*, imamo* $\xi+\eta=\frac{z+\bar{z}}{2}+\frac{z-\bar{z}}{2\tau}$ *iz čega izlazi:*

$$\psi_1(z)=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}+\frac{z-\bar{z}}{2\tau}\right)^2+\tau\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}+\frac{z-\bar{z}}{2\tau}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Potpuno analogno dobivamo da je

$$\psi_2(z)=-\frac{z+\bar{z}}{4}-\frac{z-\bar{z}}{4\tau}+\tau\left(-\frac{z+\bar{z}}{4}-\frac{z-\bar{z}}{4}\right)=\frac{z+z\tau}{2}$$

$$\psi_3(z)=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}+\frac{z-\bar{z}}{2\tau}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\tau\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}+\frac{z-\bar{z}}{2\tau}\right)^2\right).$$

Budući da sređivanjem ne dobivamo nikakav poželjniji zapis, slijedi da su Weierstrassovi podaci dani s

$$f(z) = \psi_1(z) - \psi_2(z),\ g(z) = \frac{\psi_3(z)}{f(z)}.$$

Primjer 4.10. *Definirajmo funkcije* $\alpha, \beta : \langle 4, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *sa*

$$\alpha(u) = u^3,\ \ \beta(u) = \frac{\sqrt{3}}{2}u^2.$$

Tada za svaki $u > 4$ *imamo* $\alpha'(u) = 3u^2 = (\beta'(u))^2$*, pa prema Primjeru 3.15. imamo da je* $x(u,v) : \langle 4, +\infty\rangle \times \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}^3_1$ *parametrizacija B-pravčaste plohe, pri čemu je*

$$x(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u + \frac{u^3}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}(u - \frac{u^3}{2}), \frac{\sqrt{3}}{2}u^2\right) + v\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Iz istog primjera vidimo da je $k_3 \equiv 0$*, pa prema Korolaru 3.17. slijedi da je* $x(u,v)$ *parametrizacija minimalne B-pravčaste plohe. Isto kao i u Primjeru 4.9., sa* (ξ, η) *ćemo označavati konformne koordinate na ovoj plohi. Sada provjeravamo uvjete Teorema 4.5. Imamo*

$$c_1'(u) - c_2'(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3u^2}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3u^2}{2\sqrt{2}} = \frac{3u^2}{\sqrt{2}}$$

$$c_3'(u) = \sqrt{3}u$$

iz čega, prelaskom na konformne koordinate (ξ, η)*, dobivamo*

$$c_1'(\xi + \eta) - c_2'(\xi + \eta) = \frac{3(\xi + \eta)^2}{\sqrt{2}},\ \ c_3'(\xi + \eta) = \sqrt{3}(\xi + \eta).$$

Sada slijedi

$$(B_1 - B_2)(c_1'(\xi+\eta) - c_2'(\xi+\eta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3(\xi+\eta)^2}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}(\xi+\eta)^2.$$

Budući da imamo $\xi = \frac{u+v}{2} > \frac{4-1}{2} > 0,\ \eta = \frac{u-v}{2} > \frac{4-1}{2} > 0$*, imamo da je uvijek* $\xi + \eta > 0$*, pa vidimo da je očito gornji izraz uvijek strogo manji od* 0*. Dalje, imamo*

$$c_3'(\xi+\eta)(c_1'(\xi+\eta) - c_2'(\xi+\eta)) \neq B_3(B_1 - B_2) \iff \frac{3\sqrt{3}}{2}(\xi+\eta)^5 \neq 0,$$

međutim to je očito zadovoljeno jer je $\xi + \eta > 0$ *za sve* ξ, η*. Stoga, prema Teoremu 4.5., slijedi da parametrizacija* $x(\xi, \eta)$ *promatrane B-pravčaste plohe dopušta Weierstrassovu reprezentaciju. Odredimo pripadne Weierstrassove podatke. Analogno kao i u Primjeru 4.9., imamo*

$$\psi_1(z) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{z+\bar{z}+z\tau-\bar{z}\tau}{2}\right)^2 + \tau\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{z+\bar{z}+z\tau-\bar{z}\tau}{2}\right)^2 + \sqrt{2}\right)$$

$$\psi_2(z) = \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{z+\bar{z}+z\tau-\bar{z}\tau}{2}\right)^2 - \tau\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{z+\bar{z}+z\tau-\bar{z}\tau}{2}\right)^2\right)$$

$$\psi_3(z) = \sqrt{3} \cdot \frac{z+\bar{z}+z\tau-\bar{z}\tau}{2} + \tau\left(\sqrt{3} \cdot \frac{z+\bar{z}+z\tau-\bar{z}\tau}{2}\right) = \sqrt{3}(z+1)\tau.$$

Ponovno, daljnim sređivanjem ne bismo postigli nikakav poželjniji zapis, pa samo navodimo da su Weierstrassovi podaci dani s

$$f(z) = \psi_1(z) - \psi_2(z),\ g(z) = \frac{\psi_3(z)}{f(z)}.$$

Literatura

[1] M. Abate i F. Tovena. *Curves and surfaces*. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] L. J. Alias, A. Ferrandez, P. Lucas i M. A. Meroño. “On the Gauss map of B-scrolls”. *Tsukuba Journal of Mathematics* (1998.), str. 371–377.

[3] R.M.B. Chaves, M. P. Dussan i M. Magid. “Björling problem for timelike surfaces in the Lorentz–Minkowski space”. *Journal of mathematical analysis and applications* 377.2 (2011.), str. 481–494.

[4] D. Devald. “Plohe konstantne srednje zakrivljenosti u Minkowskijevom prostoru”. Disertacija. University of Zagreb. Faculty of Science. Department of Mathematics, 2017.

[5] D. Devald i Ž. Milin-Šipuš. “Weierstrass representation for lightlike surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space”. *Journal of Geometry and Physics* 166 (2021.), str. 104252.

[6] A. Gray, E. Abbena i S. Salamon. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica®*. Chapman i Hall/CRC, 2017.

[7] J. I. Inoguchi i S. Lee. “Null curves in Minkowski 3-space”. *International Electronic Journal of Geometry* 1 (2008.), str. 40–83.

[8] J. J. Konderak. “A Weierstrass representation theorem for Lorentz surfaces”. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal* 50.5 (2005.), str. 319–332.

[9] S. Lee. “Weierstrass representation for timelike minimal surfaces in Minkowski 3-space”. *arXiv preprint math/0608726* (2006.).

[10] J.H. Lira, M. Melo i F. Mercuri. “A Weierstrass representation for minimal surfaces in 3-dimensional manifolds”. *Results in Mathematics* 60.1 (2011.), str. 311–323.

[11] M. A. Magid. “Timelike surfaces in Lorentz 3-space with prescribed mean curvature and Gauss map”. *Hokkaido Mathematical Journal* 20.3 (1991.), str. 447–464.

[12] F. Martinović. “Vremenske i svjetlosne plohe u Lorentz-Minkowskijevom prostoru”. Disertacija. University of Zagreb. Faculty of Science. Department of Mathematics, 2021.

[13] F Messelmi. “Analysis of dual functions”. *Annu. Rev. Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems* 4 (2013.), str. 37–54.

[14] Ž. Milin-Šipuš, Lj. Primorac Gajčić i I. Protrka. “Null scrolls as B-scrolls in Lorentz-Minkowski 3-space.” *Turkish Journal of Mathematics* 43.6 (2019.).

[15] Ž. Milin-Šipuš, Lj. Primorac Gajčić i I. Protrka. “Null scrolls with prescribed curvatures in Lorentz-Minkowski 3-space”. *Analele Universitatii” Ovidius” Constanta-Seria Matematica* 28.3 (2020.).

Sažetak

Ivan Krznarić:

Weierstrassova reprezentacijska formula minimalnih B-pravčastih ploha u Lorentz-Minkowskijevom prostoru

U prvom poglavlju ovog rada dan je pregled Lorentz-Minkowskijevog prostora $\mathbb{R}^3_1$ te su proučene posljedice koje pseudoskalarni produkt ima na geometriju navedenog prostora. Zatim, uvedeni su osnovni geometrijski objekti kojima se u radu bavimo, a to su parametrizirane krivulje i plohe te su definirani osnovni pojmovi koji su nam potrebni za proučavanje ploha poput prve fundamentalne forme, Gaussovog preslikavanja, operatora oblika plohe u točki, Gaussove i srednje zakrivljenosti plohe u točki.

Dalje, u drugom je poglavlju proučena algebra hiperboličkih brojeva. Najprije su izvedeni neki zaključci o algebarskoj strukturi te algebre, a nakon toga su definirani pojmovi i iskazani rezultati vezani uz diferencijalni račun na algebri $\mathbb{L}$. Dodatno, uveden je pojam $\mathbb{L}$-diferencijalnih 1-formi, opisani su operatori formalnog deriviranja te je definiran pojam integrala $\mathbb{L}$-diferencijalne 1-forme duž glatkog puta.

U trećem poglavlju uvedene su B-pravčaste plohe kao glavna klasa ploha kojom se ovaj rad bavi. Definirani su pojmovi svjetlosne parametrizirane krivulje i Cartanovog trobrida kao glavne geometrijske sastavnice B-pravčastih ploha te je dana metoda kojom se te veličine konstruiraju, a na kraju su opisana glavna geometrijska svojstva te klase ploha.

U četvrtom poglavlju, koje je i najoriginalniji dio rada, izvodi se Weierstrassova reprezentacijska formula minimalnih B-pravčastih ploha. U tu je svrhu izvedena konformna parametrizacija tih ploha te su okarakterizirane situacije u kojima je moguće, odnosno u kojima nije moguće, odrediti Weierstrassovu reprezentaciju s obzirom na geometrijska svojstva B-pravčaste plohe. Metodama razvijenim u ovom poglavlju izračunati su Weierstrassovi podaci nekih konkretnih B-pravčastih ploha.

Ključne riječi: Lorentz-Minkowskijev prostor, minimalna ploha, Weierstrassova reprezentacija, hiperbolički brojevi, B-pravčasta ploha

Summary

Ivan Krznarić:

Weierstrass representation formula for minimal B-scrolls in Lorentz-Minkowski 3-space

In the first chapter of this paper, a brief review of Lorentz-Minkowski 3-space is given and the consequences that the pseudoscalar product has on the geometry of this space are studied. Also, the basic geometric objects that are being used in this paper are defined such as parametrized curves and surfaces as well as the first fundamental form, Gauss map, shape operator of a surface at a point, Gaussian and mean curvature.

In the second chapter, the algebra of hyperbolic numbers is analized. First, we studied its algebraic structure, and then we defined the necessary objects and stated the main theorems of differential calculus on that algebra. Furthermore, the notions of $\mathbb{L}$-differential 1-form, differential operators and the line integral of a $\mathbb{L}$-differential 1-form are defined.

In the third chapter, we introduce B-scrolls as the main class of surfaces that are being studied in this paper. Also, we defined a lightlike parametrized curve and its Cartan frame as the main components of a B-scroll and the method of construction of these objects is described. At the end of the chapter, the main properties of B-scrolls are stated.

In the fourth and final chapter, which is the most original part of this paper, we derived the Weierstrass representation formula for minimal B-scrolls. For that purpose, we reparametrized the B-scroll with conformal coordinates and we characterized the situations in which it is and in which it is not possible to determine the Weierstrass representation of a B-scroll with regards to its geometric properties. With the methodes developed in this chapter, we calculated explicitly the Weierstrass data for some examples of B-scrolls.

Keywords: Lorentz-Minkowski 3-space, minimal surface, Weierstrass representation, hyperbolic numbers, B-scroll