SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

KRISTIAN HENGSTER MOVRIĆ

UPRAVLJANJE FORMACIJAMA BAZIRANO NA VIŠEDIMENZIONALNIM DINAMIČKIM SUSTAVIMA

Zagreb, 2009.

Ovaj rad izrađen je na Zavodu za Automatiku i Računalno Inženjerstvo Fakulteta Elektrotehnike i Računarstva, pod vodstvom prof. dr. sc. Stjepana Bogdana i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2008/09.

SADRŽAJ RADA

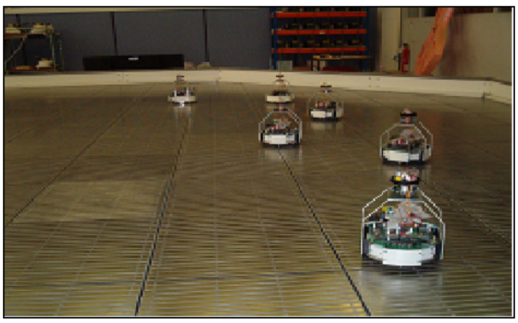
1. UVOD

U poslijednje vrijeme više-agentni sustavi privlače mnogo pozornosti među istraživačima iz područja teorije upravljanja. Inspiracija se nalazi u prirodi gdje brojne životinjske zajednice primjenjuju kooperativne obrazce ponašanja kako bi lakše ostvarile zajednički cilj. Primjer su zajednice društvenih insekata poput pčela i mrava koje pokazuju visoki stupanj organizacije, ptice koje lete u jatu kako bi olakšale let, ribe koje plivaju u kuglastim jatima kako bi osigurale lakše preživljavanje zajednice te mnogi drugi. Izazov je primjeniti ta načela u upravljanju više agentnim sustavima mobilnih robota i drugih bespilotnih vozila kako bi se olakšalo izvođenje zadaća poput npr. izviđanja, pretraživanja i nadziranja nekog područja.

Slika 1.1. Kooperativna skupina mrava

Slika 1.2. Kanadske guske u V-formaciji

Kako bespilotna vozila postaju sve naprednija i pristupačnija u porastu su mogućnosti njihova korištenja u širokom spektru primjena. Učinkovito raspoređivanje timova autonomnih pokretnih jedinica zahtjeva sofisticirane komunikacijske kooperacijske i upravljačke algoritme. Korištenje kooperativnih formacija agenata omogućuje ostvarenje ciljeva koje nije bilo moguće ostvariti pojedinim agentima.



Slika 1.3. Formacija mobilnih robota

Slika 1.4. Borbeni zrakoplovi u V-formaciji

Mogućost postizanja, držanja i promjena formacije je jedan od temeljnih preduvjeta postizanja koordiniranog ponašanja. Dosad su predloženi i korišteni razni pristupi upravljanju formacija. Oni mogu biti stohastički [1, 2], deterministički, u otvorenoj [3, 4] i zatvorenoj petlji [7, 8], decentralizirani [9, 11] i centralizirani [10]. Različite matematičke teorije poput teorije grafova [5, 12, 13, 14, 15], teorije igara [3] te teorije dinamičkih sustava se tu primjenjuju.

Neki autori predlažu korištenje umjetnih potencijala s navigacijskim funkcijama [8, 9] ili s nekim dodatnim strukturama [7, 10]. Tim pristupima je zajedničko da se formacija pogoni gradijentom neke funkcije potencijala koja daje privlačnu silu prema metama, a odbojnu prema drugim agentima i preprekama. Teorija Ljapunova se tada može koristiti kako bi se nešto reklo o stabilnosti ravnotežnih stanja. U tom pristupu se pojavljuju dva glavna problema: svojstva konvergencije i stabilnost formacije. Oba problema su povezana sa singularnim točkama funkcije potencijala koja se koristi za upravljanje formacijom.
U [7] autori predlažu pridruživanje agenta redovima te nadalje pojedinim metama u tim redovima. Prema tom pristupu agentima su mete već određene na samom početku. Potom se koristi globalni umjetni potencijal kako bi se agenti doveli u sebi pridjeljene mete. Sudari su izbjegnuti samim postupkom pridjeljivanja meta (*queueing structure*). S druge strane, u decentraliziranom pristupu, kojeg predlažu autori u [9], svakome je agentu dana navigacijska funkcija, koja zapravo predstavlja umjetni potencijal sa minimumom u unaprijed određenoj meti, i maksimumom kada je agent u kontaktu s preprekom ili drugim agentom. Predloženo upravljanje formacijom vodi na probleme poput neželjenih stabilnih ravnotežnih stanja do kojih dolazi zbog pojave blokiranja, tj. situacije u kojoj se dva, ili čak više, agenata već nalaze u metama te time onemogućuju preostalim agentima da dođu do ostalih, slobodnih, meta.

U ovom radu je razrađeno centralizirano upravljanje formacijom u obliku umjetnog potencijala. Funkcija potencijala, koja predstavlja potencijal cijele formacije, je sastavljana od niza elementarnih potencijalnih funkcija. Te elementarne funkcije su ovisne o jednom skalarnom parametru. Definirana tako, pripadne komponente gradijenta potencijala daju privlačne (prema metama) i odbojne (među agentima) sile, koje su istoga oblika. Nadalje, pretpostavka o nerazlikovanju pojedinih agenata vodi na invarijantnost predložene strukture potencijala formacije na zamjene konfiguracija agenta. To zapravo znači da umjesto u predodređenim metama, kao u [7], konačni raspored agenata po metama ovisi o početnom stanju cijele formacije. Sustav je smješten u prostor stanja te se primjenjuju elementi kvalitativne analize diferencijalnih jednadžbi kako bi se došlo do zaključaka o postojanju i tipu ravnotežnih stanja. Ovisnost o parametru služi da se eliminiraju neželjena ravnotežna stanja koja bi mogla stvarati probleme u prijelaznoj pojavi.

Razmotren je slučaj pokretnih meta. Predloženi osnovni algoritam upravljanja bi u slučaju pokretnih meta imao trajna odstupanja od željene formacije, te je nužno potrebna modifikacija osnovnog načina upravljanja. Ta modifikacija je izražena zahtjevom da u koordinatom sustavu koji se giba s metama, dakle onom u kojemu su mete statične, vrijedi osnovni algoritam upravljanja. U mirnom koordinatnom sustavu taj zahtjev se transformira u uvođenje dodatnih sila koje poništavaju inercijalne akceleracije te pogone agente na gibanje identično gibanju željene formacije.

2. OPIS VIŠE-AGENTNOG SUSTAVA

Razmatra se sustav od N identičnih agenata predstavljenih skupom $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_N\}$ odnosno vektorom $q = [q_1 \ldots q_N]^T$ u skupu R^{2N}, gdje je svaki $q_i \in R^2$. Skup $Q_T = \{q_{T1}, q_{T2}, \ldots, q_{TN}\}$, odnosno vektor $q_T = [q_{T1} \ldots q_{TN}]^T$, $q_{Ti} \in R^2$ predstavlja željenu formaciju. Cilj upravljanja jest prevesti agente iz bilokojeg početnog stanja u stanje željene formacije $Q = Q_T|_{t \to \infty}$.

Identičnost agenata nameće simetriju s obzirom na zamjenu konfiguracije bilokoja dva agenta. Ta zamjena konfiguracije se može opisati djelovanjem elementa idempotentne diskretne ortogonalne grupe T, s elementima $T(i,j)$ koji zamjenjuju konfiguracije i-tog i j-tog agenta.

$$T(i,j)_{\alpha\beta} = \begin{cases} I_2; \alpha = \beta, \alpha \neq i \wedge \alpha \neq j \\ I_2; \{\alpha, \beta\} = \{i, j\} \\ 0; ostalo \end{cases},$$

gdje grčki indeksi označuju kvadratne blokove reda 2.

Ukoliko sustav uistinu ima tu simetriju svaka formacija je zapravo predstavljena sa $N!$ ekvivalentnih točaka (broj permutacija agenata). Raditi s tako velikim brojem ekvivalentnih točaka bi bilo u krajnju ruku nepraktično. No moguće je npr. za potrebe traženja singularnih točaka ograničiti potragu na reprezentativni skup koristeći upravo to svojstvo simetrije.

Da bi konstruirali reprezentativni skup potrebno je presložiti vektor konfiguracije u $N \times 2$ matricu. To se uvijek može napraviti zbog izomorfizma između prostora R^{2N} i M_{2N}. Redak i takve matice predstavlja konfiguraciju i-tog agenta. Ako se u obzir uzmu jedino matrice sa redcima u leksikografskom poredku dobiva se reprezentativni skup.
Da je tome tako postaje jasno kada se u obzir uzme da zamjena bilokoja dva redka narušava leksikografski poredak osim ako su ta dva redka jednaka, te da se sve ostale konfiguracije

($N!-1$) mogu dobiti permutacijom redaka matrice reprezentativne konfiguracije. Sve ostale singularne točke su poput višestrukih zrcalnih slika reprezentativnih singulariteta.

Uvedimo sada funkciju potencijala $U(q, q_T)$ ograničenu odozdo te invarijantnu na translacije i rotacije konfiguracijskog prostora. To zapravo znači da funkcija mora ovisiti o modulima vektora koji ostaju sačuvani uslijed takvih transformacija, a ne o samim vektorima. Nadalje, u slučaju identičnih agenata $U(q, q_T)$ također mora biti invarijantana na grupu transformacija T. Definirana na taj način funkcija potencijala upravo služi kao mjera koliko su agenti daleko od željene formacije, odnosno što je potencijal niži to su agenti bliže željenoj formaciji.

Zakon upravljanja formacije je tada dan sa:

$$\ddot{q}_i + b\dot{q}_i + \nabla_i U(q) = 0\,, \qquad b > 0\,,\ \nabla_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \tag{2.1}$$

Koeficijent $b > 0$ simulira trenje i čini sustav disipativnim.

Dinamički sustav koji odgovara jednadžbi (2.1) je definiran na faznom prostoru R^{2*2N}:

$$\begin{aligned} x_{1i} &= q_i \\ \dot{x}_{1i} &= x_{2i} \\ \dot{x}_{2i} &= -bx_{2i} - \frac{\partial U(x_1)}{\partial x_{1i}} \end{aligned} \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -bx_2 - \dfrac{\partial U(x_1)}{\partial x_1} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Ukoliko je ukupna energija sustava definirana kao $E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}\|x_2\|^2 + U$ pokazuje se da vrijedi sljedeće:

$$\dot{E}(x_1, x_2) = x_2\dot{x}_2 + \frac{\partial U(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1 = -bx_2^2 \underbrace{- \frac{\partial U}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial U}{\partial x_1}\dot{x}_1}_{=0} = -b\|x_2\|^2 < 0\,.$$

Kadgod se formacija mijenja, odnosno giba kroz fazni prostor njena ukupna energija se smanjuje. Za sada to pokazuje nemogućnost postojanja zatvorenih orbita, dakle periodičkih riješenja, u faznome portretu sustava.
Da bismo to jasnije pokazali pretpostavimo suprotno: neka postoji barem jedna zatvorena orbita, tada vrijedi sljedeće:

$\oint_C dE(x_1, x_2) = E(x_{10}, x_{20}) - E(x_{10}, x_{20}) = 0$, ali $\oint_C dE = -b\underbrace{\oint_C x_2^2 dt}_{>0} < 0$, što predstavlja kontradikciju. Dakle ne mogu postojati periodičke orbite.

Kako nema periodičkih orbita, a sustav (2.2) je disipativan, u konačnici će stanje sustava završiti u nekom ravnotežnom stanju (singularnoj točki):

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ -bx_2 - \dfrac{\partial U(x_1)}{\partial x_1} \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = 0 \wedge -bx_2 - \frac{\partial U(x_1)}{\partial x_1} = 0,$$ što daje:

$$x_2 = 0, \frac{\partial U(x_1)}{\partial x_1} = 0.$$

Nakon što je nađena takva točka $x_e \equiv (x_{1e}, 0)$ moguće je sustav (2.2) u njoj linearizirati te linearnom analizom ispitati ponašanje sustava u nekoj okolini te točke.

$$\delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_{1i}\partial x_{1j}}\Big|_{x_e} & -bI \end{bmatrix} \delta x.$$

Zapravo blok podmatrica koja sadrži parcijalne derivacije potencijala drugog reda nije ništa drugo nego Hessijan potencijala u toj ravnotežnoj točci.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -H & -bI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Jasno je da upravo svojstvene vrijednosti Hessijana određuju svojstvene vrijednosti lineariziranog sustava, odnosno u slučaju hiperboličnih singulariteta pravo ponašanje sustava u okolici te singularne točke.

Navedimo prvo, bez dokaza, jednu lemu koja će biti korisna kasnije.

Lema 1. (Brandt Petersen-Syskind Pedersen)[1] Determinanta blok matrice $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ se može izraziti preko blokova i sljedećih veličina:

$$C_1 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$
$$C_2 = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

kao:

$$\det\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) = \det(A_{22})\det(C_1) = \det(A_{11})\det(C_2).$$

Znajući da je matrica H simetrična te se prema tome dijagonalizira ortogonalnom transformacijom M, sa svim svojstvenim vrijednostima relanima, moguće je uvesti sljedeću regularnu matricu:

$W = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$ koja transformira matricu lineariziranog sustava (3) $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -H & -bI \end{bmatrix}$ u oblik:

$$W^T A W = \begin{bmatrix} M^T & 0 \\ 0 & M^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I \\ -H & -bI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^T H M & -bI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & & I \\ -\lambda_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & -bI \\ 0 & \ldots & -\lambda_{Nk} & \end{bmatrix},$$

gdje su $\lambda_1 \ldots \lambda_{Nk}$ realne svojstvene vrijednosti Hessijana.

[1] Uzeto iz ‘The Matrix Cookbook’, Karee Brandt Petersen i Michael Syskind Pedersen, verzija 16. Veljače, 2008.

Transformirana matrica $W^T AW = A_d$ je naravno slična polaznoj matrici sustava A, ali u ovom obliku je lakše vidjeti odnos između svojstvenih vrijednosti Hessijana i svojstvenih vrijednosti matrice sustava.

Koristeći lemu 1 nalazi se karakteristični polinom matrice sustava:

$$\det(\lambda I_{2Nk} - A) = \det(\lambda I - A_d) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda I & -I \\ diag(\lambda_1,..\lambda_{Nk}) & (\lambda + b)I \end{bmatrix}\right)$$
$$= (\lambda + b)^{Nk} \det\left(\lambda I - (-I)(\lambda + b)^{-1} I * diag(\lambda_1 ... \lambda_{Nk})\right) = (\lambda + b)^{Nk} \det\left(\lambda I + diag\left(\frac{\lambda_1}{\lambda + b},..\frac{\lambda_{Nk}}{\lambda + b}\right)\right).$$

Determinanata na desnoj strani je zapravo determinanta dijagonalne matrice što se lako izračuna.

Karakteristični polinom matrice A je tada:

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{Nk} \left(\lambda^2 + b\lambda + \lambda_i\right). \tag{2.4}$$

To je konačan produkt polinoma drugog reda, kojeg je trivijalno faktorizirati:

$$\lambda_{i1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\lambda_i}}{2}.$$

Ukoliko Hessian ima svojstvenu vrijednost $\lambda_i = 0$ član oblika $\lambda(\lambda + b)$ se pojavljuje u faktoriziranom karakterističnom polinomu $P(\lambda)$. Prema tome u tom slučaju sustav (2.3) također ima jednu svojstvenu vrijednosti jednaku nuli. Druga svojstvena vrijednosti je negativna ($b > 0$) što ne ugrožava stabilnost sustava.

Za sve pozitivne svojstvene vrijednosti Hessijana sve su svojstvene vrijednosti sustava negativne, što daje asimptotsku stabilnost. Isto tako za svaku negativnu svojstvenu vrijednost Hessijana postoji pozitivna svojstvena vrijednosti lineariziranog sustava što ga čini nestabilnim.

Sve je to u skladu s intuitivnim poimanjem korištenog potencijalnog polja. Lako se pokazuje da su lokalni minimumi x_e potencijalne funkcije asimptotski stabilna ravnotežna stanja sustava u smislu Ljapunova. Tada naime postoji otvorena okolina od x_e takva da vrijedi $L(x) = H(x) - \underbrace{H(x_e)}_{=U(x_e)} \geq 0$ što zbog dinamike ima negativnu vremensku derivaciju.

Valja primjetiti vrlo važnu činjenicu. U slučaju barem jedne svojstvene vrijednosti Hessijana jednake nuli ponašanje nelinearnog sustava se ne može ispitivati linearizacijom. Teorem Hartmann Grobmann tvrdi da lokalna topološka ekvivalencija između faznih portreta polazišnog nelinearnog sustava i lineariziranog sustava postoji ako sve svojstvene vrijednosti linearnog sustava imaju realni dio različit od nule (hiperbolički singlulariteti).
Za potrebe upravljanja formacijom željeni singulariteti su hiperbolički i prema tome ekvivalentni svojim lineariziranim inčicama.
Pokazavši da sve singularne točke imaju $x_2 = 0$ te da je lokalno ponašanje oko hiperboličkih singulariteta u potpunosti određeno matricom Hessijana nastavljamo raditi samo sa objektima u prostoru R^{2N}:

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_{1i}} = 0 \text{ i } H_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_{1j}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_{1j} \partial x_{1i}},$$

Relacija jednakosti skupova $Q = Q_T$ definira željeni singularitet, što zapravo znači, vektorskom notacijom, da su ta dva konfiguracijska vektora jednaka do na simetriju zamjene agenata (permutiranje komponenata q_i).

Nužno je naći funkciju potencijala tj. upravljački algoritam, moguće ovisan o nekom parametru, takav da su jedine stabilne singularne točke upravo željeni singulariteti. Stabilni singulariteti osim željenih, u slučaju da postoje, predstavljaju problem jer za neki skup početnih uvjeta formacija završava u tom stanju i ostaje u njemu proizvoljno dugo.
Nestabilni singulariteti nisu bitni pošto je praktički nemoguće zateći formaciju u nestabilnom ravnotežnom stanju tokom nekog dužeg vremena, a i sama vjerojatnost da će sustav uz neki početni uvjet završiti u nestabilnom ravnotežnom stanju je jednaka nuli.
Ako je takva funkcija nađena tada su stabilni sigulariteti koji predstavljaju željene formacije upravo točke infimuma te funkcije. Nadalje, to su jedini minimumi. Dakle interpretacija funkcije potencijala kao mjere udaljenosti stanja formacije od željenog stanja je time opravdana.

Za funkcije potencijala ovisne o jednom parametru predlažemo sljedeće:

Postoje stabilni i nestabilni singulariteti funkcije potencijala Q_S i Q_N redom.

1. Postoji skup singulariteta $Q_0 = Q_T$ neovisan o kontrolnom parametru
2. $q_0 \in Q_S$, barem za neke vrijednosti kontrolnog parametra
3. Postoji kritična vrijednost kontrolnog parametera σ_0 takva da za $\sigma > \sigma_0$ vrijedi da nema stabilnih konfliktnih singulariteta tj. $q \notin Q_T \Rightarrow q \notin Q_S$.

Ako su ovi uvjeti zadovoljeni nekim izborom funkcije potencijala tada se negativni učinak stabilnih konfliktnih (neželjenih) singulariteta može riješiti povećavajući vrijednost kontrolnog paramtera iznad kritične. Ako je za kritičnu vrijednosti željeni singularitet stabilan problem je riješen. Ako pak povećenje vrijednosti kontrolnog parametra dovede do destabilizacije željenog singulariteta, vrijednost parametra je potrebno smanjiti kako bi se ponovo dobila stabilnost.

3. FUNKCIJA POTENCIJALA

Definicija

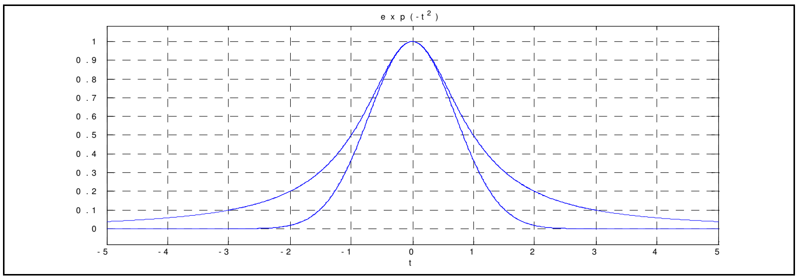
Uz poznatu konfiguraciju meta funkcija potencijala formacije se definira kao:

$$U(q, q_T) = -\sum_{i,j} u(d_{ij}, \sigma) + \sum_{i<j} u(r_{ij}, \sigma), \tag{3.1}$$

gdje je elementarna funkcija potencijala $u(\rho, \sigma) = u\left(\frac{\rho^2}{\sigma}\right)$, $\rho \in R^2, \sigma \in R^+$, neka zvonolika funkcija poput gausove funkcije ili versiere. Vektor $\rho = d_{ij} = q_i - q_{Tj}$ je udaljenosti između agenta i i mete j, odnosno $\rho = r_{ij} = q_i - q_j$, udaljenost među agentima i i j.

Parametar $\sigma > 0$ je kontrolni parametar koji utječe na položaj te moguće i na egzistenciju nekih singulariteta. Kasnije će biti pokazano kako taj kontrolni parametar nema utjecaj na željene singularitete.

Svojstvo zvonolikih funcija jest da su simetrične, ograničene odozdo nulom te odozgo svojom vrijednošću u nuli. Kako njihov argument teži u beskonačnost vrijednost im se smanjuje asimptotski. Te funkcije su sferno simetrične i gradijent u nuli im isčezava.



Slika 3.1. Primjer gausove funkcije i versiere

Kada bi se sve elementarne funkcije potencijala pomnožile proizvoljnom pozitivnom konstantom to bi utjecalo na dinamiku, no položaji singulariteta bi ostali nepromjenjeni. Taj stupanj slobode je vrlo koristan jer povećavanje vrijednosti kontrolnog parametra čini dinamiku sporijom. Povećanje vrijednosti kontrolnog parametra je nužno zbog eliminacije određene klase neželjenih stabilnih singulariteta, kao što će biti kasnije pokazano pa je jedina mogućnost poništavanja tog negativnog utjecaja na dinamiku kompenzacija multiplikativnom konstantom koja sadrži taj parametar.

Svojstva odabranog oblika funkcije potencijala

Iskažimo prvo neke rezultate koji slijede iz korištenog oblika funkcije potencijala, uz određene pretpostavke o elementarnoj funkciji potencijala u.

Odabrani oblik funkcije potencijala je ograničen odozdo i odozgo te općenito teži u nulu u prostornoj beskonačnosti. U nekim posebnim 'smjerovima', kao u slučaju nekih agenata koji dijele istu konfiguraciju, ili nekih agenta (ne svih) u metama postoje kanali koji zadržavaju vrijednost različitu od nule čak i u beskonačnosti.
Te ograde su izravna poslijedica omeđenosti korištenih zvonolikih elementarnih funkcija potencijala.

Po svom obliku U je također invarijantna na zamjenu agenata. Prema tome vektor $F = -\nabla U$ je također invarijantan na tu transformaciju u smislu da se odgovarajuće komponente zamjene uz inače nepromjenjenu dinamiku.

Sljedeće relacije za derivacije elementarne funkcije potencijala će biti često korištene:

$$u'_{\rho}(\rho,\sigma) = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \rho} = u'_{\tau\rho}\frac{2\rho}{\sigma} \tag{3.2}$$

$$u'_{\sigma}(\rho,\sigma) = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = -u'_{\tau\sigma}\frac{\rho^2}{\sigma^2} \tag{3.3}$$

Gdje je $\tau = \frac{\rho^2}{\sigma} \in R^+$

<u>Željeni singularitet</u>

Sustav jednadžbi $F = 0$ ima barem jedno riješenje koje je neovisno o parametru. To je željeni singularitet q_T.

Dokaz:

Pokazuje se da vrijedi: $F(q_T)=0$ i $F_\sigma^{(n)}(q_T)=0$, $\forall n \in N$.

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_j u'_{d_{ij}}\left(d_{ij},\sigma\right) - \sum_{j\neq i} u'_{r_{ij}}\left(r_{ij},\sigma\right) \\ &= \frac{2}{\sigma}\left[\sum_j d_{ij}u'_{\tau d} - \sum_{j\neq i} r_{ij}u'_{\tau r}\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dakle ako vrijedi relacija jednakosti skupova $Q = Q_T$, koja predstavlja definiciju željenog singulariteta, onda se u svakoj komponenti F_i nalazi jedan element koji je identički jednak nuli ($\exists(i,j): q_i = q_{Tj}$), a svi ostali se međusobno poništavaju.

Da je taj singularitet neovisan o parametru je očito ako se napiše sustav jednadžbi koji definira neovisnost o parametru $F_\sigma^{(n)}(q_T)$. Kada se izrazi za potencijalnu funkciju kao i za derivacije iste uvrste u taj sustav jednadžbi dobiva se sljedeće:

$$\begin{aligned} F_i{}'_\sigma &= \sum_j -\frac{2}{\sigma^2} d_{ij}u'_{\tau d} + \frac{2}{\sigma^2} r_{ij}u'_{\tau r} + \\ &\sum_j -\frac{2}{\sigma} d_{ij}\frac{d_{ij}{}^2}{\sigma^2}u''_{\tau d} + \frac{2}{\sigma} r_{ij}\frac{r_{ij}{}^2}{\sigma^2}u''_{\tau r} \\ &= -\frac{1}{\sigma}\underbrace{F_i}_{=0} - \frac{2}{\sigma^3}\left[\sum_j d_{ij}{}^3u''_{\tau d} - r_{ij}{}^3u''_{\tau r}\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

Za željeni singularitet suma u zagradama u (3.5) iščezava na isti način kao F, zbog relacije jednakosti skupova $Q = Q_T$.

Lako je vidjeti indukcijom da isto vrijedi za sve više derivacije $F^{(n)}{}_\sigma(q_T)$ od $F(q_T)$. Prema tome željeni singularitet je neovisan o vrijednosti kontrolnog parametra.
Isto tako, zbog invarijantnosti na zamjenu agenata postoji zapravo $N!$ ekvivalentnih željenih singulariteta neovisnih o parametru.

S druge strane ukoliko je singularitet ovisan o parametru ($\exists\sigma : F'_\sigma(q_e,\sigma)\neq 0$) njegova trajektorija faznim prostorom je opisana dinamičkim sustavom:

$$\frac{dq_e}{d\sigma} = H^{-1}(x_0)F'_\sigma(x_0), \tag{3.6}$$

što je poslijedica teorema o implicitnoj funkciji (Dodatak A).

Ta trajektorija može odvesti neke singularitete $q_e \neq q_T$ u bifurkacije, poput sedlo-čvor bifurkacije koja je bila opažena u nekim slučajevima. Singulariteti koji prođu kroz sedlo-čvor bifurkaciju jednostavno nestanu i to je idealno riješenje problema neželjenih singulariteta.

Stabilnost željenog singulariteta

Stabilnost željenog singulariteta, koja je *conditio sine qua non* upotrebe ovog algoritma, se može istražiti pomoću pripadne Hessijan matrice.

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix}$$

Kako je svaki $q_i = (q_i^1, q_i^2) \in R^2$ svaki blok Hessijana je 2×2 matrica:

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} H_{ij}^{11} & H_{ij}^{12} \\ H_{ij}^{21} & H_{ij}^{22} \end{bmatrix}$$

Hessijan matrica ovog tipa singulariteta i sama ima posebnu blok simetričnu strukturu sa jediničnim matricama na blok dijagonali te simetričnim nedijagonalnim blokovima.

$$H_{ii}^{mm} = U''_{q_i^m q_i^m} = -\frac{2}{\sigma}\left[\sum_j u'_{\tau d} + \frac{2}{\sigma}\left(d_{ij}^m\right)^2 u''_{\tau d} - \sum_j u'_{\tau r} + \frac{2}{\sigma}\left(r_{ij}^m\right)^2 u''_{\tau r}\right]$$

$$= -\frac{2}{\sigma}\left[\sum_j \left(u'_{\tau d} + \frac{2}{\sigma}\left(d_{ij}^m\right)^2 u''_{\tau d}\right) - \sum_j \left(u'_{\tau r} + \frac{2}{\sigma}\left(r_{ij}^m\right)^2 u''_{\tau r}\right)\right] = -\frac{2}{\sigma}\left(u'_{\tau d} + \frac{2}{\sigma}\left(d_{ij}^m\right)^2 u''_{\tau d}\right)\Bigg|_{d_{ij}=0} = -\frac{2}{\sigma} u'_{\tau d}(0)$$

Vidi se da taj rezultat ne ovisi o indeksu *i*. Ova vrijednost je pozitivna zbog svojstava funkcije u. Nadalje, u slučaju željenog singulariteta slijedi:

$$H_{ii}^{ml} = U''_{q_i^m q_i^l} = -\frac{4}{\sigma^2}\left[\sum_j d_{ij}^m d_{ij}^l u''_{\tau d} - \sum_j r_{ij}^m r_{ij}^l u''_{\tau r}\right]$$

$$= -\frac{4}{\sigma^2} \underbrace{d_{ii}^m d_{ii}^l}_{=0} u''_t(0) = 0$$

Gornji izraz je jednak nuli jer je jedan element identički jednak nuli dok se drugi međusobno poništavaju.

Indeksi m, l su indeksi u R^2, dok su indeksi i, j indeksi u R^N. Prethodni izrazi opisuju dijagonalnu blok podmatricu Hessijana H_{ii}^{ml}. Te matrice H_{ii} su kvadratne matrice reda 2, i kako je pokazano imaju oblik $const * I_k$.

Nedijagonalni blokovi H_{ij}^{ml} su još jednostavniji:

$$H_{ij}^{mm} = -\frac{2}{\sigma}\left(u'_{\tau r} + \frac{2}{\sigma}\left(r_{ij}^m\right)^2 u''_{\tau r}\right),\ H_{ij}^{ml} = -\frac{4}{\sigma^2} r_{ij}^m r_{ij}^l u''_{\tau r}.$$

Te matrice su i same simetrične, što znači: $H_{ij} = H_{ji}$. Hessijan je naravno simetričan po definiciji, no simetrija nedijagonalnih blokova je svojstvo funkcije potencijala.
Bitno je primjetiti kako u slučaju željenog sigulariteta q_T vrijedi jednakost $d_{ij} = r_{ij}$, uz slobodu u indeksiranju agenata i meta, te je vrijednost Hessijana u željenom singularitetu ovisna isključivo o geometriji formacije.

Iako istaknuto svojstvo dijagonale vrijedi samo kada se promatra željeni singularitet, svojstvo simetrije nedijagonalnih blokova, kao poslijedica oblika funkcije potencijala, vrijedi za sve takve Hessijan matrice.

Radi jednostavnosti bolje je izlučiti faktor $\frac{2}{\sigma}$ ispred Hessijan matrice. Kako je to pozitivna vrijednost ona ne utječe na stabilnost, a matrica se ne približava singularnosti kada kontrolni parametar teži u beskonačnost.

Ostali singulariteti

Osim željenih singulariteta ($N!$ njih) postoje i neki drugi singulariteti koje je potrebno pobliže promotriti.

Jedan skup singulariteta sadrži formacije sa barem dva agenta u istoj konfiguraciji. Ti singulariteti nisu od posebnog interesa jer za potrebe upravljanje formacijom odlučujemo ne dopustiti agentima da okupiraju isto mjesto u prostoru u istom vremenu. Isto tako prema dinamičkom sustavu (3.6) skup takvih singulariteta je invarijantan skup za taj dinamički sustav, što znači da takav singularitet ostaje takvim za bilo koju vrijednost kontrolnog parametra dok god je hiperbolički.
Ti singulariteti su također nestabilni jer se za svaki pomak iz potpuno istih konfiguracija javlja odbojna sila među agentima koja ih vodi dalje iz takvog stanja.

Drugi skup singulariteta, koji svakako postoje, su neželjeni singulariteti, koji su stabilni. Neki su oblika da se dva ili više agenata nalaze u stanju stabilnog konflikta, pokušavajući okupirati istu metu. Ti singulariteti su stabilni za dovoljno malu vrijednost kontrolnog parametra. No kako se vrijednost kontrolnog parametra povećava oni općenito nestaju jer ne mogu postojati za proizvoljno velike vrijednosti kontrolnog parametra.

Ostali singulariteti, koji ne pripadaju ovim skupovima mogu postojati, no o njima se *a priori* može malo toga reći bez numeričke analize. Razlog tomu je nelinearna priroda sustava jednadžbi $F = 0$. Pošto se te jednadžbe ne mogu riješiti analitički nije moguće analitički izraziti cijeli skup riješenja sa njihovim ovisnostima o kontrolnom parametru.

Gausova elementarna funkcija potencijala

Od sada nadalje koristi se gausova elementarna funkcije potencijala u. Tako je jednostavnije, no neke tvrdnje zapravo vrijede za širu klasu zvonolikih funkcija.

Definiramo $u(\rho,\sigma)=K\exp\left(-\frac{\rho^2}{\sigma}\right)$, gdje je vrlo praktično odabrati: $K=\tilde{K}\sigma$. I ponešto pojednostavniti vektorsku notaciju uvođenjem pokrata: $l_{ij}=q_{Ti}-q_{Tj}$. Time se dobiva:

$$U=-K\sum_{i,j}\exp\left(-\frac{d_{ij}^2}{\sigma}\right)+K\sum_{i<j}\exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{\sigma}\right) \tag{3.7}$$

$$F_i=-(\nabla U)_i=-\frac{2K}{\sigma}\sum_j\left[d_{ij}\exp\left(-\frac{d_{ij}^2}{\sigma}\right)-r_{ij}\exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{\sigma}\right)\right] \tag{3.8}$$

$$F_i{}'_\sigma=\frac{2K}{\sigma^3}\sum_j\left[d_{ij}^3\exp\left(-\frac{d_{ij}^2}{\sigma}\right)-r_{ij}^3\exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{\sigma}\right)\right],\text{ u singularitetu } (F_i=0) \tag{3.9}$$

Stabilnost željenog singulariteta je određena Hessijanom, te se tvrdi da nužno postoji interval vrijednosti kontrolnog parametra za koji je željeni singularitet stabilan.

$$H=\frac{2K}{\sigma}\tilde{H}, \qquad \tilde{H}=\begin{bmatrix} I_2 & H_{12} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & I_2 & \dots & H_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \cdots & I_2 \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

gdje je:

$$H_{ij}=\begin{bmatrix} \left(1-\frac{2}{\sigma}\left(l_{ij}^1\right)^2\right) & \frac{2}{\sigma}l_{ij}^1 l_{ij}^2 \\ \frac{2}{\sigma}l_{ij}^2 l_{ij}^1 & \left(1-\frac{2}{\sigma}\left(l_{ij}^2\right)^2\right) \end{bmatrix}\exp\left(-\frac{\left(l_{ij}\right)^2}{\sigma}\right)=H_{ji}. \tag{3.11}$$

Kako se σ povećava od nule do beskonačnosti Hessijan željenog singulariteta se mijenja od:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_2 \end{bmatrix} = I_{2N}$$ kojemu su sve svojstvene vrijednosti jednake *1* do:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} I_2 & I_2 & \dots & I_2 \\ I_2 & I_2 & \dots & I_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ I_2 & I_2 & \cdots & I_2 \end{bmatrix}$$ sa dvije svojstvene vrijednosti jednake N, i ostalih

$(N-1)*2$ jednakih nuli.

Dokaz tog svojstva svojstvenih vrijednosti Hessijana za beskonačno velike vrijednosti kontrolnog parametra se može provesti indukcijom po N koristeći lemu 1 (Dodatak B).

Zbog kontinuiranosti polazeći od vrijednosti kontrolnog parametra jednake nuli, za koju je Hessijan jednak jediničnoj matrici, Hessijan ostaje dijagonalno dominantan na nekom intervalu $(0, \sigma_c)$. To nužno znači da je i pozitivno definitan bar na tom intervalu.

Opaženo je u nekim primjerima da sve svojstvene vrijednosti ostaju unutar granica $0 \le \lambda \le N$, gdje jednakosti vrijede za beskonačnu vrijednosti kontrolnog parametra. To se može analitički pokazati jedino u slučaju formacije od dva agenta i dvije mete (Dodatak C).

Sljedeći bitan rezultat će jednostavnosti radi biti eksplicitno dokazan za gausovu elementarnu funkciju potencijala, no vrijedi i za širu klasu funkcija.

Promotrimo ponovo singularitete neovisne o parametru. Oni su definirani sljedećim sustavom jednadžbi:

$$F(q_e) = 0$$

$$F_\sigma^{(n)}(q_e) = 0; \qquad \forall n \in N \, .$$

U slučaju gausove elementarne funkcije potencijala, uzimajući u obzir sve jednadžbe, to vodi na sljedeći skup jednadžbi:

$$\begin{aligned}
&\sum_j d_{ij} \exp\left(-\frac{d_{ij}^2}{\sigma}\right) - r_{ij} \exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{\sigma}\right) = 0 \\
&\sum_j d_{ij}^3 \exp\left(-\frac{d_{ij}^2}{\sigma}\right) - r_{ij}^3 \exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{\sigma}\right) = 0 \\
&\sum_j d_{ij}^5 \exp\left(-\frac{d_{ij}^2}{\sigma}\right) - r_{ij}^5 \exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{\sigma}\right) = 0 \\
&\vdots \\
&\sum_j d_{ij}^{2n+1} \exp\left(-\frac{d_{ij}^2}{\sigma}\right) - r_{ij}^{2n+1} \exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{\sigma}\right) = 0
\end{aligned}$$

Sve se jednadžbe odnose samo na jednu komponentu F_i. Za svaku komponentu se dobiva analogan sustav.

Razvijajući u Mclaurinov red, te zbrajajući vektore s istim potencijama, dobiva se:

$$\begin{aligned}
&S_{i0} - \varepsilon S_{i1} + \frac{\varepsilon^2}{2!} S_{i2} - \frac{\varepsilon^3}{3!} S_{i3} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\varepsilon^j}{j!} S_{ij} = 0 \\
&S_{i1} - \varepsilon S_{i2} + \frac{\varepsilon^2}{2!} S_{i3} - \frac{\varepsilon^3}{3!} S_{i4} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\varepsilon^j}{j!} S_{i(j+1)} = 0 \\
&S_{i2} - \varepsilon S_{i3} + \frac{\varepsilon^2}{2!} S_{i4} - \frac{\varepsilon^3}{3!} S_{i5} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\varepsilon^j}{j!} S_{i(j+2)} = 0 \\
&\vdots \\
&S_{in} - \varepsilon S_{i(n+1)} + \frac{\varepsilon^2}{2!} S_{i(n+2)} - \frac{\varepsilon^3}{3!} S_{i(n+3)} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\varepsilon^j}{j!} S_{i(j+n)} = 0 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.12}$$

gdje je $\varepsilon = \sigma^{-1}$ inverz kontrolnog parametra (uveden radi jednostavnosti), a $S_{in} = \sum_j d_{ij}^{2n+1} - r_{ij}^{2n+1}$ su sume neparnih potencija vektora.

Formalno zapisan u matričnom obliku sustav (3.12) bi izgledao ovako:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 1 & -\varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{2!}\cdots \\ \vdots & & \ddots & -\varepsilon\cdots \\ 0 & & & 1\cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{i0} \\ S_{i1} \\ \vdots \\ S_{in} \\ \vdots \end{bmatrix} = 0.$$

Ta beskonačno dimenzionalna matrica je zapravo invertibilna (regularna), sa inverzom sličnog oblika (gornja trokutna matrica) i komponenata (bez negativnih predznaka). Prema tome sustav (3.12) je ekvivalentan sustavu: $[S_{i0} \quad S_{i1} \quad \ldots \quad S_{in} \quad \cdots]^T = 0$, što znači da sve sume S_{ij} moraju biti jednake nuli. Ovo zapravo predstavlja preodređen sustav, a preodređeni sustavi ne moraju nužno imati riješenje. Ipak poznato je da postoji barem jedno ($N!$) riješenje ovog preodređenog sustava i to je upravo željeni singularitet.

Nastavljamo pokazujući da ukoliko vrijednost kontrolnog parametra teži u beskonačnost svi singulariteti koji ostaju su upravo singulariteti neovisni o parametru.

Ponovo imamo jednadžbu:

$$F_i = S_{i0} - \varepsilon S_{i1} + \frac{\varepsilon^2}{2!}S_{i2} - \frac{\varepsilon^3}{3!}S_{i3} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\varepsilon^j}{j!}S_{ij} = 0,$$

razvijenu u Mclaurinov red. Zahtjevamo ograničenost svih vektora u sumama, što ima smisla jer kako se sve mete nalaze u konačnoj prostornoj domeni singularitete ne tražimo u prostornoj beskonačnosti.

Neka je dan proizvoljan skup vektora $v_1 \ldots v_N \in R^2$ sa sumama potencija definiranim kao prije:

$S_n = \sum_{j=1}^{N} v_j^{2n+1}$. Što se također može zapisati kao:

$$S_n = \begin{bmatrix} I_2 & I_2 & \dots & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|v_1\|^2 I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \|v_2\|^2 I_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \|v_N\|^2 I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \hat{I}AV$$

$$F_i = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\varepsilon^j}{j!} S_j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!} \hat{I}(\varepsilon A)^j V = 0$$

Kako bi se poništila gornja suma ostatak reda mora poništiti prvi član. Nužan uvjet za to jest da ta dva dijela imaju jednake module:

$$\begin{aligned} \left|\hat{I}V\right| = |R(V)| = \left|\hat{I}\varepsilon AV - \frac{1}{2!}\hat{I}(\varepsilon A)^2 V + \frac{1}{3!}\hat{I}(\varepsilon A)^3 V - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\hat{I}(\varepsilon A)^n V\right| \le \cdots \\ \le |I| * \left|\frac{\alpha}{1-\alpha} V\right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\left|\hat{I}\right||V| \end{aligned},$$

gdje je $|\varepsilon A| \le \alpha < 1$ proizvoljno mali kako $\varepsilon \to 0$ zbog ograničenosti vektora v. Gornje norme primjenjene na matrice označuju neku matričnu normu.

Dakle imamo: $\left|\hat{I}V\right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\left|\hat{I}\right||V|$, uz q proizvoljno mali. Također imamo relaciju: $\frac{\left|\hat{I}V\right|}{\left|\hat{I}\right||V|} = \beta \le 1$ gdje je jednakost zadovoljena za $\frac{\alpha}{1-\alpha} = \beta \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{1+\beta} < 1$. Za, recimo, $\alpha < \frac{1}{2}\frac{\beta}{1+\beta}$ dobiva se obrnuta situacija $\left|\hat{I}V\right| > \frac{\alpha}{1-\alpha}\left|\hat{I}\right||V| \ge \cdots \ge |R(V)|$, gdje $R(V)$ označava ostatak reda.

To naime znači da postoji dovoljno mali ε, tj. α takav da prvi član u redu ima modul veći od ostatka reda, što je u kontradikciji s pretpostavkom $\left|\hat{I}V\right| = |R(V)|$. No kako cijeli red mora biti jednak nuli, to znači da prvi član i ostatak reda moraju sami biti jednaki nuli, pošto nije moguće da se međusobno ponište.

Dobiveni ostatak reda je i sam red te se može postupiti po indukciji. Smanjujući vrijednost ε te time čineći sve više članova reda identički jednakim nuli dolazimo do toga da je za proizvoljno malu vrijednosti parametra ε proizvoljno mnogo članova (S_n) identički jednako nuli. Primjenjujući gornji rezultat na jednadžbu singulariteta $F_i = 0$, kad su svi članovi S_{in} jednaki nuli, slijedi sustav jednadžbi ekvivalentan sustavu (3.12) koji definira singularitete neovisne o parametru.

Naposlijetku nas ipak zanimaju konačne vrijednosti kontrolnog parametra. Stvarno, dovoljno je samo odvojiti prvi član reda tj. $S_{i0} = 0$. Ovaj član je jednak za sve komponente vektora sile $F_i \in R^2 : \forall i$.

$$S_{i0} = \sum_j d_{ij} - r_{ij} = \sum_j q_j - q_{Tj} = \sum_j d_{kj} - r_{kj} = S_{k0}\,.$$

Stoga ako se traži singluaritet $S_{i0} = 0$ to znači $\sum_j q_j = \sum_j q_{Tj}$ što nakon jednostavnog dijeljenja brojem agenata (meta) N zahtjeva jednakost centara mase agenata i meta u tom singularitetu. To isključuje većinu konfliktnih singulariteta.

Naime, ako se pogleda samo privlačni dio potencijala, koji dolazi od meta, a jednako ga vide svi agenti, može se pokazati na analogan način da se on kvalitativno mijenja. Povećanje vrijednosti kontrolnog parametra čini potencijalne jame širima, one se preklapaju, što rezultira jednom velikom potencijalnom jamom sa jedinstvenim minimumom: centrom mase meta.

Zanemarujući ostale agente u sumi S_{i0}, sve osim *i*-tog, dobiva se:

$$\sum_j d_{ij} = 0 \Rightarrow N q_i = \sum_j q_{Tj}\,.$$

Uz takav oblik privlačnog potencijala ne postoji privlačna sila koja bi zadržavala dva, ili više agenata, u blizini jedne mete, oni se nastoje rasporediti što ravnomjernije u toj velikoj potencijalnoj jami.

Dodatna svojstva funkcije potencijala

Svojstvo skaliranja

Relativni položaj i tip singulariteta $F=0$ se ne mijenja pri skaliranju prostora faktorom $\alpha>0$ ako i samo ako se pritom vrijednost kontrolnog parametra skalira sa α^2. Ukupna promjena je tada svedena na multiplikativnu konstantu, što nema utjecaja na skup riješenja.

Dokaz:

Polazeći od elementarne funkcije potencijala nalazimo:

$$\nabla u = -\frac{2}{\sigma}\rho u'\left(-\frac{\rho^2}{\sigma}\right) \to -\frac{2}{\sigma\alpha^2}\alpha\rho u'\left(-\frac{\alpha^2\rho^2}{\alpha^2\sigma}\right) = \alpha^{-1}\nabla u \ .$$

Prema tome radi se o promjeni: $F=0 \to \alpha^{-1}F=0$ što su dva ekvivalentna sustava jednadžbi, tj. imaju isti skup riješenja (*q.e.d*).

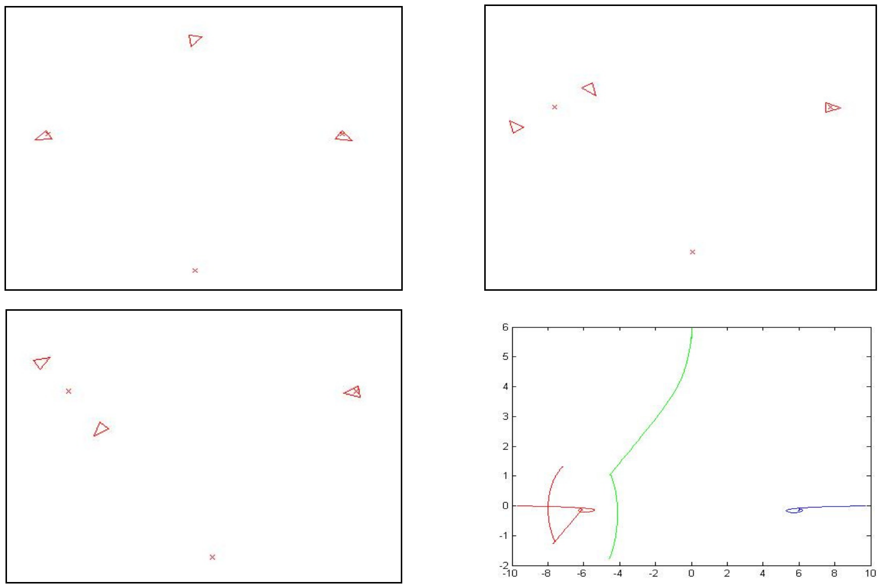
Ovo svojstvo omogućuje promatranje samo normiranih formacija. Te formacije imaju maksimalnu udaljenost između bilokoje dvije mete jednaku jedinici. Sve druge, geometrijski slične, formacije mogu se dobiti iz normiranih skaliranjem prostora, a ako je pritom i vrijednost kontrolnog parametra odgovarajuće skalirana te formacije su uvećane kopije normirane, ne samo geometrijski već i dinamički.

Napomena:

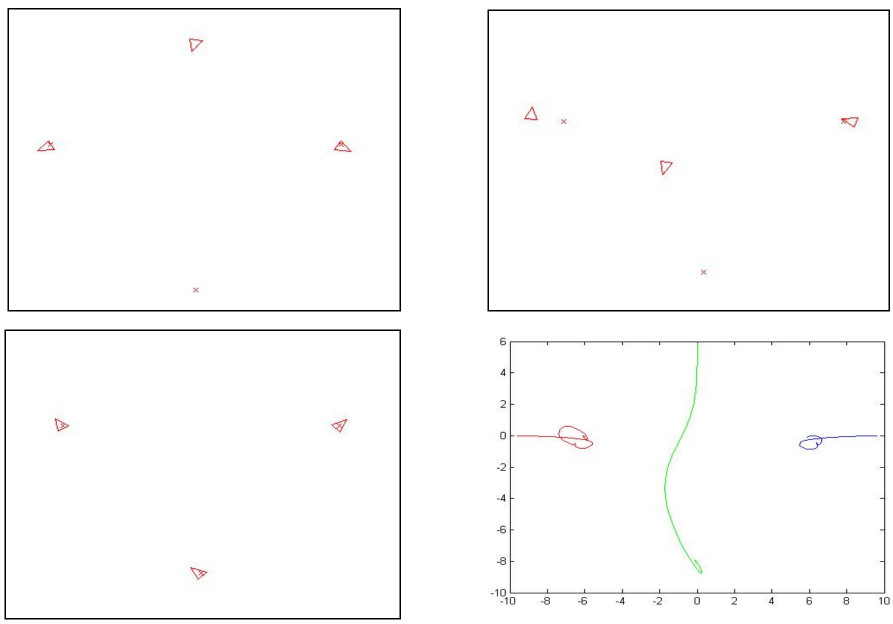
Ako sedlo-čvor bifurkacija eliminira poslijednji neželjeni singularitet za neku željenu formaciju q_T pri nekoj kritičnoj vrijednosti kontrolnog parametra σ_0 tada infinitezimalno različita željena formacija q'_T pokazuje istu bifurkaciju za kritičnu vrijednost σ'_0 infinitezimalno blisku σ_0. To svojstvo slijedi iz generičkog svojstva sedlo-čvor bifurkacije (jedina generička jednoparametarska bifurkacija) [16, 17].

4. REZULTATI SIMULACIJA

Osnovne značajke dinamike sustava opisanog u prethodnim odjeljcima su prikazane simulacijom formacije oblika jednakostraničnog trokuta i kvadrata. Na slikama 4.1 i 4.2 su dane dvije kvalitativno različite prijelazne pojave. U prvom slučaju vrijednost kontrolnog parametra je premala što za rezultat ima postojanje neželjenog stabilnog singulariteta u kojemu nakon prijelazne pojave stanje sustava trajno ostaje. Tri slike prikazuju početni, prijelazni i konačni raspored agenata, dok četvrta prikazuje trajektorije agenata.

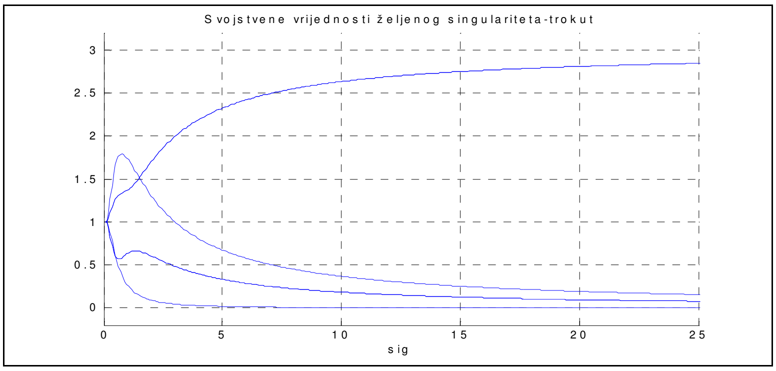


Slika 4.1. Formacija oblika jednakostraničnog trokuta uz vrijednost kontrolnog parametra $\sigma = 16$.



Slika 4.2. Formacija oblika jednakostraničnog trokuta uz vrijednost kontrolnog parametra $\sigma = 24$.

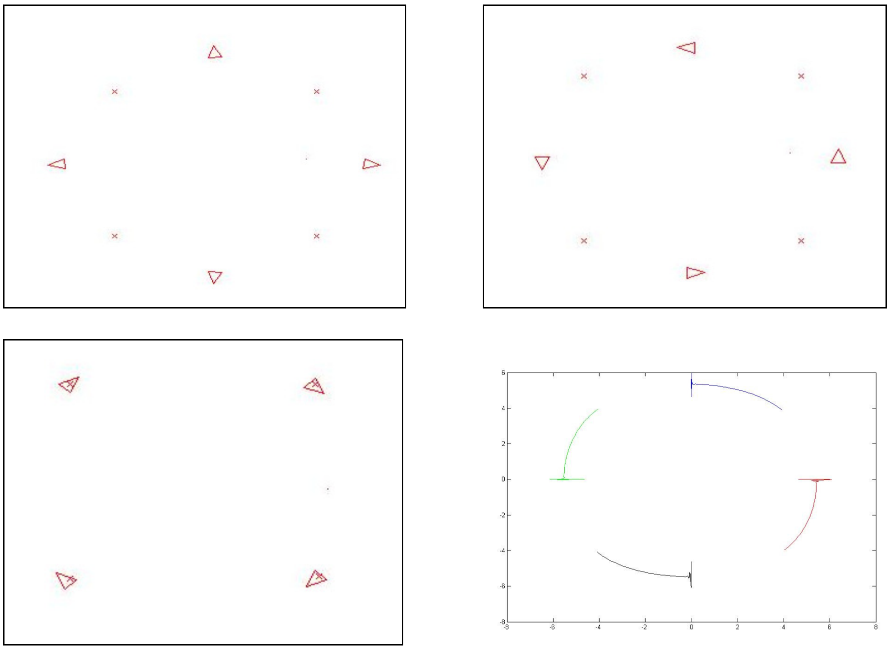
U drugom slučaju (Slika 4.2) vrijednost kontrolnog parametra je veća te prijelazna pojava završava time da sustav dođe u željeno stanje. U oba slučaja su postavljeni isti početni uvijeti.



Slika 4.3. Ovisnost svojstvenih vrijednosti Hessijana potencijala u željenom singularitetu za trokutnu željenu formaciju

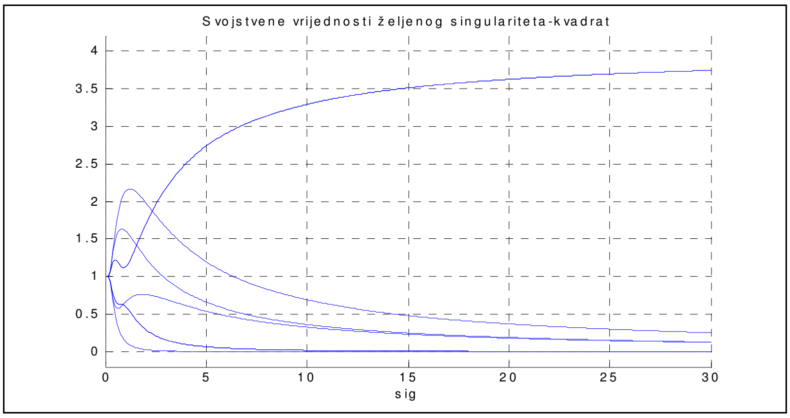
Slika 4.3. prikazuje ovisnost svojstvenih vrijednosti Hessijana potencijala u željenom singularitetu za formaciju oblika jednakostraničnog trokuta. Taj prikaz je dobiven pomoću simboličkog paketa programa Matlab, odnosno numeričkim izračunom. Iz slike se vidi da je željeni singularitet asimptotski stabilan za sve pozitivne vrijednosti kontrolnog parametra.

Na sljedećim slikama (Slika 4.4) prikazan je nestabilni singularitet na primjeru željene formacije oblika kvadrata. Takvi singulariteti, dok god su nestabilni, mogu postojati bez opasnosti da će onemogućiti dolazak svih agenata u mete.



Slika 4.4. Nestabilni ekvilibriji za željenu formaciju oblika kvadrata

Nakon početnog titranja u stabilnim smjerovima agenti se orijentiraju prema metama te krenu nestabilnim smjerom prema istima.



Slika 4.5. Ovisnost svojstvenih vrijednosti Hessijana potencijala u željenom singularitetu za kvadratnu željenu formaciju

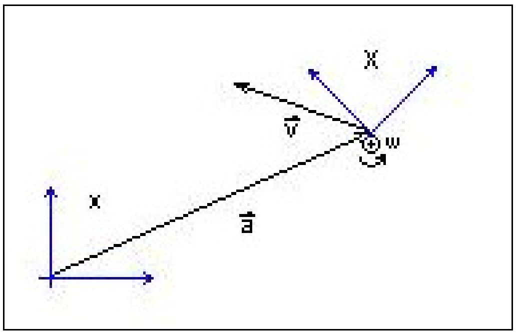
Slika 4.5. prikazuje ovisnost svojstvenih vrijednosti Hessijana potencijala u željenom singularitetu za formaciju oblika kvadrata. Iz slike se vidi da je i ovaj željeni singularitet asimptotski stabilan za sve pozitivne vrijednosti kontrolnog parametra.

5. GIBAJUĆE ŽELJENE FORMACIJE

U slučaju željene formacije koja se giba u prostoru predloženi algoritam upravljanja bi nužno zbog inercijalnih i disipativnih sila pokazivao trajna odstupanja od željenog ravnotežnog stanja, čak i u slučaju jednolike translacije. Potrebno je uvesti promjene u osnovni algoritam upravljanja koje bi poništile te negativne utjecaje.

Ako se želi dobiti ekvivalentan zakon upravljanja za željenu formaciju koja se giba u prostoru (ravnina ili 3D prostor) potrebno je prvo opisati gibanje meta u tom prostoru. U tu svrhu čini se najbolje uvesti koordinati sustav čvrsto vezan za mete (Slika 5.1). U takvom koordinatom sustavu koordinate meta se ne mijenjaju, a trajektorija meta u stacionarnom koordinatom sustavu se tada može opisati transformacijom koordinata između ta dva koordinatna sustava.

Neka x označava stacionarne koordinate a X koordinate u sustavu vezanom za mete. Ishodište tog sustava je u centru mase svih meta.



Slika 5.1. Odnos između stacionarnih koordinata i koordinata vezanih uz mete

Odnos između tih koordinata je dan relacijama:

$$x = RX + a \,,$$

$$X = R^T (x - a),$$

gdje je R ortogonalna matrica rotacije, a a je vektor translacije, što opisuje orijentaciju i položaj ishodišta koordinatnog sustava vezanog uz mete.

Sljedeća svojstva matrice rotacije će se koristiti kasnije:

$$R^T R = I \Rightarrow \dot{R}^T R + R^T \dot{R} = 0\,, \tag{5.1}$$

točka označava derivaciju po vremenu.

No kako je $\left(\dot{R}^T R\right)^T = R^T \dot{R} = -\dot{R}^T R$ slijedi da je matrični produkt $R^T \dot{R}$ antisimetričan operator, u 3D prostoru ekvivalentan djelovanju vektorskog produkta:

$$R^T \dot{R}(\cdot) = (\Omega \times)(\cdot)\,,$$

uz ekvivalentnu relaciju: $\dot{R}R^T(\cdot) = (\omega \times)(\cdot)$

Veza između ta dva vektora je dana rotacijom: $R\Omega = \omega$.

Sukladno tim relacijama izravno slijede transformacije brzina i akceleracija:

$$x = RX + a \qquad\qquad X = R^T(x-a) \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{R}X + R\dot{X} + \dot{a} \\ &= R\left(R^T\dot{R}X + \dot{X}\right) + \dot{a} \\ &= R\left(\dot{X} + \Omega \times X\right) + \dot{a} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{X} &= \dot{R}^T(x-a) + R^T(\dot{x}-\dot{a}) \\ &= R^T(\dot{x}-\dot{a}) + \dot{R}^T RX \\ &= R^T(\dot{x}-\dot{a}) - R^T\dot{R}X \\ &= R^T\left[\dot{x}-\dot{a}-\dot{R}R^T(x-a)\right] = R^T\left[\dot{x}-\dot{a}-\omega\times(x-a)\right] \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{R}\left(\dot{X} + \Omega \times X\right) + R\left(\ddot{X} + \dot{\Omega}\times X + \Omega \times \dot{X}\right) + \ddot{a} \\ &= RR^T\dot{R}\left(\dot{X} + \Omega \times X\right) + R\left(\ddot{X} + \dot{\Omega}\times X + \Omega \times \dot{X}\right) + \ddot{a} \\ &= R\left[\ddot{X} + \dot{\Omega}\times X + \Omega\times\dot{X} + \Omega\times\dot{X} + \Omega\times\Omega\times X\right] + \ddot{a} \\ &= R\left[\ddot{X} + \dot{\Omega}\times X + 2\Omega\times\dot{X} + \Omega\times\Omega\times X\right] + \ddot{a} \end{aligned} \tag{5.4a}$$

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \dot{R}^T(\dot{x}-\dot{a}) + R^T(\ddot{x}-\ddot{a}) - \dot{R}^T\omega\times(x-a) - R^T\dot{\omega}\times(x-a) - R^T\omega\times(\dot{x}-\dot{a}) \\ &= R^T\left(\ddot{x}-\ddot{a}-\dot{\omega}\times(x-a)-\omega\times(\dot{x}-\dot{a})\right) + \dot{R}^T\left[\dot{x}-\dot{a}-\omega\times(x-a)\right] \\ &= R^T\left(\ddot{x}-\ddot{a}-\dot{\omega}\times(x-a)-\omega\times(\dot{x}-\dot{a}) + R\dot{R}^T\left[\dot{x}-\dot{a}-\omega\times(x-a)\right]\right) \\ &= R^T\left[\ddot{x}-\ddot{a}-\dot{\omega}\times(x-a)-\omega\times(\dot{x}-\dot{a}) - \dot{R}R^T\left(\dot{x}-\dot{a}-\omega\times(x-a)\right)\right] \\ &= R^T\left[\ddot{x}-\ddot{a}-\dot{\omega}\times(x-a)-\omega\times(\dot{x}-\dot{a})-\omega\times(\dot{x}-\dot{a})+\omega\times\omega\times(x-a)\right] \\ &= R^T\left[\ddot{x}-\ddot{a}-\dot{\omega}\times(x-a)-2\omega\times(\dot{x}-\dot{a})+\omega\times\omega\times(x-a)\right] \end{aligned} \tag{5.4b}$$

Neće se koristiti sve te relacije no ipak ih ovdje navodimo radi potpunosti.

Činjenica da koordinate meta ostaju fiksne u pripadnom koordinatnom sustavu vodi na jednostavne jednadžbe gibanja pojedinih meta u stacionarnim koordinatama:

$$X_T = const; \dot{X}_T = 0 = \ddot{X}_T .$$

Stoga vrijedi:

$$x_T = RX_T + a \tag{5.5a}$$

$$\dot{x}_T = R[\Omega \times X_T] + \dot{a} \tag{5.5b}$$

$$\ddot{x}_T = R[\dot{\Omega} \times X_T + \Omega \times \Omega \times X_T] + \ddot{a} , \tag{5.5c}$$

i to su tražene jednadžbe putanje meta u stacionarnim koordinatama.

Vremenska ovisnost $a(t), \dot{a}(t), \ddot{a}(t)$, i $\Phi(t), \Omega(t), \dot{\Omega}(t)$ mora biti isplanirana *off-line* kako bi formacija izvela te rotacije i translacije. Može biti dovoljno planirati samo položaj i orijentaciju te njihove vremenske derivacije bez pripadnih akceleracija. Akceleracije bi tada slijedile iz profila brzine.

Uz trajektorije meta definirane translacijama i rotacijama koordinatnog sustava meta, preostaje još modificirati upravljački algoritam formacije kako bi kompenzirao pomake meta.

Poznajući svojstva upravljačkog algoritma (2.1) zahtjevamo da takav upravljački algoritam vrijedi u koordinatnom sustavu vezanom uz mete, tj. zahtjevamo sljedeće:

$$\ddot{X}_i + b\dot{X}_i + \frac{\partial V(X)}{\partial X_i} = 0 . \tag{5.6}$$

X_i je konfiguracija *i*-tog agenta u koordinatama vezanim uz mete.

Kako položaj meta u tom koordinatnom sustavu ostaje konstantan ovaj upravljački algoritam koristi isti oblik potencijalne funkcije kao i u slučaju mirnih meta. Članovi u potencijalnoj funkciji ovise o kvadratima udaljenosti i kao takvi su invarijantni na rotacije i translacije koordinata. Jedino što se mijenja jest vektor sile; kasnije će biti pokazano (5.7) da se taj vektor rotira sukladno transformaciji koordinata.

Ista jednadžba napisana u stacionarnim koordinatama se dobiva transformacijom svih njenih članova. Počnimo sa silom, tj. s gradijentom potencijalne funkcije s obzirom na položaj agenta:

$$\frac{\partial V(X(x))}{\partial X_i} = \frac{\partial x_i}{\partial X_i}\frac{\partial V(X(x))}{\partial x_i} = R^T \frac{\partial V(x)}{\partial x_i}. \tag{5.7}$$

Važno je primjetiti kako ovaj gradijent potencijalne funkcije u stacionarnim koordinatama ima eksplicitnu vremensku ovisnost zbog promjena položaja meta. U sustavu vezanom uz mete takva ovisnost naravno nije prisutna.

Brzina i akceleracija pojedinih agenata se transformira prema izrazima (5.3) i (5.4), te se konačno dobiva transformirani algoritam upravljanja:

$$R^T\left[\ddot{x} - \ddot{a} - \dot{\omega}\times(x-a) - 2\omega\times(\dot{x}-\dot{a}) + \omega\times\omega\times(x-a)\right] + bR^T\left[\dot{x} - \dot{a} - \omega\times(x-a)\right] + R^T\frac{\partial V(x)}{\partial x} = 0$$

$$R^T\left[\ddot{x} + b\dot{x} + \frac{\partial V(x)}{\partial x}\right] = R^T\left[\ddot{a} + b\dot{a} + 2\omega\times(\dot{x}-\dot{a}) + \dot{\omega}\times(x-a) - \omega\times\omega\times(x-a) + b\omega\times(x-a)\right],$$

koji zbog regularnosti matrice rotacije zapravo znači:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \ddot{a} + b\dot{a} + 2\omega\times(\dot{x}-\dot{a}) + \dot{\omega}\times(x-a) - \omega\times\omega\times(x-a) + b\omega\times(x-a). \tag{5.8}$$

Indeks agenta i je izostavljen jednostavnosti radi, no potrebno je naglasiti da se sve navedene relacije odnose na konfiguracije pojedinih agenata.

Cijela desna strana jednadžbe (5.8) se može shvatiti kao dodatna sila koja poništava inercijalne sile (Corriolisovu, centrifugalnu, radijalnu i tangencijalu inercijalnu akceleraciju), te tjera agente da se gibaju zajedno s koordinatnim sustavom pridruženim metama (članovi koji uključuju faktor disipacije b).

Primjena tih dodatnih sila čini razliku između upravljačkog algoritma za mirne i za gibajuće mete.

Zanemarujući članove koji dolaze od rotacije formacije, odnosno zadržavajući jedino članove koji su poslijedica translacije daju pojednostavljenu, i nešto jasniju interpretaciju. U tom slučaju desna strana jednadžbe sadrži samo dva člana. Ukoliko se oni prenesu na lijevu stranu jasno se vidi da daju razliku između akceleracije i brzine agenta te akceleracije i brzine koordinata vezanih uz mete, odnosno akceleracije i brzine same ciljne formacije (njezinog centra mase).

Moguće je također opisati ovaj sustav u prostoru stanja uvođenjem varijabli stanja: $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -bx_2 - \frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} + \ddot{a} + b\dot{a} + 2\omega \times (x_2 - \dot{a}) + \dot{\omega} \times (x_1 - a) - \omega \times \omega \times (x_1 - a) + b\omega \times (x_1 - a) \end{bmatrix}$$

Da se primjetiti kako u slučaju gibajućih meta ne postoje stacionarna stanja (eksplicitna vremenska ovisnost potencijalne funkcije). Nadalje takvo stanje bi narušavalo svojstva sustava opisanog u koordinatama vezanim uz mete.
Pitanja o singularitetima se mogu lakše postaviti i odgovoriti u koordinatnom sustavu vezanom za mete. Oni su definirani kao i ranije; kao singularne točke potencijalne funkcije:

$$\frac{\partial V(X)}{\partial X}\bigg|_{X_0} = 0, \tag{5.9}$$

tada je X_0 singularna točka sustava (5.8) u koordinatama vezanim uz mete. Jednom u ravnotežnom stanju u tim koordinatama formacija se giba zajedno s tim koordinatnim sustavom.

Vektor konfiguracije X u jednadžbi (5.9) nije isto što i konfiguracija pojedinog agenta X_i, već je to konfiguracija formacije. Pod transformacijama (5.2, 5.3 i 5.4) cijela se konfiguracija formacije transformira kao:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

Odnosno, transformacija vektora konfiguracije iz koordinatnog sustava vezanog uz mete u stacionarne koordinate je transformacija svih konfiguracija pojedinačnih agenata. Isto vrijedi i za brzinu cijele formacije, gdje se sve brzine agenata transformiraju prema (5.3).

To omogućuje planiranje trajektorije željene formacije u stacionarnim koordinatama te modificiranje upravljačkog algoritma u tom koordinatnom sustavu tako da kada se isti transformira u koordinate vezane uz željenu formaciju slijedi točno upravljački algoritam za slučaj mirujućih meta. Svojstva stabilnosti i konvergencije tog upravljačkog algoritma jamče dolazak agenata u željenu formaciju te zadržavanje relativnog položaja uz izvođenje planirane trajektorije.

6. ADAPTIVNI KONTROLNI PARAMETAR σ

Pokazano je da ponašanje sustava ovisi o vrijednosti kontrolnog parametra. Povećanje vrijednosti parametra vodi na eliminaciju neželjenih singulariteta.
Iako je jasno da kritična vrijednosti kontrolnog parametra, koja eliminira sve stabilne singularitete osim željenih, ovisi isključivo o geometriji formacije, i podložna je svojstvu skaliranja, nalaženje analitičkih izraza koji bi opisivali tu ovisnost predstavlja problem. Bez takvih relacija nemoguće je *a priori* odrediti kritičnu vrijednosti kontrolnog parametra.

Prema tome čini se najbolje uvesti neki adaptivni algoritam promjene vrijednosti kontrolnog parametra koji bi osvježavao vrijednost kontrolnog parametra poznavajući stanje sustava.

Postoje tri mogućnosti od interesa:

1. Sustav nema neželjenih singulariteta, tj. stabilnih singulariteta osim željenih. Formacija tada dolazi u željenu konfiguraciju.
2. Sustav ima neke neželjene singularitete no zbog početnog uvjeta formacija ipak dođe u željenu konfiguraciju.
3. Sustav ima neke neželjene singularitete i stanje formacije završi u jednom od njih.

U slučajevima 1. i 2. nije potrebno mijenjati vrijednost kontrolnog parametra pošto sustav dolazi u željeno stanje takav kakav jest. No u trećem slučaju nužno je povećati vrijednost kontrolnog parametra kako bi se eliminirao neželjeni singularitet.

S druge strane kada svi agenti dođu u mete vrijednost kontrolnog parametra bi trebala biti što manja kako bi se osiguralo dobro držanje stanja i smanjio utjecaj pomaka pojedinih agenata na cijelu formaciju.

Da bi bilo moguće takvo što raditi informacija da je sustav došao u neko ravnotežno stanje mora biti dostupna. Poradi toga se uvodi Hausdorffova udaljenost:

$$h(Q,Q_T) = \max_{q \in Q} \min_{q_T \in Q_T} \{d(q,q_T)\}$$

Hausdorffova udaljenost je kvantitativna mjera koliko se dva podskupa nekog metričkog prostora razlikuju. U našem slučaju ona predstavlja kvantitativnu mjeru udaljenosti između trenutne i željene formacije.

Dakle za formaciju koja se nalazi u neželjenom ravnotežnom stanju vrijedi:

$$\begin{aligned} & x_2 = 0, \\ & F = 0, \\ & h(Q,Q_T) \neq 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

U realnim okolnostima poželjno je koristiti manje strog kriteriji s uvedene dvije razine praga $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, odabrane relativno male. Uz te pragove kriteriji glasi:

$$\begin{aligned} & x_2 \leq \varepsilon_1, \\ & F \leq \varepsilon_1, \\ & h(Q,Q_T) \geq \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Sustav periodički ispituje kriterij (6.2) i ukoliko je on ispunjen vrijednost kontrolnog parametra se uveća:

$$\sigma := \sigma + \Delta\sigma .$$

Gdje $\Delta\sigma = p\sigma$ uz $p > 0$.

Prema tome nova vrijednost kontrolnog parametra ovisi o prethodnoj, te o pozitivnoj realnoj konstanti p koja daje relativno uvećanje vrijednosti. Relativna promjena je bolja od apsolutne jer se zadržava sličan učinak promjene na sustav pri malim i velikim vrijednostima kontrolnog parametra.

Iz svega rečenoga slijedi da je taj algoritam zapravo pokretan događajem te daje uvećavanje kontrolnog parametra sve dok se sustav ne nađe u željenom ravnotežnom stanju.

Nadalje čini se dobrim izborom proširiti ovaj algoritam za slučaj postizanja željenog ravnotežnog stanja. Kada se jednom sustav nađe u željenom stanju dobro je ponovo postaviti kontrolni parametar na neku nižu vrijednost, što povoljno utječe na držanje formacije. Odgovarajući kriteriji glasi:

$$\begin{aligned} & x_2 \le \varepsilon_1, \\ & F \le \varepsilon_1, \\ & h(Q, Q_T) < \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Ako je kriteriji (6.3) (periodički se provjerava) ispunjen kontrolni parametar se postavlja na neku unaprijed određenu nisku vrijednost.

$$\sigma := \sigma_{\min}$$

Na ovaj način se koriste visoke vrijednosti kontrolnog parametra tokom prijelazne pojave, kada je potrebno eliminirati neželjene singularitete, kao i niske vrijednosti istog kada je potrebno poboljšati svojstvo držanja formacije.

Napomena:

Algoritam promjene kontrolnog parametra daje skokovite promjene vrijednosti parametra. Između dva uzastopna osvježenje parametra sustav je autonoman, tj. vrijednost kontrolnog parametra je konstantna. Nakon osvježenje nova vrijednosti skokovito promjeni sustav i prošlo postignuto ravnotežno stanje postaje početni uvjet za novi sustav. Ovisno o promjenoj parametra sustav će doći u neko drugo neželjeno ravnotežno stanje, što opet znači nove promjene, ili će doći u željeno ravnotežno stanje, što je konačni cilj algoritma upravljanja.

7. ZAKLJUČAK

U okviru ovog rada istraženo je upravljanje više-agentnim formacijama zasnovano na višedimenzionalnim dinamičkim sustavima. Osnovni element tog pristupa jest funkcija potencijala formacije, ovisna o kontrolnom parametru, čiji gradijent djeluje kao sila na cijelu formaciju. Pretpostavljena struktura funkcije potencijala formacije je invarijantna na zamjene konfiguracija agenata, što je izraz zahtjeva na identičnost odnosno nerazlikovanje pojedinih agenata. Poslijedica toga jest da konačni raspored agenata po metama, umjesto da bude unaprijed zadan, ovisi samo o početnom uvjetu formacije.

Pokazano je da uz određeni oblik funkcije potencijala formacije željeno ravnotežno stanje biva predstavljeno singularnom točkom čiji položaj ne ovisi o kontrolnom parametru. Nadalje nužno postoji neki interval kontrolnog parametra za koji je ta singularna točka stabilna. S druge strane singulariteti ovisni o parametru mijenjaju svoj položaj te eventualno prolaze kroz bifurkacije kako se vrijednost parametra mijenja. To svojstvo omogućuje eliminaciju neželjenih singulariteta promjenom kontrolnog parametra bez utjecaja na položaj željene formacije.

U slučaju gibanja željene formacije potrebno je modificirati zakon upravljanja tako da on uključuje dodatne sile koje poništavaju inercijalne akceleracije te primoravaju sve agente da se gibaju usporedno s gibajućim sustavom meta. Time je u koordinatnom sustavu koji putuje s metama postignut algoritam upravljanja istoga oblika kao prije opisani algoritam za mirne mete.

Uveden je i adaptivni algoritam promjene vrijednosti kontrolnog parametra, kako bi se neželjeni singulariteti eliminirali tokom rada sustava (*on-line*), radije nego da se analiziraju i eliminiraju *off-line*. Uvođenje te adaptacije u sustav osigurava da će formacija završiti u željenoj konfiguraciji te se sustav mijenja dok se taj cilj ne postigne.

8. DODACI

Dodatak A
Trajektorija singularne točke ovisne o vrijednosti kontrolnog parametra.

Ukoliko imamo dan dinamički sustav ovisan o parametru prirodno se nameće pitanje kako tip i topologija njegovih invarijantnih skupova ovise o vrijednosti parametra. Najjednostavniji je slučaj singularne točke. Naime dano je:

$$\dot{x} = F(x,\sigma) \qquad\qquad x \in R^n, \sigma \in R^m \tag{A1}$$

Singularne točke sustava (A1) su riješenja jednadžbe $F(x,\sigma)=0$, koja ovise o σ. U manjem broju slučajeva je moguće eksplicitno riješiti sustav (A1) te iz analitičkog oblika riješenja vidjeti tu ovisnost. U ostalim slučajevima ostaje odrediti promjenu položaja singularne točke uz promjenu parametara. Pretpostavlja se dovoljna glatkoća funkcije $F(x,\sigma)$.

Neka je pronađena neka singularna točka $x_e(\sigma_0)$, za neku vrijednost parametara σ_0. Tada vrijedi:

$$F(x_e,\sigma_0)=0\,. \tag{A2}$$

Uvedimo sada infinitezimalnu promjenu kontrolnog parametra, te zahtjevamo da se riješenje infinitezimalno promjeni. Taj zahtjev neće biti ispunjen u degeneriranim singularnim točkama i to će označavati bifurkaciju.

$$F(x_e+dx,\sigma_0+d\sigma)=0\,,$$

što prema Taylorovom redu, uvažavajući (A2) znači:

$$F(x_e+dx,\sigma_0+d\sigma)=\underbrace{F(x_e,\sigma)}_{=0}+D_xFdx+D_\sigma Fd\sigma \Rightarrow D_xFdx+D_\sigma Fd\sigma=0\,. \tag{A3}$$

$D_xF, D_\sigma F$ su matrice čiji su elementi $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ i $\dfrac{\partial F_i}{\partial \sigma_j}$. U slučaju jednog parametra $\sigma \in R$ druga matrica se svodi na vektor stupac.

Uz regularnu Jakobijan matricu $J := D_xF$ uvjet (A3) se može pisati kao:

$$\frac{dx_e}{d\sigma} = -J^{-1} D_\sigma F \, . \tag{A4}$$

Relacija (A4) predstavlja dinamički sustav koji daje glatke promjene singulariteta u ovisnosti o kontrolnom parametru dok god je dobro definiran, odnosno dokle god je matrica J regularna. Ukoliko matrica J postane singularna tada jednadžba $Jdx = D_\sigma F d\sigma$ može imati nejedinstveno riješenje što upućuje na bifurkaciju. Za bifurkaciju je inače nužan uvjet upravo singularnost Jakobijan matrice.

Dodatak B
Svojstvo svojstvenih vrijednosti Hessijana (3.10) za beskonačno veliku vrijednost kontrolnog parametra

Matrica oblika:

$$A_N = \begin{bmatrix} I_k & I_k & \cdots & I_k \\ I_k & I_k & \cdots & I_k \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ I_k & I_k & \cdots & I_k \end{bmatrix}, \tag{B1}$$

sa N^2 jediničnih matrica reda k je singularna, no broj i vrijednost njezinih svojstvenih vrijednosti slijedi pravilo:

- k svojstvenih vrijednosti jednako je N, a ostalih $(N-1)k$ jednako je nuli.

Dokaz se provodi indukcijom po N.

Za $N = 1$ tvrdnja vrijedi jer je riječ o jediničnoj matrici reda k koja ima k svojstvenih vrijednosti jednakih 1, što je i vrijednost N.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki N (B2) te pogledajmo slučaj $N+1$. U dokazu se koristi lema 1 o determinanti blok matrice.

$$\det(\lambda I_{Nk} - A_N) = \lambda^{(N-1)k}(\lambda - N)^k \tag{B2}$$

$$A_{N+1} = \begin{bmatrix} & & & I_k \\ & A_N & & \vdots \\ & & & I_k \\ I_k & I_k & \cdots & I_k \end{bmatrix}. \tag{B3}$$

Svojstvene vrijednosti te matrice su riješenja karakterističnog polinoma:

$$\det(\lambda I - A_{N+1}) = \det\begin{pmatrix} & & & -I_k \\ & \lambda I_{Nk} - A_N & & -I_k \\ & & & \vdots \\ -I_k & -I_k & \cdots & \lambda I_k - I_k \end{pmatrix}.$$

Što primjenom leme 1 daje:

$$\det(\lambda I_{Nk} - A_N)\det\left((\lambda-1)I_k - [-I_k \quad \cdots \quad -I_k](\lambda I_{Nk} - A_N)^{-1}[-I_k \quad \cdots \quad -I_k]^T\right) \tag{B4}$$

Poradi završetka dokaza potrebno je odrediti inverz matrice $\lambda I_{Nk} - A_N$. Konstrukcijom se dobiva matrica:

$$(\lambda I_{Nk} - A_N)^{-1}{}_{ij} = \frac{1}{\lambda(\lambda - N)}\begin{bmatrix} (\lambda-N+1)I_k & I_k & \cdots & I_k \\ I_k & (\lambda-N+1)I_k & \cdots & I_k \\ & & \ddots & \\ I_k & I_k & \cdots & (\lambda-N+1)I_k \end{bmatrix} \tag{B5}$$

koja je inverz polazne matrice (provjera direktnim računom).

Konačno se iz (B4) i (B5) dobiva izraz:

$$\det(\lambda I_{(N+1)k} - A_{N+1}) = \lambda^{Nk}(\lambda - N)^{(N-1)k}\det\left((\lambda-1)I_k - \frac{N\lambda I_k}{\lambda(\lambda - N)}\right)$$

$$\lambda^{(N-1)k}(\lambda-N)^k \det\left(\frac{\lambda^3-\lambda^2(N+1)}{\lambda(\lambda-N)}I_k\right)=\lambda^{(N-1)k}(\lambda-N)^k\frac{\lambda^k(\lambda-(N+1))^k}{(\lambda-N)^k}=\lambda^{((N+1)-1)k}(\lambda-(N+1))^k$$

Što je faktorizirani polinom koji za nultočke ima spomenute svojstvene vrijednosti odgovarajućih kratnosti (*q.e.d.*).

Dodatak C
Analitički izraz ovisnosti svojstvenih vrijednosti Hessijana željenog singulariteta sustava dva agenta s dvije mete

U slučaju dva agenta i dvije mete Hessijan željenog singulariteta poprima relativno jednostavan oblik, sa samo dva jednaka nedijagonalna bloka.

$$H=\begin{bmatrix} I_2 & H_{12} \\ H_{21} & I_2 \end{bmatrix}, \tag{C1}$$

gdje su nedijagonalni blokovi jednaki:

$$H_{12}=\begin{bmatrix} \left(1-\frac{2}{\sigma}(l_{12}^1)^2\right) & \frac{2}{\sigma}l_{12}^1 l_{12}^2 \\ \frac{2}{\sigma}l_{12}^2 l_{12}^1 & \left(1-\frac{2}{\sigma}(l_{12}^2)^2\right) \end{bmatrix}\exp\left(-\frac{(l_{12})^2}{\sigma}\right)=H_{21}. \tag{C2}$$

Rotacijom konfiguracijskog prostora je moguće svesti sve komponente vektora udaljenosti među metama na nulu, osim jedne. Ta jedna komponenta tada izražava udaljenost među metama.

To se postiže primjenom sljedeće matrice transformacije: $W=\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$, gdje je R spomenuta rotacija konfiguracijskog prostora.

Transformirani oblik glasi ($l_{12}^1 = l;\ l_{12}^2 = 0$):

$$H_{12}=\begin{bmatrix} \left(1-\frac{2}{\sigma}l^2\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\exp\left(-\frac{l^2}{\sigma}\right)=\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}.$$

Inače svaki blok matrice Hessijana se može nekom transformacijom dovesti na dijagonalni oblik (simetričan je), no svi blokovi Hessijana ne komutiraju te ih nije moguće tako jednostavnom transformacijom sve dijagonalizirati. Problem dijagonalizacije tih blokova je jednostavan samo u ovom slučaju.

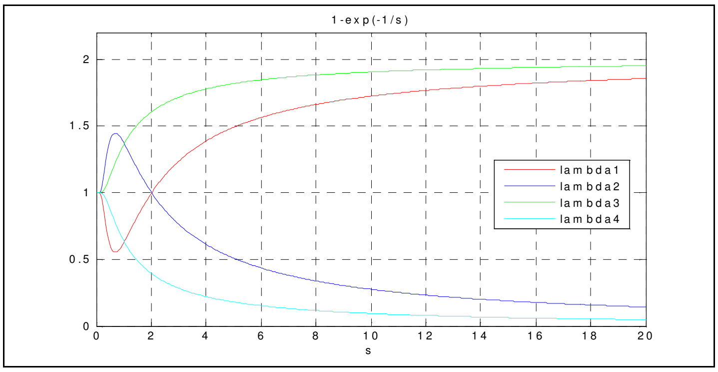
Ukupni Hessijan je sada sastavljen od dijagonalnih blokova što uvelike olakšava daljnji račun. Koristeći lemu 1 nalazimo da su svojstvene vrijednosti riješenje polinoma:

$$P(\lambda)=\left((\lambda-1)^2-s_1^2\right)\left((\lambda-1)^2-s_2^2\right),$$

što uz navedene vrijednosti s_1, s_2 daje:

$$\lambda_1=1+\left(1-\frac{2l^2}{\sigma}\right)e^{-\frac{l^2}{\sigma}},\ \lambda_2=1-\left(1-\frac{2l^2}{\sigma}\right)e^{-\frac{l^2}{\sigma}},$$
$$\lambda_3=1+e^{-\frac{l^2}{\sigma}},\ \lambda_4=1-e^{-\frac{l^2}{\sigma}}$$

Udaljenost l se prema svojstvu o skaliranju može izjednačiti s jedinicom te je ovisnost svojstvenih vrijednosti Hessijana željenog singulariteta u slučaju dva agenta i dvije mete dana slikom C1:



Slika C1. Ovisnost svojstvenih vrijednosti o kontrolnom parametru

9. ZAHVALA

Ovom prigodom želio bih se zahvaliti svima koji su tokom proteklih mjeseci svojom podrškom i pomoći doprinjeli nastanku ovoga rada. Ponajprije izražavam svoju zahvalnost svojemu mentoru prof. dr.sc. Stjepanu Bogdanu pod čijim mentorstvom sam započeo raditi na ovom vrlo zanimljivom području, potom prof. dr.sc. Vesni Županović čija sam objašnjenja često tražio tokom riješavanja matematički zahtjevnijih pitanja, dipl. ing. Siniši Miličiću koji je također pružio vrijedne savjete, prof. dr.sc. Dubravku Horvatu koji mi je ustupio materijale iz područja klasične mehanike, znanstvenim novacima grupe LARICS te svima ostalima koji su uvijek bili spremni odvojiti trenutak vremena za različite rasprave.

Također zahvaljujem svim svojim prijateljima i obitelji na razumijevanju i nesebičnoj podršci.

10. LITERATURA

1. Wim Wiegerinck, Bart van den Broek, Bert Kappen; "Stochastic Optimal Control in Continuous Space-Time Multiagent Systems", Proc. UIA 2006.

2. Hilbert J. Kappen; "An introduction to stochastic control theory, path integrals and reinforcement learning", Proc. of 9th

Granada seminar on Computational Physics: Computational and Mathematical Modeling of Cooperative Behavior in Neural Systems, American Institute of Physics Cooperative Behavior in Neural Systems, 2007.

3. A Bicchi, L. Pallottino; "On Optimal Cooperative Conflict Resolution for Air Traffic Management Systems", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Dec 2000, vol. 1, issue 4, pp. 221-231.

4. Jaydev P.Desai; "Motion Planning and Control of Cooperative Robotic Systems", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Dec 2001, vol. 17, issue 6, pp. 905-908. 5. Reza Olfati-Saber, Richard M. Murray; "Graph Rigidity and Distributed Formation Control of Multi-Vehicle Systems", Proc. of the 41st IEEE CDC 2002, vol. 3, pp. 2965-2971.

6. Estella Bicho, Sergio Monteiro; "Formation Control for Multiple Mobile Robots: A non-linear attractor approach", Proc. of IEEE/RSJ IROS, 2003, vol. 2, pp. 2016-2022.

7. Cheng-Heng Fua, Shuzhi Sam Ge, Khack Duc Do, Khing Wee Lim; "Multirobot Formations Based on the Queue-Formation Scheme With Limited Communication", *IEEE Transactionson Robotics*, Dec 2007, Vol. 23, No 6, pp. 1160-1169.

8. D. E. Koditscheck, E. Rimon; "Robot Navigation Functions on Manifolds with Boundary", Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control 2003, Dec 9-12, Vol 4, pp. 3390-3395.

9. Dimos V. Dimarogonas, Savvas G. Loizou, Kostas J. Kyriakopoulos, Michael M. Zavlanos; "Decentralized Feedback Stabilization and Collision Avoidance of Multiple Agents", Technical Report 04-01, Control Systems Laboratory, Mechanical Eng. Dept. National Technical University of Athens, Greece.

10. Reza Olfati-Saber, Richard M. Murray; "Distributed Cooperative Control of Multiple Vehicle Formation Using Structural Potential Functions", IFAC World Congress, 2002.

11. Jonathan R.T. Lawton, Randall W. Beard Brett J. Young; "A Decentralized Approach to Formation Maneuvers", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Dec 2003, vol. 19. issue 6, pp. 933-941.

12. Herbert G. Tanner, George J. Pappas, Vijay Kumar; "Leaderto- Formation Stability", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, June 2004, vol. 20, issue 3, pp. 443-455.

13. Abubakr Muhammad, Magnus Egerstedt; "Connectivity Graphs as Models of Local Interactions", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 168, issue 1, Sep 1. 2005, pp. 243-269.

14. Jaydev P. Desai; "A Graph Theoretic Approach for Modelling Mobile Robot Team Formations", *Journal of Robotic Systems*, Aug 2002, vol. 19, issue 11, pp. 511-525.

15. Aveek K. Das, James P. Ostrowski, Rafael Fierro, John Spletzer, R. Vijay Kumar, Camillo J. Taylor; "A Vision-Based Formation Control Framework", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Oct 2002, vol. 18, issue 5, pp. 813- 825.

16. M. B. M. ELGINDI and R. W. LANGER, Department of Mathematics University of Wisconsin Eau Claire Eau Claire, Wl 54702; ON THE NUMERICAL SOLUTION OF

PERTURBED BIFURCATION PROBLEMS Internat. J. Math. & Math. Sci. VOL. 18 NO. 3 (1995) 561-570, (Received February 3, 1993)

17. Martin Hermann, Wolfgang Middlemann, Friedrich Schiller Universität Jena, Fakultät für Mathematik und Informatik, Numerical Analysis of Perturbed Bifurcation Problems, June, 30 1998.

SAŽETAK

Kristian Hengster Movrić
Upravljanje formacijama bazirano na višedimenzionalnim dinamičkim sustavima

U okviru ovoga rada se analiziraju svojstva upravljanja više-agentnim sustavom pomoću višedimenzionalnog dinamičkog sustava i funkcije potencijala formacije. Osnovna značajka korištenog pristupa su elementarne funkcije potencijala ovisne o parametru, koje daju ukupnu funkciju potencijala, te za poslijedicu imaju isti oblik privlačnih i odbojnih sila. To svojstvo u konačnici omogućuje definiciju željene formacije kao parametarski neovisne singularne točke. Zbog činjenice da se agenti smatraju identičnima predložena struktura potencijala formacije je invarijantna na zamjene konfiguracija pojedinih agenata. Prema tome, meta u kojoj bi određeni agent trebao na kraju završiti ovisi jedino o početnom stanju formacije.
Nadalje je pokazano da se položaj neželjenih stabilnih ravnotežnih stanja može mijenjati oblikom elementarne funkcije potencijala, a ispravnost ovog pristupa je provjerena i simulacijama izvedenim u programskom paketu Matlab.

Izvedena je modifikacija originalnog algoritma upravljanja za slučaj gibanja željene formacije, zasnovana na transformacijama koordinata iz koordinatnog sustava čvrsto vezanog uz mete u mirni sustav u kojem je opisano gibanje meta i agenata. Time je dobivena primjena originalnog algoritma u koordinatnom sustavu čvrsto vezanom uz mete.

Poradi određivanja potrebne vrijednosti kontrolnog parametra tokom rada sustava uveden je adaptivni algoritam koji ovisno o zaposjednutom ravnotežnom stanju skokovito mijenja vrijednost kontrolnog parametra te time adaptira cijeli sustav.

Ključne riječi: upravljanje formacijama, formacije pokretnih agenata, dinamički sustavi, umjetni potencijali

SUMMARY

Kristian Hengster Movrić

Formation control based on multidimensional dynamical systems

In this paper we have analyzed properties of multi-agent system control law based on multidimensional dynamical systems and the formation potential function. The fundamental property of the proposed approach is the use of parameter dependent elementary potential functions, which produce the used potential function. The consequence of this is the same form of the repulsive forces acting between the agents and the attractive forces acting between an agent and the targets, which ultimately causes the desired formation to be a parameter independent singularity. Due to the assumption that all agents are identical the proposed structure of potential formation is invariant to the interchange of agents' configurations. Therefore the choice of target in which an agent is eventually going to end up depends only on the formation's initial conditions.

It has been shown that the position of the unwanted stabile equilibrium points depends on the shape of the elementary potential function, and simulations demonstrate the correctness of this approach.

The original control law has to be modified for the case of moving wanted formation. The proposed modification is based on coordinate transformations between the reference frame moving with the targets and the stationary frame of reference, where the trajectories of agents and targets are described. This gives the original control law in coordinates moving with the targets.

An adaptive algorithm is introduced for the needs of determining the satisfactory value of the control parameter while the system is running. This adaptive algorithm updates the value of control parameter depending on the reached equilibrium state, thus modifying the control law.

Key words: formation control, mobile agent formations, dynamical systems, artificial potentials