

Sveučilište u Zagrebu
Geodetski fakultet

Ivana Čosić i Josip Čurin

**Određivanje i analiza visinskih pomaka
nivelmanske mreže u središtu Zagreba**

Zagreb, 2021.

Ovaj rad izrađen je na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, Zavod za primijenjenu geodeziju, Katedra za instrumentalnu tehniku, pod vodstvom mentora prof. dr. sc. Mladena Zrinjskog i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2020./2021.

Popis i objašnjenje kratica korištenih u radu

GNSS	engl. Global Navigation Satellite Systems hrv. Globalni navigacijski satelitski sustavi
GPS	engl. Global Positioning System hrv. Globalni sustav pozicioniranja
GRS80	engl. Geodetic Reference System 1980 hrv. Geodetski referentni sustav 1980
GSI	engl. Golden Software Interchange
HVRS71	hrv. Hrvatski visinski referentni sustav za epohu 1971,5
JAG3D	engl. Java Applied Geodesy 3D

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. CILJEVI RADA.....	2
3. VISINSKA IZMJERA	3
3.1. Nivelman	4
3.1.1. Geometrijski nivelman.....	5
3.1.2. Određivanje visina geometrijskim nivelmanom	6
3.2. Nivelmanska mreža	7
3.2.1. Priključak na visoki reper	8
4. IZJEDNAČENJE I ANALIZA MREŽE	9
4.1. JAG3D.....	9
4.2. Postupak izjednačenja.....	9
4.2.1. Metoda najmanjih kvadrata.....	10
4.2.2. Izjednačenje posrednih mjerenja.....	11
5. ODREĐIVANJE I ANALIZA VISINSKIH POMAKA	13
5.1. Visinska osnova u središtu Zagreba	13
5.2. Korišten instrumentarij	14
5.3. Nivelmanska mjerenja	17
5.4. Računska obrada i izjednačenje nivelmanske mreže prve epohe mjerenja	20
5.4.1. Inicijalno izjednačenje visinskih razlika	24
5.4.2. Izjednačenje nivelmanske mreže	25
5.5. Računska obrada i izjednačenje nivelmanske mreže nulte epohe mjerenja	27

5.5.1. Inicijalno izjednačenje visinskih razlika	30
5.5.2. Izjednačenje nivelmanske mreže	31
5.6. Određivanje pomaka iz dviju epoha mjerenja	35
6. ZAKLJUČAK	38
7. ZAHVALA	39
8. LITERATURA	40
9. POPIS SLIKA	42
10. POPIS TABLICA	43
11. SAŽETAK	45
12. SUMMARY	46
13. ŽIVOTOPISI	47
14. PRILOZI	48

1. UVOD

Jedan od osnovnih zadataka geodezije je izrada planova i karata koji se temelji na podacima prikupljenim na terenu. Planovi i karte izrađuju se za manja područja ili teritorij cijele države na osnovi podataka prikupljenih različitim metodama geodetske izmjere. Na terenu se određuju položajne i visinske koordinate točaka. Geodetska mreža je konfiguracija tri ili više točaka povezanih geodetskim mjerenjima. Prema broju dimenzija koordinatnog sustava u kojem se položaj točke nalazi, geodetske mreže dijele se na jednodimenzionalne 1D (visinske) mreže, dvodimenzionalne 2D (horizontalne) i trodimenzionalne 3D (prostorne) mreže. Prema metodama uspostave geodetske mreže dijele se na terestričke (triangulacija, trilateracija, poligonometrija, nivelman) i satelitske (GPS, GNSS) mreže.

Kako bi preko plana ili karte bilo moguće dati potpunu sliku terena, potrebno je osim horizontalne situacije dati i visinski prikaz terena, odnosno konfiguraciju. Visinski odnosi mogu se prikazati na planu ili karti pomoću kota, izohipsa ili slojnica te kombinacijom kota i izohipsa (slojnica) (Kapović 2010).

Nivelmanska mreža je skup stabiliziranih točaka (repera) kojima su određene nadmorske visine, a povezane su mjerenjima te je ujedno najtočnija osnova za visinski prikaz terena. Uspostavom nivelmanske mreže te provedbom mjerenja iste u više epoha moguće je odrediti visinske pomake nastale kroz određeno vremensko razdoblje.

2. CILJEVI RADA

U svibnju 2020. godine uspostavljena je visinska geodetska osnova (mreža repera) u središtu Zagreba. U lipnju 2020. godine Mariana Nikolić je u svrhu izrade diplomskog rada obavila nivelmansku izmjeru visinske geodetske osnove u središtu Zagreba (nulta epoha). Nastavno na njezin rad, u prosincu 2020. obavljena su mjerenja prve epohe. Vremensko razdoblje između dviju epoha je šest mjeseci. Cilj ovoga rada je određivanje i analiza visinskih pomaka između prve i nulte epohe mjerenja na devet repera u središtu Zagreba u vremenskom razdoblju ljeto–zima 2020. godine.

3. VISINSKA IZMJERA

Visinski sustav je jednodimenzionalni koordinatni sustav koji se upotrebljava za određivanje udaljenosti neke točke od referentne plohe uzduž definiranog puta (ovisan o sustavu visina) u smjeru od referentne plohe prema gore, pri čemu ta udaljenost predstavlja visinu točke (Grgić i dr. 2015). Visina točke može biti određena na više načina. Referentni sustav je koordinatni sustav u prostoru i vremenu dok je referentni okvir realizacija referentnog sustava.

Službeni naziv visinskog sustava Republike Hrvatske je Hrvatski visinski referentni sustav za epohu 1971,5, skraćeno HVRS71 (slika 1). Između 1962. i 1981. godine, odnosno u vremenskom razdoblju od 18,61 godine (za vremensku epohu 1971,5) obavljena su mareografska mjerenja na pet mareografa uzduž istočne obale Jadranskog mora. Mjerenja su obavljena na mareografima u Dubrovniku, Splitu, Bakru, Rovinju i Kopru. Odabir navedenih lokacija bio je uvjetovan stabilizacijom repera i geološkom strukturom tla (Rožić 2019).

HVRS71 je sustav definiran prema normalnom Zemljinom gravitacijskom polju. U realizaciji visinskog sustava Republike Hrvatske korišteni su parametri koji definiraju dimenzije Besselova elipsoida 1841 i konstante normalnoga gravitacijskog polja Geodetskog referentnog sustava 1980 (GRS80). Visinska mreža koju čine trajno stabilizirani reperi II. nivelmana visoke točnosti, određuje se osnovom visinskoga referentnog sustava Republike Hrvatske (Narodne novine 2004a, 2004b).

GRS80 definiran je polumjerom Zemljina ekvatora ($a = 6378137$ m), geocentričnom gravitacijskom konstantom ($GM = 3986005 \cdot 10^8$ m³s⁻²), geopotencijalnom spljoštenosti ($J_2 = 108263 \cdot 10^{-8}$) i kutnom brzinom rotacije ($\omega = 7292115 \cdot 10^{-11}$ rads⁻¹) (Moritz 2000).

U geometrijskom nivelmanu visine točaka određuju se očitanjem nivelmanskih letvi horizontalnom vizurom. Mjerenja se izvode nivelirrom.

U trigonometrijskom nivelmanu visinske razlike točaka određuju se računanjem po matematičkim izrazima ravninske trigonometrije (Benčić i Solarić 2008). Osnova matematičkih izraza su mjerene veličine: zenitna daljina, kosa duljina te visine instrumenta i signala (Barković i Zrinjski 2020).

U barometrijskom nivelmanu visina točke određuje se mjerenjem razlika tlakova zraka između nje i točke čija je visina poznata. Barometrijski nivelman više se ne primjenjuje u svrhu geodetskih mjerenja. Hidrostatskim nivelmanom visine točaka određuju se na osnovi primjene fizikalnog zakona o spojenim posudama (Barković i Zrinjski 2020).

Danas se u geodeziji, u svrhu određivanja visinskih razlika, odnosno visina primjenjuju geometrijski nivelman, trigonometrijski nivelman i GNSS metoda. Geometrijski nivelman najtočnija je metoda određivanja visinskih razlika (Zrinjski i dr. 2018).

3.1.1. Geometrijski nivelman

Geometrijski nivelman je metoda određivanja visinskih razlika pomoću horizontalne vizure (Barković i Zrinjski 2020). Instrument kojim se obavlja mjerenje je nivelir. Durbin nivelira moguće je okretati samo oko vertikalne osi, dok je kolimacijska os postavljena u horizontalni položaj. Nivelmanski vlakovi dijele se s obzirom na točnost i izjednačenje na nekoliko redova. Preciznim mjerenjima određene su visine pouzdane mreže repera koje čine osnovnu mrežu. Nadalje se u nju uklapaju vlakovi i mreže nižih redova.

Prema svrsi nivelman se dijeli na generalni nivelman kojim se određuju visine repera i na detaljni nivelman kojim se s repera generalnog nivelmana određuju visine detaljnih točaka (Macarol 1985).

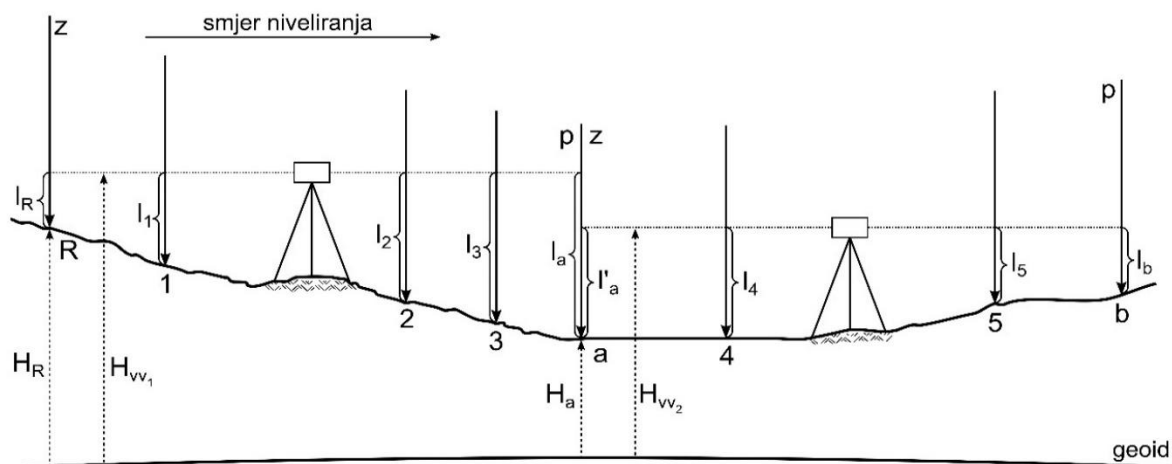
Generalni nivelman se prema točnosti dijeli na (Macarol 1985, Narodne novine 2020):

- nivelman visoke točnosti (standardno odstupanje ± 1 mm/km)
- precizni nivelman (standardno odstupanje ± 2 mm/km)
- tehnički nivelman povećane točnosti (standardno odstupanje ± 5 mm/km)
- tehnički nivelman (standardno odstupanje ± 8 mm/km).

3.1.2. Određivanje visina geometrijskim nivelmanom

Metodom geometrijskog nivelmana određuju se visinske razlike pomoću horizontalne vizure primjenom nivelira. Niveliranjem "iz sredine" određuju se visine repera u generalnom nivelmanu (slika 2). U preciznom nivelmanu dopuštena je najveća duljina vizure 40 m, razlika duljina vizura na stajalištu je 1 m, a najmanja udaljenost vizure od tla treba iznositi 0,5 m (Narodne novine 2020).

Danas se preciznim niveliranjem može očitati podatak na invarnoj nivelmanskoj letvi s mjernom nesigurnošću 0,01 mm (Zrinjski i dr. 2010). Kako podatak očitani na invarnoj nivelmanskoj letvi ne bi bio opterećen pogreškama, ispituju se tri uvjeta nivelira i preciznost nivelira u terenskim uvjetima prema normi HRN ISO (2004). Gotovo sve sustavne i slučajne pogreške mogu se eliminirati ispitivanjem i rektifikacijom instrumenta, odabirom doba dana, godine i metode mjerenja te izborom najpovoljnijih vanjskih uvjeta rada (Zrinjski i dr. 2010). Pogreške mjerila letve, pogreške neravnomjerno nanosene podjele letve i pogreške određivanja temperaturnoga koeficijenta istezanja invara određuju se umjeravanjem (komparacijom) nivelmanskih mjernih letvi na komparatoru u laboratoriju (Barković 2002).



Slika 2. Određivanje visina geometrijskim nivelmanom (Barković i Zrinjski 2020).

Općeniti izraz za određivanje visinskih razlika geometrijskim nivelmanom je (Barković i Zrinjski 2020):

$$\Delta h = l_z - l_p, \quad (1)$$

gdje je l_z očitavanje na zadnjoj letvi, a l_p očitavanje na prednjoj letvi.

Ukoliko se navedeni izraz primijeni na primjeru (slika 2), visinske razlike između veznih točaka se računaju prema izrazima (Barković i Zrinjski 2020):

$$\Delta h_{Ra} = l_R - l_a \quad (2)$$

$$\Delta h_{ab} = l'_a - l_b \quad (3)$$

Nadalje, visine veznih točaka računaju se prema izrazima (Barković i Zrinjski 2020):

$$H_a = H_R + \Delta h_{Ra} \quad (4)$$

$$H_b = H_a + \Delta h_{ab} \quad (5)$$

Detaljnije o geometrijskom nivelmanu vidjeti u Barković i Zrinjski (2020).

3.2. Nivelmanska mreža

Reperi su trajno stabilizirane geodetske točke na terenu koje imaju određenu nadmorsku visinu (Barković i Zrinjski 2020). Niz repera istog reda čini nivelmanski vlak. Nivelmanski vlakovi se sastoje od nivelmaskih strana. Nivelmanska strana je visinska razlika između dva susjedna repera (Narodne novine 2020). Niz nivelmanskih vlakova istog reda povezanih nivelmanskim mjerenjima u cjelinu naziva se nivelmanska mreža.

Mreža nivelmana visoke točnosti (nivelman 1. reda) obuhvaća velika područja te povezuje mareografe s grupama temeljnih repera. Vlakovi preciznog nivelmana (nivelman 2. reda) se razvijaju unutar poligona nivelmana visoke točnosti. Tehnički nivelman povećane točnosti (nivelman 3. reda) povezuje repere nivelmana visoke točnosti, repere preciznog nivelmana ili repere nivelmana visoke točnosti i preciznog nivelmana. Tehnički nivelman (nivelman 4. reda) proglašuje mrežu nivelmana viših redova (Narodne novine 2020).

Nivelmanski poligoni se numeriraju rimskim brojevima dok se nivelmanski vlakovi numeriraju arapskim brojevima.

Prema načinu stabilizacije razlikuju se visoki i niski reperi. Niski reperi su stabilizirani u objektima na visini do 0,5 m od površine terena. Visoki reperi su stabilizirani u objektima na

visini od 1,2 do 1,8 m od površine terena. To su reperi na koje se letva ne može direktno postaviti. Visina koju taj reper definira dana je sredinom rupice promjera 2 mm (Barković i Zrinjski 2020). Reperi se u pojedinom nivelmanskom vlaku numeriraju arapskim brojevima počevši od broja 1. Brojeve uništenih repera zabranjeno je ponovno upotrebljavati.

3.2.1. Priključak na visoki reper

Ukoliko je slučaj da se niveliranje započinje ili završava na visokom reperu, potrebno je izvršiti priključak na visoki reper. Vizurna os nivelira, ovisno o visini repera iznad tla i visini instrumenta, može prolaziti ispod ili iznad repera (Zrinjski i dr. 2021). Priključak na visoki reper moguće je izvršiti sa ili bez mjernog ravnala. U slučaju korištenja ravnala, ono zamjenjuje nivelmansku letvu. Planparalelna ploča se koristi za preciznije očitavanje na mikrometru. U slučaju izvođenja priključka bez ravnala, srednja nit nitnog križa se namjesti na rupicu repera te se očita vrijednost na mikrometru (direktni priključak na visoki reper).

4. IZJEDNAČENJE I ANALIZA MREŽE

Nakon izlaska na teren te obavljenog planiranog mjerenja potrebno je pristupiti obradi mjerenja i postupku izjednačenja. Da bi se postupak izjednačenja mogao provesti, uvjet o prekobrojnosti mjerenja mora biti zadovoljen. Izjednačenje mjerenja može biti posredno, uvjetno ili kombinirano. Rezultat izjednačenja metodom najmanjih kvadrata su minimalni popravci mjerenja kao i mogućnost računanja najvjerojatnijih vrijednosti nepoznatih veličina. Uz procjenu vrijednosti nepoznatih veličina poznat je i pripadni kriterij točnosti (Rožić 2007). Izjednačenje mreže provedeno je u softveru JAGD3D po metodi najmanjih kvadrata.

4.1. JAG3D

JAG3D (Java Applied Geodesy 3D) softverski je paket otvorenog koda. Napisan je na programskom jeziku neovisnom o platformi Java. Korisničko sučelje je pregledno i jednostavno za primjenu. Jedan je od najpopularnijih softverskih paketa koji podržava metodu najmanjih kvadrata. Metoda najmanjih kvadrata formulirana je prema Gauss-Markovljevu modelu. Program podržava izjednačenje terestričkih opažanja kao što su mjerenja horizontalnih i vertikalnih kutova, nivelman te duljina primjenom strogo matematičkog modela. Podržava izjednačenje baznih linija koje su izmjerene GNSS-om. JAG3D podržava obradu nivelmanskih, horizontalnih, prostornih i višedimenzionalnih mreža (URL 1).

4.2. Postupak izjednačenja

Mjerene veličine n primjenjuju se kako bi se dobile konačne vrijednosti tih veličina te za određivanje drugih veličina. Tražene veličine funkcijski su povezane s mjerenim veličinama. Matematički model je opća relacija koja povezuje tražene i mjerene veličine matematičkom vezom. Nakon postavljanja modela i određivanja minimalnog broja elemenata kojim je model jednoznačno određen, odabiru se elementi koji će se mjeriti. Minimalni broj elemenata kojim je model jednoznačno određen jednak je neophodnom broju mjerenih veličina n_0 . Nužna je prisutnost prekobrojnih mjerenih veličina n_f , odnosno da broj mjerenih elemenata bude veći od neophodnog broja mjerenih veličina. Navedeno se može iskazati kao (Rožić 2007):

$$n_f = n - n_0 > 0 \quad (6)$$

Prisutnošću prekobrojnih mjerenja moguće je formirati više kombinacija elemenata s neophodnim brojem mjerenih veličina. Iako kombinacije definiraju različite metode, njihovi izlazni podaci odnose se na iste veličine. Radi pogrešaka u mjerenjima izlazni podaci između dvije različite kombinacije elemenata sadržavaju manje razlike. Za ukupan broj mjerenih veličina model neće biti jednako definiran, ali se navedena višeznačnost modela može ukloniti. Uklanja se na način da se umjesto vektora mjerenih veličina u model uvrsti vektor popravljenih mjerenja. Na taj način, odnosno korekcijom svih mjerenih veličina, sve kombinacije s neophodnim brojem mjerenih veličina jednoznačno će odrediti konačne rezultate. Vektor popravljenih mjerenih veličina zapravo je vektor izjednačenih vrijednosti mjerenih veličina (Feil 1989):

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}, \quad (7)$$

gdje je $\bar{\mathbf{l}}$ vektor izjednačenih vrijednosti mjerenih veličina, \mathbf{l} vektor mjerenih veličina i \mathbf{v} vektor popravaka mjerenja.

Vektor popravaka mjerenja je nepoznat te se određuje izjednačenjem. Od neograničenog broja vektora koji udovoljavaju traženom rješenju, samo jedan vektor popravaka udovoljit će optimalnom rješenju. Kao kriterij za izbor optimalnog rješenja u geodeziji se koristi metoda najmanjih kvadrata. Postupak računanja vektora izjednačenih vrijednosti mjerenih veličina po proizvoljno uzetom kriteriju naziva se račun izjednačenja. Izjednačenje može biti posredno, uvjetno ili kombinirane forme izjednačenja (Rožić 2007).

4.2.1. Metoda najmanjih kvadrata

Izjednačenjem je potrebno odrediti najvjerojatnije vrijednosti traženih veličina. Konačne vrijednosti nepoznanica imat će najveće vjerojatnosti, a time i pripadni popravci. Mjerenja se smatraju slučajnom varijablom, čije kolektivno ponašanje opisuje pripadna razdioba vjerojatnosti (Feil 1989, Feil 1990). Ukoliko je razdioba vjerojatnosti poznata, postupkom izjednačenja se određuju najvjerojatnije nepoznanice. S obzirom da se razdioba vrijednosti odnosi na veliki broj mjerenja, za ograničeni broj mjerenja izjednačenje daje samo više ili manje prihvatljive procjene traženih veličina. Kao rješenje ovoga problema Gauss je 1821. godine predložio dva kriterija izjednačenja:

- mjerenja moraju biti raspodijeljena prema zakonu pogrešaka
- srednje pogreške nepoznanica moraju biti najmanje.

Temeljno načelo metode najmanjih kvadrata (Gaussove metode) glasi (Feil 1989):

$$\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{v}^t \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} \rightarrow \text{minimum} \quad (8)$$

gdje je \mathbf{v} vektor popravaka, \mathbf{P} dijagonalna matrica težina i \mathbf{Q} regularna matrica kofaktora. Ovim načelom jednoznačno se određuju najvjerojatnije vrijednosti nepoznanica i mjerenja, odnosno njihove najbolje procjene, a pomoću popravaka mjerenja određuje se pripadni kriterij točnosti (Rožić 2007). S obzirom da je standardno odstupanje dogovorena mjera točnosti, cijeli izvod metode najmanjih kvadrata poprima empirijski karakter. U izjednačenje se ulazi uz pretpostavku da su mjerenja opterećena samo slučajnim pogreškama.

4.2.2. Izjednačenje posrednih mjerenja

Veliki broj traženih nepoznanica u geodeziji nije moguće izmjeriti direktno pa je time potrebno uvesti izjednačenja posrednih mjerenja. Posredna mjerenja omogućavaju određivanje nepoznatih veličina poznavanjem nekih drugih veličina pomoću poznatih matematičkih povezanosti. Odnosno, tražene veličine dobivene su na osnovi posrednih mjerenja jer su one funkcije mjerenih veličina. Izjednačenje posrednih mjerenja osobito je važno pri izjednačenju geodetskih mreža. Također se smatra jednim od temeljnih postupaka suvremene računske obrade geodetskih mjerenja.

Kako bi se osigurala pouzdanost određivanja nepoznatih veličina i dobivanje elemenata za određivanje ocjene točnosti, uz neophodna mjerenja obavljaju se i prekobrojna. Kao što je već rečeno, neophodno je izjednačenje radi višeznačnosti rješenja koja su uzrokovana prekobrojnim mjerenjima.

Pojedino izjednačeno mjerenje definirano je odgovarajućom funkcijom izjednačenih vrijednosti nepoznanica. Skup svih funkcija određuje funkcijski model posrednih mjerenja koji je osnova za izjednačenje (Rožić 2007):

$$\begin{aligned}
\bar{L}_1 &= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u), \\
\bar{L}_2 &= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u), \\
&\vdots \\
\bar{L}_n &= f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u),
\end{aligned} \tag{9}$$

gdje je $\bar{L}_i (i=1, 2, \dots, n)$ pojedino izjednačenje te $\bar{x}_i (i=1, 2, \dots, u)$ funkcija izjednačenih nepoznanica. Temeljno načelo izjednačenja metode najmanjih kvadrata odnosi se na slučaj izjednačenja posrednih neovisnih mjerenja različite točnosti. Relativni odnos točnosti mjerenja *a priori* definiran je pripadnim težinama. Mjerenja su stohastičke, odnosno slučajne varijable koje pripadaju normalnoj razdiobi pa time matrica težina mjerenja \mathbf{P} definira stohastički ili slučajni model. Težine mjerenja određene su referentnom varijancom i varijancama pojedinih mjerenja (Rožić 2007):

$$\mathbf{P} = s_0^2 \mathbf{V}_{\text{II}}^{-1} = s_0^2 \begin{bmatrix} s_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & s_n^2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{10}$$

gdje je s_0^2 referentna varijanca, s_i^2 varijanca pojedinih mjerenja te \mathbf{V}_{II} matrica varijance mjerenja. Pri izjednačenju posrednih mjerenja razlikuju se regularno i singularno izjednačenje. Ukoliko je za određivanje nepoznanica *a priori* definiran referentni okvir u kojem se one izjednačenjem određuju, koristi se regularno izjednačenje. Ukoliko referentni okvir nije unaprijed definiran potrebno je provesti singularno izjednačenje. Pri izjednačenju posrednih mjerenja osnovna je pretpostavka međusobna neovisnost mjerenja. Detaljnije o postupku i formama izjednačenja vidjeti u Feil (1989), Feil (1990) i Rožić (2007).

5. ODREĐIVANJE I ANALIZA VISINSKIH POMAKA

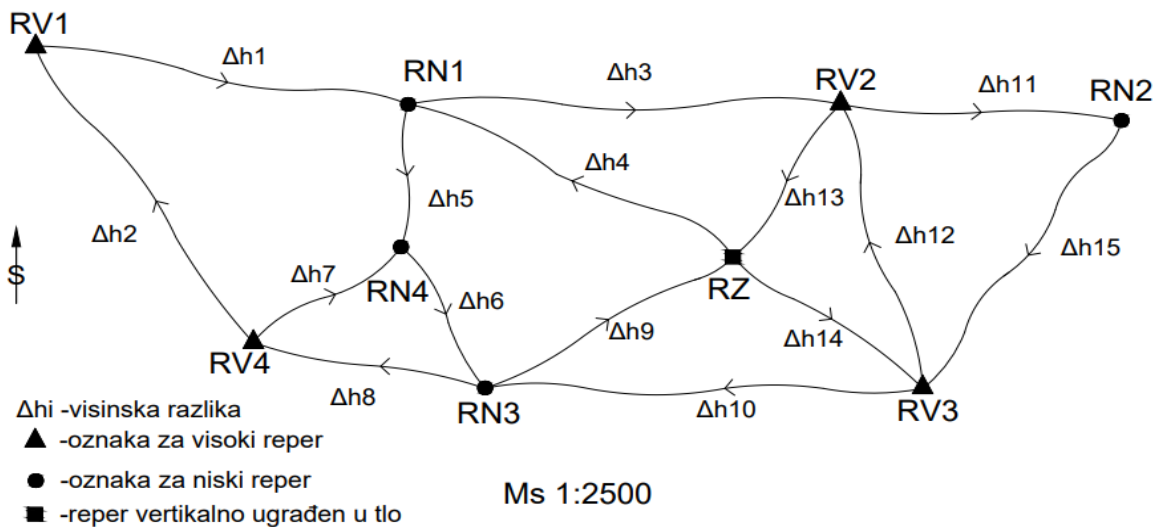
U svibnju 2020. godine uspostavljena je visinska osnova u središtu Zagreba. Nivelmanska mjerenja nulte epohe obavljena su u lipnju 2020. godine (Nikolić 2020). U sklopu ovoga rada u prosincu 2020. godine obavljena su nivelmanska mjerenja prve epohe. Osnovna svrha navedene izmjere je određivanje i analiza visinskih pomaka između prve i nulte epohe mjerenja u nivelmanskoj mreži.

Geometrijski nivelman obavljen je prema pravilima i s instrumentarijem za red preciznog nivelmana. Upotrijebljen je precizni digitalni nivelir, precizni optički nivelir u svrhu direktnog priključka na visoki reper i pribor za precizni nivelman. Kroz računski dio rada obavljena je obrada i izjednačenje nivelmanske mreže prve epohe mjerenja. Po završetku obrade određeni su i analizirani visinski pomaci u odnosu na nultu epohu mjerenja.

5.1. Visinska osnova u središtu Zagreba

Visinska osnova u središtu Zagreba sastoji se od ukupno devet repera od kojih je šest iz mreže gradskog nivelmana, a tri su novostabilizirana (slika 3). Mreža repera tvori petnaest nivelmanskih vlakova koji formiraju sedam zatvorenih poligona. Mreža obuhvaća četiri visoka repera, četiri niska repera te jedan reper ugrađen vertikalno u tlo. Četiri repera stabilizirana su u Ulici Vjekoslava Klaića, a tri repera u Ulici Izodora Kršnjavoga. Niski reper RN4 stabiliziran je u učionici 11 Geodetskog fakulteta, dok se reper ugrađen vertikalno u tlo nalazi na Srednjoškolskom igralištu u Klaićevoj ulici.

SKICA NIVELMANSKE MREŽE



Slika 3. Skica nivelmanske mreže u središtu Zagreba.

5.2. Korišten instrumentarij

Vodeći se pravilima pri niveliranju obavljena su mjerenja visinskih razlika. Niveliranje u smjeru natrag izvedeno je potpuno neovisno od niveliranja u smjeru naprijed. Duljine vizura pri niveliranju su gotovo podjednake te su letve postavljene na nivelmanske papuče.

Za geodetsku izmjeru korištena je sljedeća mjerna oprema:

- precizni digitalni nivelir Leica DNA03
- precizni optički nivelir Leica NAK2 s planparalelnom pločom
- dvije invarne kodirane nivelmanske letve
- jedna invarna nivelmanska letva s centimentarskom podjelom
- stativ
- dva držača za letve
- dvije nivelmanske papuče.

S obzirom da se priključak na visoki reper trebao obaviti s visokom točnošću, primijenjen je precizni optički nivelir Leica NAK2 s planparalelnom pločom (slika 4, tablica 1). Sva ostala nivelmanska mjerenja obavljena su preciznim digitalnim nivelirima Leica DNA03 (slika 5, tablica 2). Optički nivelir nema mogućnost spremanja podataka u instrument pa je time izmjera zahtjevnija. Planparalelna ploča omogućava očitavanja na 0,1 mm i procjenu očitavanja na 0,01mm

(Benčić 1990, Benčić i Solarić 2008). Digitalni nivelir ima mogućnost spremanja podataka na memorijsku karticu te prilikom izmjere upozorava na prekoračenje dopuštenih odstupanja. Kako bi se smanjile pogreške koje utječu na mjerenja, primijenjen je par invarnih nivelmanskih letvi, dva držača za letve te dvije nivelmanske papuče.



Slika 4. Precizni optički nivelir Leica NAK2 s planparalelnom pločom.

Tablica 1. Tehničke karakteristike optičkog nivelira Leica NAK2 (Leica 1999).

Tehničke karakteristike optičkog nivelira Leica NAK2	
Standardno odstupanje na 1 km dvostrukog niveliranja s planparalelnom pločom	0,3 mm
Multiplikacijska konstanta	100
Adicijska konstanta	0
Promjer objektiva	45 mm
Povećanje dubina	32x
Najkraća duljina fokusiranja	1,6 m

Tehničke karakteristike optičkog nivelira Leica NAK2	
Osjetljivost dozne libele	8'/2 mm
Radno područje kompenzatora	≈30'
Točnost podešavanja kompenzatora	0,3"



Slika 5. Precizni digitalni nivelir Leica DNA03.

Tablica 2. Tehničke karakteristike nivelira Leica DNA03 (Leica 2006).

Tehničke karakteristike digitalnog nivelira Leica DNA03	
Standardno odstupanje na 1 km dvostrukog niveliranja s invarnim letvama (elektronička mjerenja)	0,3 mm
Standardno odstupanje mjerenja duljine	1 cm / 20 m (500 ppm)
Domet (elektronička mjerenja)	1,8 m–100 m
Masa	2,8 kg
Povećanje durbina	24x
Načini mjerenja	pojedinačno, prosječno, srednje, ponavljana pojedinačna mjerenja
Radno područje kompenzatora	$\pm 10'$
Standardno odstupanje kompenzatora	0,3"

Ispitivanje preciznosti optičkog i digitalnog nivelira provedeno je prema normi HRN ISO 17123-2:2004 (HRN ISO 2004).

5.3. Nivelmanska mjerenja

Prva epoha mjerenja u nivelmanskoj mreži obavljena su u razdoblju od 7. do 17. prosinca 2020. godine. S obzirom na nepogodne vremenske uvjete u Gradu Zagrebu, vrijeme izmjere pomno je isplanirano. Mjerenja su odrađena kroz 4 dana u vremenskom razdoblju između 9 i 16 sati radi izrazito niskih jutarnjih temperatura i kratkog dana. Na terenu su sudjelovali studentica Dorotea Biček i studenti Luka Gulan i Duje Validžić. Niveliranje je izvođeno u dva smjera (smjer naprijed i smjer natrag). Niveliranje u smjeru naprijed obavio je Josip Ćurin (slika 6 i slika 7), a niveliranje u smjeru natrag Ivana Ćosić.



Slika 6. Niveliranje u smjeru naprijed.



Slika 7. Invarna nivelmanska letva s držačima i nivelmanska papuča.

Težeći da vizura bude što udaljenija od terena, izbjegavane su vizure ispod 0,5 metara zbog nepovoljnog utjecaja vertikalne refrakcije u nižim slojevima zraka (Benčić i Solarić 2008). Pri niveliranju poštivao se redosljed očitavanja letvi "zadnja-prednja-prednja-zadnja", kojim su se eliminirali utjecaji slijeganja letvi i stativa. Sva mjerenja obavljena su u skladu s Pravilnikom o načinu izvođenja osnovnih geodetskih radova (Narodne novine 2020).

Prvog dana mjerenja (7. prosinca 2020. godine) obavljen je priključak na visoki reper RV1, koji je ujedno i početni reper pri niveliranju u smjeru naprijed digitalnim nivelirom Leica DNA03. Nadalje se nastavio nivelmanski vlak Klaićevom ulicom preko repera RN1 i RV2 do niskog repera RN2, nakon kojeg se nastavio vlak do muzeja Mimare gdje se nalazi treći visoki reper RV3. Kroz Ulicu Izidora Kršnjavog nastavljeno je niveliranje u smjeru naprijed preko repera RN3 do visokog repera RV4 od kuda je nastavljeno ulicom pored X. gimnazije te je vlak završen na početnom reperu RV1 u Ulici Vjekoslava Klaića. Na svim visokim reperima napravljen je direktni priključak na visoki reper preciznim optičkim nivelirom s

planparalelnom pločom. Mjerenja obavljena optičkim nivelirom zapisana su u nivelmanski obrazac te se provodila kontrola pri mjerenju na terenu. Drugi dan mjerenja obavljena su mjerenja unutarnjih nivelmanskih strana, odnosno preko repera unutar Geodetskog fakulteta i repera vertikalno ugrađenog u tlo na Srednjoškolskom igralištu. Treći i četvrti dan obavljena su mjerenja u smjeru natrag. Ukupna duljina nivelmanskih vlakova u smjeru naprijed iznosi 2986,14 m s 52 stajališta, a u smjeru natrag 3019,66 m s 54 stajališta.

5.4. Računska obrada i izjednačenje nivelmanske mreže prve epohe mjerenja

Pri izmjeri digitalnim nivelirom nije bilo potrebe za zapisivanjem podataka mjerenja jer se svi podaci pohranjuju u memoriju instrumenta u formatu. GSI (engl. Golden Software Interchange). Svaki dan nakon terenske izmjere prebacivalo se podatke s instrumenta na računalo, a na kraju cijele izmjere su se svi podaci pripremili za daljnju obradu u softverima Microsoft Office Excel i JAG3D.

Prvi je korak u obradi računanje visinskih razlika nivelmanskih strana iz podataka mjerenja (tablica 3).

Tablica 3. Visinske razlike nivelmanskih strana iz originalnih podataka prve epohe mjerenja.

Visinska razlika	OD	DO	Smjer naprijed		Smjer natrag	
			ΔH_F [m]	D _F [m]	ΔH_B [m]	D _B [m]
Δh_1	RV1	RN1	-1,73687	201,03	1,73696	200,46
Δh_2	RV4	RV1	2,61176	288,63	-2,61085	277,22
Δh_3	RN1	RV2	0,42115	263,25	-0,42167	268,19
Δh_4	RZ	RN1	0,12643	307,97	-0,12637	310,92
Δh_5	RN1	RN4	-1,51601	97,22	1,51617	104,21
Δh_6	RN4	RN3	0,15500	140,81	-0,15539	140,38
Δh_7	RN4	RV4	0,64153	147,14	-0,64138	149,75
Δh_8	RN3	RV4	0,48564	140,36	-0,48608	139,14
Δh_9	RN3	RZ	1,23353	232,92	-1,23376	248,58
Δh_{10}	RV3	RN3	-1,37520	272,88	1,37522	301,15
Δh_{11}	RV2	RN2	-1,16788	155,01	1,16818	155,83
Δh_{12}	RV3	RV2	0,40673	209,65	-0,40714	211,47
Δh_{13}	RV2	RZ	-0,54791	126,57	0,54820	125,54
Δh_{14}	RZ	RV3	0,14142	186,48	-0,14120	180,49
Δh_{15}	RN2	RV3	0,76091	216,26	-0,76097	206,37

Slijedi računanje razlike pri dvostrukom mjerenju nivelmanskih strana, odnosno razlike između smjera naprijed i smjera natrag (tablica 4) te visinske nesuglasice zatvaranja nivelmanskih poligona u smjeru naprijed i smjeru natrag (tablica 5) u svrhu *a priori* analize prisutnosti grubih pogrešaka.

Dopuštene razlike pri dvostrukom mjerenju nivelmanskih strana u preciznom nivelmanu iznose (Narodne novine 2020):

$$(\Delta_{\max})_{\text{mm}} = \pm 4\sqrt{D_{\text{km}}}, \quad (11)$$

gdje su:

Δ_{\max} – dopuštena razlika pri dvostrukom mjerenju nivelmanskih strana

D – duljina između susjednih repera izražena u kilometrima.

Uvjet koji je potrebno zadovoljiti je:

$$d < \Delta_{\max}, \quad (12)$$

gdje je:

d – razlika dvostrukog niveliranja.

Duljina D dobivena je kao aritmetička sredina duljina nivelmanskih vlakova iz smjera naprijed i smjera natrag.

Tablica 4. Razlike pri dvostrukom mjerenju nivelmanskih strana i pripadna dopuštena odstupanja prve epohe mjerenja.

Visinska razlika	Smjer naprijed		Smjer natrag		D [m]	d [mm]	Δ_{\max} [mm]
	ΔH_F [m]	L_F [m]	ΔH_B [m]	L_B [m]			
Δh_1	-1,73687	201,03	1,73696	200,46	200,74	0,09	$\pm 1,79$
Δh_2	2,61176	288,63	-2,61085	277,22	282,92	0,91	$\pm 2,13$
Δh_3	0,42115	263,25	-0,42167	268,19	265,72	-0,52	$\pm 2,06$
Δh_4	0,12643	307,97	-0,12637	310,92	309,44	0,06	$\pm 2,23$
Δh_5	-1,51601	97,22	1,51617	104,21	100,71	0,16	$\pm 1,27$
Δh_6	0,15500	140,81	-0,15539	140,38	140,59	-0,39	$\pm 1,50$
Δh_7	0,64153	147,14	-0,64138	149,75	148,44	0,15	$\pm 1,54$
Δh_8	0,48564	140,36	-0,48608	139,14	139,75	-0,44	$\pm 1,50$
Δh_9	1,23353	232,92	-1,23376	248,58	240,75	-0,23	$\pm 1,96$
Δh_{10}	-1,37520	272,88	1,37522	301,15	287,01	0,03	$\pm 2,14$

Visinska razlika	Smjer naprijed		Smjer natrag		D [m]	d [mm]	Δ_{max} [mm]
	ΔH_F [m]	L _F [m]	ΔH_B [m]	L _B [m]			
Δh_{11}	-1,16788	155,01	1,16818	155,83	155,42	0,30	$\pm 1,58$
Δh_{12}	0,40673	209,65	-0,40714	211,47	210,56	-0,41	$\pm 1,84$
Δh_{13}	-0,54791	126,57	0,54820	125,54	126,05	0,29	$\pm 1,42$
Δh_{14}	0,14142	186,48	-0,14120	180,49	183,48	0,22	$\pm 1,71$
Δh_{15}	0,76091	216,26	-0,76097	206,37	211,31	-0,06	$\pm 1,84$

Dobivene vrijednosti razlika dvostrukog niveliranja zadovoljavaju uvjet definiran izrazom 12, odnosno manjeg su iznosa od dopuštenog odstupanja.

Zbog otkrivanja prisutnosti grubih pogrešaka u mjerenjima, određene su vrijednosti nesuglasica nivelmanskih poligona za smjer naprijed i smjer natrag te pripadno dopušteno odstupanje.

Ukupna nesuglasica zatvaranja nivelmanskog poligona računa se prema izrazu:

$$\omega = \text{TREBA} - \text{IMA}, \quad (13)$$

gdje su:

ω – nesuglasica nivelmanskog poligona

IMA – suma visinskih razlika poligona

TREBA = 0,00 mm.

Dopušteno odstupanje za nivelman zatvorenog poligona računa se prema izrazu (Macarol 1985):

$$\Delta = \pm 4\sqrt{R + 0,04R^2}, \quad (14)$$

gdje su:

Δ – dopušteno odstupanje za nivelman zatvorenog poligona

R – duljina vlaka zatvorenog poligona u kilometrima.

Uvjet koji treba zadovoljiti je:

$$\omega < \Delta. \quad (15)$$

U tablici 5 i tablici 6 sadržane su vrijednosti nesuglasica pojedinog nivelmanskog poligona te pripadno dopušteno odstupanje za svaki poligon za smjer naprijed i natrag.

Tablica 5. Nesuglasice nivelmanskog poligona za smjer naprijed prve epohe mjerenja.

ID nivelmanskog poligona	Nivelmanski vlak	R [m]	ω [mm]	Δ [mm]
1	L1-L5-L7-L2	734,01	-0,42	$\pm 3,48$
2	L6-L8-L7	428,30	0,89	$\pm 2,64$
3	L3-L13-L4	697,79	0,33	$\pm 3,39$
4	L5-L6-L9-L4	778,91	1,06	$\pm 3,58$
5	L14-L10-L9	692,27	0,26	$\pm 3,37$
6	L12-L13-L14	522,69	-0,23	$\pm 2,92$
7	L12-L11-L15	580,91	0,24	$\pm 3,08$

Tablica 6. Nesuglasice nivelmanskog poligona za smjer natrag prve epohe mjerenja.

ID nivelmanskog poligona	Nivelmanski vlak	R [m]	ω [mm]	Δ [mm]
1	L1-L5-L7-L2	731,63	-0,89	$\pm 3,47$
2	L6-L8-L7	429,27	0,09	$\pm 2,64$
3	L3-L13-L4	704,64	-0,16	$\pm 3,40$
4	L5-L6-L9-L4	804,08	-0,65	$\pm 3,64$
5	L14-L10-L9	730,21	-0,26	$\pm 3,46$
6	L12-L13-L14	517,50	0,14	$\pm 2,91$
7	L12-L11-L15	573,67	-0,07	$\pm 3,06$

Analizom postavljenih uvjeta, zaključuje se da su sve nesuglasice unutar dopuštenog odstupanja te da nema grubih pogrešaka velikih iznosa.

Analizom točnosti *a priori*, odnosno određivanjem razlika pri dvostrukom mjerenju nivelmanskih strana te nesuglasica nivelmanskog poligona za smjer naprijed i smjer natrag, zaključuje se da u mjerenjima nema prisutnosti grubih pogrešaka, odnosno da je postignuta zahtijevana točnost mjerenja.

5.4.1. Inicijalno izjednačenje visinskih razlika

Inicijalno izjednačenje visinskih razlika provedeno je prema algoritmu izjednačenja direktnih dvostrukih mjerenja (Rožić 2007) nakon što smo utvrdili neprisutnost grubih pogrešaka mjerenja. Visinske razlike i duljine dobivene su aritmetičkom sredinom iz dva smjera niveliranja. Dvostruka mjerenja su uvijek iste točnosti, bez obzira na smjer mjerenja, pa su težine definirane kao recipročne vrijednosti pojedine duljine nivelmanske strane u kilometrima, gdje je za vrijednost konstante K izabrana vrijednost $K = 0,2$ jer je prosječna udaljenost svih nivelmanskih strana 0,2 km. Rezultati izjednačenja prikazani su u tablici 7.

Izjednačenjem dvostrukih mjerenja izračunato je referentno standardno odstupanje koje iznosi $s_0 = 0,25$ mm, ocjena točnosti pojedinih dvostrukih mjerenja s_{hi} kao i ocjena točnosti pojedinih izjednačenih nepoznanica s_{xi} . Cijeli postupak izjednačenja dvostrukih mjerenja prikazan je u prilogu 4.

Tablica 7. Rezultati izjednačenja dvostrukih mjerenja prve epohe mjerenja.

ID visinske razlike	OD	DO	D [m]	Δh_i [m]	s_{xi} [mm]
Δh_1	RV1	RN1	200,74	-1,73691	0,18
Δh_2	RV4	RV1	282,92	2,61130	0,21
Δh_3	RN1	RV2	265,72	0,42141	0,20
Δh_4	RZ	RN1	309,44	0,12640	0,22
Δh_5	RN1	RN4	100,71	-1,51609	0,13
Δh_6	RN4	RN3	140,59	0,15520	0,15
Δh_7	RN4	RV4	148,44	0,64146	0,15
Δh_8	RN3	RV4	139,75	0,48586	0,15
Δh_9	RN3	RZ	240,75	1,23365	0,19
Δh_{10}	RV3	RN3	287,01	-1,37521	0,21
Δh_{11}	RV2	RN2	155,42	-1,16803	0,16
Δh_{12}	RV3	RV2	210,56	0,40694	0,18
Δh_{13}	RV2	RZ	126,05	-0,54806	0,14
Δh_{14}	RZ	RV3	183,48	0,14131	0,17
Δh_{15}	RN2	RV3	211,31	0,76094	0,18

5.4.2. Izjednačenje nivelmanske mreže

Pomoću rezultata obrade inicijalnog izjednačenja dvostrukih mjerenja obavljeno je izjednačenje nivelmanske mreže u softveru JAG3D primjenom singularnog izjednačenja neovisnih posrednih mjerenja različite točnosti. Definicija datuma mreže je parcijalni optimalni datum koji je definiran na temelju nepoznanica koje su utvrđene kao stabilne točke mreže (Rožić 2007). Broj točaka koje definiraju datum mora biti manji od ukupnog broja točaka mreže (Feil 1989). Prema tome, defekt datuma je četiri zato što je datum definiran na visokim reperima kojih je četiri u nivelmanskoj mreži. Odabrani su visoki reperi kao stabilne točke mreže za definiciju datuma zato što su u odnosu na niske repere višeg ranga i stabilniji.

Približne vrijednosti nepoznanica nivelmanske mreže prikazane su u tablici 8. Pomoću inicijalnog izjednačenja dvostrukih mjerenja pripremljeni su svi ulazni podaci za izjednačenje nivelmanske mreže, odnosno određivanje najvjerojatnijih vrijednosti nepoznanica s pripadnim ocjenama točnosti (tablica 9).

Tablica 8. Približne vrijednosti nepoznanica prve epohe mjerenja.

ID repera	H_i^0 [m]
RV1	121,223
RV2	119,884
RV3	119,494
RV4	118,616
RN1	119,475
RN2	118,898
RN3	118,124
RN4	117,974
RZ	119,344

Tablica 9. Ulazni podaci za izjednačenje prve epohe mjerenja.

Visinska razlika	OD	DO	Δh_i [m]	$S_{\Delta h_i}$ [mm]	L [m]
Δh_1	RV1	RN1	-1,73691	0,25	200,74
Δh_2	RV4	RV1	2,61130	0,30	282,92
Δh_3	RN1	RV2	0,42141	0,29	265,72
Δh_4	RZ	RN1	0,12640	0,31	309,44
Δh_5	RN1	RN4	-1,51609	0,18	100,71
Δh_6	RN4	RN3	0,15520	0,21	140,59

Visinska razlika	OD	DO	Δh_i	$S_{\Delta h_i}$	L
			[m]	[mm]	[m]
Δh_7	RN4	RV4	0,64146	0,22	148,44
Δh_8	RN3	RV4	0,48586	0,21	139,75
Δh_9	RN3	RZ	1,23365	0,28	240,75
Δh_{10}	RV3	RN3	-1,37521	0,30	287,01
Δh_{11}	RV2	RN2	-1,16803	0,22	155,42
Δh_{12}	RV3	RV2	0,40694	0,26	210,56
Δh_{13}	RV2	RZ	-0,54806	0,20	126,05
Δh_{14}	RZ	RV3	0,14131	0,24	183,48
Δh_{15}	RN2	RV3	0,76094	0,26	211,31

U tablici 10 prikazani su konačni rezultati izjednačenja, odnosno izjednačene vrijednosti nepoznanica (izjednačene visine repera), točnosti nepoznanica i visinske nesigurnosti.

Tablica 10. Rezultati izjednačenja mreže prve epohe mjerenja.

ID repera	H [m]	S_{H_i} [mm]	a_i [mm]
RV1	121,2165	0,12	4,23
RV2	119,9011	0,10	3,59
RV3	119,4943	0,10	3,62
RV4	118,6051	0,11	3,73
RN1	119,4796	0,11	3,77
RN2	118,7332	0,16	5,55
RN3	118,1191	0,11	3,90
RN4	117,9637	0,13	4,51
RZ	119,3530	0,11	3,97

U okviru određivanja kriterija kvalitete obavljenih mjerenja određuju se ocjene točnosti izjednačenih mjerenja. U tablici 11 prikazane su izjednačene vrijednosti visinskih razlika nivelmanske mreže, točnost izjednačenih visinskih razlika te element prekobrojnosti. S ciljem otkrivanja prisutnosti grubih pogrešaka u mjerenjima određena je mjera unutarnje pouzdanosti mreže. Unutarnja pouzdanost prikazana je elementom prekobrojnosti r_i .

Na temelju dobivenih podataka iz izjednačenja, odnosno ocjene točnosti izjednačenih nepoznanica (visina repera) te pripadnih elemenata visinske nesigurnosti evidentna je visoka točnost mreže. Sve navedeno implicira na nepostojanje grubih pogrešaka i sustavnih utjecaja.

Tablica 11. Izjednačene vrijednosti visinskih razlika s pripadnom ocjenom točnosti te element prekobrojnosti prve epohe mjerenja.

ID visinske razlike	Izjednačene visinske razlike $\overline{\Delta h}_i$ [m]	Točnost izjednačenih visinskih razlika $\overline{s}_{\Delta h_i}$ [mm]	r_i
Δh_1	-1,73685	0,16	0,329
Δh_2	2,61136	0,16	0,336
Δh_3	0,42151	0,14	0,478
Δh_4	0,12662	0,13	0,530
Δh_5	-1,51592	0,14	0,443
Δh_6	0,15543	0,13	0,492
Δh_7	0,64140	0,14	0,458
Δh_8	0,48597	0,14	0,451
Δh_9	1,23387	0,13	0,525
Δh_{10}	-1,37511	0,14	0,480
Δh_{11}	-1,16793	0,15	0,391
Δh_{12}	0,40688	0,12	0,578
Δh_{13}	-0,54813	0,13	0,555
Δh_{14}	0,14124	0,13	0,559
Δh_{15}	0,76104	0,15	0,396

5.5. Računska obrada i izjednačenje nivelmanske mreže nulte epohe mjerenja

U svibnju 2020. godine obavljena je uspostava nivelmanske mreže u središtu Zagreba. U lipnju 2020. godine obavljena su mjerenja nulte epohe. U nultoj i prvoj epohi mjerenja su obavljena prema istom mjernom postupku i s istim instrumentarijem te je izjednačenje u obje epohe provedeno prema istom matematičkom modelu. Svi podaci nulte epohe preuzeti su iz diplomskog rada „Uspostava visinske osnove Geodetskog fakulteta“ (Nikolić 2020). U nastavku je priložen i objašnjen postupak izjednačenja i obrade nivelmanske mreže nulte epohe mjerenja koji je provela Mariana Nikolić 2020. godine, koji je osnova za računanje visinskih pomaka između prve i nulte epohe mjerenja nivelmanske mreže.

Najprije su izračunate visinske razlike nivelmanskih strana iz podataka mjerenja na terenu (tablica 12). Kako bi se obavila *a priori* analiza točnosti izračunate su razlike pri dvostrukom mjerenju nivelmanskih strana i visinske nesuglasice zatvaranja nivelmanskih poligona za smjer naprijed i smjer natrag.

Tablica 12. Visinske razlike nivelmanskih strana iz originalnih podataka nulte epohe mjerenja.

ID visinske razlike	OD	DO	NAPRIJED		NATRAG	
			ΔH_F [m]	L_F [m]	ΔH_B [m]	L_B [m]
Δh_1	RV1	RN1	-1,73561	211,84	1,73639	211,91
Δh_2	RV4	RV1	2,61186	319,20	-2,61260	314,79
Δh_3	RN1	RV2	0,42059	269,81	-0,42050	268,47
Δh_4	RZ	RN1	0,12863	305,92	-0,12938	306,67
Δh_5	RN1	RN4	-1,51765	95,60	1,51796	107,51
Δh_6	RN4	RN3	0,15512	116,54	-0,15536	116,80
Δh_7	RN4	RV4	0,64174	158,93	-0,64108	157,38
Δh_8	RN3	RV4	0,48610	153,75	-0,48628	156,01
Δh_9	RN3	RZ	1,23386	198,50	-1,23282	216,36
Δh_{10}	RV3	RN3	-1,37548	292,01	1,37587	278,21
Δh_{11}	RV2	RN2	-1,16941	162,78	1,16869	181,86
Δh_{12}	RV3	RV2	0,40750	228,04	-0,40745	230,78
Δh_{13}	RV2	RZ	-0,54870	136,37	0,54954	142,17
Δh_{14}	RZ	RV3	0,14173	180,49	-0,14256	178,16
Δh_{15}	RN2	RV3	0,76201	212,58	-0,76110	224,93

Nadalje, izračunate su razlike pri dvostrukom niveliranju. Izračunata je duljina dobivena kao aritmetička sredina duljina nivelmanskih vlakova smjera naprijed i smjera natrag. U tablici 13 prikazane su dopuštene razlike pri dvostrukom mjerenju za pojedine nivelmanske strane koje su unutar dopuštenih odstupanja pri dvostrukom mjerenju nivelmanskih strana.

Tablica 13. Razlike pri dvostrukom mjerenju nivelmanskih strana i pripadna dopuštena odstupanja nulte epohe mjerenja.

ID visinske razlike	NAPRIJED		NATRAG		D [m]	d [mm]	Δ_{\max} [mm]
	ΔH_F [m]	L_F [m]	ΔH_B [m]	L_B [m]			
Δh_1	-1,73561	211,84	1,73639	211,91	211,87	0,77	$\pm 1,84$
Δh_2	2,61186	319,20	-2,61260	314,79	316,99	-0,74	$\pm 2,25$
Δh_3	0,42059	269,81	-0,42050	268,47	269,14	0,10	$\pm 2,08$
Δh_4	0,12863	305,92	-0,12938	306,67	306,30	-0,76	$\pm 2,21$
Δh_5	-1,51765	95,60	1,51796	107,51	101,55	0,31	$\pm 1,27$
Δh_6	0,15512	116,54	-0,15536	116,80	116,67	-0,24	$\pm 1,37$
Δh_7	0,64174	158,93	-0,64108	157,38	158,15	0,66	$\pm 1,59$
Δh_8	0,48610	153,75	-0,48628	156,01	154,88	-0,18	$\pm 1,57$
Δh_9	1,23386	198,50	-1,23282	216,36	207,43	1,04	$\pm 1,82$
Δh_{10}	-1,37548	292,01	1,37587	278,21	285,11	0,39	$\pm 2,14$
Δh_{11}	-1,16941	162,78	1,16869	181,86	172,32	-0,73	$\pm 1,66$
Δh_{12}	0,40750	228,04	-0,40745	230,78	229,41	0,05	$\pm 1,92$
Δh_{13}	-0,54870	136,37	0,54954	142,17	139,27	0,84	$\pm 1,49$
Δh_{14}	0,14173	180,49	-0,14256	178,16	179,32	-0,83	$\pm 1,69$
Δh_{15}	0,76201	212,58	-0,76110	224,93	218,75	0,91	$\pm 1,87$

Izračunate su vrijednosti nesuglasica nivelmanskog poligona i pripadno dopušteno odstupanje svakog poligona. Navedeno je prikazano u tablicama 14 i 15. Sve nesuglasice su unutar dopuštenog odstupanja te nisu prisutne grube pogreške. Analizom točnosti *a priori* zaključeno je kako u mjerenjima nema prisutnosti grubih pogrešaka te da je postignuta zahtijevana točnost mjerenja.

Tablica 14. Nesuglasice nivelmanskog poligona za smjer naprijed nulte epohe mjerenja.

ID nivelmanskog poligona	Nivelmanski vlak	R [m]	ω [mm]	Δ [mm]
1	L1-L5-L7-L2	785,56	0,34	$\pm 3,60$
2	L6-L8-L7	429,21	-0,52	$\pm 2,64$
3	L3-L13-L4	712,09	0,52	$\pm 3,42$
4	L5-L6-L9-L4	716,55	0,04	$\pm 3,43$
5	L14-L10-L9	670,99	0,11	$\pm 3,32$
6	L8-L6-L12	544,89	-0,53	$\pm 2,98$
7	L12-L11-L15	603,39	0,10	$\pm 3,14$

Tablica 15. Nesuglasice nivelmanskog poligona za smjer natrag nulte epohe mjerenja.

ID nivelmanskog poligona	Nivelmanski vlak	R [m]	ω [mm]	Δ [mm]
1	L1-L5-L7-L2	791,58	-0,67	$\pm 3,61$
2	L6-L8-L7	430,18	0,57	$\pm 2,65$
3	L3-L13-L4	717,31	0,34	$\pm 3,44$
4	L5-L6-L9-L4	747,33	0,40	$\pm 3,51$
5	L14-L10-L9	672,73	-0,50	$\pm 3,32$
6	L8-L6-L12	551,11	-0,47	$\pm 3,00$
7	L12-L11-L15	637,57	-0,14	$\pm 3,23$

5.5.1. Inicijalno izjednačenje visinskih razlika

Nakon izračunatih visinskih razlika, slijedi postupak izjednačenja istih. Inicijalno izjednačenje visinskih razlika provedeno je prema algoritmu izjednačenja direktnih dvostrukih mjerenja (Rožić 2007). Visinske razlike i duljine dobivene su aritmetičkom sredinom iz dva smjera niveliranja. Dvostruka mjerenja su uvijek iste točnosti, bez obzira na smjer mjerenja, pa su težine definirane kao recipročne vrijednosti pojedine duljine nivelmanske strane u kilometrima, gdje je za vrijednost konstante K izabrana vrijednost $K = 0,1$. Rezultati izjednačenja prikazani su u tablici 16.

Izjednačenjem dvostrukih mjerenja izračunato je referentno standardno odstupanje koje iznosi $s_0=0,33$ mm, ocjena točnosti pojedinih dvostrukih mjerenja s_{hi} kao i ocjena točnosti pojedinih izjednačenih nepoznanica s_{xi} .

Tablica 16. Rezultati izjednačenja dvostrukih mjerenja nulte epohe mjerenja.

ID visinske razlike	OD	DO	D [m]	Δh_i [m]	s_{xi} [mm]
Δh_1	RV1	RN1	211,87	-1,73600	0,34
Δh_2	RV4	RV1	316,99	2,61223	0,41
Δh_3	RN1	RV2	269,14	0,42054	0,38
Δh_4	RZ	RN1	306,30	0,12900	0,41
Δh_5	RN1	RN4	101,55	-1,51780	0,23
Δh_6	RN4	RN3	116,67	0,15524	0,25
Δh_7	RN4	RV4	158,15	0,64141	0,29
Δh_8	RN3	RV4	154,88	0,48619	0,29
Δh_9	RN3	RZ	207,43	1,23334	0,34
Δh_{10}	RV3	RN3	285,11	-1,37567	0,39
Δh_{11}	RV2	RN2	172,32	-1,16905	0,31
Δh_{12}	RV3	RV2	229,41	0,40747	0,35
Δh_{13}	RV2	RZ	139,27	-0,54912	0,27
Δh_{14}	RZ	RV3	179,32	0,14214	0,31
Δh_{15}	RN2	RV3	218,75	0,76155	0,34

5.5.2. Izjednačenje nivelmanske mreže

Pomoću rezultata obrade inicijalnog izjednačenja dvostrukih mjerenja obavljeno je izjednačenje nivelmanske mreže u softveru JAG3D primjenom singularnog izjednačenja neovisnih posrednih mjerenja različite točnosti. Datum mreže je parcijalni optimalni datum koji je definiran pomoću nepoznanica koje su utvrđene kao stabilne točke mreže (Rožić 2007). Broj točaka koje definiraju datum mora biti manji od ukupnog broja točaka mreže (Feil 1989). Prema tome, defekt datuma je četiri zato što je datum definiran na visokim reperima kojih je četiri u nivelmanskoj mreži. Odabrani su visoki reperi kao stabilne točke mreže za definiciju zato što su u odnosu na niske repere višeg ranga i stabilniji.

Približne vrijednosti nepoznanica nivelmanske mreže prikazane su u tablici 17. Pomoću inicijalnog izjednačenja dvostrukih mjerenja pripremljeni su svi ulazni podaci za izjednačenje nivelmanske mreže, odnosno određivanje najvjerojatnijih vrijednosti nepoznanica s pripadnim ocjenama točnosti (tablica 18).

Tablica 17. Približne vrijednosti nepoznanica nulte epohe mjerenja.

ID repera	H_i^0 [m]
RV1	121,223
RV2	119,884
RV3	119,494
RV4	118,616
RN1	119,475
RN2	118,898
RN3	118,124
RN4	117,974
RZ	119,344

Tablica 18. Ulazni podaci za izjednačenje nulte epohe mjerenja.

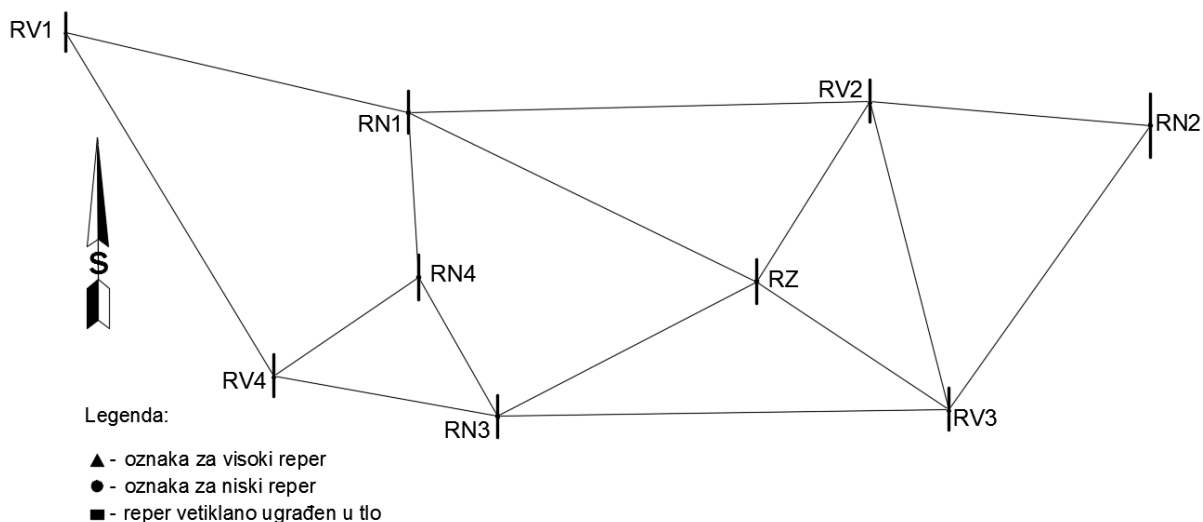
ID visinske razlike	OD	DO	Δh_i [m]	$s_{\Delta h_i}$ [mm]	L [m]
Δh_1	RV1	RN1	-1,73600	0,34	211,87
Δh_2	RV4	RV1	2,61223	0,41	316,99
Δh_3	RN1	RV2	0,42054	0,38	269,14
Δh_4	RZ	RN1	0,12900	0,41	306,30
Δh_5	RN1	RN4	-1,51780	0,23	101,55
Δh_6	RN4	RN3	0,15524	0,25	116,67
Δh_7	RN4	RV4	0,64141	0,29	158,15
Δh_8	RN3	RV4	0,48619	0,29	154,88
Δh_9	RN3	RZ	1,23334	0,34	207,43
Δh_{10}	RV3	RN3	-1,37567	0,39	285,11
Δh_{11}	RV2	RN2	-1,16905	0,31	172,32
Δh_{12}	RV3	RV2	0,40747	0,35	229,41
Δh_{13}	RV2	RZ	-0,54912	0,27	139,27
Δh_{14}	RZ	RV3	0,14214	0,31	179,32
Δh_{15}	RN2	RV3	0,76155	0,34	218,75

U tablici 19 prikazani su konačni rezultati izjednačenja odnosno izjednačene vrijednosti nepoznanica (izjednačene visine repera), točnosti nepoznanica i visinske nesigurnosti.

Tablica 19. Rezultati izjednačenja mreže nulte epohe mjerenja.

ID repera	H [m]	s_{H_i} [mm]	a_i [mm]
RV1	121,2169	0,12	0,23
RV2	119,9014	0,03	0,18
RV3	119,4940	0,09	0,18
RV4	118,6047	0,09	0,18
RN1	119,4810	0,09	0,18
RN2	118,7324	0,14	0,27
RN3	118,1185	0,09	0,18
RN4	117,9632	0,10	0,19
RZ	119,3520	0,10	0,19

Za analizu rezultata izjednačenja, rezultati sadržani u tablici 19 grafički su prikazani na slici 8. Visinska nesigurnost vizualizirana je vrijednostima a_i .



Slika 8. Skica nivelmanske mreže s prikazom visinskih nesigurnosti (Nikolić 2020).

U okviru određivanja kriterija kvalitete obavljenih mjerenja određuju se ocjene točnosti izjednačenih mjerenja. U tablici 20 prikazane su izjednačene vrijednosti visinskih razlika nivelmanske mreže, točnost izjednačenih visinskih razlika te element prekobrojnosti. S ciljem otkrivanja prisutnosti grubih pogrešaka u mjerenjima određena je mjera unutarnje pouzdanosti mreže. Unutarnja pouzdanost prikazana je elementom prekobrojnosti r_i .

Tablica 20. Izjednačene vrijednosti visinskih razlika s pripadnom ocjenom točnosti te element prekobrojnosti nulte epohe mjerenja.

ID visinske razlike	Izjednačene visinske razlike Δh_i [m]	Točnost izjednačenih visinskih razlika $\bar{s}_{\Delta h_i}$ [mm]	r_i
Δh_1	-1,73597	0,14	0,315
Δh_2	2,61227	0,15	0,458
Δh_3	0,42039	0,13	0,547
Δh_4	0,12895	0,12	0,646
Δh_5	-1,51775	0,10	0,280
Δh_6	0,15527	0,10	0,406
Δh_7	0,64145	0,11	0,460
Δh_8	0,48617	0,11	0,434
Δh_9	1,23352	0,12	0,532
Δh_{10}	-1,37554	0,13	0,570
Δh_{11}	-1,16897	0,13	0,355
Δh_{12}	0,40732	0,11	0,622
Δh_{13}	-0,54934	0,10	0,432
Δh_{14}	0,14202	0,11	0,519
Δh_{15}	0,76165	0,13	0,427

Na temelju dobivenih podataka iz izjednačenja, odnosno ocjene točnosti izjednačenih nepoznanica (visina repera) te pripadnih elemenata visinske nesigurnosti evidentna je visoka točnost mreže. Sve navedeno implicira na nepostojanje grubih pogrešaka i sustavnih utjecaja.

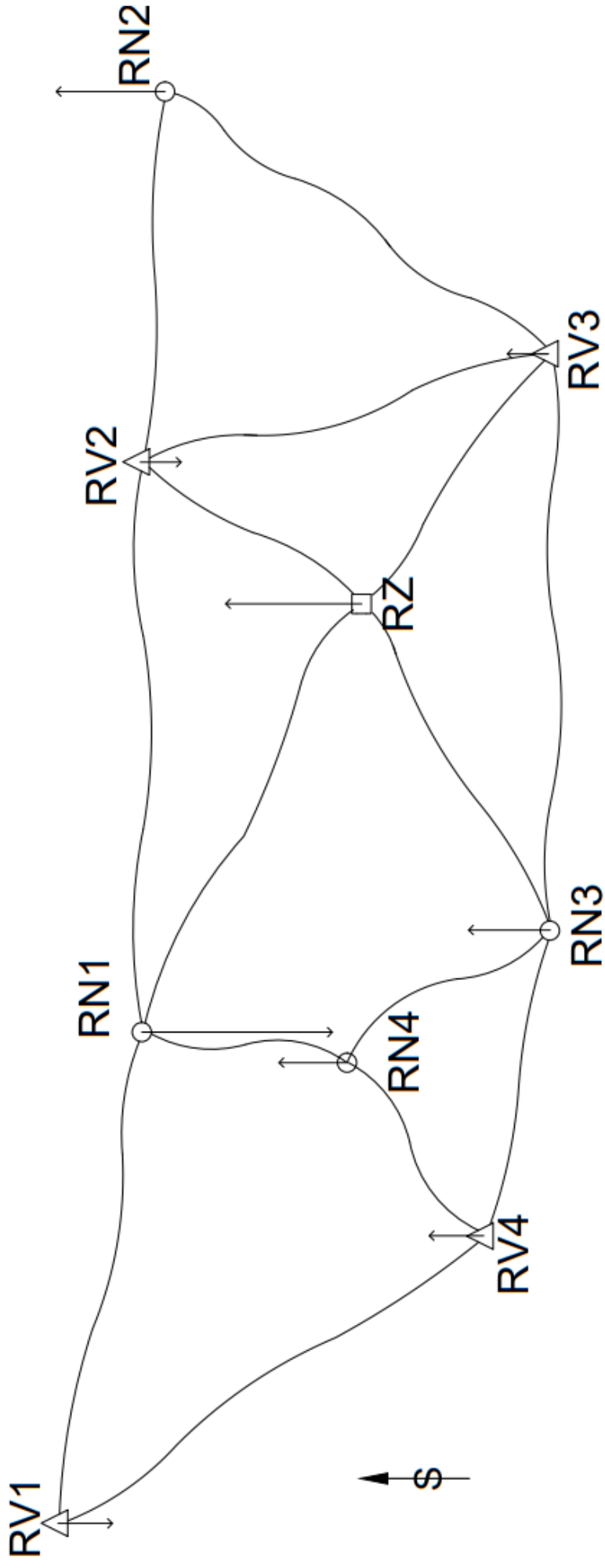
5.6. Određivanje pomaka iz dviju epoha mjerenja

U svibnju 2020. godine uspostavljena je visinska osnova u središtu Zagreba, a u lipnju iste godine obavljena su mjerenja nulte epohe. Terenskom izmjerom prve epohe u prosincu 2020. godine te računskom obradom dobiveni su rezultati za izračun visinskih pomaka između prve i nulte epohe mjerenja. Visinski pomak za svaki reper je izračunat kao razlika visine repera iz prve epohe mjerenja i visine repera iz nulte epohe mjerenja.

Tablica 21. Visine repera u dvije epohe mjerenja i visinski pomaci.

Reper	Epoha 0 [m]	Epoha 1 [m]	Pomak = E1 – E0 [m]	Pomak [mm]
RV1	121,2169	121,2165	-0,0004	-0,4
RV2	119,9014	119,9011	-0,0003	-0,3
RV3	119,4940	119,4943	0,0003	0,3
RV4	118,6047	118,6051	0,0004	0,4
RN1	119,4810	119,4796	-0,0014	-1,4
RN2	118,7324	118,7332	0,0008	0,8
RN3	118,1185	118,1191	0,0006	0,6
RN4	117,9632	117,9637	0,0005	0,5
RZ	119,3520	119,3530	0,0010	1,0

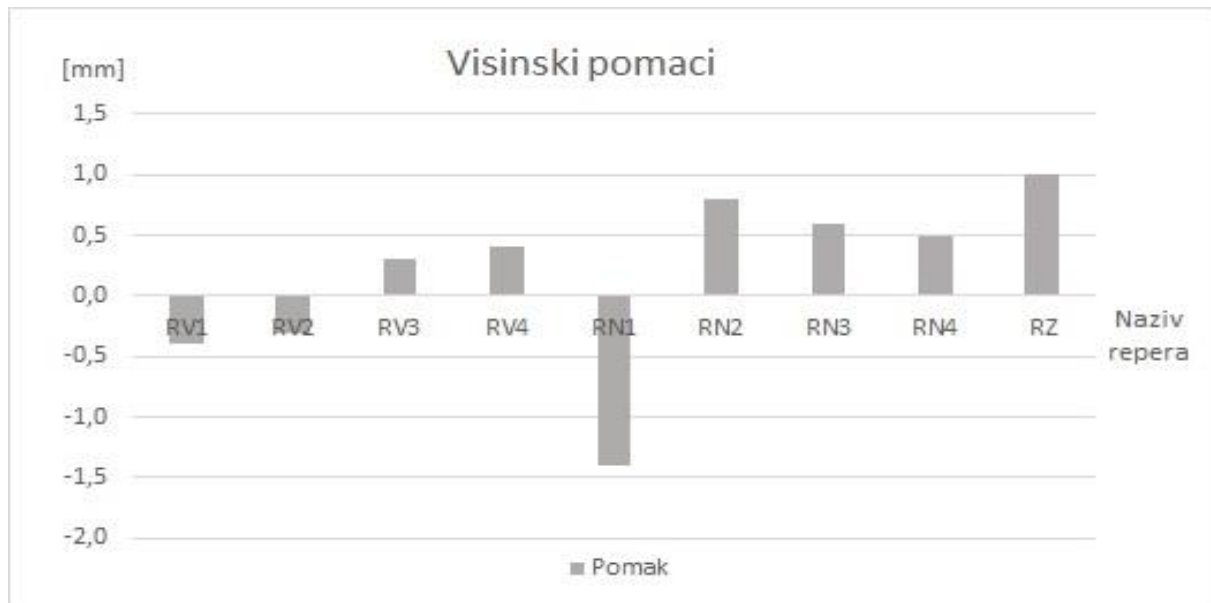
Slika 9 prikazuje skicu nivelmanske mreže i visinske pomake na reperima. Mjerilo skice je 1:2500, a mjerilo pomaka iznosi 25:1 zbog boljeg grafičkog prikaza.



- △ -oznaka za visoki reper
 - -oznaka za niski reper
 - -reper vertikalno ugrađen u tlo
- Ms 1:2500
Mp 25:1

Slika 9. Skica visinskih pomaka repera.

Slika 10 prikazuje histogram visinskih pomaka pojedinih repera sa stvarnim iznosima pomaka.



Slika 10. Histogram visinskih pomaka repera.

6. ZAKLJUČAK

U okviru ovoga rada obavljena su nivelmanska mjerenja visinske osnove u središtu Zagreba s ciljem određivanja visinskih pomaka repera između dviju epoha. Primijenjena je ista mjerna metoda i mjerni instrumentarij u obje epohe mjerenja. U zadanim uvjetima tražene točnosti odabrana je metoda geometrijskog nivelmana te instrumentarij i pribor za precizno niveliranje.

Realizirana je izmjera nivelmanske mreže u dva smjera niveliranja, koja uključuje 15 nivelmanskih vlakova koji formiraju 7 nivelmanskih figura. Ukupna duljina vlakova nivelmanske mreže u smjeru naprijed iznosi 2986,14 m s 52 stajališta, a u smjeru natrag 3019,66 m s 54 stajališta.

Nakon mjerenja, slijedila je računaska obrada mjerenih podataka. Prije računске obrade mjerenih podataka, trebalo je provjeriti eventualnu prisutnost grubih pogrešaka. Za otkrivanje prisutnosti grubih pogrešaka izračunate su nesuglasice dvostrukog niveliranja i nesuglasice zatvaranja figura. Iz dobivenih podataka utvrđeno je da su unutar dopuštenog odstupanja. Inicijalnim izjednačenjem, primjenom algoritma izjednačenja direktnih mjerenja određeno je 15 visinskih razlika s ocjenama točnosti pojedinih dvostrukih mjerenja i ocjenama točnosti pojedinih izjednačenih nepoznanica. S dobivenim podacima iz inicijalnog izjednačenja provedeno je izjednačenje nivelmanske mreže u softveru JAG3D.

Izjednačenje mreže provedeno je metodom najmanjih kvadrata prema posrednoj formi izjednačenja. Za izjednačenje je definiran parcijalni optimalan datum pri čemu je datum mreže definiran samo na visokim reperima. Singularnim izjednačenjem dobivena je ocjena točnosti referentnog mjerenja s vrijednošću $s_0=0,251$ mm.

Rezultat izjednačenja su izjednačene visine repera. Na temelju svih rezultata izjednačenja nivelmanske mreže te pokazatelja ocjene točnosti dolazi se do zaključka o visokoj kvaliteti obavljenih mjerenja. Nakon toga su određeni visinski pomaci repera između dviju epoha mjerenja. Pomaci najvećeg apsolutnog iznosa utvrđeni su na reperima RN1 i RZ. Reper RN1 stabiliziran je u sjevernoj fasadi Geodetskog fakulteta, dok se reper RZ nalazi na nasipu Srednjoškolskog igrališta u Klaićevoj ulici. U vremenskom razdoblju između dviju epoha mjerenja dogodilo se mnogo potresa slabijeg intenziteta, koji su mogli utjecati na pomake repera. Radi daljnje analize visinskih pomaka, treba nastaviti s nivelmanskim mjerenjima u sezonskim epohama svakih šest mjeseci.

7. ZAHVALA

Posebno zahvaljujemo mentoru prof. dr. sc. Mladenu Zrinjskom na velikom trudu i odličnom vodstvu pri izradi ovoga rada. Zahvaljujemo asistentici Kristini Matika, mag. ing. geod. et geoinf., i asistentu Antoniu Tupeku, mag. ing. geod. et geoinf., na pomoći, savjetima i uloženom vremenu. Također zahvaljujemo kolegici Dorotei Biček, univ. bacc. ing. geod. et geoinf., te kolegama Luki Gulanu, univ. bacc. ing. geod. et geoinf., i Duji Validžiću, univ. bacc. ing. geod. et geoinf., na pomoći pri terenskoj izmjeri.

8. LITERATURA

- Barković, Đ. (2002): Komparacija nivelmanskih letava pomoću inkrementalne mjerne letve, doktorska disertacija, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Barković, Đ., Zrinjski, M. (2020): Terenska mjerenja, sveučilišni priručnik, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Benčić, D. (1990): Geodetski instrumenti, Školska knjiga, Zagreb.
- Benčić, D., Solarić, N. (2008): Mjerni instrumenti i sustavi u geodeziji i geoinformatici, Školska knjiga, Zagreb.
- Feil, L. (1989): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja – prvi dio, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Feil, L. (1990): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja – drugi dio, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Frančula, N., Lapaine, M. (2008): Geodetsko-geoinformatički rječnik, Državna geodetska uprava, Zagreb.
- Grgić, I., Lučić, M., Trifković, M. (2015): Visinski sustavi u nekim europskim zemljama, Geodetski list, 2, 79–96.
- HRN ISO (2004): HRN ISO 17123-2:2004 – Optika i optički instrumenti – Terenski postupci za ispitivanje geodetskih instrumenata i instrumenata izmjere – 2. dio: Niveliri (ISO 17123-2:2001), Hrvatski zavod za norme, Zagreb, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland.
- Kapović, Z. (2010): Geodezija u niskogradnji, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Leica (1999): Leica NA2/NAK2, User Manual, Leica Geosystems AG, Heerbrugg, Switzerland.
- Leica (2006): Leica DNA03/DNA10 User Manual – Version 2.0, Leica Geosystems AG, Heerbrugg, Switzerland.
- Macarol, S. (1985): Praktična geodezija, Tehnička knjiga, Zagreb.

- Moritz, H. (2000): Geodetic Reference System 1980, *Journal of Geodesy, The Geodesist's Handbook*, 1, 128–133.
- Narodne novine (2004a): Odluka o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i ravninskih kartografskih projekcija Republike Hrvatske, *Narodne novine* br. 110, Zagreb.
- Narodne novine (2004b): Ispravak Odluke o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i ravninskih kartografskih projekcija Republike Hrvatske, *Narodne novine* br. 117, Zagreb.
- Narodne novine (2020): Pravilnik o načinu izvođenja osnovnih geodetskih radova, *Narodne novine* br. 112, Zagreb.
- Nikolić, M. (2020): Uspostava visinske osnove Geodetskog fakulteta, diplomski rad, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Rožić, N. (2007): Računska obrada geodetskih mjerenja, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Rožić, N. (2019): Hrvatski visinski referentni sustav, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Zrinjski, M., Barković, Đ., Razumović, I. (2010): Automatizacija ispitivanja preciznosti nivelira i umjeravanja invarnih nivelmanskih letvi, *Geodetski list*, 4, 279–296.
- Zrinjski, M., Barković, Đ., Baričević, S., Alaupović, L. (2018): Accuracy Analysis of Geometric, Trigonometric and GNSS Height Difference Levelling, VI. hrvatski kongres o katastru, Zagreb, 235–244.
- Zrinjski, M., Redovniković, L., Jakopec, A., Kolar, I., Matika, K., Tupek, A. (2021): Izmjera zemljišta, interna skripta za vježbe, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Mrežne adrese

URL 1: JAG3D,

<https://software.applied-geodesy.org/en/>,

(8. 6. 2021.).

9. POPIS SLIKA

Slika 1. Nivelmanski vlakovi u mreži II. NVT-a (Rožić 2019).....	4
Slika 2. Određivanje visina geometrijskim nivelmanom (Barković i Zrinjski 2020).....	6
Slika 3. Skica nivelmanske mreže u središtu Zagreba.	14
Slika 4. Precizni optički nivelir Leica NAK2 s planparalelnom pločom.....	15
Slika 5. Precizni digitalni nivelir Leica DNA03.....	16
Slika 6. Niveliranje u smjeru naprijed.	18
Slika 7. Invarna nivelmanska letva s držačima i nivelmanska papuča.	19
Slika 8. Skica nivelmanske mreže s prikazom visinskih nesigurnosti (Nikolić 2020).	33
Slika 9. Skica visinskih pomaka repera.	36
Slika 10. Histogram visinskih pomaka repera.	37

10. POPIS TABLICA

Tablica 1. Tehničke karakteristike optičkog nivelira Leica NAK2 (Leica 1999).....	15
Tablica 2. Tehničke karakteristike nivelira Leica DNA03 (Leica 2006).....	17
Tablica 3. Visinske razlike nivelmanskih strana iz originalnih podataka prve epohe mjerenja.	20
Tablica 4. Razlike pri dvostrukom mjerenju nivelmanskih strana i pripadna dopuštena odstupanja prve epohe mjerenja.....	21
Tablica 5. Nesuglasice nivelmanskog poligona za smjer naprijed prve epohe mjerenja.....	23
Tablica 6. Nesuglasice nivelmanskog poligona za smjer natrag prve epohe mjerenja.....	23
Tablica 7. Rezultati izjednačenja dvostrukih mjerenja prve epohe mjerenja.	24
Tablica 8. Približne vrijednosti nepoznanica prve epohe mjerenja.	25
Tablica 9. Ulazni podaci za izjednačenje prve epohe mjerenja.	25
Tablica 10. Rezultati izjednačenja mreže prve epohe mjerenja.	26
Tablica 11. Izjednačene vrijednosti visinskih razlika s pripadnom ocjenom točnosti te element prekobrojnosti prve epohe mjerenja.....	27
Tablica 12. Visinske razlike nivelmanskih strana iz originalnih podataka nulte epohe mjerenja.	28
Tablica 13. Razlike pri dvostrukom mjerenju nivelmanskih strana i pripadna dopuštena odstupanja nulte epohe mjerenja.....	29
Tablica 14. Nesuglasice nivelmanskog poligona za smjer naprijed nulte epohe mjerenja.....	30
Tablica 15. Nesuglasice nivelmanskog poligona za smjer natrag nulte epohe mjerenja.....	30
Tablica 16. Rezultati izjednačenja dvostrukih mjerenja nulte epohe mjerenja.	31
Tablica 17. Približne vrijednosti nepoznanica nulte epohe mjerenja.	32

Tablica 18. Ulazni podaci za izjednačenje nulte epohe mjerenja.	32
Tablica 19. Rezultati izjednačenja mreže nulte epohe mjerenja.	33
Tablica 20. Izjednačene vrijednosti visinskih razlika s pripadnom ocjenom točnosti te element prekobrojnosti nulte epohe mjerenja.	34
Tablica 21. Visine repera u dvije epohe mjerenja i visinski pomaci.	35

11. SAŽETAK

Određivanje i analiza visinskih pomaka nivelmanske mreže u središtu Zagreba

Ivana Ćosić i Josip Ćurin

Za potrebe ovoga rada obavljena su nivelmanska mjerenja visinske osnove u središtu Zagreba. Mjerenje visinskih razlika obavljeno je metodom preciznog nivelmana. Za niveliranje je primijenjen precizni digitalni nivelir Leica DNA03, dvije kodirane invarne nivelmanske letve i dvije nivelmanske papuče. Priključak na visoke repere obavljen je preciznim optičkim nivelrom Leica NAK2 s planparalelnom pločom. Nakon završetka terenske izmjere obavljena je računaska obrada prikupljenih podataka u softveru Microsoft Office Excel. Na temelju dobivenih podataka, odnosno izjednačenja dvostrukih mjerenja obavljeno je izjednačenje nivelmanske mreže u softveru Java Applied Geodesy (JAG3D) primjenom metode najmanjih kvadrata. Izjednačenjem su određene najvjerojatnije vrijednosti nepoznanica (visine repera) i mjerenja (visinske razlike) te pripadne ocjene točnosti nepoznanica kao i ocjene točnosti izjednačenih visinskih razlika. Kao krajnji rezultat rada izračunati su i analizirani visinski pomaci na devet repera nivelmanske mreže na osnovi provedenih mjerenja u lipnju i prosincu 2020. godine.

Ključne riječi: reper, nivelmanska mreža, precizni nivelman, epoha mjerenja, visinski pomak.

12. SUMMARY

Determination and Analysis of Height Displacements of the Leveling Network in the Center of Zagreb

Ivana Ćosić and Josip Ćurin

For this thesis, leveling measurements of the height network in the center of Zagreb were performed. Measurement of height differences was performed by the method of precise leveling. A Leica DNA03 precision digital level, two coded invar leveling staves and two leveling rod turning plates were used for the leveling process. The connection on the high benchmark was made with a precision optical level Leica NAK2 with plane-parallel plate. After the completion of field changes, the computational processing of the collected data in Microsoft Office Excel software was performed. Based on the obtained data, i.e. on the basis of adjustment of double measurements, the adjustment of leveling networks in the Java Applied Geodesy (JAG3D) software was performed using the least squares method. The adjustment determined the most probable values of unknowns (benchmark height) and measurements (height differences) and the corresponding estimates of the accuracy of unknowns as well as estimates of the accuracy of adjustment height differences. As a final result of the thesis, the height displacements at nine benchmarks of the leveling network were calculated and analyzed on the basis of measurements performed in June and December 2020.

Keywords: benchmark, leveling network, precision leveling, measurement epoch, height displacement.

13. ŽIVOTOPISI

Ivana Ćosić rođena je u Zadru 23. rujna 1998. godine. Po završetku osnovne škole započinje srednjoškolsko obrazovanje u Gimnaziji Franje Petrića u Zadru. Godine 2017. upisuje preddiplomski sveučilišni studij Geodezija i geoinformatika na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog studija 2020. godine stječe akademski naziv sveučilišne prvostupnice inženjerke geodezije i geoinformatike. Trenutno je studentica prve godine diplomskog studija Geodezije i geoinformatike, usmjerenje Geoinformatika, na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Uz fakultetske obveze rekreativno se bavi sportom i obavlja studentski posao. U izradu ovoga rada ulazi s ciljem stjecanja novih znanja na području geodezije.

Josip Ćurin rođen je u Splitu 19. rujna 1997. godine. Osnovnu školu pohađao je u Jelsi, a 2012. godine upisuje Graditeljsko-geodetsku tehničku školu u Splitu gdje je i maturirao 2016. godine. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2016. godine upisuje preddiplomski sveučilišni studij Geodezije i geoinformatike na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog studija 2020. godine stječe akademski naziv sveučilišnog prvostupnika inženjera geodezije i geoinformatike. Trenutno pohađa prvu godinu diplomskog studija Geodezije i geoinformatike, usmjerenje Geodezija, na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Aktivno obavlja studentski posao, bio je demonstrator na Katedri za upravljanje prostornim informacijama, poznaje engleski jezik na razini B2 i njemački jezik na razini A2. Na izradu ovoga rada odlučio se zbog stjecanja novih znanja i iskustva u području geodezije.

14. PRILOZI

Popis priloga:

Prilog 1 – Podaci priključka na visoki reper

Prilog 2 – Podaci mjerenja – SMJER NAPRIJED

Prilog 3 – Podaci mjerenja – SMJER NATRAG

Prilog 4 – Izjednačenje dvostrukih mjerenja različite točnosti

Prilog 5 – Izjednačenje nivelmanske mreže – JAG3D

Prilog 1. Priključak na visoki reper

SMJER NAPRIJED						
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	OČITANJA LETVE		Kontrola [cm/100]	Srednja visinska razlika Δh [m]
			1. Podjela [m]	2. Podjela [m]		
P1	RV1	6,1	0,00245	0,00248	0	-1,379958
	RV1'	6,1	1,382245	4,3981	4	
		10,6	-1,3798	-1,38012		
P2	RV2	3,1	0,006775	0,00699	2	-1,199408
	RV2'	3,1	1,20641	4,22167	-2	
		6,2	-1,19964	-1,19918		
P3	RV3	6,4	0,006735	0,00673	0	-1,295965
	RV3'	6,4	1,30274	4,318155	-1	
		12,8	-1,29601	-1,29593		
P4	RV4	7,3	0,002575	0,002565	0	-1,505103
	RV4'	7,3	1,50759	4,523255	2	
		14,6	-1,50502	-1,50519		

SMJER NATRAG						
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	OČITANJA LETVE		Kontrola [cm/100]	Srednja visinska razlika Δh [m]
			1. Podjela [m]	2. Podjela [m]		
P1	RV1	6,1	0,005915	0,00596	0	-1,379998
	RV1'	6,1	1,38602	4,40135	-2	
		12,2	-1,38011	-1,37989		
P2	RV2	3,1	0,004165	0,00401	-2	-1,199928
	RV2'	3,1	1,204095	4,219435	-2	
		6,2	-1,19993	-1,19993		
P3	RV3	6,4	0,009435	0,00935	-1	-1,296083
	RV3'	6,4	1,30544	4,32101	1	
		12,8	-1,29601	-1,29616		
P4	RV4	7,3	0,00816	0,008125	0	-1,505285
	RV4'	7,3	1,513475	4,52888	-1	
		14,6	-1,50532	-1,50526		

RV_i – visoki reper,

RV_i' – radni reper.

Prilog 2. Podaci mjerenja – SMJER NAPRIJED

SMJER NAPRIJED					
L1 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P1	RV1'	38,735	1,30083	1,30086	-0,11427
	1	38,485	1,41515	1,41507	
		77,220	-0,11432	-0,11421	
P2	1	37,735	1,21855	1,21851	-0,35037
	2	37,24	1,56891	1,56889	
		74,975	-0,35036	-0,35038	
P3	2	24,185	1,32366	1,32365	0,107725
	RN1	24,65	1,21592	1,21594	
		48,835	0,10774	0,10771	

SMJER NAPRIJED					
L2 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P4	RV4	36,700	1,61955	1,61951	1,108055
	4	36,325	0,51150	0,51145	
		73,025	1,10805	1,10806	
P5	4	36,86	1,71539	1,71543	1,210305
	5	36,8	0,50513	0,50508	
		73,66	1,21026	1,21035	
P6	5	33,21	1,49859	1,4986	0,260685
	6	33,75	1,2379	1,23792	
		66,96	0,26069	0,26068	
P7	6	37,655	1,34859	1,34856	0,15786
	RV1	37,330	1,1907	1,19073	
		74,985	0,15789	0,15783	

SMJER NAPRIJED					
L3 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P8	RN1	30,315	1,13535	1,13544	-0,2236
	8	30,780	1,35901	1,35898	
		61,095	-0,22366	-0,22354	
P9	8	30,105	1,22594	1,22591	-0,22004
	9	30,335	1,44597	1,44595	
		60,44	-0,22003	-0,22004	
P10	9	36,125	1,22528	1,22521	-0,21139
	10	35,835	1,43670	1,43656	
		71,96	-0,21142	-0,21135	
P11	10	34,85	1,49435	1,49431	-0,12324
	RV2'	34,905	1,61757	1,61757	
		69,755	-0,12322	-0,12326	

SMJER NAPRIJED					
L4 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P12	RZ	27,700	1,16092	1,16088	-0,57571
	12	27,875	1,73660	1,73662	
		55,575	-0,57568	-0,57574	
P13	12	35,170	1,48208	1,48214	0,06628
	13	36,050	1,41588	1,41578	
		71,22	0,06620	0,06636	
P14	13	33,95	1,51338	1,51347	0,15467
	14	33,79	1,35875	1,35876	
		67,74	0,15463	0,15471	
P15	14	36,995	1,65086	1,65088	0,142225
	15	37,725	1,50862	1,50867	
		74,72	0,14224	0,14221	
P16	15	19,67	1,63613	1,63609	0,33896
	RN1	19,045	1,29717	1,29713	
		38,715	0,33896	0,33896	

SMJER NAPRIJED					
L5 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P17	RN1	16,920	0,91343	0,91348	-0,85103
	17	17,400	1,76449	1,76448	
		34,32	-0,85106	-0,851	
P18	17	20,1	0,54252	0,54242	-0,9305650
	18	20,64	1,47303	1,47304	
		40,740	-0,93051	-0,93062	
P19	18	11,23	1,54635	1,54634	0,265585
	RN4	10,925	1,28078	1,28074	
		22,155	0,26557	0,2656	

SMJER NAPRIJED					
L6 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P20	RN4	10,665	1,31020	1,3101	-0,25359
	20	10,510	1,56373	1,56375	
		21,175	-0,25353	-0,25365	
P21	20	35,82	1,47219	1,47212	-0,2467000
	21	36,54	1,71886	1,71885	
		72,360	-0,24667	-0,24673	
P22	21	23,235	1,58317	1,58325	0,65529
	RN3	24,035	0,92791	0,92793	
		47,27	0,65526	0,65532	

SMJER NAPRIJED					
L7 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P23	RN4	7,600	1,18253	1,18246	-0,24439
	23	7,550	1,42688	1,42689	
		15,15	-0,24435	-0,24443	
P24	23	38,13	1,38048	1,38037	-0,4069850
	24	38,13	1,78740	1,78742	
		76,260	-0,40692	-0,40705	
P25	24	27,915	1,50055	1,50061	-0,212195
	RV4'	27,81	1,71279	1,71276	
		55,725	-0,21224	-0,21215	

SMJER NAPRIJED					
L8 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P26	RN3	38,010	0,75323	0,75337	-0,74245
	26	37,250	1,49577	1,49572	
		75,26	-0,74254	-0,74235	
P27	26	32,700	1,20867	1,20868	-0,27702
	RV4	32,400	1,48566	1,48572	
		65,1	-0,27699	-0,27704	

SMJER NAPRIJED					
L9 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P28	RN3	38,255	1,67606	1,67608	0,188095
	28	38,755	1,48798	1,48797	
		77,01	0,18808	0,18811	
P29	28	39,245	1,33925	1,33938	-0,17319
	29	39,425	1,51242	1,51259	
		78,67	-0,17317	-0,17321	
P30	29	21,265	1,7248	1,72486	0,806615
	30	21,705	0,91824	0,91819	
		42,97	0,80656	0,80667	
P31	30	17,000	1,51975	1,51978	0,412005
	RZ	17,265	1,10777	1,10775	
		34,265	0,41198	0,41203	

SMJER NAPRIJED					
L10 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P32	RV3'	14,280	1,14145	1,14146	-0,14214
	32	14,330	1,28360	1,28358	
		28,61	-0,14215	-0,14212	
P33	32	31,625	1,24179	1,24172	0,061045
	33	31,77	1,18070	1,18072	
		63,395	0,06109	0,061	
P34	33	38,765	1,36807	1,36811	0,15547
	34	38,395	1,21254	1,2127	
		77,16	0,15553	0,15541	
P35	34	38,325	1,3371	1,33715	-0,0946
	35	39,110	1,43173	1,43171	
		77,435	-0,09463	-0,09456	
P36	35	12,87	1,0852	1,0852	-0,05902
	RN3	13,410	1,14422	1,14421	
		26,28	-0,05902	-0,05901	

SMJER NAPRIJED					
L11 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P37	RV2'	30,495	1,43071	1,43061	-0,168265
	37	30,215	1,59895	1,5989	
		60,71	-0,16824	-0,16829	
P38	37	27,885	1,54109	1,54110	-0,1511000
	38	28,015	1,69220	1,69219	
		55,900	-1,5E-01	-0,15109	
P39	38	19,19	1,56598	1,56597	0,350895
	RN2	19,205	1,21509	1,21507	
		38,395	0,35089	0,3509	

SMJER NAPRIJED					
L12 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P40	RV3	37,515	1,67242	1,67235	0,290945
	40	37,510	1,38140	1,38148	
		75,025	0,29102	0,29087	
P41	40	35,510	1,52096	1,52095	0,14959
	41	34,78	1,37138	1,37135	
		70,29	0,14958	0,1496	
P42	41	31,905	1,50767	1,50766	0,06275
	RV2'	32,425	1,44493	1,4449	
		64,33	0,06274	0,06276	

SMJER NAPRIJED					
L13 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P43	RV2'	37,250	1,67048	1,67048	0,188
	43	37,440	1,48246	1,4825	
		74,69	0,18802	0,18798	
P44	43	26,050	1,58654	1,58651	0,4635
	RZ	25,830	1,12300	1,12305	
		51,88	0,46354	0,46346	

SMJER NAPRIJED					
L14 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P45	RZ	26,960	0,86519	0,86522	-0,81978
	45	26,090	1,68498	1,68499	
		53,05	-0,81979	-0,81977	
P46	45	20,460	1,01774	1,01775	-0,41305
	46	20,875	1,43078	1,43081	
		41,335	-0,41304	-0,41306	
P47	46	38,2	1,38297	1,383	-0,0635
	47	38,250	1,44647	1,44649	
		76,45	-0,0635	-0,06349	
P48	47	7,61	1,53762	1,53761	0,141775
	RV3'	8,030	1,39581	1,39587	
		15,64	0,14181	0,14174	

SMJER NAPRIJED					
L15 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P49	RN2	35,775	0,93444	0,93437	-0,57381
	49	35,165	1,50819	1,50823	
		70,94	-0,57375	-0,57386	
P50	49	29,700	1,33895	1,33895	0,279225
	50	29,635	1,05974	1,05971	
		59,335	0,27921	0,27924	
P51	50	35,445	1,31995	1,31999	-0,15278
	51	35,500	1,47274	1,47275	
		70,945	-0,15279	-0,15276	
P52	51	7,44	1,24709	1,24708	-0,0877
	RV3'	7,595	1,33479	1,33478	
		15,035	-0,0877	-0,0877	

Prilog 3. Podaci mjerenja – SMJER NATRAG

SMJER NATRAG					
L1 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P1	RN1	28,245	1,43278	1,43272	-0,06615
	1	27,99	1,4989	1,49889	
		56,235	-0,06612	-0,06617	
P2	1	39,02	1,68401	1,68405	0,29146
	2	39,42	1,39257	1,39257	
		78,44	0,29144	0,29148	
P3	2	33	1,56265	1,56266	0,131645
	RV1	32,78	1,43104	1,43098	
		65,78	0,13161	0,13168	

SMJER NATRAG					
L2 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P4	RV1	39,175	1,4517	1,45163	-0,13949
	4	38,355	1,59122	1,59108	
		77,53	-0,13952	-0,13945	
P5	4	39,915	1,01569	1,01573	-0,68167
	5	40,12	1,6974	1,69735	
		80,035	-0,68171	-0,68162	
P6	5	29,435	0,59871	0,59877	-1,13609
	6	29,945	1,73482	1,73483	
		59,38	-1,13611	-1,13606	
P7	6	29,9	0,75227	0,75227	-0,7789
	RV4	30,370	1,53118	1,53116	
		60,27	-0,77891	-0,77889	

SMJER NATRAG					
L3 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P8	RV2'	27,625	1,46577	1,46579	0,06301
	8	28,280	1,40274	1,4028	
		55,905	0,06303	0,06299	
P9	8	31,755	1,47938	1,47945	0,15291
	9	31,22	1,32649	1,32652	
		62,975	0,15289	0,15293	
P10	9	32,435	1,5031	1,50307	0,238285
	10	31,875	1,26476	1,26484	
		64,31	0,23834	0,23823	
P11	10	28,78	1,49571	1,4957	0,12811
	11	29,215	1,3676	1,36759	
		57,995	0,12811	0,12811	
P12	11	13,46	1,39222	1,39225	0,195945
	RN1	13,545	1,19627	1,19631	
		27,005	0,19595	0,19594	

SMJER NATRAG					
L4 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P13	RN1	26,455	1,22517	1,22508	-0,31596
	13	26,330	1,54107	1,54109	
		52,785	-0,3159	-0,31601	
P14	13	35,310	1,35993	1,35997	-0,14873
	14	35,870	1,50873	1,50863	
		71,18	-0,1488	-0,14866	
P15	14	34,255	1,34616	1,34613	-0,18997
	15	35,005	1,53613	1,5361	
		69,26	-0,18997	-0,18997	
P16	15	31,38	1,36934	1,36927	-0,05531
	16	30,520	1,42462	1,4246	
		61,9	-0,05528	-0,05533	
P17	16	28,15	1,63709	1,63703	0,58359
	RZ	27,64	1,05349	1,05345	
		55,79	0,5836	0,58358	

SMJER NATRAG					
L5 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P18	RN4	6,460	1,13711	1,13714	-0,26028
	18	6,760	1,39741	1,39739	
		13,22	-0,26030	-0,26025	
P19	18	17,52	1,45522	1,45527	-0,087690
	19	17,89	1,54294	1,54293	
		35,410	-0,08772	-0,08766	
P20	19	15,285	1,79104	1,7911	1,39836
	20	14,44	0,39272	0,3927	
		29,725	1,39832	1,3984	
P21	20	12,855	1,41124	1,41125	0,46577
	RN1	13	0,94548	0,94547	
		25,855	0,46576	0,46578	

SMJER NATRAG					
L6 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P22	RN3	29,080	0,96105	0,96093	-0,59152
	22	29,540	1,55251	1,5525	
		58,62	-0,59146	-0,59157	
P23	22	33,395	1,68453	1,68450	0,171040
	23	33,8	1,51343	1,51352	
		67,195	0,17110	0,17098	
P24	23	7,45	1,43419	1,43416	0,265085
	RN4	7,11	1,16914	1,16904	
		14,56	0,26505	0,26512	

SMJER NATRAG					
L7 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve[m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P25	RV4'	28,175	1,56921	1,56915	0,234175
	25	28,800	1,33498	1,33503	
		56,975	0,23423	0,23412	
P26	25	32,14	1,67136	1,67129	0,386320
	26	31,68	1,28500	1,28501	
		63,820	0,38636	0,38628	
P27	26	14,57	1,66757	1,66758	0,24341
	RN4	14,385	1,42409	1,42424	
		28,955	0,24348	0,24334	

SMJER NATRAG					
L8 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P28	RV4	31,440	1,55146	1,55161	0,221615
	28	31,300	1,32992	1,32992	
		62,74	0,22154	0,22169	
P29	28	38,575	1,61607	1,61607	0,79759
	RN3	37,825	0,81852	0,81844	
		76,4	0,79755	0,79763	

SMJER NATRAG					
L9 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P30	RZ	15,310	1,08204	1,08202	-0,41974
	30	14,820	1,50177	1,50177	
		30,13	-0,41973	-0,41975	
P31	30	24,870	0,78042	0,78031	-0,94577
	31	24,95	1,72613	1,72614	
		49,82	-0,94571	-0,94583	
P32	31	34,985	1,54418	1,54432	0,24404
	32	35,495	1,30022	1,3002	
		70,48	0,24396	0,24412	
P33	32	35,465	1,41397	1,41394	0,002025
	33	35,810	1,41197	1,41189	
		71,275	0,002	0,00205	
P34	33	13,730	1,21383	1,2139	-0,11431
	RN3	13,140	1,32817	1,32818	
		26,87	-0,11434	-0,11428	

SMJER NATRAG					
L10 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P35	RN3	35,890	1,40766	1,4076	0,18133
	35	35,140	1,22634	1,22626	
		71,03	0,18132	0,18134	
P36	35	40,310	1,32458	1,32454	-0,13197
	36	40,25	1,45654	1,45652	
		80,56	-0,13196	-0,13198	
P37	36	37,585	1,35759	1,35753	-0,09742
	37	37,570	1,45492	1,45503	
		75,155	-0,09733	-0,0975	
P38	37	26,37	1,35448	1,35444	0,15605
	38	26,670	1,19839	1,19843	
		53,04	0,15609	0,15601	
P39	38	10,9	1,38692	1,38692	-0,02886
	RV3'	10,460	1,41578	1,41577	
		21,36	-0,02886	-0,02885	

SMJER NATRAG					
L11 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P40	RN2	35,510	0,96515	0,96528	-0,22078
	40	35,060	1,18599	1,186	
		70,57	-0,22084	-0,22072	
P41	40	27,32	1,4911	1,49111	0,094455
	41	27,775	1,39665	1,39665	
		55,095	0,09445	0,09446	
P42	41	14,76	1,29424	1,29427	0,094575
	RV2'	15,4	1,19971	1,19965	
		30,16	0,09453	0,09462	

SMJER NATRAG					
L12 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P43	RV2'	34,250	1,45237	1,45251	-0,10737
	43	33,730	1,55982	1,55979	
		67,98	-0,10745	-0,10728	
P44	43	39,310	1,46945	1,46941	-0,04958
	44	39,76	1,519	1,51902	
		79,07	-0,05	-0,04961	
P45	44	32,6	1,30149	1,30145	-0,34635
	RV3'	31,820	1,64781	1,64782	
		64,42	-0,34632	-0,34637	

SMJER NATRAG					
L13 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P46	RZ	27,540	1,04195	1,04193	-0,63298
	46	27,490	1,67494	1,67489	
		55,03	-0,63299	-0,63296	
P47	46	34,935	1,44062	1,44062	-0,01876
	RV2	35,570	1,45933	1,45942	
		70,505	-0,01871	-0,0188	

SMJER NATRAG					
L14 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1. podjela	2. podjela	
P48	RV3'	16,970	1,24129	1,2413	-0,22254
	48	16,785	1,46385	1,46382	
		33,755	-0,22256	-0,22252	
P49	48	36,820	1,48445	1,48456	0,1819
	49	36,205	1,30265	1,30256	
		73,025	0,1818	0,182	
P50	49	22,125	1,71065	1,71068	0,78233
	50	22,880	0,92834	0,92833	
		45,005	0,78231	0,78235	
P51	50	14,725	1,47319	1,4732	0,41319
	RZ	13,980	1,06	1,06001	
		28,705	0,41319	0,41319	

SMJER NATRAG					
L15 VLAK					
Stajalište	Vezna točka	Udaljenost [m]	Očitavanja letve [m]		Srednja vis. razlika
			1.podjela	2.podjela	
P52	RV3'	36,140	1,65695	1,65694	0,266465
	52	36,090	1,39049	1,39047	
		72,23	0,26646	0,26647	
P53	52	33,540	1,19681	1,19682	-0,12833
	53	33,695	1,32509	1,3252	
		67,235	-0,12828	-0,12838	
P54	53	33,465	1,54955	1,5496	0,396975
	RN2	33,440	1,15259	1,15261	
		66,905	0,39696	0,39699	

Prilog 4. Izjednačenje dvostrukih mjerenja različite točnosti

Podaci mjerenja:

$$\vec{L}_F[m] = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \\ \Delta h_7 \\ \Delta h_8 \\ \Delta h_9 \\ \Delta h_{10} \\ \Delta h_{11} \\ \Delta h_{12} \\ \Delta h_{13} \\ \Delta h_{14} \\ \Delta h_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,73687 \\ 2,61176 \\ 0,42115 \\ 0,12643 \\ -1,51601 \\ 0,15500 \\ 0,64153 \\ 0,48564 \\ 1,23353 \\ -1,37520 \\ -1,16788 \\ 0,40673 \\ -0,54791 \\ 0,14142 \\ 0,76091 \end{bmatrix}, \quad \vec{L}_B[m] = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \\ \Delta h_7 \\ \Delta h_8 \\ \Delta h_9 \\ \Delta h_{10} \\ \Delta h_{11} \\ \Delta h_{12} \\ \Delta h_{13} \\ \Delta h_{14} \\ \Delta h_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,73696 \\ -2,61085 \\ -0,42167 \\ -0,12367 \\ 1,51617 \\ -0,15539 \\ -0,64138 \\ -0,48608 \\ -1,23376 \\ 1,37522 \\ 1,16818 \\ -0,40714 \\ 0,54820 \\ 0,14120 \\ -0,76097 \end{bmatrix},$$

$$\vec{D}[m] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \\ D_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 201,030 \\ 288,630 \\ 263,250 \\ 307,970 \\ 97,215 \\ 140,805 \\ 147,135 \\ 140,36 \\ 232,915 \\ 272,88 \\ 155,005 \\ 209,645 \\ 126,570 \\ 186,475 \\ 216,255 \end{bmatrix}, \quad \vec{D}[m] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \\ D_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200,455 \\ 277,215 \\ 268,190 \\ 310,915 \\ 104,210 \\ 140,375 \\ 149,750 \\ 139,140 \\ 248,575 \\ 301,145 \\ 155,825 \\ 211,470 \\ 125,535 \\ 180,490 \\ 206,370 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \frac{1}{2}(\vec{D} + \vec{D}) = \begin{bmatrix} 200,743 \\ 282,923 \\ 265,720 \\ 309,443 \\ 100,713 \\ 140,590 \\ 148,443 \\ 139,750 \\ 240,745 \\ 287,013 \\ 155,415 \\ 210,558 \\ 126,053 \\ 183,483 \\ 211,313 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(\vec{L}_F + \vec{L}_B)[m] = \begin{bmatrix} -1,73691 \\ 2,61130 \\ 0,42141 \\ 0,12640 \\ -1,51609 \\ 0,15520 \\ 0,64146 \\ 0,48586 \\ 1,23365 \\ -1,37521 \\ -1,16830 \\ 0,40694 \\ -0,54806 \\ 0,14131 \\ 0,76094 \end{bmatrix}, \quad d = (\vec{L}_F + \vec{L}_B)[mm] = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,9 \\ -0,5 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ -0,4 \\ 0,2 \\ -0,4 \\ -0,2 \\ 0,0 \\ 0,3 \\ -0,4 \\ 0,3 \\ 0,2 \\ -0,1 \end{bmatrix}.$$

Težine mjerenja: $p_i = \frac{K}{D_i[\text{km}]} = \frac{0,1}{D_i[\text{km}]}, (i=1,2,\dots,15).$

$$\begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,71 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,75 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,65 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,99 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,42 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,35 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,43 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,83 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,70 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,29 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,95 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,59 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,09 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,95 \end{bmatrix}.$$

Točnost referentnog mjerenja:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{d}^T \mathbf{P} \mathbf{d}}{2 \mathbf{e}^T \mathbf{e}}} = 0,00033 \text{ m} = 0,25059 \text{ mm}$$

Točnost pojedinih dvostrukih mjerenja:

$$s_{hi} = \begin{bmatrix} 0,251mm \\ 0,298mm \\ 0,289mm \\ 0,312mm \\ 0,178mm \\ 0,210mm \\ 0,216mm \\ 0,209mm \\ 0,275mm \\ 0,300mm \\ 0,221mm \\ 0,257mm \\ 0,199mm \\ 0,240mm \\ 0,258mm \end{bmatrix}$$

Točnost pojedinih nepoznanica:

$$s_{xi} = \begin{bmatrix} 0,178mm \\ 0,211mm \\ 0,204mm \\ 0,220mm \\ 0,126mm \\ 0,149mm \\ 0,153mm \\ 0,148mm \\ 0,194mm \\ 0,212mm \\ 0,156mm \\ 0,182mm \\ 0,141mm \\ 0,170mm \\ 0,182mm \end{bmatrix}$$

Java Gaticule 3D - Report

free Geodetic Network Adjustment & Deformations-Analysis Software

Project

Java Gaticule 3D (JAG3D):	v3.6.20180513
Name of Project:	izjednačenje nivelmanske mreže
Description:	posredno izjednačenje
Project operator:	Josip/Ivana
Date of Calculation:	16.04.2021 - 19:52:24
Kind of network:	free Network (t_2)
Adjustment Type:	Least squares adjustment (L_2 Norm)
Probability Value α [%]:	0.1
Test Power ($1-\beta$) [%]:	80.0
Average Redundancy $r_m = 1-u/(n+d)$:	0.438
Linearisation proof $\hat{i}-f(\hat{u}) _{\max}$:	0.0E0
First Principal Component $\lambda_0/\text{trace}(C_{xx})$:	0.335

B-Method (Baarda)

r	q	α [%]	$(1 - \beta)$ [%]	$\lambda(\alpha, \beta)$	$\log(p_{r,q})$	$\Phi^{-1}(F_{r,q,1-\alpha})$
0.332	∞	0.02	80.00	17.075	-8.33	30.82
1.000	∞	0.10	80.00	17.075	-6.91	10.83
1.000	6	2.00	80.00	17.075	-3.91	9.86
6.668	∞	2.11	80.00	17.075	-3.86	2.39
7.000	∞	2.29	80.00	17.075	-3.78	2.32
7.000	∞	2.29	80.00	17.075	-3.78	2.32

Test statistics Φ^{-2} w.r.t. the degree of freedom r and q , respectively

Variance Component Estimation

Group name	n_G	r_G	Ω_G	$1 : \sigma^2_G$	$\Phi^{-1}(F_{r,\infty,1-\alpha})$	$T_G \leq \Phi^{-1} H_0$
Total Adjustment	15	7.000	0.06	0.01	2.32	✓
Levelling	15	7.000	0.06	0.01	2.32	✓
Levelling σ_a	15	6.668	0.06	0.01	2.39	✓
Levelling σ_b	15	0.332	0.00	0.01	30.82	✓

Variance Component Estimation

Datum Points: datum

Point-Id	Code	Height z0 [m]	Height z [m]	σ_z [mm]	a [mm]	Δ_z [mm]	c_z [mm]	
RV1	0	121.22300	121.21648	0.12	4.23	0.0	0.1	
RV2	0	119.88400	119.90114	0.10	3.59	0.0	-0.1	
RV3	0	119.49400	119.49426	0.10	3.62	0.0	-0.1	
RV4	0	118.61600	118.60512	0.11	3.73	0.0	0.1	
							0.0	

Point Group: datum

New Points: newpoints

Point-Id	Code	Height z0 [m]	Height z [m]	σ_z [mm]	a [mm]	Δ_z [mm]	c_z [mm]	
RN1	0	119475.00000	119.47963	0.11	3.77	0.0	-0.0	
RN2	0	118898.00000	118.73321	0.16	5.55	0.0	-0.1	
RN3	0	118124.00000	118.11915	0.11	3.90	0.0	-0.0	
RN4	0	117974.00000	117.96372	0.13	4.51	0.0	0.0	
RZ	0	119344.00000	119.35301	0.11	3.97	0.0	-0.1	
							0.0	

Point Group: newpoints

Levelling: observation

Station-Id	Target-Id	ih [m]	th [m]	δh_0 [m]	σ_0 [mm]	δh [m]	σ [mm]	r [%]	ε [mm]	ν [mm]	EP [mm]	EF-SP [mm]	$\nu(\alpha,\beta)$ [mm]	Ω	$\log(D_{prio})$	$\log(D_{post})$	T_{prio}	T_{post}	$T \leq \alpha H_0$
RV1	RN1	0.00000	0.00000	-1.73691	2.05	-1.73685	0.16	32.93	0.00	-0.18	-0.1	0.0	-14.76	0.00	-0.04	-0.48	0.00	0.27	✓
RV4	RV1	0.00000	0.00000	2.61130	2.07	2.61136	0.16	33.57	0.00	-0.18	-0.1	0.0	-14.76	0.00	-0.04	-0.48	0.00	0.27	✓
RN1	RV2	0.00000	0.00000	0.42141	2.07	0.42151	0.14	47.80	0.00	-0.20	-0.1	0.0	-12.34	0.00	-0.06	-0.68	0.00	0.50	✓
RZ	RN1	0.00000	0.00000	0.12640	2.08	0.12662	0.13	52.99	0.00	-0.41	-0.2	0.0	-11.78	0.01	-0.12	-2.08	0.02	3.18	✓
RN1	RN4	0.00000	0.00000	-1.51609	2.03	-1.51592	0.14	44.28	0.00	-0.39	-0.2	0.0	-12.57	0.01	-0.11	-1.70	0.02	2.27	✓
RN4	RN3	0.00000	0.00000	0.15520	2.03	0.15543	0.13	49.19	0.00	-0.47	-0.2	0.0	-11.99	0.01	-0.14	-2.56	0.03	4.53	✓
RN4	RV4	0.00000	0.00000	0.64146	2.04	0.64140	0.14	45.76	0.00	0.12	0.1	0.0	12.44	0.00	-0.03	-0.36	0.00	0.16	✓
RN3	RV4	0.00000	0.00000	0.48586	2.03	0.48597	0.14	45.10	0.00	-0.25	-0.1	0.0	-12.52	0.00	-0.07	-0.89	0.01	0.78	✓
RN3	RZ	0.00000	0.00000	1.23365	2.06	1.23387	0.13	52.46	0.00	-0.41	-0.2	0.0	-11.75	0.01	-0.12	-2.09	0.02	3.21	✓
RV3	RN3	0.00000	0.00000	-1.37521	2.07	-1.37511	0.14	47.99	0.00	-0.21	-0.1	0.0	-12.35	0.00	-0.06	-0.69	0.00	0.51	✓
RV2	RN2	0.00000	0.00000	-1.16803	2.04	-1.16793	0.15	39.12	0.00	-0.26	-0.2	0.0	-13.47	0.00	-0.07	-0.86	0.01	0.73	✓
RV3	RV2	0.00000	0.00000	0.40694	2.05	0.40688	0.12	57.82	0.00	0.10	0.0	0.0	11.15	0.00	-0.03	-0.33	0.00	0.14	✓
RV2	RZ	0.00000	0.00000	-0.54806	2.03	-0.54813	0.13	55.45	0.00	0.12	0.1	0.0	11.27	0.00	-0.04	-0.39	0.00	0.19	✓
RZ	RV3	0.00000	0.00000	0.14131	2.05	0.14124	0.13	55.87	0.00	0.12	0.1	0.0	11.31	0.00	-0.03	-0.39	0.00	0.19	✓
RN2	RV3	0.00000	0.00000	0.76094	2.05	0.76104	0.15	39.65	0.00	-0.26	-0.2	0.0	-13.47	0.00	-0.07	-0.86	0.01	0.73	✓
														0.06					✓

Observation Group: observation

Reliability of Terrestrial Observations

Observation Group	Observation Type	Station-Id	Target-Id	r_{\min}	r_{avg}
observation	Levelling	RV1	RN1	0.329	0.467

Redundancy r

Observation Group	Observation Type	Station-Id	Target-Id	$T_{\text{prio,max}}$	$T_{\text{prio,avg}}$
observation	Levelling	RN4	RN3	0.03	0.01

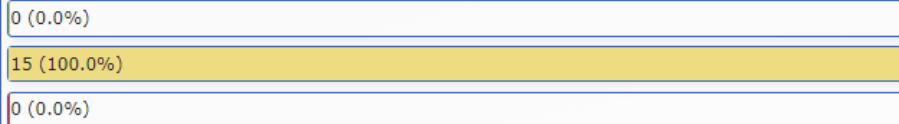
A-priori Test Statistik $T_{\text{prio}}(\alpha)$

Observation Group	Observation Type	Station-Id	Target-Id	EP_{\max} [mm]	EP_{avg} [mm]
observation	Levelling	RN4	RN3	-0.2	0.1

Influence of Relative Point Location EP

Levelling

Distribution of Redundancy r (Mean interval: $\{r \mid 0.300 < r \leq 0.600\}$)



Distribution of Test Statistic $T_{\text{prio}}(\alpha)$ (Mean interval: $\{T_{\text{prio}}(\alpha) \mid 0.10 \% < T_{\text{prio}}(\alpha) \leq 5.00 \%\}$)



Distribution of Influence of Relative Point Location EP (Mean interval: $\{EP \mid 5.0 \text{ mm} < EP \leq 20.0 \text{ mm}\}$)

